Precálculo

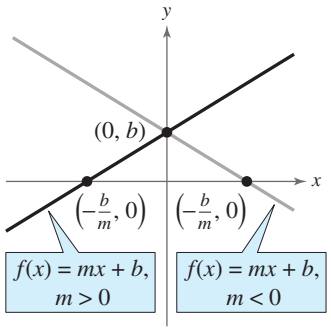
Larson

Octava edición

GRÁFICAS DE FUNCIONES GENERATRICES

Función lineal

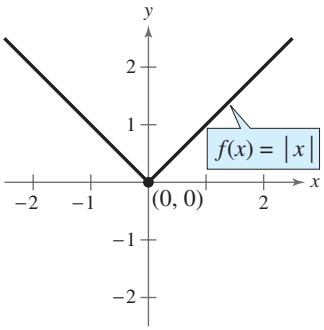
$f(x) = mx + b$



Dominio: $(-\infty, \infty)$
Rango: $(-\infty, \infty)$
Intercepción x: $(-b/m, 0)$
Intercepción y: $(0, b)$
Creciente cuando $m > 0$
Decreciente cuando $m < 0$

Función de valor absoluto

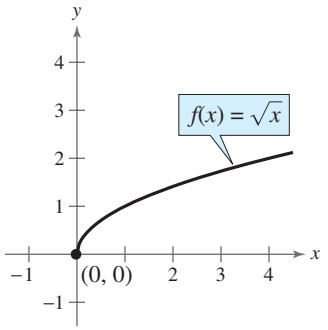
$$f(x) = |x| = \begin{cases} x, & x \geq 0 \\ -x, & x < 0 \end{cases}$$



Dominio: $(-\infty, \infty)$
Rango: $[0, \infty)$
Intercepción: $(0, 0)$
Decreciente en $(-\infty, 0)$
Creciente en $(0, \infty)$
Función par
Simetría con eje y

Función raíz cuadrada

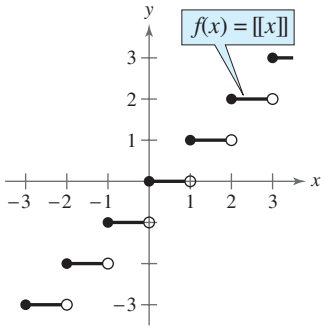
$f(x) = \sqrt{x}$



Dominio: $[0, \infty)$
Rango: $[0, \infty)$
Intercepción: $(0, 0)$
Creciente en $(0, \infty)$

Función de máximo entero

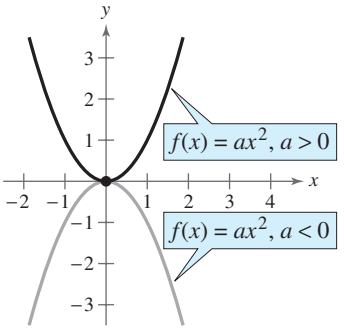
$f(x) = [\![x]\!]$



Dominio: $(-\infty, \infty)$
Rango: el conjunto de los enteros
Intercepciones x: en el intervalo $[0, 1)$
Intercepción y: $(0, 0)$
Constante entre cada par de enteros consecutivos
Salta verticalmente una unidad en cada valor entero

Función cuadrática (elevar al cuadrado)

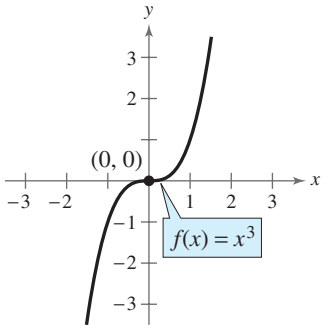
$f(x) = ax^2$



Dominio: $(-\infty, \infty)$
Rango $(a > 0)$: $[0, \infty)$
Rango $(a < 0)$: $(-\infty, 0]$
Intercepción: $(0, 0)$
Decreciente en $(-\infty, 0)$ para $a > 0$
Creciente en $(0, \infty)$ para $a > 0$
Creciente en $(-\infty, 0)$ para $a < 0$
Decreciente en $(0, \infty)$ para $a < 0$
Función par
Simetría con eje y
Mínimo relativo $(a > 0)$, máximo relativo $(a < 0)$, o vértice: $(0, 0)$

Función cúbica

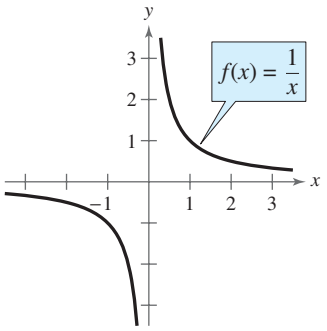
$f(x) = x^3$



Dominio: $(-\infty, \infty)$
Rango: $(-\infty, \infty)$
Intercepción: $(0, 0)$
Creciente en $(-\infty, \infty)$
Función impar
Simetría en el origen

Función racional (recíproca)

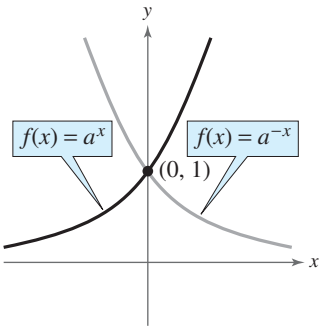
$f(x) = \dfrac{1}{x}$



Dominio: $(-\infty, 0) \cup (0, \infty)$
Rango: $(-\infty, 0) \cup (0, \infty)$
No hay intercepciones
Decreciente en $(-\infty, 0)$ y $(0, \infty)$
Función impar
Simetría en el origen
Asíntota vertical: eje y
Asíntota horizontal: eje x

Función exponencial

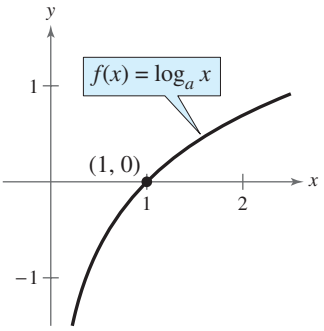
$f(x) = a^x,\ a > 0,\ a \neq 1$



Dominio: $(-\infty, \infty)$
Rango: $(0, \infty)$
Intercepción: $(0, 1)$
Creciente en $(-\infty, \infty)$
para $f(x) = a^x$
Decreciente en $(-\infty, \infty)$
para $f(x) = a^{-x}$
Asíntota horizontal: eje x
Continua

Función logarítmica

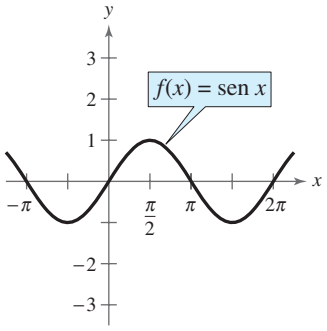
$f(x) = \log_a x,\ a > 0,\ a \neq 1$



Dominio: $(0, \infty)$
Rango: $(-\infty, \infty)$
Intercepción: $(1, 0)$
Creciente en $(0, \infty)$
Asíntota vertical: eje y
Continua
Reflexión de gráfica de $f(x) = a^x$
en la recta $y = x$

Función seno

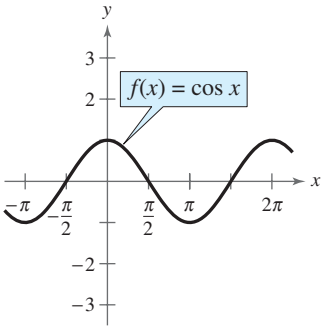
$f(x) = \operatorname{sen} x$



Dominio: $(-\infty, \infty)$
Rango: $[-1, 1]$
Periodo: 2π
Intercepciones x: $(n\pi, 0)$
Intercepciones y: $(0, 0)$
Función impar
Simetría en el origen

Función coseno

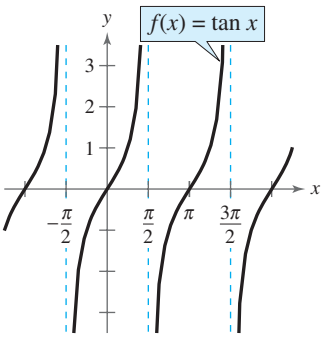
$f(x) = \cos x$



Dominio: $(-\infty, \infty)$
Rango: $[-1, 1]$
Periodo: 2π
Intercepciones x: $\left(\dfrac{\pi}{2} + n\pi, 0\right)$
Intercepciones y: $(0, 1)$
Función par
Simetría con eje y

Función tangente

$f(x) = \tan x$



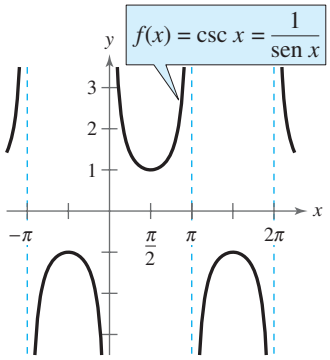
Dominio: toda $x \neq \dfrac{\pi}{2} + n\pi$
Rango: $(-\infty, \infty)$
Periodo: π
Intercepciones x: $(n\pi, 0)$
Intercepciones y: $(0, 0)$
Asíntotas verticales:

$$x = \frac{\pi}{2} + n\pi$$

Función impar
Simetría en el origen

Función cosecante

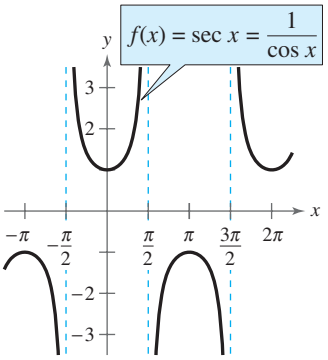
$f(x) = \csc x$



Dominio: toda $x \neq n\pi$
Rango: $(-\infty, -1] \cup [1, \infty)$
Periodo: 2π
No hay intercepciones
Asíntotas verticales: $x = n\pi$
Función impar
Simetría en el origen

Función secante

$f(x) = \sec x$



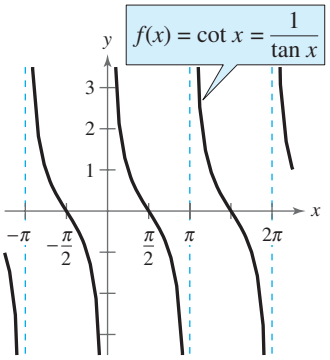
Dominio: toda $x \neq \dfrac{\pi}{2} + n\pi$
Rango: $(-\infty, -1] \cup [1, \infty)$
Periodo: 2π
Intercepción y: $(0, 1)$
Asíntotas verticales:

$$x = \frac{\pi}{2} + n\pi$$

Función par
Simetría con eje y

Función cotangente

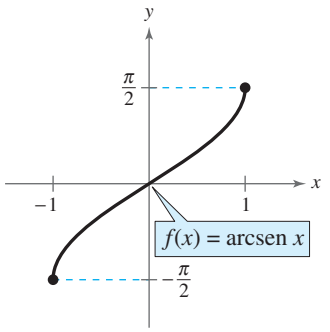
$f(x) = \cot x$



Dominio: toda $x \neq n\pi$
Rango: $(-\infty, \infty)$
Periodo: π
Intercepciones x: $\left(\dfrac{\pi}{2} + n\pi, 0\right)$
Asíntotas verticales: $x = n\pi$
Función impar
Simetría en el origen

Función seno inversa

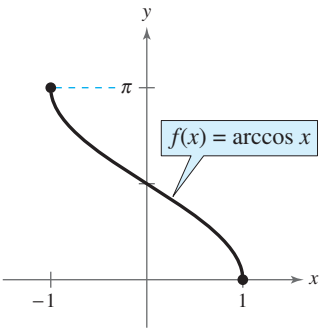
$f(x) = \operatorname{arcsen} x$



Dominio: $[-1, 1]$
Rango: $\left[-\dfrac{\pi}{2}, \dfrac{\pi}{2}\right]$
Intercepción: $(0, 0)$
Función impar
Simetría en el origen

Función coseno inversa

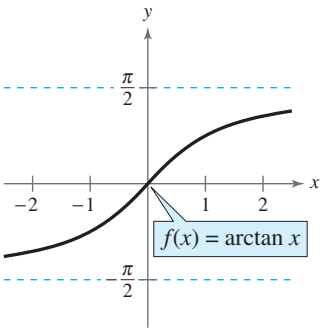
$f(x) = \arccos x$



Dominio: $[-1, 1]$
Rango: $[0, \pi]$
Intercepción y: $\left(0, \dfrac{\pi}{2}\right)$

Función tangente inversa

$f(x) = \arctan x$



Dominio: $(-\infty, \infty)$
Rango: $\left(-\dfrac{\pi}{2}, \dfrac{\pi}{2}\right)$
Intercepción: $(0, 0)$
Asíntotas horizontales:

$$y = \pm\frac{\pi}{2}$$

Función impar
Simetría en el origen

Precálculo

Octava edición

Ron Larson
The Pennsylvania State University
The Behrend College

Con la asistencia de

David C. Falvo
The Pennsylvania State University
The Behrend College

Traducción
Jorge Humberto Romo Muñoz
Traductor profesional

Revisión técnica
Dr. Ernesto Filio López
Unidad Profesional en Ingeniería y Tecnologías Avanzadas
Instituto Politécnico Nacional

M. en C. Manuel Robles Bernal
Escuela Superior de Física y Matemáticas
Instituto Politécnico Nacional

Contenido

Unas palabras del autor (Prefacio) vii

Capítulo 1

Funciones y sus gráficas 1

1.1 Coordenadas rectangulares 2
1.2 Gráficas de ecuaciones 13
1.3 Ecuaciones lineales con dos variables 24
1.4 Funciones 39
1.5 Análisis de gráficas de funciones 54
1.6 Biblioteca de funciones principales 66
1.7 Transformaciones de funciones 73
1.8 Combinaciones de funciones: funciones compuestas 83
1.9 Funciones inversas 92
1.10 Modelado y variación matemáticos 102
Resumen del capítulo 114 Ejercicios de repaso 116
Examen del capítulo 121 Demostraciones en matemáticas 122
Resolución de problemas 123

Capítulo 2

Funciones racionales y polinomiales 125

2.1 Funciones y modelos cuadráticos 126
2.2 Funciones polinomiales de grado superior 136
2.3 División de polinomios y sintética 150
2.4 Números complejos 159
2.5 Ceros de funciones polinomiales 166
2.6 Funciones racionales 181
2.7 Desigualdades no lineales 194
Resumen del capítulo 204 Ejercicios de repaso 206
Examen del capítulo 210 Demostraciones en matemáticas 211
Resolución de problemas 213

Capítulo 3

Funciones exponenciales y logarítmicas 215

3.1 Funciones exponenciales y sus gráficas 216
3.2 Funciones logarítmicas y sus gráficas 227
3.3 Propiedades de los logaritmos 237
3.4 Ecuaciones exponenciales y logarítmicas 244

3.5 Modelos exponenciales y logarítmicos 255
Resumen del capítulo 268 Ejercicios de repaso 270
Examen del capítulo 273
Examen acumulativo para los capítulos 1 a 3 274
Demostraciones en matemáticas 276
Resolución de problemas 277

Capítulo 4

Trigonometría 279

4.1 Medidas en radianes y grados 280
4.2 Funciones trigonométricas: la circunferencia unitaria 292
4.3 Trigonometría del triángulo rectángulo 299
4.4 Funciones trigonométricas de cualquier ángulo 310
4.5 Gráficas de las funciones seno y coseno 319
4.6 Gráficas de otras funciones trigonométricas 330
4.7 Funciones trigonométricas inversas 341
4.8 Aplicaciones y modelos 351
Resumen del capítulo 362 Ejercicios de repaso 364
Examen del capítulo 367 Demostraciones en matemáticas 368
Resolución de problemas 369

Capítulo 5

Trigonometría analítica 371

5.1 Uso de identidades fundamentales 372
5.2 Comprobación de identidades trigonométricas 380
5.3 Solución de ecuaciones trigonométricas 387
5.4 Fórmulas de suma y diferencia 398
5.5 Fórmulas de ángulos múltiples y de producto a suma 405
Resumen del capítulo 416 Ejercicios de repaso 418
Examen del capítulo 421 Demostraciones en matemáticas 422
Resolución de problemas 425

Capítulo 6

Temas adicionales de trigonometría 427

6.1 Ley de los senos 428
6.2 Ley de los cosenos 437
6.3 Vectores en el plano 445
6.4 Vectores y producto punto 458
6.5 Forma trigonométrica de un número complejo 468
Resumen del capítulo 478 Ejercicios de repaso 480
Examen del capítulo 484
Examen acumulativo para los capítulos 4 a 6 485
Demostraciones en matemáticas 487
Resolución de problemas 491

Capítulo 7

Sistemas de ecuaciones y desigualdades 493

7.1 Sistemas de ecuaciones lineales y no lineales 494
7.2 Sistemas lineales de dos variables 505
7.3 Sistemas lineales de varias variables 517
7.4 Fracciones parciales 530
7.5 Sistemas de desigualdades 538
7.6 Programación lineal 549
Resumen del capítulo 558 Ejercicios de repaso 560
Examen del capítulo 565 Demostraciones en matemáticas 566
Resolución de problemas 567

Capítulo 8

Matrices y determinantes 569

8.1 Matrices y sistemas de ecuaciones 570
8.2 Operaciones con matrices 584
8.3 Inversa de una matriz cuadrada 599
8.4 Determinante de una matriz cuadrada 608
8.5 Aplicaciones de matrices y determinantes 616
Resumen del capítulo 628 Ejercicios de repaso 630
Examen del capítulo 635 Demostraciones en matemáticas 636
Resolución de problemas 637

Capítulo 9

Sucesiones, series y probabilidad 639

9.1 Sucesiones y series 640
9.2 Sucesiones aritméticas y sumas parciales 651
9.3 Sucesiones geométricas y series 661
9.4 Inducción matemática 671
9.5 El teorema del binomio 681
9.6 Principios de conteo 689
9.7 Probabilidad 699
Resumen del capítulo 712 Ejercicios de repaso 714
Examen del capítulo 717
Examen acumulativo para los capítulos 7 a 9 718
Demostraciones en matemáticas 720
Resolución de problemas 723

Capítulo 10

Temas de geometría analítica 725

10.1 Rectas 726
10.2 Introducción a las cónicas: parábolas 733
10.3 Elipses 742
10.4 Hipérbolas 751
10.5 Rotación de cónicas 761
10.6 Ecuaciones paramétricas 769
10.7 Coordenadas polares 777
10.8 Gráficas de ecuaciones polares 783
10.9 Ecuaciones polares de cónicas 791
Resumen del capítulo 798 Ejercicios de repaso 800
Examen del capítulo 803 Demostraciones en matemáticas 804
Resolución de problemas 807

Apéndice A Repaso de conceptos fundamentales de álgebra A1

A.1 Números reales y sus propiedades A1
A.2 Exponentes y radicales A14
A.3 Polinomios y factorización A27
A.4 Expresiones racionales A39
A.5 Resolución de ecuaciones A49
A.6 Desigualdades lineales con una variable A63
A.7 Errores y el álgebra del cálculo A73

Respuestas a ejercicios impares y exámenes A81

Índice A199

Índice de aplicaciones (web)

Apéndice B Conceptos de estadística (web)

B.1 Representación de datos
B.2 Medidas de tendencia central y dispersión centrales
B.3 Regresión de mínimos cuadrados

Funciones y sus gráficas

1

1.1 Coordenadas rectangulares
1.2 Gráficas de ecuaciones
1.3 Ecuaciones lineales con dos variables
1.4 Funciones
1.5 Análisis de gráficas de funciones
1.6 Biblioteca de funciones principales (o generatrices)
1.7 Transformaciones de funciones
1.8 Combinaciones de funciones: funciones compuestas
1.9 Funciones inversas
1.10 Modelado y variación matemáticos

En matemáticas

Las funciones muestran la forma en que una variable está relacionada con otra variable.

En la vida real

Las funciones se usan para calcular valores, simular procesos y descubrir relaciones. Por ejemplo, se puede modelar la variación de inscripciones de niños en preescolar y calcular el año en que alcanzará cierto número. Ese cálculo se puede usar para planear medidas a fin de satisfacer necesidades futuras, como contratar más profesores y comprar más libros. (Vea Ejercicio 113, página 64.)

Jose Luis Pelaez/Getty Images

EN CARRERAS

Las funciones se usan en muchas carreras, entre ellas, en las siguientes:

- Analista financiero
  Ejercicio 95, página 51
- Biólogo
  Ejercicio 73, página 91
- Preparador de impuestos
  Ejercicio 3, página 104
- Oceanógrafo
  Ejercicio 83, página 112

1.1 Coordenadas rectangulares

Lo que debe aprender

- Localizar puntos en el plano cartesiano
- Usar la fórmula de la distancia para hallar la distancia entre dos puntos.
- Usar la fórmula del punto medio para hallar el punto medio de un segmento de recta.
- Usar un plano de coordenadas para modelar y resolver problemas reales.

Por qué debe aprenderlo

El plano cartesiano se puede usar para representar relaciones entre dos variables. Por ejemplo, en el Ejercicio 70 de la página 11, una gráfica representa el salario mínimo en Estados Unidos de 1950 a 2009.

© Ariel Skelly/Corbis

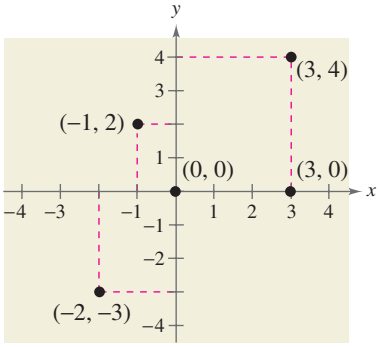


FIGURA 1.3

Plano cartesiano

En la misma forma en que se pueden representar números por medio de puntos en una recta numérica, se pueden representar pares ordenados de números reales por medio de puntos en un plano llamado **sistema de coordenadas rectangulares,** o **plano cartesiano,** designado así en honor al matemático francés René Descartes (1596-1650).

El plano cartesiano se forma mediante dos rectas numéricas que se intersecan en ángulos rectos, como se ve en la Figura 1.1. La recta horizontal suele recibir el nombre de **eje *x*,** y la vertical suele denominarse **eje *y*.** El punto de intersección de estos dos ejes es el **origen** y los dos ejes dividen el plano en cuatro partes llamadas **cuadrantes.**

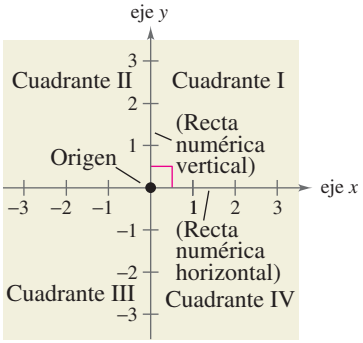


FIGURA 1.1

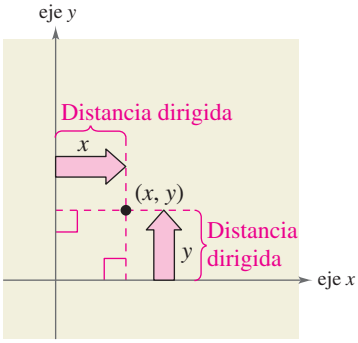
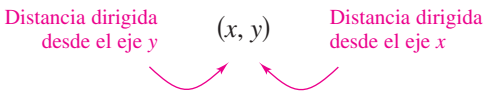


FIGURA 1.2

Cada punto del plano corresponde a un **par ordenado** (x, y) de números reales x y y, llamados **coordenadas** del punto. La **coordenada *x*** representa la distancia dirigida desde el eje y al punto, y la **coordenada *y*** representa la distancia dirigida desde el eje x al punto, como se ilustra en la Figura 1.2.



La notación (x, y) denota un punto en el plano y un intervalo abierto en la recta numérica real. El contexto nos dirá cuál es el significado que se busca.

Ejemplo 1 Localizar puntos en el plano cartesiano

Localice los puntos $(-1, 2)$, $(3, 4)$, $(0, 0)$, $(3, 0)$ y $(-2, -3)$.

Solución

Para localizar el punto $(-1, 2)$, imagine una recta vertical que pase por -1 sobre el eje x y una recta horizontal que pase por 2 en el eje y. La intersección de estas dos rectas es el punto $(-1, 2)$. Los otros cuatro puntos se pueden localizar en la misma forma, como se ve en la Figura 1.3.

PUNTO *de repaso* Ahora trate de hacer el Ejercicio 7.

La belleza de un sistema de coordenadas rectangulares es que permite *ver* relaciones entre dos variables. Sería difícil exagerar la importancia de que Descartes haya introducido coordenadas en el plano. Hoy en día, sus ideas están en uso común en prácticamente todos los campos científicos y los relacionados con negocios.

Ejemplo 2 Trazar una gráfica de dispersión

Año, t	Suscriptores, N
1994	24.1
1995	33.8
1996	44.0
1997	55.3
1998	69.2
1999	86.0
2000	109.5
2001	128.4
2002	140.8
2003	158.7
2004	182.1
2005	207.9
2006	233.0
2007	255.4

De 1994 a 2007, el número N (en millones) de suscriptores a un servicio de telefonía celular en Estados Unidos se ve en la tabla, donde t representa el año. Trace una gráfica de dispersión de los datos. (Fuente: CTIA-The Wireless Association)

Solución

Para trazar una *gráfica de dispersión* de los datos mostrados en la tabla, simplemente representamos cada par de valores por medio de un par ordenado (t, N) y localizamos los puntos resultantes, como se ve en la Figura 1.4. Por ejemplo, el primer par de valores está representado por el par ordenado (1994, 24.1). Observe que el pico en el eje t indica que los números entre 0 y 1994 han sido omitidos.

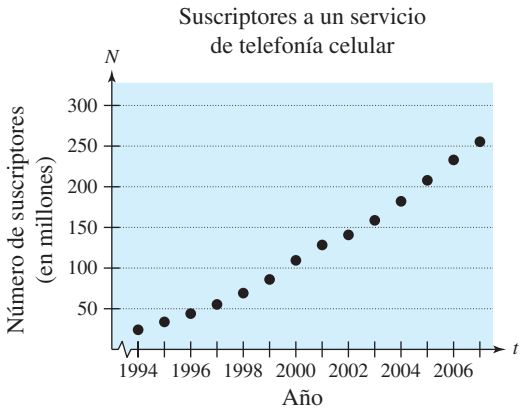


FIGURA 1.4

PUNTO *de repaso* Ahora trate de hacer el Ejercicio 25.

En el Ejemplo 2, se podría hacer que $t = 1$ represente el año 1994. En ese caso, el eje horizontal no hubiera mostrado el pico y las marcas de división hubieran estado rotuladas del 1 al 14 (en lugar de 1994 a 2007).

TECNOLOGÍA

La gráfica de dispersión del Ejemplo 2 es sólo una forma de representar los datos. También se pueden representar datos si se usa una gráfica de barras o una de rectas. Si usted tiene acceso a una calculadora de gráficas, trate de usarla para representar los datos dados en el Ejemplo 2.

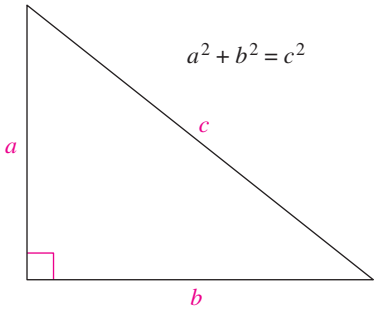


FIGURA 1.5

Teorema de Pitágoras y la fórmula de la distancia

El famoso teorema que sigue se emplea extensamente en todo este curso.

Teorema de Pitágoras

Para un triángulo rectángulo con hipotenusa de longitud c y lados de longitudes a y b, tenemos que $a^2 + b^2 = c^2$, como se muestra en la Figura 1.5. (Lo contrario también es cierto, es decir, si $a^2 + b^2 = c^2$, entonces el triángulo es rectángulo.)

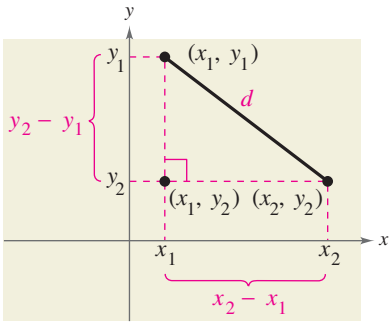


FIGURA 1.6

Supongamos que se desea determinar la distancia d entre dos puntos (x_1, y_1) y (x_2, y_2) del plano. Con estos dos puntos puede formarse un triángulo rectángulo, como se ve en la Figura 1.6. La longitud del lado vertical del triángulo es $|y_2 - y_1|$, y la longitud del lado horizontal es $|x_2 - x_1|$. Por el teorema de Pitágoras, podemos escribir

$$d^2 = |x_2 - x_1|^2 + |y_2 - y_1|^2$$

$$d = \sqrt{|x_2 - x_1|^2 + |y_2 - y_1|^2} = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2}.$$

Este resultado es la **fórmula de la distancia.**

Fórmula de la distancia

La distancia d entre los puntos (x_1, y_1) y (x_2, y_2) en el plano es

$$d = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2}.$$

Ejemplo 3 Hallar una distancia

Encuentre la distancia entre los puntos $(-2, 1)$ y $(3, 4)$.

Solución algebraica

Sea $(x_1, y_1) = (-2, 1)$ y $(x_2, y_2) = (3, 4)$. Aplicando la fórmula de la distancia,

$$d = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2} \quad \text{Fórmula de la distancia}$$

$$= \sqrt{[3 - (-2)]^2 + (4 - 1)^2} \quad \text{Sustituir por } x_1, y_1, x_2 \text{ y } y_2.$$

$$= \sqrt{(5)^2 + (3)^2} \quad \text{Simplificar.}$$

$$= \sqrt{34} \quad \text{Simplificar.}$$

$$\approx 5.83 \quad \text{Usar calculadora.}$$

Entonces, la distancia entre los puntos es alrededor de 5.83 unidades. Se puede usar el teorema de Pitágoras para verificar que la distancia es correcta.

$$d^2 \stackrel{?}{=} 3^2 + 5^2 \quad \text{Teorema de Pitágoras}$$

$$\left(\sqrt{34}\right)^2 \stackrel{?}{=} 3^2 + 5^2 \quad \text{Sustituir por } d.$$

$$34 = 34 \quad \text{Prueba de distancias.} \checkmark$$

Solución gráfica

Utilice papel cuadriculado en centímetros para graficar los puntos $A(-2, 1)$ y $B(3, 4)$. Con todo cuidado trace el segmento de recta de A a B y, a continuación, use una regla en centímetros para medir la longitud del segmento.

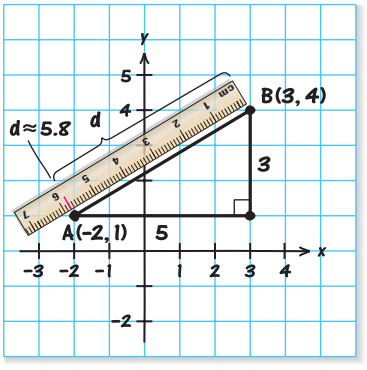


FIGURA 1.7

El segmento de recta mide 5.8 centímetros, aproximadamente, como se ve en la Figura 1.7. Por tanto, la distancia entre los puntos es alrededor de 5.8 unidades.

PUNTO *de repaso* Ahora trate de hacer el Ejercicio 31.

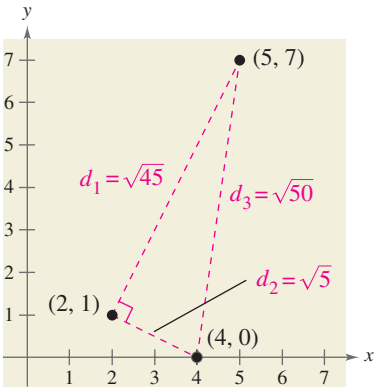


FIGURA 1.8

Ayuda de álgebra

En el Apéndice A.2 hay un repaso de las técnicas para evaluar un radical.

Ejemplo 4 Verificar un triángulo rectángulo

Demuestre que los puntos (2, 1), (4, 0), y (5, 7) son vértices de un triángulo rectángulo.

Solución

Los tres puntos están localizados en la Figura 1.8. Con la fórmula de la distancia se puede hallar la longitud de los tres lados, como sigue:

$$d_1 = \sqrt{(5-2)^2 + (7-1)^2} = \sqrt{9+36} = \sqrt{45}$$
$$d_2 = \sqrt{(4-2)^2 + (0-1)^2} = \sqrt{4+1} = \sqrt{5}$$
$$d_3 = \sqrt{(5-4)^2 + (7-0)^2} = \sqrt{1+49} = \sqrt{50}$$

Como

$$(d_1)^2 + (d_2)^2 = 45 + 5 = 50 = (d_3)^2$$

se puede concluir, por el teorema de Pitágoras, que el triángulo debe ser rectángulo.

PUNTO *de repaso* Ahora trate de hacer el Ejercicio 43.

Fórmula del punto medio

Para hallar el **punto medio** del segmento de recta que une dos puntos en un plano de coordenadas, simplemente se encuentran los valores promedio de las respectivas coordenadas de los dos puntos de extremo usando la **fórmula del punto medio.**

Fórmula del punto medio

El punto medio del segmento de recta que une los puntos (x_1, y_1) y (x_2, y_2) está dado por la fórmula del punto medio

$$\text{Punto medio} = \left(\frac{x_1 + x_2}{2}, \frac{y_1 + y_2}{2}\right).$$

Para una demostración de la fórmula del punto medio, vea Demostraciones en matemáticas en la página 122.

Ejemplo 5 Hallar el punto medio de un segmento de recta

Encuentre el punto medio del segmento de recta que une los puntos $(-5, -3)$ y $(9, 3)$.

Solución

Sea $(x_1, y_1) = (-5, -3)$ y $(x_2, y_2) = (9, 3)$.

$$\text{Punto medio} = \left(\frac{x_1 + x_2}{2}, \frac{y_1 + y_2}{2}\right) \quad \text{Fórmula del punto medio}$$
$$= \left(\frac{-5 + 9}{2}, \frac{-3 + 3}{2}\right) \quad \text{Sustituir por } x_1, y_1, x_2 \text{ y } y_2.$$
$$= (2, 0) \quad \text{Simplificar.}$$

El punto medio del segmento de recta es (2, 0), como se ve en la Figura 1.9.

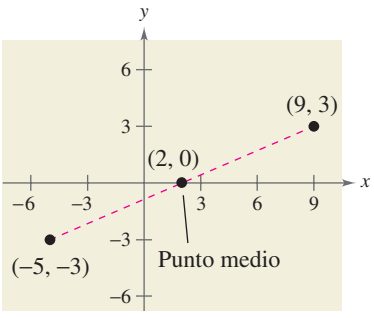


FIGURA 1.9

PUNTO *de repaso* Ahora trate de hacer el Ejercicio 47(c).

Aplicaciones

Ejemplo 6 Hallar la longitud de un pase

El "mariscal de campo" de un equipo de fútbol americano lanza un pase desde la línea de la yarda 28, a 40 yardas de la línea de banda. El pase es atrapado por un receptor en la línea de la yarda 5, a 20 yardas de la misma línea de banda, como se ve en la Figura 1.10. ¿Cuál es la longitud del pase?

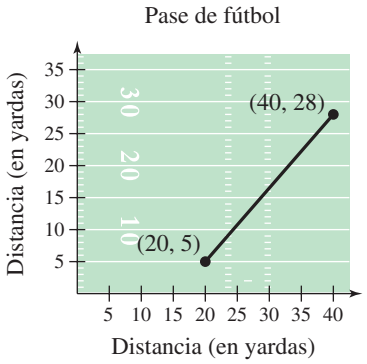


FIGURA 1.10

Solución

Se puede determinar la longitud del pase al hallar la distancia entre los puntos (40, 28) y (20, 5).

$$\begin{aligned} d &= \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2} && \text{Fórmula de la distancia} \\ &= \sqrt{(40 - 20)^2 + (28 - 5)^2} && \text{Sustituir por } x_1, y_1, x_2 \text{ y } y_2. \\ &= \sqrt{400 + 529} && \text{Simplificar.} \\ &= \sqrt{929} && \text{Simplificar.} \\ &\approx 30 && \text{Usar calculadora.} \end{aligned}$$

Por tanto, el pase es de alrededor de 30 yardas.

PUNTO *de repaso* Ahora trate de hacer el Ejercicio 57.

En el Ejemplo 6, la escala a lo largo de la línea de gol normalmente no aparece en un campo de fútbol. No obstante, cuando se usa geometría de coordenadas para resolver problemas reales, tenemos libertad de poner el sistema de coordenadas en cualquier forma que sea cómoda para la solución del problema.

Ejemplo 7 Calcular ingresos anuales

Barnes & Noble tuvo ventas anuales de alrededor de $5100 millones de dólares en 2005, y $5400 millones de dólares en 2007. Sin saber más información adicional, ¿cuáles calcularía usted que han sido las ventas de 2006? (Fuente: Barnes & Noble, Inc.)

Solución

Una solución al problema es suponer que las ventas siguieron una tendencia lineal. Con esta suposición, se pueden calcular las ventas de 2006 si se encuentra el punto medio del segmento de recta que enlaza los puntos (2005, 5.1) y (2007, 5.4).

$$\begin{aligned} \text{Punto medio} &= \left(\frac{x_1 + x_2}{2}, \frac{y_1 + y_2}{2}\right) && \text{Fórmula del punto medio} \\ &= \left(\frac{2005 + 2007}{2}, \frac{5.1 + 5.4}{2}\right) && \text{Sustituir por } x_1, x_2, y_1 \text{ y } y_2. \\ &= (2006, 5.25) && \text{Simplificar.} \end{aligned}$$

Entonces, se pueden calcular que las ventas de 2006 han sido de alrededor de $5250 millones de dólares, como se muestra en la Figura 1.11. (Las ventas reales de 2006 fueron alrededor de $5260 millones de dólares.)

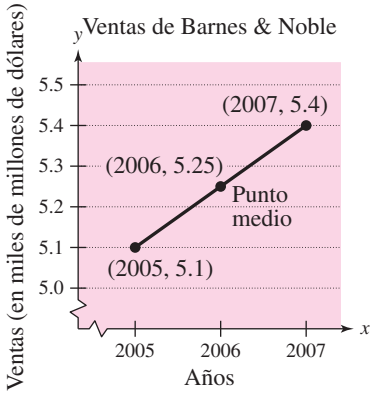


FIGURA 1.11

PUNTO *de repaso* Ahora trate de hacer el Ejercicio 59.

Ejemplo 8 Trasladar puntos en el plano

El triángulo de la Figura 1.12 tiene vértices en los puntos $(-1, 2)$, $(1, -4)$, y $(2, 3)$. Desplace el triángulo tres unidades a la derecha y dos unidades hacia arriba y encuentre los vértices del triángulo desplazado, como se muestra en la Figura 1.13.

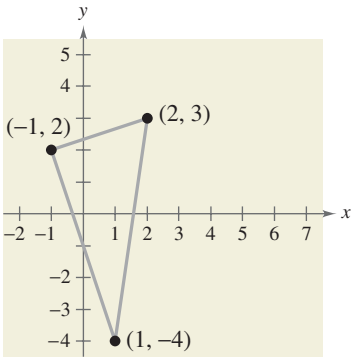


FIGURA 1.12

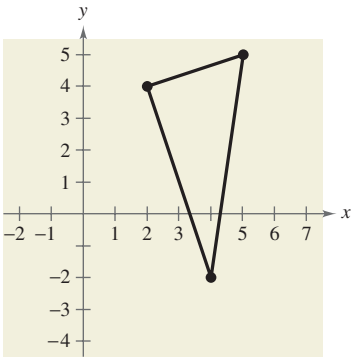


FIGURA 1.13

Solución

Para desplazar los vértices tres unidades a la derecha, sume 3 a cada una de las coordenadas x; para desplazar los vértices dos unidades hacia arriba, sume 2 a cada una de las coordenadas y.

Punto original	*Punto trasladado*
$(-1, 2)$	$(-1 + 3, 2 + 2) = (2, 4)$
$(1, -4)$	$(1 + 3, -4 + 2) = (4, -2)$
$(2, 3)$	$(2 + 3, 3 + 2) = (5, 5)$

PUNTO *de repaso* Ahora trate de hacer el Ejercicio 61.

Las figuras proporcionadas en el Ejemplo 8 en realidad no eran esenciales para la solución, pero encarecidamente recomendamos al lector desarrolle el hábito de incluir bosquejos con sus soluciones, incluso si no se requieren.

DISCUSIÓN EN CLASE

Ampliación del ejemplo El Ejemplo 8 muestra cómo trasladar puntos en un plano de coordenadas. Escriba un breve párrafo que describa la forma en que cada uno de los siguientes puntos transformados está relacionado con el punto original.

Punto original	*Punto transformado*
(x, y)	$(-x, y)$
(x, y)	$(x, -y)$
(x, y)	$(-x, -y)$

1.1 EJERCICIOS

En www.CalcChat.com vea las soluciones a los ejercicios impares.

VOCABULARIO

1. Relacione cada uno de los términos siguientes con su definición.

(a) eje x	(i) punto de intersección del eje vertical y el eje horizontal
(b) eje y	(ii) distancia dirigida desde el eje x
(c) origen	(iii) distancia dirigida desde el eje y
(d) cuadrantes	(iv) cuatro regiones del plano de coordenadas
(e) coordenada x	(v) recta numérica horizontal
(f) coordenada y	(vi) recta numérica vertical

En los Ejercicios 2-4, llene los espacios en blanco.

2. Un par ordenado de números reales puede estar representado en un plano llamado sistema de coordenadas rectangulares o plano _____.

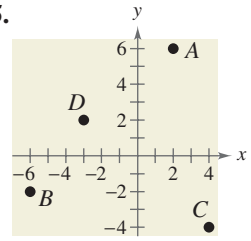
3. La _____ _____ _____ es resultado derivado del teorema de Pitágoras.

4. Hallar los valores promedio de las coordenadas representativas de un segmento de recta en un plano de coordenadas también se conoce como usar la _____ _____ _____.

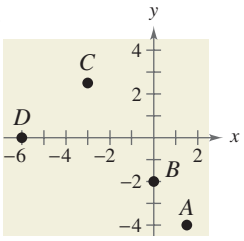
HABILIDADES Y APLICACIONES

En los Ejercicios 5 y 6, aproxime las coordenadas de los puntos.

5.



6.



En los Ejercicios 7-10, ubique los puntos en el plano cartesiano.

7. $(-4, 2), (-3, -6), (0, 5), (1, -4)$

8. $(0, 0), (3, 1), (-2, 4), (1, -1)$

9. $(3, 8), (0.5, -1), (5, -6), (-2, 2.5)$

10. $\left(1, -\frac{1}{3}\right), \left(\frac{3}{4}, 3\right), (-3, 4), \left(-\frac{4}{3}, -\frac{3}{2}\right)$

En los Ejercicios 11-14, encuentre las coordenadas del punto.

11. El punto está situado tres unidades a la izquierda del eje y y cuatro unidades arriba del eje x.

12. El punto está situado ocho unidades abajo del eje x y cuatro unidades a la derecha del eje y.

13. El punto está situado cinco unidades abajo del eje x y las coordenadas del punto son iguales.

14. El punto está sobre el eje x y 12 unidades a la izquierda del eje y.

En los Ejercicios 15-24, determine el cuadrante(s) en el que (x, y) está situado de modo que la condición(es) se satisface.

15. $x > 0$ y $y < 0$

16. $x < 0$ y $y < 0$

17. $x = -4$ y $y > 0$

18. $x > 2$ y $y = 3$

19. $y < -5$

20. $x > 4$

21. $x < 0$ y $-y > 0$

22. $-x > 0$ y $y < 0$

23. $xy > 0$

24. $xy < 0$

En los Ejercicios 25 y 26, trace una gráfica de dispersión de los datos mostrados en la tabla.

25. NÚMERO DE TIENDAS La tabla muestra el número y de tiendas Wal-Mart para cada año x de 2000 a 2007. (Fuente: Wal-Mart Stores, Inc.)

Año, x	Número de tiendas, y
2000	4189
2001	4414
2002	4688
2003	4906
2004	5289
2005	6141
2006	6779
2007	7262

26. METEOROLOGÍA La tabla siguiente muestra la temperatura y más baja registrada (en grados Fahrenheit) en Duluth, Minnesota, para cada mes x, donde $x = 1$ representa enero. (Fuente: NOAA)

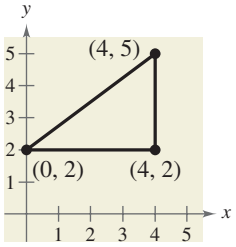
Mes, x	Temperatura, y
1	−39
2	−39
3	−29
4	−5
5	17
6	27
7	35
8	32
9	22
10	8
11	−23
12	−34

En los Ejercicios 27-38, encuentre la distancia entre los puntos.

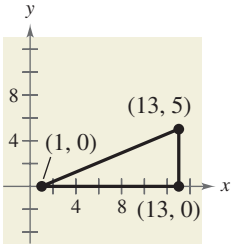
27. $(6, -3), (6, 5)$
28. $(1, 4), (8, 4)$
29. $(-3, -1), (2, -1)$
30. $(-3, -4), (-3, 6)$
31. $(-2, 6), (3, -6)$
32. $(8, 5), (0, 20)$
33. $(1, 4), (-5, -1)$
34. $(1, 3), (3, -2)$
35. $\left(\frac{1}{2}, \frac{4}{3}\right), (2, -1)$
36. $\left(-\frac{2}{3}, 3\right), \left(-1, \frac{5}{4}\right)$
37. $(-4.2, 3.1), (-12.5, 4.8)$
38. $(9.5, -2.6), (-3.9, 8.2)$

En los Ejercicios 39-42, (a) encuentre la longitud de cada lado del triángulo recto y (b) demuestre que estas longitudes satisfacen el teorema de Pitágoras.

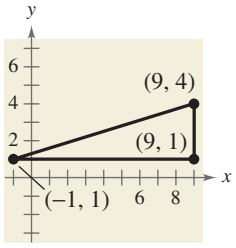
39.



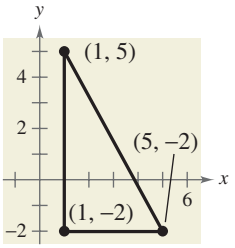
40.



41.



42.



En los Ejercicios 43-46, demuestre que los puntos forman los vértices del polígono indicado.

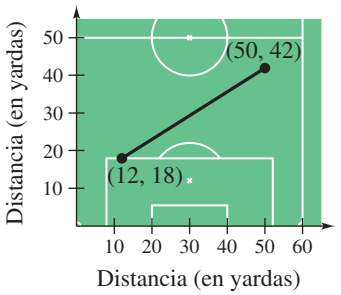
43. Triángulo rectángulo: $(4, 0), (2, 1), (-1, -5)$
44. Triángulo rectángulo: $(-1, 3), (3, 5), (5, 1)$
45. Triángulo isósceles: $(1, -3), (3, 2), (-2, 4)$
46. Triángulo isósceles: $(2, 3), (4, 9), (-2, 7)$

En los Ejercicios 47-56, (a) sitúe los puntos, (b) encuentre la distancia entre ellos, y (c) encuentre el punto medio del segmento de recta que une los puntos.

47. $(1, 1), (9, 7)$
48. $(1, 12), (6, 0)$
49. $(-4, 10), (4, -5)$
50. $(-7, -4), (2, 8)$
51. $(-1, 2), (5, 4)$
52. $(2, 10), (10, 2)$
53. $\left(\frac{1}{2}, 1\right), \left(-\frac{5}{2}, \frac{4}{3}\right)$
54. $\left(-\frac{1}{3}, -\frac{1}{3}\right), \left(-\frac{1}{6}, -\frac{1}{2}\right)$
55. $(6.2, 5.4), (-3.7, 1.8)$
56. $(-16.8, 12.3), (5.6, 4.9)$

57. DISTANCIA DE VUELO Un avión vuela de Nápoles, Italia, en línea recta a Roma, Italia, que está a 120 kilómetros al norte y 150 kilómetros al oeste de Nápoles. ¿Qué distancia vuela el avión?

58. DEPORTES Un jugador de fútbol pasa el balón de un punto que está a 18 yardas de la línea de meta y 12 yardas de la línea de banda. El pase es recibido por un compañero de equipo que está a 42 yardas de la misma línea de meta y 50 yardas de la misma línea de banda, como se indica en la figura. ¿Qué tan largo es el pase?



VENTAS En los Ejercicios 59 y 60, use la fórmula del punto medio para calcular las ventas de Big Lots, Inc. y Dollar Tree Stores, Inc. en 2005, dadas las ventas en 2003 y 2007. Suponga que las ventas siguieron un patrón lineal. (Fuente: Big Lots, Inc.; Dollar Tree Stores, Inc.)

59. Big Lots

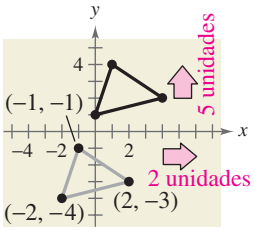
Año	Ventas (en millones)
2003	$4174
2007	$4656

60. Dollar Tree

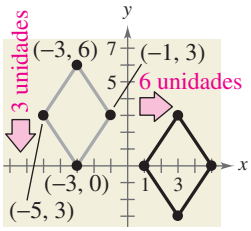
Año	Ventas (en millones)
2003	$2800
2007	$4243

En los Ejercicios 61-64, el polígono está desplazado a una nueva posición del plano. Encuentre las coordenadas de los vértices del polígono en su nueva posición.

61.



62.



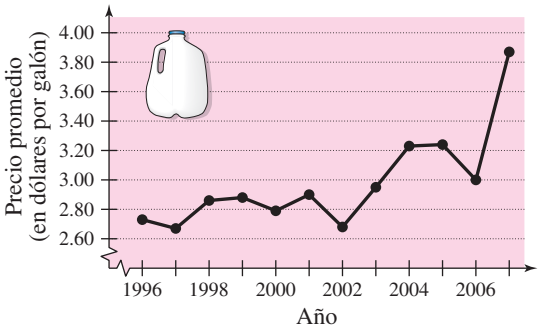
63. Coordenadas originales de los vértices: $(-7, -2)$, $(-2, 2)$, $(-2, -4)$, $(-7, -4)$

Desplazamiento: ocho unidades hacia arriba, cuatro unidades a la derecha.

64. Coordenadas originales de los vértices: $(5, 8)$, $(3, 6)$, $(7, 6)$, $(5, 2)$

Desplazamiento: 6 unidades hacia abajo, 10 unidades a la izquierda.

PRECIO AL POR MENOR En los Ejercicios 65 y 66, use la gráfica, que muestra el promedio de precios al por menor de 1 galón de leche entera de 1996 a 2007. (Fuente: U.S. Bureau of Labor Statistics)



65. Aproxime el precio más alto de un galón de leche entera que se muestra en la gráfica. ¿Cuándo ocurrió?

66. Aproxime el porcentaje de cambio en el precio de leche a partir del precio en 1996 al precio más alto mostrado en la gráfica.

67. PUBLICIDAD La gráfica muestra el costo promedio de un anuncio de 30 segundos en televisión (en miles de dólares) durante el Súper Tazón de 2000 a 2008. (Fuente: Nielson Media and TNS Media Intelligence)

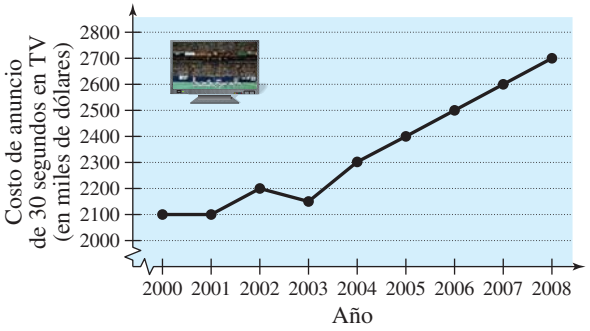
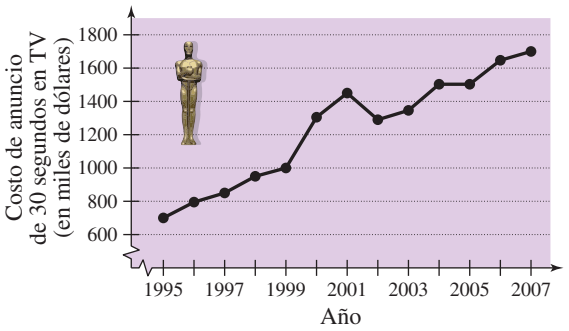


FIGURA PARA 67

(a) Calcule el porcentaje de aumento en el costo promedio de un anuncio de 30 segundos del Súper Tazón XXXIV en 2000 al Súper Tazón XXXVIII en 2004.

(b) Calcule el porcentaje de aumento en el costo promedio de un anuncio de 30 segundos del Súper Tazón XXXIV en 2000 al Súper Tazón XLII en 2008.

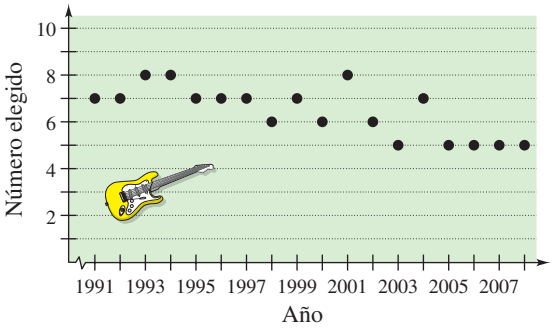
68. PUBLICIDAD La gráfica muestra los costos promedio de un anuncio de 30 segundos en televisión (en miles de dólares) durante los Premios de la Academia, de 1995 a 2007. (Fuente: Nielson Monitor-Plus)



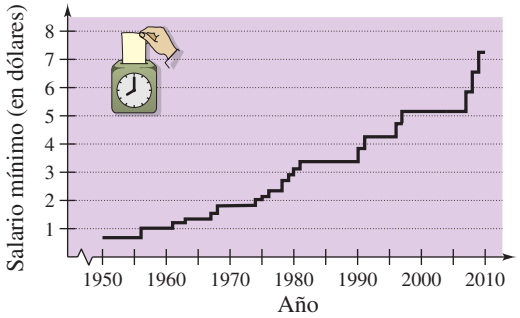
(a) Calcule el porcentaje de aumento en el costo promedio de un anuncio en 1996 al costo en 2002.

(b) Calcule el porcentaje de aumento en el costo promedio de un anuncio en 1996 al costo en 2007.

69. MÚSICA La gráfica muestra los números de artistas que fueron elegidos para el Salón de la Fama del Rock and Roll de 1991 a 2008. Describa cualesquiera tendencias de los datos. A partir de estas tendencias, prediga el número de artistas elegidos en 2010. (Fuente: rockhall.com)



70. FUERZA LABORAL Use la gráfica siguiente, que muestra el salario mínimo en Estados Unidos (en dólares) de 1950 a 2009. (Fuente: U.S. Department of Labor)



(a) ¿Cuál década muestra el máximo aumento en salario mínimo?

(b) Calcule el porcentaje de aumentos en el salario mínimo de 1990 a 1995 y de 1995 a 2009.

(c) Use el porcentaje de aumento de 1995 a 2009 para predecir el salario mínimo en 2013.

(d) ¿Piensa usted que su predicción en el inciso (c) es razonable? Explique.

71. VENTAS La Coca-Cola Company tuvo ventas de $19805 millones en 1999 y $28857 millones en 2007. Utilice la fórmula del punto medio para calcular las ventas en 2003. Suponga que las ventas siguieron un patrón lineal. (Fuente: The Coca-Cola Company)

72. ANÁLISIS DE DATOS: CALIFICACIONES DE EXÁMENES La tabla siguiente muestra las calificaciones x para examen de entrada, y las calificaciones y de examen final en un curso de álgebra, para una muestra de 10 estudiantes.

x	22	29	35	40	44	48	53	58	65	76
y	53	74	57	66	79	90	76	93	83	99

(a) Trace una gráfica de dispersión de los datos.

(b) Encuentre la calificación del examen de entrada de cualquier estudiante con calificación de examen final en los 80.

(c) ¿Una calificación más alta en el examen de entrada implica una calificación más alta en el examen final? Explique.

73. ANÁLISIS DE DATOS: CORREO La tabla siguiente muestra el número y de piezas de correo manejadas (en miles de millones) por el U.S. Postal Service por cada año x de 1996 a 2008. (Fuente: U.S. Postal Service)

Año, x	Piezas de correo, y
1996	183
1997	191
1998	197
1999	202
2000	208
2001	207
2002	203
2003	202
2004	206
2005	212
2006	213
2007	212
2008	203

TABLA PARA 73

(a) Trace una gráfica de dispersión de los datos.

(b) Calcule el año en el que hubo el máximo aumento en el número de piezas de correo manejadas.

(c) ¿Por qué piensa usted que el número de piezas de correo manejadas disminuyó?

74. ANÁLISIS DE DATOS: DEPORTES La tabla siguiente muestra los números de equipos de baloncesto colegial, para hombres M y para mujeres W, por cada año x de 1994 a 2007. (Fuente: National Collegiate Athletic Association)

Año, x	Equipos de hombres, M	Equipos de mujeres, W
1994	858	859
1995	868	864
1996	866	874
1997	865	879
1998	895	911
1999	926	940
2000	932	956
2001	937	958
2002	936	975
2003	967	1009
2004	981	1008
2005	983	1036
2006	984	1018
2007	982	1003

(a) Trace gráficas de dispersión de estos dos conjuntos de datos en el mismo conjunto de ejes de coordenadas.

(b) Encuentre el año en que el número de equipos de hombres y mujeres fueron casi iguales.

(c) Encuentre el año en que la diferencia entre el número de equipos de hombres y mujeres fue máximo. ¿Cuál fue la diferencia?

EXPLORACIÓN

75. Un segmento de recta tiene (x_1, y_1) como un punto extremo y (x_m, y_m) como su punto medio. Encuentre el otro punto extremo (x_2, y_2) del segmento de recta en términos de x_1, y_1, x_m y y_m.

76. Use el resultado del Ejercicio 75 para hallar las coordenadas del punto extremo de un segmento de recta si las coordenadas del otro punto extremo y del punto medio son, respectivamente,

(a) $(1, -2), (4, -1)$ y (b) $(-5, 11), (2, 4)$.

77. Use la fórmula del punto medio tres veces para hallar los tres puntos que dividen, en cuatro partes, el segmento de recta que enlaza (x_1, y_1) y (x_2, y_2).

78. Use el resultado del Ejercicio 77 para hallar los puntos que dividen, en cuatro partes iguales, el segmento que une los puntos dados.

(a) $(1, -2), (4, -1)$ (b) $(-2, -3), (0, 0)$

79. HACER UNA CONJETURA Localice los puntos $(2, 1)$, $(-3, 5)$, y $(7, -3)$ en un sistema de coordenadas rectangulares. A continuación cambie el signo de la coordenada x de cada punto y localice los tres nuevos puntos en el mismo sistema de coordenadas rectangulares. Haga una conjetura acerca de la ubicación de un punto cuando ocurra lo siguiente.

(a) El signo de la coordenada x se cambia.

(b) El signo de la coordenada y se cambia.

(c) Los signos de las coordenadas x y y se cambian.

80. PUNTOS COLINEALES Tres o más puntos son *colineales* si están todos en la misma recta. Use los pasos siguientes para determinar si los conjuntos de puntos $\{A(2, 3), B(2, 6), C(6, 3)\}$ y $\{A(8, 3), B(5, 2), C(2, 1)\}$ son colineales.

(a) Por cada conjunto de puntos, use la fórmula de la distancia para hallar las distancias de A a B, de B a C y de A a C. ¿Qué relación existe entre estas distancias para cada conjunto de puntos?

(b) Sitúe cada conjunto de puntos en el plano cartesiano. ¿Todos los puntos de cualquier conjunto parecen estar sobre la misma recta?

(c) Compare sus conclusiones del inciso (a) con las conclusiones a las que llegó por las gráficas del inciso (b). Haga un enunciado general acerca de cómo usar la fórmula de la distancia para determinar colinealidad.

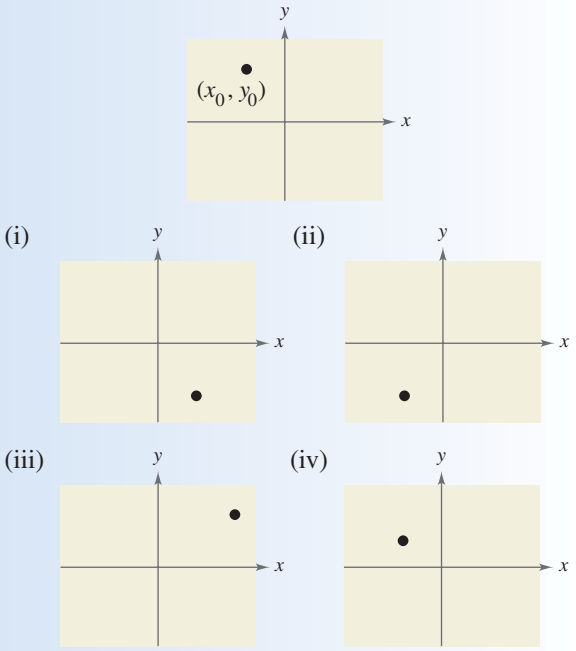
VERDADERO O FALSO En los Ejercicios 81 y 82, determine si el enunciado es verdadero o falso. Justifique su respuesta.

81. Para dividir un segmento en 16 partes iguales sería necesario usar 16 veces la fórmula del punto medio

82. Los puntos $(-8, 4)$, $(2, 11)$ y $(-5, 1)$ representan los vértices de un triángulo isósceles.

83. PIÉNSELO Cuando se localizan puntos en el sistema de coordenadas rectangulares, ¿es cierto que las escalas en los ejes x y y deben ser iguales? Explique.

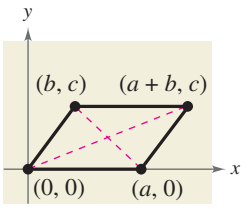
84. TOQUE FINAL Utilice la gráfica del punto (x_0, y_0) de la figura. Relacione la transformación del punto con la gráfica correcta. Explique su razonamiento. [Las gráficas están marcadas (i), (ii), (iii) y (iv).]



(a) $(x_0, -y_0)$ (b) $(-2x_0, y_0)$

(c) $\left(x_0, \frac{1}{2}y_0\right)$ (d) $(-x_0, -y_0)$

85. DEMOSTRACIÓN Demuestre que las diagonales del paralelogramo de la figura se intersecan en sus puntos medios.



1.2 Gráficas de ecuaciones

Lo que debe aprender

- Trazar gráficas de ecuaciones.
- Hallar intersecciones x y y de gráficas de ecuaciones.
- Usar simetría para trazar gráficas de ecuaciones.
- Hallar ecuaciones y trazar gráficas de circunferencias.
- Usar gráficas de ecuaciones para resolver problemas reales.

Por qué debe aprenderlo

La gráfica de una ecuación puede ayudar a ver relaciones entre cantidades reales. Por ejemplo, en el Ejercicio 87 de la página 23 se puede usar una gráfica para calcular las expectativas de vida de niños que nazcan en 2015.

Gráfica de una ecuación

En la Sección 1.1 utilizamos un sistema de coordenadas para representar gráficamente la relación entre dos cantidades. Ahí, la imagen gráfica estaba formada por un conjunto de puntos en un plano de coordenadas.

Con frecuencia, una relación entre dos cantidades se expresa como una **ecuación con dos variables.** Por ejemplo, $y = 7 - 3x$ es una ecuación en x y y. Un par ordenado (a, b) es una **solución** o **punto de solución** de una ecuación con x y y si la ecuación es verdadera cuando a se sustituye por x y b se sustituye por y. Por ejemplo, $(1, 4)$ es una solución de $y = 7 - 3x$ porque $4 = 7 - 3(1)$ es una proposición verdadera.

En esta sección repasaremos algunos procedimientos básicos para trazar la gráfica de una ecuación con dos variables. La **gráfica de una ecuación** es el conjunto de todos los puntos que son soluciones de la ecuación.

Ejemplo 1 Determinar puntos de solución

Determine si (a) $(2, 13)$ y (b) $(-1, -3)$ están en la gráfica de $y = 10x - 7$.

Solución

a. $y = 10x - 7$ Escribir la ecuación original.

$13 \stackrel{?}{=} 10(2) - 7$ Sustituir 2 por x y 13 por y.

$13 = 13$ $(2, 13)$ es una solución. ✓

El punto $(2, 13)$ *está* en la gráfica de $y = 10x - 7$ porque es un punto de solución de la ecuación.

b. $y = 10x - 7$ Escribir la ecuación original.

$-3 \stackrel{?}{=} 10(-1) - 7$ Sustituir -1 por x y -3 por y.

$-3 \neq -17$ $(-1, -3)$ no es una solución.

El punto $(-1, -3)$ *no está* en la gráfica de $y = 10x - 7$ porque *no es* un punto de solución de la ecuación.

PUNTO *de repaso* Ahora trate de hacer el Ejercicio 7.

La técnica básica empleada para trazar la gráfica de una ecuación es el **método de determinación de puntos.**

Trazar la gráfica de una ecuación al determinar puntos

1. Si posible, vuelva a escribir la ecuación para que una de las variables quede aislada en uno de sus lados (miembros).
2. Haga una tabla de valores que muestre varios puntos de solución.
3. Sitúe esos puntos en un sistema de coordenadas rectangulares.
4. Enlace los puntos con una curva o recta lisas.

Ayuda de álgebra

Al evaluar una expresión o ecuación, recuerde seguir las reglas básicas del álgebra. Para repasar estas reglas, vea el Apéndice A.1.

Ejemplo 2 Trazar la gráfica de una ecuación

Trace la gráfica de

$$y = 7 - 3x.$$

Solución

Como la ecuación ya está despejada (resuelta para y), construya una tabla de valores formada por varios puntos de solución de la ecuación. Por ejemplo, cuando $x = -1$,

$$y = 7 - 3(-1)$$
$$= 10$$

lo que implica que $(-1, 10)$ es un punto de solución de la gráfica.

x	$y = 7 - 3x$	(x, y)
-1	10	$(-1, 10)$
0	7	$(0, 7)$
1	4	$(1, 4)$
2	1	$(2, 1)$
3	-2	$(3, -2)$
4	-5	$(4, -5)$

De la tabla, se deduce que

$$(-1, 10), (0, 7), (1, 4), (2, 1), (3, -2) \text{ y } (4, -5)$$

son puntos de solución de la ecuación. Después de graficar estos puntos, se puede ver que aparecen en una recta, como se muestra en la Figura 1.14. La gráfica de la ecuación es la recta que pasa por los seis puntos determinados.

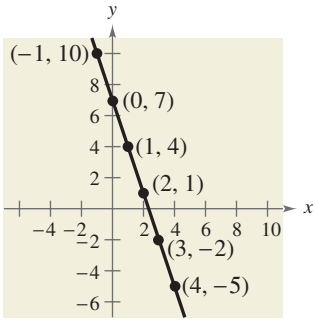


FIGURA 1.14

PUNTO *de repaso* Ahora trate de hacer el Ejercicio 15.

Ejemplo 3 Trazar la gráfica de una ecuación

Trace la gráfica de

$$y = x^2 - 2.$$

Solución

Como la ecuación ya está despejada, empecemos por construir una tabla de valores.

x	-2	-1	0	1	2	3
$y = x^2 - 2$	2	-1	-2	-1	2	7
(x, y)	$(-2, 2)$	$(-1, -1)$	$(0, -2)$	$(1, -1)$	$(2, 2)$	$(3, 7)$

A continuación, grafique los puntos dados en la tabla, como se ve en la Figura 1.15. Por último, enlace los puntos con una curva lisa, como se muestra en la Figura 1.16.

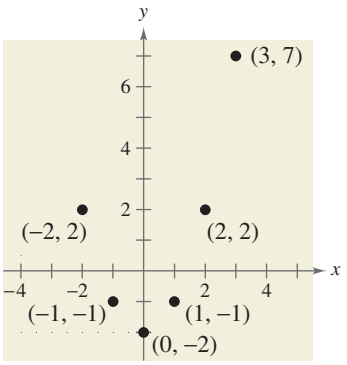


FIGURA 1.15

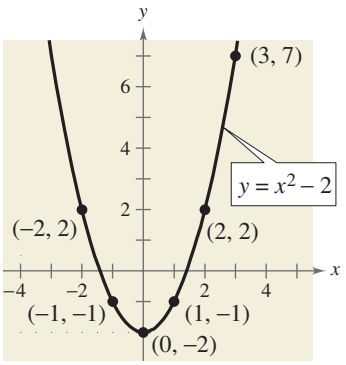


FIGURA 1.16

PUNTO *de repaso* Ahora trate de hacer el Ejercicio 17.

El método de determinación de puntos demostrado en los Ejemplos 2 y 3 es fácil de usar, pero tiene algunos defectos. Con muy pocos puntos de solución se puede malinterpretar la gráfica de una ecuación. Por ejemplo, si sólo cuatro puntos

$$(-2, 2), (-1, -1), (1, -1) \text{ y } (2, 2)$$

se determinan en la Figura 1.15, cualquiera de las tres gráficas de la Figura 1.17 sería razonable.

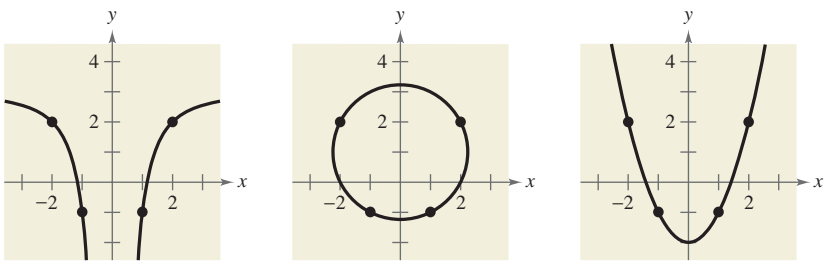


FIGURA 1.17

Tip de estudio

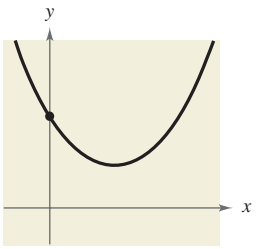
Uno de los objetivos de este curso es aprender a clasificar la forma básica de una gráfica a partir de su ecuación. Por ejemplo, usted aprenderá que la *ecuación lineal* del Ejemplo 2 tiene la forma

$$y = mx + b$$

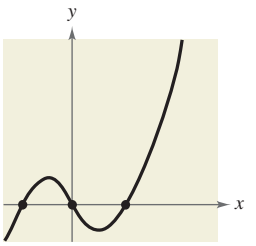
y su gráfica es una recta. Del mismo modo, la *ecuación cuadrática* del Ejemplo 3 tiene la forma

$$y = ax^2 + bx + c$$

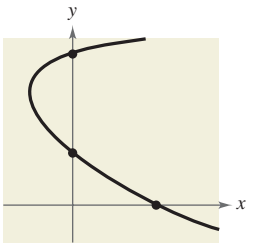
y su gráfica es una parábola.



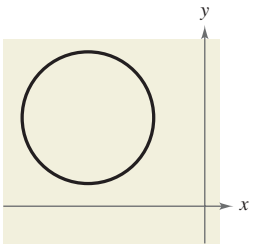
Sin intersección con el eje x; una con y



Tres intersecciones con el eje x; una con el y



Una intersección con el eje x; dos con el y



Sin intersecciones con los ejes

FIGURA 1.18

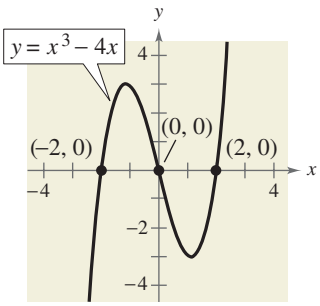


FIGURA 1.19

TECNOLOGÍA

Para graficar una ecuación con x y y en una calculadora de gráficas, use el siguiente procedimiento.

1. Vuelva a escribir la ecuación para aislar y en el lado izquierdo.
2. Ingrese la ecuación en la calculadora de gráficas.
3. Determine la *pantalla* que muestre todas las características importantes de la gráfica.
4. Grafique la ecuación.

Intersecciones de una gráfica con los ejes x y y

Con frecuencia es fácil determinar los puntos de solución que tengan 0 (cero) ya sea como coordenada x o como y. Estos puntos se denominan **intersecciones** con los ejes porque son los puntos en los que la gráfica corta o toca el eje x o el y. Es posible que una gráfica no tenga intersecciones, o que tenga una o varias, como se ve en la Figura 1.18.

Nótese que una intersección con x puede escribirse como el par ordenado $(x, 0)$ y una con el eje y como el par ordenado $(0, y)$. Algunos textos denotan la intersección con x como la coordenada x del punto $(a, 0)$ [y la intersección con y como la coordenada y del punto $(0, b)$] más que el punto mismo. A menos que sea necesario hacer una distinción, usaremos el término *intersección* para dar a entender que es el punto o la coordenada.

Hallar intersecciones con los ejes x y y

1. Para hallar intersecciones con el eje x, sea $y = 0$ y despejemos x de la ecuación.
2. Para hallar intersecciones con el eje y, sea $x = 0$ y despejemos y de la ecuación.

Ejemplo 4 Hallar intersecciones con los ejes x y y

Encuentre las intersecciones con los ejes x y y de la gráfica de $y = x^3 - 4x$.

Solución

Sea $y = 0$. Entonces

$$0 = x^3 - 4x = x(x^2 - 4)$$

tiene soluciones $x = 0$ y $x = \pm 2$.

intersecciones con el eje x: $(0, 0)$, $(2, 0)$, $(-2, 0)$

Sea $x = 0$. Entonces

$$y = (0)^3 - 4(0)$$

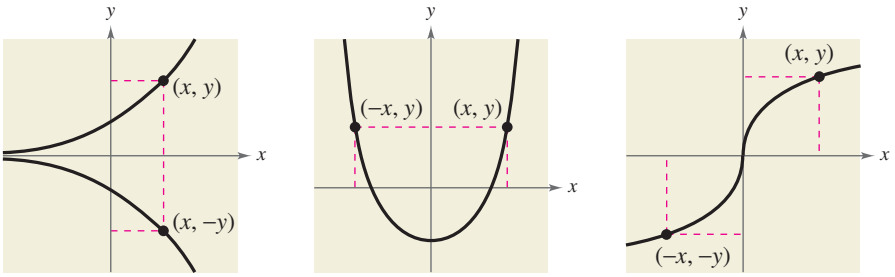
tiene una solución, $y = 0$.

intersecciones con el eje y: $(0, 0)$ Vea Figura 1.19.

PUNTO *de repaso* Ahora trate de hacer el Ejercicio 23.

Simetría

Las gráficas de ecuaciones pueden tener **simetría** respecto a uno de los ejes de coordenadas o respecto al origen. La simetría respecto al eje x significa que si el plano cartesiano se doblara a lo largo del eje x, la parte de la gráfica arriba de ese eje coincidiría con la parte de abajo. La simetría respecto al eje y o al origen se puede describir de un modo semejante, como se ilustra en la Figura 1.20.



Simetría respecto al eje x | Simetría respecto al eje y | Simetría respecto al origen

FIGURA 1.20

Es útil conocer la simetría de una gráfica *antes* de tratar de trazarla, porque entonces se necesita sólo la mitad de los puntos de solución para hacerlo. Hay tres tipos básicos de simetría, que se describen a continuación.

Pruebas gráficas de simetría

1. Una gráfica es **simétrica respecto al eje *x*** si, siempre que (x, y) esté en la gráfica, $(x, -y)$ también lo está.
2. Una gráfica es **simétrica respecto al eje *y*** si, siempre que (x, y) esté en la gráfica, $(-x, y)$ también lo está.
3. Una gráfica es **simétrica respecto al origen** si, siempre que (x, y) esté en la gráfica, $(-x, -y)$ también lo está.

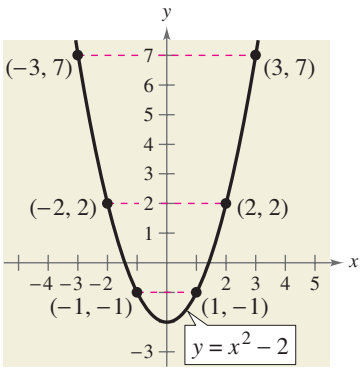


FIGURA 1.21 Simetría respecto al eje y

Se puede concluir que la gráfica de $y = x^2 - 2$ es simétrica respecto al eje y porque el punto $(-x, y)$ también está en la gráfica. (Vea la tabla siguiente y la Figura 1.21.)

x	-3	-2	-1	1	2	3
y	7	2	-1	-1	2	7
(x, y)	$(-3, 7)$	$(-2, 2)$	$(-1, -1)$	$(1, -1)$	$(2, 2)$	$(3, 7)$

Pruebas algebraicas de simetría

1. La gráfica de una ecuación es simétrica respecto al eje x si sustituyendo y con $-y$ resulta una ecuación equivalente.
2. La gráfica de una ecuación es simétrica respecto al eje y si sustituyendo x con $-x$ resulta una ecuación equivalente.
3. La gráfica de una ecuación es simétrica respecto al origen si sustituyendo x con $-x$ y y con $-y$ resulta una ecuación equivalente.

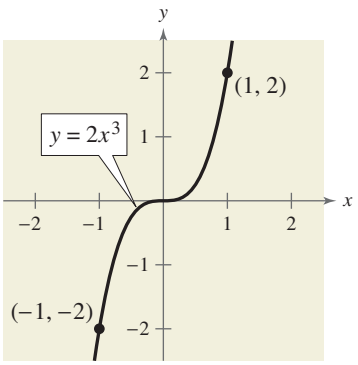


FIGURA 1.22

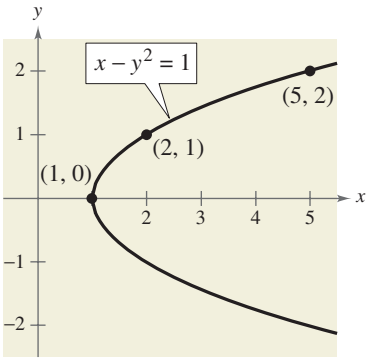


FIGURA 1.23

Ejemplo 5 Prueba de simetría

Pruebe si $y = 2x^3$ tiene simetría respecto a ambos ejes y al origen.

Solución

eje x:	$y = 2x^3$	Escribir la ecuación original.
	$-y = 2x^3$	Sustituir y con $-y$. El resultado *no es* una ecuación equivalente.
eje y:	$y = 2x^3$	Escribir la ecuación original.
	$y = 2(-x)^3$	Sustituir x con $-x$.
	$y = -2x^3$	Simplificar. El resultado *no es* una ecuación equivalente.
Origen:	$y = 2x^3$	Escribir la ecuación original.
	$-y = 2(-x)^3$	Sustituir y con $-y$ y x con $-x$.
	$-y = -2x^3$	Simplificar.
	$y = 2x^3$	Ecuación equivalente

De las tres pruebas de simetría, la única que se satisface es la de simetría respecto al origen (vea Figura 1.22).

PUNTO *de repaso* Ahora trate de hacer el Ejercicio 33.

Ejemplo 6 La simetría como apoyo de la graficación

Use simetría para trazar la gráfica de $x - y^2 = 1$.

Solución

De las tres pruebas de simetría, la única que se satisface es la de simetría respecto al eje x porque $x - (-y)^2 = 1$ es equivalente a $x - y^2 = 1$. Por tanto, la gráfica es simétrica respecto al eje x. Usando simetría, sólo se necesita hallar los puntos de solución arriba del eje x y a continuación reflejarlos para obtener la gráfica, como se muestra en la Figura 1.23.

PUNTO *de repaso* Ahora trate de hacer el Ejercicio 49.

Ayuda de álgebra

En el Ejemplo 7, $|x - 1|$ es una expresión de valor absoluto. En el Apéndice 1 se pueden repasar las técnicas para evaluar una expresión de valor absoluto.

Ejemplo 7 Trazar la gráfica de una ecuación

Trace la gráfica de $y = |x - 1|$.

Solución

Esta ecuación no satisface las tres pruebas de simetría y, en consecuencia, su gráfica no es simétrica respecto a cualquiera de los ejes o al origen. El signo de valor absoluto indica que y es siempre no negativa. Genere una tabla de valores y grafique los puntos, como se muestra en la Figura 1.24. De la tabla, se puede ver que $x = 0$ cuando $y = 1$. Por tanto, la intersección con el eje y es $(0, 1)$. Del mismo modo, $y = 0$ cuando $x = 1$. En consecuencia, la intersección con el eje x es $(1, 0)$.

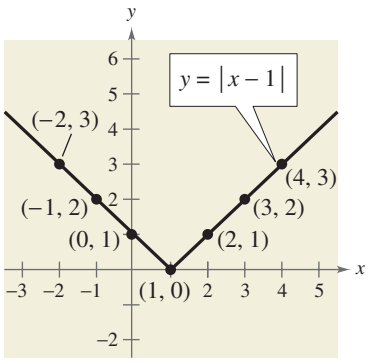


FIGURA 1.24

x	-2	-1	0	1	2	3	4
$y = \|x - 1\|$	3	2	1	0	1	2	3
(x, y)	$(-2, 3)$	$(-1, 2)$	$(0, 1)$	$(1, 0)$	$(2, 1)$	$(3, 2)$	$(4, 3)$

PUNTO *de repaso* Ahora trate de hacer el Ejercicio 53.

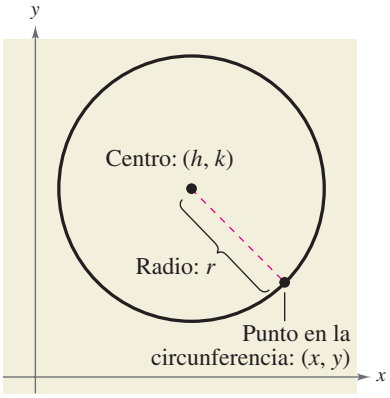


FIGURA 1.25

En todo este curso usted aprenderá a reconocer varios tipos de gráficas a partir de sus ecuaciones. Por ejemplo, aprenderá a reconocer que la gráfica de una ecuación de segundo grado de la forma

$$y = ax^2 + bx + c$$

es una parábola (vea el Ejemplo 3). La gráfica de una **circunferencia** también es fácil de reconocer.

Circunferencias

Considere la circunferencia que se ilustra en la Figura 1.25. Un punto (x, y) está en la circunferencia si y sólo si su distancia desde el centro (h, k) es r. Por la fórmula de la distancia,

$$\sqrt{(x - h)^2 + (y - k)^2} = r.$$

Al elevar al cuadrado cada lado de esta ecuación se obtiene la **forma estándar de la ecuación de una circunferencia.**

Forma estándar de la ecuación de una circunferencia

El punto (x, y) está en la circunferencia de **radio** r y **centro** (h, k) si y sólo si

$$(x - h)^2 + (y - k)^2 = r^2.$$

De este resultado, se puede ver que la forma estándar de la ecuación de una circunferencia *con centro en el origen*, $(h, k) = (0, 0)$, es simplemente

$$x^2 + y^2 = r^2.$$ Circunferencia con centro en el origen

ATENCIÓN

Sea cuidadoso cuando busque h y k de la ecuación estándar de una circunferencia. Por ejemplo, para hallar las h y k correctas de la ecuación de la circunferencia del Ejemplo 8, vuelva a escribir las cantidades $(x + 1)^2$ y $(y - 2)^2$ usando sustracción.

$$(x + 1)^2 = [x - (-1)]^2,$$
$$(y - 2)^2 = [y - (2)]^2$$

Por tanto, $h = -1$ y $k = 2$.

Ejemplo 8 Hallar la ecuación de una circunferencia

El punto $(3, 4)$ está en una circunferencia cuyo centro está en $(-1, 2)$, como se ilustra en la Figura 1.26. Escriba la forma estándar de la ecuación de esta circunferencia.

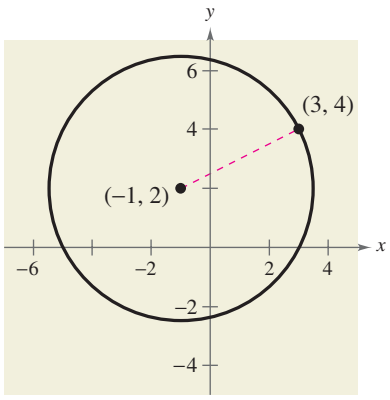


FIGURA 1.26

Solución

El radio de la circunferencia es la distancia entre $(-1, 2)$ y $(3, 4)$.

$$\begin{aligned} r &= \sqrt{(x - h)^2 + (y - k)^2} && \text{Fórmula de la distancia} \\ &= \sqrt{[3 - (-1)]^2 + (4 - 2)^2} && \text{Sustituir } x, y, h \text{ y } k. \\ &= \sqrt{4^2 + 2^2} && \text{Simplificar.} \\ &= \sqrt{16 + 4} && \text{Simplificar.} \\ &= \sqrt{20} && \text{Radio} \end{aligned}$$

Usando $(h, k) = (-1, 2)$ y $r = \sqrt{20}$, la ecuación de la circunferencia es

$$\begin{aligned} (x - h)^2 + (y - k)^2 &= r^2 && \text{Ecuación de la circunferencia} \\ [x - (-1)]^2 + (y - 2)^2 &= \left(\sqrt{20}\right)^2 && \text{Sustituir } h, k \text{ y } r. \\ (x + 1)^2 + (y - 2)^2 &= 20. && \text{Forma estándar} \end{aligned}$$

PUNTO *de repaso* Ahora trate de hacer el Ejercicio 73.

Aplicación

En este curso, aprenderá que hay numerosas formas de abordar un problema. En el Ejemplo 9 se ilustran tres métodos comunes.

Un *método numérico:* construya y use una tabla.
Un *método gráfico:* trace y use una gráfica.
Un *método algebraico:* use las reglas de álgebra.

Tip de estudio

Usted debe desarrollar el hábito de usar al menos dos métodos para resolver cualquier problema. Esto ayuda a su intuición y a comprobar que sus respuestas son razonables.

Ejemplo 9 Peso recomendado

El peso mediano recomendado y (en libras) para hombres de constitución mediana, de entre 25 y 59 años de edad, se puede calcular con el modelo matemático

$$y = 0.073x^2 - 6.99x + 289.0, \quad 62 \le x \le 76$$

donde x es la estatura del hombre (en pulgadas). (Fuente: Metropolitan Life Insurance Company)

a. Construya una tabla de valores que muestre los pesos medianos recomendados para hombres con estaturas de 62, 64, 66, 68, 70, 72, 74 y 76 pulgadas.

b. Use la tabla de valores para trazar una gráfica del modelo. A continuación use la gráfica para calcular *gráficamente* el peso mediano recomendado para un hombre cuya estatura es 71 pulgadas.

c. Use el modelo para confirmar *algebraicamente* el cálculo que usted encontró en el inciso (b).

Solución

a. Puede usar una calculadora para completar la tabla como se muestra a la izquierda.

Estatura, x	Peso, y
62	136.2
64	140.6
66	145.6
68	151.2
70	157.4
72	164.2
74	171.5
76	179.4

b. La tabla de valores puede usarse para trazar la gráfica de la ecuación, como se muestra en la Figura 1.27. Con base en la gráfica puede estimarse que una estatura de 71 pulgadas corresponde a un peso de 161 libras, aproximadamente.

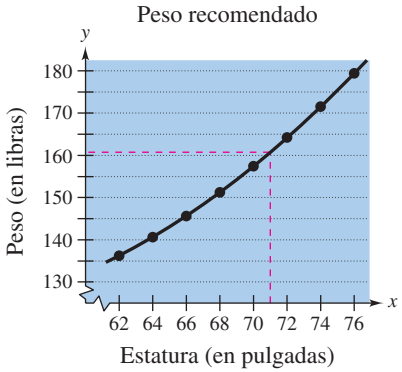


FIGURA 1.27

c. Para confirmar algebraicamente el cálculo hallado en el inciso (b), se puede sustituir 71 por x en el modelo.

$$y = 0.073(71)^2 - 6.99(71) + 289.0 \approx 160.70$$

Entonces, el cálculo gráfico de 161 libras es muy bueno.

PUNTO *de repaso* Ahora trate de hacer el Ejercicio 87.

1.2 EJERCICIOS

En www.CalcChat.com vea las soluciones a los ejercicios impares.

VOCABULARIO: Llene los espacios en blanco.

1. Un par ordenado (a, b) es un _____ _____ _____ de una ecuación con x y y si la ecuación es verdadera cuando a se sustituya por x y b se sustituya por y.
2. El conjunto de todos los puntos de solución de una ecuación es la _____ de la ecuación.
3. Los puntos en los que una gráfica interseca o corta un eje se denominan las _____ _____ _____ _____ de la gráfica.
4. Una gráfica es simétrica respecto al _____ si, siempre que (x, y) está en la gráfica, $(-x, y)$ también lo está.
5. La ecuación $(x - h)^2 + (y - k)^2 = r^2$ es la forma estándar de la ecuación de una _____ con centro _____ y radio _____.
6. Cuando se construya y use una tabla para resolver un problema se usa un método _____.

HABILIDADES Y APLICACIONES

En los Ejercicios 7-14, determine si cada punto se encuentra en la gráfica de la ecuación.

Ecuación	*Puntos*	
7. $y = \sqrt{x + 4}$	(a) $(0, 2)$	(b) $(5, 3)$
8. $y = \sqrt{5 - x}$	(a) $(1, 2)$	(b) $(5, 0)$
9. $y = x^2 - 3x + 2$	(a) $(2, 0)$	(b) $(-2, 8)$
10. $y = 4 - \lvert x - 2\rvert$	(a) $(1, 5)$	(b) $(6, 0)$
11. $y = \lvert x - 1\rvert + 2$	(a) $(2, 3)$	(b) $(-1, 0)$
12. $2x - y - 3 = 0$	(a) $(1, 2)$	(b) $(1, -1)$
13. $x^2 + y^2 = 20$	(a) $(3, -2)$	(b) $(-4, 2)$
14. $y = \frac{1}{3}x^3 - 2x^2$	(a) $\left(2, -\frac{16}{3}\right)$	(b) $(-3, 9)$

En los Ejercicios 15-18, complete la tabla. Use los puntos de solución resultantes para trazar la gráfica de la ecuación.

15. $y = -2x + 5$

x	-1	0	1	2	$\frac{5}{2}$
y					
(x, y)					

16. $y = \frac{3}{4}x - 1$

x	-2	0	1	$\frac{4}{3}$	2
y					
(x, y)					

17. $y = x^2 - 3x$

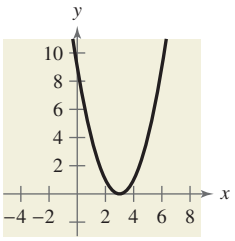
x	-1	0	1	2	3
y					
(x, y)					

18. $y = 5 - x^2$

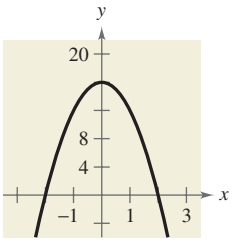
x	-2	-1	0	1	2
y					
(x, y)					

En los Ejercicios 19-22, gráficamente calcule las intersecciones con los ejes *x* y *y* de la gráfica. Verifique algebraicamente sus resultados.

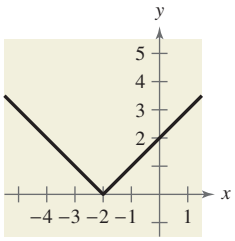
19. $y = (x - 3)^2$



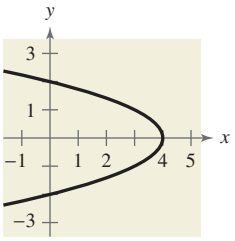
20. $y = 16 - 4x^2$



21. $y = \lvert x + 2\rvert$



22. $y^2 = 4 - x$



En los Ejercicios 23-32, encuentre las intersecciones con los ejes *x* y *y* de la gráfica de la ecuación.

23. $y = 5x - 6$

24. $y = 8 - 3x$

25. $y = \sqrt{x + 4}$

26. $y = \sqrt{2x - 1}$

27. $y = \lvert 3x - 7\rvert$

28. $y = -\lvert x + 10\rvert$

29. $y = 2x^3 - 4x^2$

30. $y = x^4 - 25$

31. $y^2 = 6 - x$

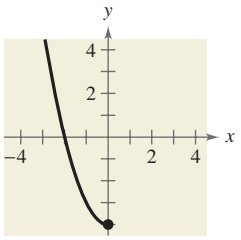
32. $y^2 = x + 1$

En los Ejercicios 33-40, use las pruebas algebraicas para verificar simetría respecto a ambos ejes y el origen.

33. $x^2 - y = 0$
34. $x - y^2 = 0$
35. $y = x^3$
36. $y = x^4 - x^2 + 3$
37. $y = \dfrac{x}{x^2 + 1}$
38. $y = \dfrac{1}{x^2 + 1}$
39. $xy^2 + 10 = 0$
40. $xy = 4$

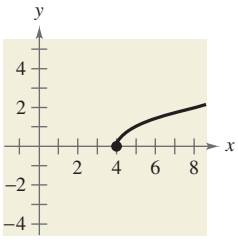
En los Ejercicios 41-44, suponga que la gráfica tiene el tipo de simetría indicado. Trace completa la gráfica de la ecuación. Para imprimir una copia amplificada de la gráfica, visite el sitio web *www.mathgraphs.com*.

41.



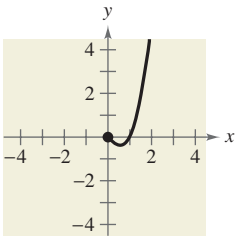
simetría con el eje y

42.



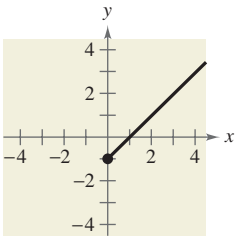
simetría con el eje x

43.



simetría con el origen

44.



simetría con el eje y

En los Ejercicios 45-56, identifique cualesquiera intersecciones con los ejes y pruebe simetría. A continuación, trace la gráfica de la ecuación.

45. $y = -3x + 1$
46. $y = 2x - 3$
47. $y = x^2 - 2x$
48. $y = -x^2 - 2x$
49. $y = x^3 + 3$
50. $y = x^3 - 1$
51. $y = \sqrt{x - 3}$
52. $y = \sqrt{1 - x}$
53. $y = |x - 6|$
54. $y = 1 - |x|$
55. $x = y^2 - 1$
56. $x = y^2 - 5$

En los Ejercicios 57-68, use una calculadora de gráficas para graficar la ecuación. Use un ajuste estándar. Aproxime cualesquiera intersecciones con los ejes.

57. $y = 3 - \frac{1}{2}x$
58. $y = \frac{2}{3}x - 1$
59. $y = x^2 - 4x + 3$
60. $y = x^2 + x - 2$
61. $y = \dfrac{2x}{x - 1}$
62. $y = \dfrac{4}{x^2 + 1}$
63. $y = \sqrt[3]{x} + 2$
64. $y = \sqrt[3]{x + 1}$
65. $y = x\sqrt{x + 6}$
66. $y = (6 - x)\sqrt{x}$
67. $y = |x + 3|$
68. $y = 2 - |x|$

En los Ejercicios 69-76, escriba la forma estándar de la ecuación de la circunferencia con las características dadas.

69. Centro: $(0, 0)$; radio: 4
70. Centro: $(0, 0)$; radio: 5
71. Centro: $(2, -1)$; radio: 4
72. Centro: $(-7, -4)$; radio: 7
73. Centro: $(-1, 2)$; punto solución: $(0, 0)$
74. Centro: $(3, -2)$; punto solución: $(-1, 1)$
75. Puntos extremos de un diámetro: $(0, 0)$, $(6, 8)$
76. Puntos extremos de un diámetro: $(-4, -1)$, $(4, 1)$

En los Ejercicios 77-82, encuentre el centro y radio de la circunferencia y trace su gráfica.

77. $x^2 + y^2 = 25$
78. $x^2 + y^2 = 16$
79. $(x - 1)^2 + (y + 3)^2 = 9$
80. $x^2 + (y - 1)^2 = 1$
81. $\left(x - \frac{1}{2}\right)^2 + \left(y - \frac{1}{2}\right)^2 = \frac{9}{4}$
82. $(x - 2)^2 + (y + 3)^2 = \frac{16}{9}$

83. DEPRECIACIÓN Un hospital compra una nueva máquina para imágenes de resonancia magnética en \$500 000 dólares. El valor depreciado y (valor reducido) después de t años está dado por $y = 500\,000 - 40\,000t$, $0 \le t \le 8$. Trace la gráfica de la ecuación.

84. CONSUMISMO Una persona compra un vehículo para todo terreno (ATV) en \$8000. El valor depreciado y después de t años está dado por $y = 8000 - 900t$, $0 \le t \le 6$. Trace la gráfica de la ecuación.

85. GEOMETRÍA Un campo de juego reglamentario de la NFL (incluidas las zonas de extremo) de longitud x y ancho y tiene un perímetro de $346\frac{2}{3}$, o sea, $\frac{1040}{3}$ yardas.

(a) Trace un rectángulo que dé una representación visual del problema. Use las variables especificadas para marcar los lados del rectángulo.

(b) Demuestre que el ancho del rectángulo es $y = \dfrac{520}{3} - x$ y su área es $A = x\left(\dfrac{520}{3} - x\right)$.

(c) Use una calculadora de gráficas para graficar la ecuación del área. Asegúrese de ajustar la imagen en la pantalla de la calculadora.

(d) De la gráfica del inciso (c), calcule las dimensiones del rectángulo que produzca un área máxima.

(e) Use la biblioteca de su escuela, el internet o alguna otra fuente de consulta para hallar las dimensiones y área reales de un campo de juego de la NFL, y compare sus hallazgos con los resultados del inciso (d).

El símbolo indica un ejercicio o parte de uno en el que se le pide que use una calculadora de gráficas.

86. GEOMETRÍA Un campo de fútbol soccer de longitud x y ancho y tiene un perímetro de 360 metros.

(a) Trace un rectángulo que dé una representación visual del problema. Use las variables especificadas para marcar los lados del rectángulo.

(b) Demuestre que el ancho del rectángulo es $y = 180 - x$ y su área es $A = x(180 - x)$.

(c) Use una calculadora de gráficas para graficar la ecuación del área. Asegúrese de ajustar la imagen en la pantalla de la calculadora.

(d) De la gráfica del inciso (c), calcule las dimensiones del rectángulo que dará un área máxima.

(e) Use la biblioteca de su escuela, el internet o alguna otra fuente de consulta para hallar las dimensiones y área reales de un campo de juego de la Major League Soccer, y compare sus hallazgos con los resultados del inciso (d).

87. ESTADÍSTICAS DE POBLACIÓN La tabla siguiente muestra las expectativas de vida de un niño (al nacer) en Estados Unidos, para los años seleccionados de 1920 a 2000. (Fuente: U.S. National Center for Health Statistics)

Año	Expectativa de vida, y
1920	54.1
1930	59.7
1940	62.9
1950	68.2
1960	69.7
1970	70.8
1980	73.7
1990	75.4
2000	77.0

Un modelo para la expectativa de vida durante este periodo es

$$y = -0.0025t^2 + 0.574t + 44.25, \quad 20 \le t \le 100$$

donde y representa la expectativa de vida y t es el tiempo en años, con $t = 20$ correspondiente a 1920.

(a) Use una calculadora de gráficas para graficar los datos de la tabla y el modelo en la misma pantalla. ¿Qué tan bien se ajusta el modelo a los datos? Explique.

(b) Determine la expectativa de vida en 1990 tanto gráfica como algebraicamente.

(c) Use la gráfica para determinar el año cuando la expectativa de vida era alrededor de 76.0. Verifique algebraicamente su respuesta.

(d) Una proyección para la expectativa de vida de un niño nacido en 2015 es 78.9. ¿Cómo se compara esto con la proyección dada en el modelo?

(e) ¿Piensa usted que este modelo se puede usar para predecir la expectativa de vida de un niño dentro de 50 años? Explique.

88. ELECTRÓNICA La resistencia y (en ohms) de 1000 pies de alambre sólido de cobre a 68 grados Fahrenheit puede calcularse con el siguiente modelo

$$y = \frac{10770}{x^2} - 0.37, \quad 5 \le x \le 100$$

donde x es el diámetro del alambre en mils (0.001 de pulgada). (Fuente: American Wire Gage)

(a) Complete la tabla.

x	5	10	20	30	40	50
y						

x	60	70	80	90	100
y					

(b) Use la tabla de valores del inciso (a) para trazar una gráfica del modelo. A continuación use su gráfica para calcular la resistencia cuando $x = 85.5$.

(c) Use el modelo para confirmar algebraicamente el cálculo que encontró en el inciso (b).

(d) ¿Qué se puede concluir en general acerca de la relación entre el diámetro del alambre de cobre y la resistencia?

EXPLORACIÓN

89. PIÉNSELO Encuentre a y b si la gráfica de $y = ax^2 + bx^3$ es simétrica respecto a (a) el eje y y (b) al origen. (Hay muchas respuestas correctas.)

90. TOQUE FINAL Relacione la ecuación o ecuaciones con las características dadas.

(i) $y = 3x^3 - 3x$ (ii) $y = (x + 3)^2$

(iii) $y = 3x - 3$ (iv) $y = \sqrt[3]{x}$

(v) $y = 3x^2 + 3$ (vi) $y = \sqrt{x + 3}$

(a) Simétrica respecto al eje y

(b) Tres intersecciones con el eje x

(c) Simétrica respecto al eje x

(d) $(-2, 1)$ es un punto sobre la gráfica

(e) Simétrica respecto al origen

(f) La gráfica pasa por el origen

1.3 Ecuaciones lineales con dos variables

Lo que debe aprender

- Usar la pendiente para graficar ecuaciones lineales con dos variables.
- Encontrar la pendiente de una recta dados dos puntos sobre ésta.
- Escribir ecuaciones lineales con dos variables.
- Usar la pendiente para identificar rectas paralelas y perpendiculares.
- Usar la pendiente y ecuaciones lineales con dos variables para modelar y resolver problemas reales.

Por qué debe aprenderlo

Las ecuaciones lineales con dos variables se pueden usar para modelar y resolver problemas reales. Por ejemplo, en el Ejercicio 129 de la página 36 se ve una ecuación lineal para modelar inscripciones de estudiantes en la Pennsylvania State University.

Uso de la pendiente

El modelo matemático más sencillo para relacionar dos variables es la **ecuación lineal con dos variables** $y = mx + b$. La ecuación se llama *lineal* porque su gráfica es una recta. (En matemáticas, el término *línea* quiere decir una *línea recta*.) Si hacemos $x = 0$, obtenemos

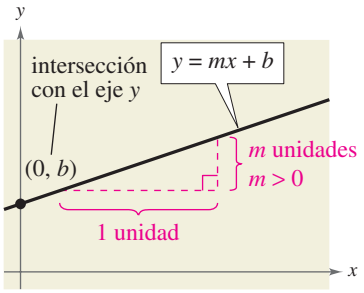
$$y = m(0) + b \qquad \text{Sustituir 0 por } x.$$
$$= b.$$

Entonces, la recta corta el eje y en $y = b$, como se muestra en la Figura 1.28. En otras palabras, la intersección con el eje y es $(0, b)$. La pendiente de la recta es m.

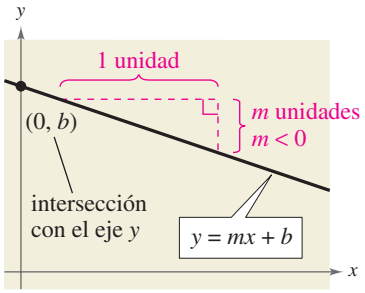
$$y = mx + b$$

Pendiente — Intersección con el eje y

La **pendiente** de una recta no vertical es el número de unidades que la recta sube (o baja) verticalmente por cada unidad de cambio horizontal de izquierda a derecha, como se ve en las Figuras 1.28 y 1.29.



Pendiente positiva, la recta sube
FIGURA 1.28



Pendiente negativa, la recta baja
FIGURA 1.29

Se dice que una ecuación lineal en la forma $y = mx + b$ está escrita en **forma pendiente-intersección con el eje y.**

Forma pendiente-intersección de la ecuación de una recta

La gráfica de la ecuación

$$y = mx + b$$

es una recta cuya pendiente es m y cuya intersección con el eje y es $(0, b)$.

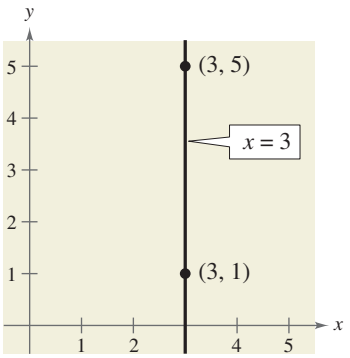


FIGURA 1.30 La pendiente no está definida

Una vez determinada la pendiente y la intersección con el eje y de una recta, es relativamente más sencillo trazar su gráfica. En el siguiente ejemplo, nótese que ninguna de las rectas es vertical. Una recta vertical tiene una ecuación de la forma

$$x = a.$$ Recta vertical

La ecuación de una recta vertical no se puede escribir en la forma $y = mx + b$ porque la pendiente de una recta vertical no está definida, como se indica en la Figura 1.30.

Ejemplo 1 Graficar una ecuación lineal

Trace la gráfica de cada una de las siguientes ecuaciones lineales.

a. $y = 2x + 1$

b. $y = 2$

c. $x + y = 2$

Solución

a. Como $b = 1$, la intersección con el eje y es $(0, 1)$. Además, como la pendiente es $m = 2$, la recta sube dos unidades por cada unidad que la recta se mueva a la derecha, como se ve en la Figura 1.31.

b. Al escribir esta ecuación en la forma $y = (0)x + 2$, se puede ver que la intersección con el eje y es $(0, 2)$ y la pendiente es cero. Una pendiente cero implica que la recta es horizontal, es decir, no sube *ni* baja, como se ve en la Figura 1.32.

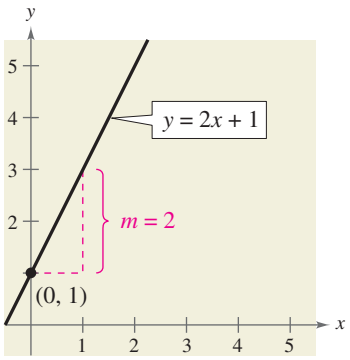
c. Al escribir esta ecuación en forma pendiente-intersección

$$x + y = 2$$ Escribir la ecuación original.

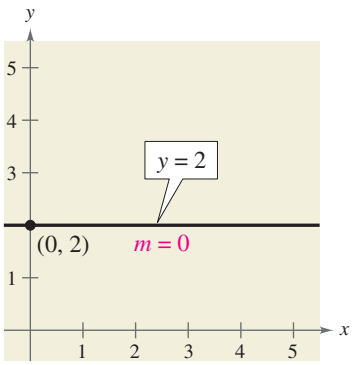
$$y = -x + 2$$ Restar x de cada lado.

$$y = (-1)x + 2$$ Escribir en forma pendiente-intersección.

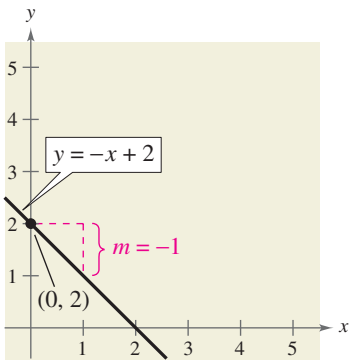
se puede ver que la intersección con el eje y es $(0, 2)$. Además, como la pendiente es $m = -1$, la recta *baja* una unidad por cada unidad que la recta se mueva a la derecha, como se muestra en la Figura 1.33.



Cuando m es positiva, la recta sube
FIGURA 1.31



Cuando m es 0, la recta es horizontal
FIGURA 1.32



Cuando m es negativa, la recta baja
FIGURA 1.33

PUNTO *de repaso* Ahora trate de hacer el Ejercicio 17.

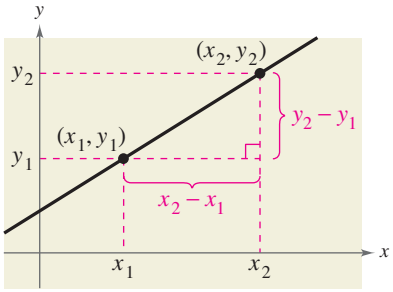


FIGURA 1.34

Hallar la pendiente de una recta

Dada una ecuación de una recta, se puede hallar su pendiente si se escribe en forma pendiente-intersección. Si no nos dan una ecuación, aún es posible hallar la pendiente de una recta. Supongamos que se desea hallar la pendiente de la recta que pasa por los puntos (x_1, y_1) y (x_2, y_2), como se ve en la Figura 1.34. Al moverse de izquierda a derecha a lo largo de esta recta, un cambio de $(y_2 - y_1)$ unidades en dirección vertical corresponde a un cambio de $(x_2 - x_1)$ unidades en dirección horizontal.

$$y_2 - y_1 = \text{el cambio en } y = \text{elevación}$$

y

$$x_2 - x_1 = \text{el cambio en } x = \text{corrimiento}$$

La razón $(y_2 - y_1)$ a $(x_2 - x_1)$ representa la pendiente de la recta que pasa por los puntos (x_1, y_1) y (x_2, y_2).

$$\text{Pendiente} = \frac{\text{cambio en } y}{\text{cambio en } x}$$

$$= \frac{\text{elevación}}{\text{corrimiento}}$$

$$= \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}$$

Pendiente de una recta que pasa por dos puntos

La **pendiente** m de la recta no vertical que pasa por (x_1, y_1) y (x_2, y_2) es

$$m = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}$$

donde $x_1 \neq x_2$.

Cuando esta fórmula se usa para la pendiente, el orden de sustracción es importante. Dados dos puntos sobre una recta, tenemos libertad de marcar cualquiera de ellos como (x_1, y_1) y el otro como (x_2, y_2), pero, una vez hecho esto, se debe formar el numerador y el denominador usando el mismo orden de sustracción.

$$\underbrace{m = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}}_{\text{Correcto}} \qquad \underbrace{m = \frac{y_1 - y_2}{x_1 - x_2}}_{\text{Correcto}} \qquad \underbrace{m = \frac{y_2 - y_1}{x_1 - x_2}}_{\text{Incorrecto}}$$

Por ejemplo, la pendiente de la recta que pasa por los puntos (3, 4) y (5, 7) se puede calcular como

$$m = \frac{7 - 4}{5 - 3} = \frac{3}{2}$$

o bien, invirtiendo el orden de sustracción en numerador y denominador, como

$$m = \frac{4 - 7}{3 - 5} = \frac{-3}{-2} = \frac{3}{2}.$$

Ejemplo 2 Hallar la pendiente de una recta que pasa por dos puntos

Encuentre la pendiente de la recta que pasa por cada par de puntos.

a. $(-2, 0)$ y $(3, 1)$ **b.** $(-1, 2)$ y $(2, 2)$

c. $(0, 4)$ y $(1, -1)$ **d.** $(3, 4)$ y $(3, 1)$

Solución

a. Haciendo $(x_1, y_1) = (-2, 0)$ y $(x_2, y_2) = (3, 1)$, resulta una pendiente de

$$m = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1} = \frac{1 - 0}{3 - (-2)} = \frac{1}{5}.$$ Vea Figura 1.35.

b. La pendiente de la recta que pasa por $(-1, 2)$ y $(2, 2)$ es

$$m = \frac{2 - 2}{2 - (-1)} = \frac{0}{3} = 0.$$ Vea Figura 1.36.

c. La pendiente de la recta que pasa por $(0, 4)$ y $(1, -1)$ es

$$m = \frac{-1 - 4}{1 - 0} = \frac{-5}{1} = -5.$$ Vea Figura 1.37.

d. La pendiente de la recta que pasa por $(3, 4)$ y $(3, 1)$ es

$$m = \frac{1 - 4}{3 - 3} = \frac{-3}{0}.$$ Vea Figura 1.38.

Como la división entre 0 no está definida, la pendiente tampoco lo está y la recta es vertical.

Ayuda de álgebra

Para hallar las pendientes del Ejemplo 2, es necesario que el estudiante pueda evaluar expresiones racionales. En el Apéndice A.4 se pueden repasar las técnicas para ello.

Tip de estudio

En las Figuras 1.35 a 1.38, nótense las relaciones entre la pendiente y la orientación de la recta.

a. Pendiente positiva: la recta sube de izquierda a derecha

b. Pendiente cero: la recta es horizontal

c. Pendiente negativa: la recta baja de izquierda a derecha

d. Pendiente no definida: la recta es vertical

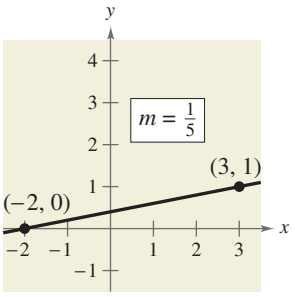


FIGURA 1.35

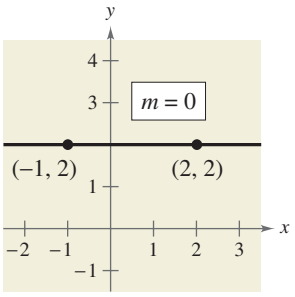


FIGURA 1.36

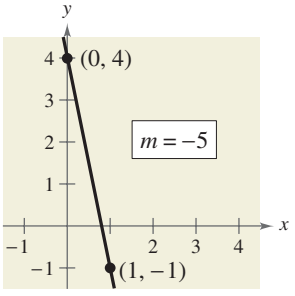


FIGURA 1.37

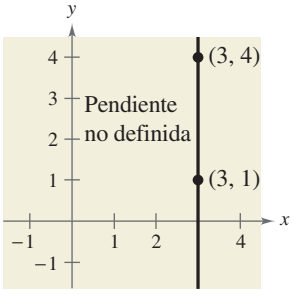


FIGURA 1.38

PUNTO *de repaso* Ahora trate de hacer el Ejercicio 31.

Escribir ecuaciones lineales con dos variables

Si (x_1, y_1) es un punto sobre la recta de pendiente m y (x, y) es *cualquier otro* punto sobre la recta, entonces

$$\frac{y - y_1}{x - x_1} = m.$$

Esta ecuación, en la que aparecen las variables x y y, se puede reescribir en la forma

$$y - y_1 = m(x - x_1)$$

que es la forma **punto-pendiente** de la ecuación de una recta.

Forma punto-pendiente de la ecuación de una recta

La ecuación de la recta con pendiente m que pasa por el punto (x_1, y_1) es

$$y - y_1 = m(x - x_1).$$

La forma punto-pendiente es más útil para *hallar* la ecuación de una recta. El estudiante debe recordarla.

Ejemplo 3 Usar la forma punto-pendiente

Encuentre la forma punto-pendiente de la ecuación de la recta que tiene una pendiente de 3 y pasa por el punto $(1, -2)$.

Solución

Use la forma punto-pendiente con $m = 3$ y $(x_1, y_1) = (1, -2)$.

$$y - y_1 = m(x - x_1) \qquad \text{Forma punto-pendiente}$$
$$y - (-2) = 3(x - 1) \qquad \text{Sustituir por } m, x_1 \text{ y } y_1.$$
$$y + 2 = 3x - 3 \qquad \text{Simplificar.}$$
$$y = 3x - 5 \qquad \text{Escribir en forma pendiente-intersección.}$$

La forma pendiente-intersección de la ecuación de la recta es $y = 3x - 5$. La gráfica de esta recta se ilustra en la Figura 1.39.

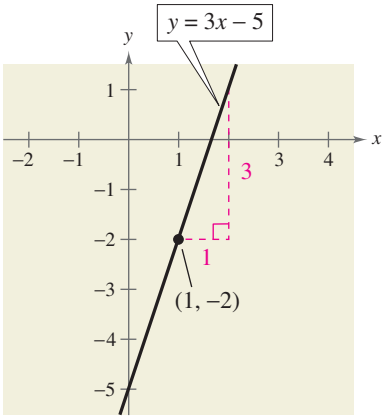


FIGURA 1.39

PUNTO *de repaso* Ahora trate de hacer el Ejercicio 51.

Tip de estudio

Cuando encuentre una ecuación de la recta que pase por dos puntos determinados, sólo necesita sustituir las coordenadas de uno de los puntos en la forma punto-pendiente. No importa cuál punto se escoja porque ambos darán el mismo resultado.

La forma punto-pendiente se puede usar para hallar una ecuación de la recta que pase por dos puntos (x_1, y_1) y (x_2, y_2). Para hacer esto, primero encuentre la pendiente de la recta

$$m = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}, \quad x_1 \neq x_2$$

y a continuación use la forma punto-pendiente para obtener la ecuación

$$y - y_1 = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}(x - x_1). \qquad \text{Forma de dos puntos}$$

Esto a veces se conoce como **forma de dos puntos** de la ecuación de una recta.

Rectas paralelas y perpendiculares

La pendiente se puede usar para determinar si dos rectas no verticales en un plano son paralelas, perpendiculares o ninguna de ellas.

Rectas paralelas y perpendiculares

1. Dos rectas no verticales son **paralelas** si y sólo si sus pendientes son iguales. Esto es, $m_1 = m_2$.
2. Dos rectas no verticales son **perpendiculares** si y sólo si sus pendientes son recíprocas no negativas entre sí. Esto es, $m_1 = -1/m_2$.

Ejemplo 4 Hallar rectas paralelas y perpendiculares

Encuentre las formas pendiente-intersección de las ecuaciones de las rectas que pasan por el punto $(2, -1)$ y son (a) paralelas y (b) perpendiculares a la recta $2x - 3y = 5$.

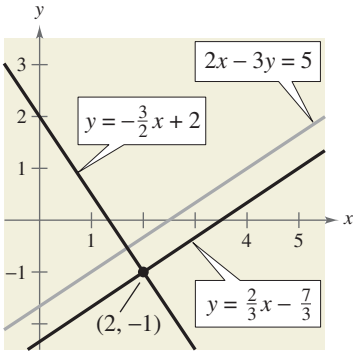


FIGURA 1.40

Solución

Escribiendo la ecuación de la recta dada en forma pendiente-intersección

$$\begin{aligned} 2x - 3y &= 5 && \text{Escribir la ecuación original.} \\ -3y &= -2x + 5 && \text{Restar } 2x \text{ de cada lado.} \\ y &= \tfrac{2}{3}x - \tfrac{5}{3} && \text{Escribir en forma pendiente-intersección.} \end{aligned}$$

se puede ver que tiene una pendiente de $m = \frac{2}{3}$, como se muestra en la Figura 1.40.

a. Cualquier recta paralela a la recta dada también debe tener una pendiente de $\frac{2}{3}$. Por tanto, la recta que pasa por $(2, -1)$ que es paralela a la recta dada tiene la siguiente ecuación.

$$\begin{aligned} y - (-1) &= \tfrac{2}{3}(x - 2) && \text{Escribir en forma punto-pendiente.} \\ 3(y + 1) &= 2(x - 2) && \text{Multiplicar cada lado por 3.} \\ 3y + 3 &= 2x - 4 && \text{Propiedad distributiva} \\ y &= \tfrac{2}{3}x - \tfrac{7}{3} && \text{Escribir en forma pendiente-intersección.} \end{aligned}$$

b. Cualquier recta perpendicular a la recta dada debe tener una pendiente de $-\frac{3}{2}$ (porque $-\frac{3}{2}$ es el recíproco negativo de $\frac{2}{3}$). Entonces, la recta que pasa por $(2, -1)$ que es perpendicular a la recta dada tiene la siguiente ecuación.

$$\begin{aligned} y - (-1) &= -\tfrac{3}{2}(x - 2) && \text{Escribir en forma punto-pendiente.} \\ 2(y + 1) &= -3(x - 2) && \text{Multiplicar cada lado por 2.} \\ 2y + 2 &= -3x + 6 && \text{Propiedad distributiva} \\ y &= -\tfrac{3}{2}x + 2 && \text{Escribir en forma pendiente-intersección.} \end{aligned}$$

PUNTO *de repaso* Ahora trate de hacer el Ejercicio 87.

Nótese en el Ejemplo 4 cómo se usa la forma pendiente-intersección para obtener información acerca de la gráfica de una recta, mientras que la forma punto-pendiente se usa para escribir la ecuación de una recta.

TECNOLOGÍA

En una calculadora de gráficas, las rectas no parecerán tener la pendiente correcta a menos que use una pantalla que tenga ajuste cuadrado. Por ejemplo, trate de graficar las rectas del Ejemplo 4 usando el ajuste estándar $-10 \le x \le 10$ y $-10 \le y \le 10$. A continuación reajuste la pantalla con el ajuste cuadrado de $-9 \le x \le 9$ y $-6 \le y \le 6$. ¿En cuál ajuste parecen perpendiculares las rectas $y = \frac{2}{3}x - \frac{5}{3}$ y $y = -\frac{3}{2}x + 2$?

Aplicaciones

En problemas reales, la pendiente de una recta se puede interpretar como una *razón* o *tasa*. Si el eje x y el eje y tienen la misma unidad de medida, entonces la pendiente no tiene unidades y es una **razón.** Si el eje x y el eje y tienen diferentes unidades de medida, entonces la pendiente es una **tasa** o **razón de cambio.**

Ejemplo 5 Usar una pendiente como razón

La máxima pendiente recomendada en una rampa para sillas de ruedas es $\frac{1}{12}$. Un negocio está instalando una rampa para sillas de ruedas que sube 22 pulgadas sobre una longitud horizontal de 24 pies. ¿La rampa está más inclinada que lo recomendado? (Fuente: *Americans with Disabilities Act Handbook*)

Solución

La longitud horizontal de la rampa es 24 pies, o sea $12(24) = 288$ pulgadas, como se ve en la Figura 1.41. Entonces, la pendiente de la rampa es

$$\text{Pendiente} = \frac{\text{cambio vertical}}{\text{cambio horizontal}} = \frac{22 \text{ in.}}{288 \text{ in.}} \approx 0.076.$$

Como $\frac{1}{12} \approx 0.083$, la pendiente de la rampa no está más inclinada que lo recomendado.

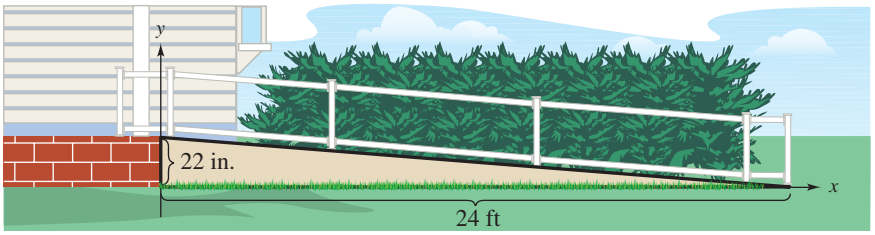


FIGURA 1.41

PUNTO *de repaso* Ahora trate de hacer el Ejercicio 115.

Ejemplo 6 Usar la pendiente como razón de cambio

Una compañía fabricante de aparatos de cocina determina que el costo total en dólares de producir x unidades de una licuadora es

$$C = 25x + 3500. \qquad \text{Ecuación de costo}$$

Describa el significado práctico de la intersección con el eje y y la pendiente de esta recta.

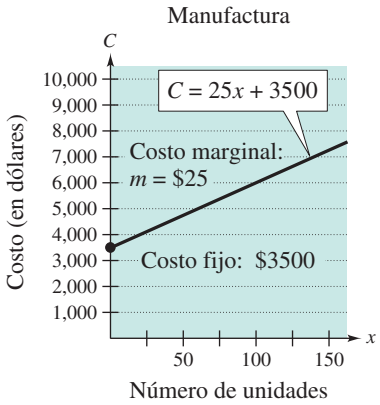


FIGURA 1.42 Costo de producción

Solución

La intersección con el eje y $(0, 3500)$ nos dice que el costo de producir cero unidades es \$3500. Éste es el *costo fijo* de producción que incluye costos que deben ser pagados cualquiera que sea el número de unidades producidas. La pendiente de $m = 25$ nos dice que el costo de producir cada unidad es \$25, como se ve en la Figura 1.42. Los economistas llaman *costo marginal* al costo por unidad. Si la producción aumenta en una unidad, entonces el "margen", o cantidad extra de costo, es \$25. Entonces, el costo aumenta a razón de \$25 por unidad.

PUNTO *de repaso* Ahora trate de hacer el Ejercicio 119.

Casi todos los gastos empresariales se pueden deducir en el mismo año en que ocurren. Una excepción es el costo de propiedad, que tiene una vida útil de más de 1 año. Estos costos deben *depreciarse* (disminuir de valor) en la vida útil de la propiedad. Si la *misma cantidad* se deprecia cada año, el procedimiento recibe el nombre de *depreciación lineal* o *en línea recta*. El *valor en libros* es la diferencia entre el valor original y la cantidad total de depreciación acumulada a la fecha.

Ejemplo 7 Depreciación en línea recta

Un colegio compró equipo para hacer ejercicios valuado en $12 000 para el nuevo centro de acondicionamiento físico del plantel. El equipo tiene una vida útil de 8 años. El valor recuperado al término de los 8 años es de $2000. Escriba una ecuación lineal que describa el valor en libros del equipo en cada año.

Solución

Representemos con V el valor del equipo al término del año t. Se puede representar el valor inicial del equipo con el punto de datos (0, 12 000) y el valor recuperado del equipo por el punto de datos (8, 2000). La pendiente de la recta es

$$m = \frac{2000 - 12\,000}{8 - 0} = -\$1250$$

que representa la depreciación anual en *dólares por año*. Usando la forma punto-pendiente se puede escribir la ecuación de la recta como sigue.

$$V - 12\,000 = -1250(t - 0) \qquad \text{Escribir en forma punto-pendiente.}$$

$$V = -1250t + 12\,000 \qquad \text{Escribir en forma pendiente-intersección.}$$

La tabla muestra el valor en libros al término de cada año, y la gráfica de la ecuación se muestra en la Figura 1.43.

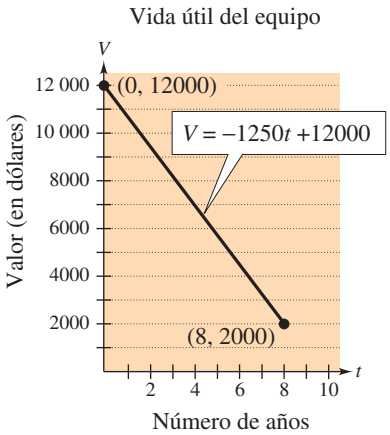


FIGURA 1.43 Depreciación en línea recta

Año, t	Valor, V
0	12 000
1	10 750
2	9500
3	8250
4	7000
5	5750
6	4500
7	3250
8	2000

PUNTO *de repaso* Ahora trate de hacer el Ejercicio 121.

En numerosas aplicaciones prácticas, los dos puntos de datos que determinan la recta a veces se dan en forma disfrazada. Observe la forma en que los puntos de datos se describen en el Ejemplo 7.

Ejemplo 8 Pronosticar ventas

Las ventas de Best Buy fueron alrededor de \$35 900 millones de dólares en 2006 y \$40 000 millones en 2007. Usando sólo esta información, escriba una ecuación lineal que dé las ventas (en miles de millones de dólares) en términos del año. A continuación pronostique las ventas para 2010. (Fuente: Best Buy Company, Inc.)

Solución

Con $t = 6$ represente 2006. Entonces los dos valores dados están representados por los puntos de datos $(6, 35.9)$ y $(7, 40.0)$. La pendiente de la recta que pasa por estos puntos es

$$m = \frac{40.0 - 35.9}{7 - 6}$$

$$= 4.1.$$

Usando la forma punto-pendiente, se puede hallar que la ecuación que relaciona las ventas y y el año t es

$$y - 35.9 = 4.1(t - 6) \qquad \text{Escribir en forma punto-pendiente.}$$

$$y = 4.1t + 11.3. \qquad \text{Escribir en forma pendiente-intersección.}$$

De acuerdo con esta ecuación, las ventas para 2010 serán de

$$y = 4.1(10) + 11.3 = 41 + 11.3 = \$52.3 \text{ mil millones.}$$ (Vea Figura 1.44.)

PUNTO *de repaso* Ahora trate de hacer el Ejercicio 129.

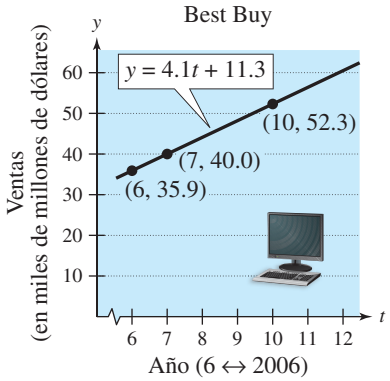
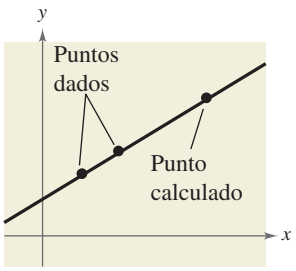


FIGURA 1.44

El método de predicción ilustrado en el Ejemplo 8 se denomina **extrapolación lineal.** Nótese en la Figura 1.45 que un punto extrapolado no está entre los puntos dados. Cuando el punto estimado se encuentra entre dos puntos dados, como se muestra en la Figura 1.46, el procedimiento recibe el nombre de **interpolación lineal.**



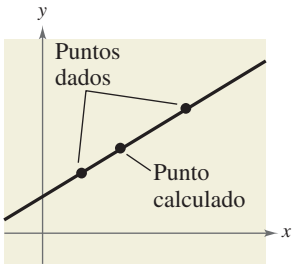
Extrapolación lineal

FIGURA 1.45

Como la pendiente de una recta vertical no está definida, su ecuación no se puede escribir en forma pendiente-intersección. No obstante, toda recta tiene una ecuación que se puede escribir en la **forma general**

$$Ax + By + C = 0 \qquad \text{Forma general}$$

donde A y B son diferentes de cero. Por ejemplo, la recta vertical dada por $x = a$ puede ser representada por la forma general $x - a = 0$.



Interpolación lineal

FIGURA 1.46

Resumen de ecuaciones de rectas

1.	Forma general:	$Ax + By + C = 0$
2.	Recta vertical:	$x = a$
3.	Recta horizontal:	$y = b$
4.	Forma pendiente-intersección:	$y = mx + b$
5.	Forma punto-pendiente:	$y - y_1 = m(x - x_1)$
6.	Forma de dos puntos:	$y - y_1 = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}(x - x_1)$

1.3 EJERCICIOS

En www.CalcChat.com vea las soluciones a los ejercicios impares.

VOCABULARIO

En los Ejercicios 1-7, llene los espacios en blanco.

1. El modelo matemático más sencillo para relacionar dos variables es la ecuación _____ con dos variables $y = mx + b$.
2. Para una recta, la razón entre el cambio en y y el cambio en x se denomina _____ de la recta.
3. Dos rectas son _____ si y sólo si sus pendientes son iguales.
4. Dos rectas son _____ si y sólo si sus pendientes son recíprocas negativas entre sí.
5. Cuando el eje x y el eje y tienen diferentes unidades de medida, la pendiente se puede interpretar como _____.
6. El método de predicción _____ _____ es el método empleado para calcular un punto en una recta cuando el punto no se encuentra entre los puntos dados.
7. Toda recta tiene una ecuación que se puede escribir en forma de _____.
8. Relacione cada una de las ecuaciones siguientes de una recta con su forma.

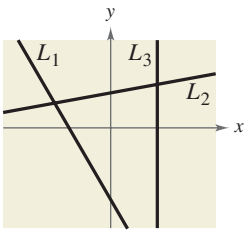
(a) $Ax + By + C = 0$	(i) Recta vertical
(b) $x = a$	(ii) Forma pendiente-intersección
(c) $y = b$	(iii) Forma general
(d) $y = mx + b$	(iv) Forma punto-pendiente
(e) $y - y_1 = m(x - x_1)$	(v) Recta horizontal

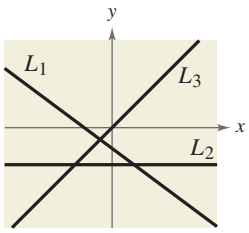
HABILIDADES Y APLICACIONES

En los Ejercicios 9 y 10, identifique la recta que tiene cada pendiente.

9. (a) $m = \frac{2}{3}$
(b) m no está definida.
(c) $m = -2$

10. (a) $m = 0$
(b) $m = -\frac{3}{4}$
(c) $m = 1$



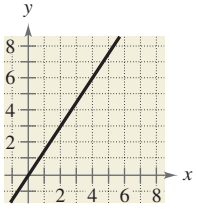


En los Ejercicios 11 y 12, trace las rectas que pasan por el punto con las pendientes indicadas, en el mismo conjunto de ejes de coordenadas.

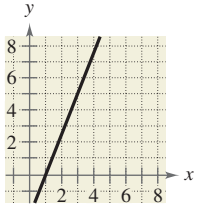
	Punto	*Pendientes*			
11.	(2, 3)	(a) 0	(b) 1	(c) 2	(d) -3
12.	$(-4, 1)$	(a) 3	(b) -3	(c) $\frac{1}{2}$	(d) No definida

En los Ejercicios 13-16, calcule la pendiente de la recta.

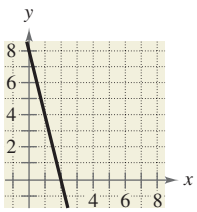
13.



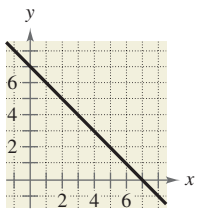
14.



15.



16.



En los Ejercicios 17-28, encuentre la pendiente y la intersección con el eje y (si es posible) de la ecuación de la recta. Trace la recta.

17. $y = 5x + 3$
18. $y = x - 10$
19. $y = -\frac{1}{2}x + 4$
20. $y = -\frac{3}{2}x + 6$
21. $5x - 2 = 0$
22. $3y + 5 = 0$
23. $7x + 6y = 30$
24. $2x + 3y = 9$
25. $y - 3 = 0$
26. $y + 4 = 0$
27. $x + 5 = 0$
28. $x - 2 = 0$

En los Ejercicios 29-40, grafique los puntos y encuentre la pendiente de la recta que pasa por el par de puntos.

29. $(0, 9), (6, 0)$
30. $(12, 0), (0, -8)$
31. $(-3, -2), (1, 6)$
32. $(2, 4), (4, -4)$
33. $(5, -7), (8, -7)$
34. $(-2, 1), (-4, -5)$
35. $(-6, -1), (-6, 4)$
36. $(0, -10), (-4, 0)$
37. $\left(\frac{11}{2}, -\frac{4}{3}\right), \left(-\frac{3}{2}, -\frac{1}{3}\right)$
38. $\left(\frac{7}{8}, \frac{3}{4}\right), \left(\frac{5}{4}, -\frac{1}{4}\right)$
39. $(4.8, 3.1), (-5.2, 1.6)$
40. $(-1.75, -8.3), (2.25, -2.6)$

En los Ejercicios 41-50, use el punto sobre la recta y la pendiente m de ésta para hallar tres puntos adicionales por los que pasa la recta. (Hay numerosas respuestas correctas.)

41. $(2, 1), \quad m = 0$
42. $(3, -2), \quad m = 0$
43. $(5, -6), \quad m = 1$
44. $(10, -6), \quad m = -1$
45. $(-8, 1), \quad m$ no está definida.
46. $(1, 5), \quad m$ no está definida.
47. $(-5, 4), \quad m = 2$
48. $(0, -9), \quad m = -2$
49. $(7, -2), \quad m = \frac{1}{2}$
50. $(-1, -6), \quad m = -\frac{1}{2}$

En los Ejercicios 51-64, encuentre la forma pendiente-intersección de la ecuación de la recta que pasa por el punto dado y tiene la pendiente indicada m. Trace la recta.

51. $(0, -2), \quad m = 3$
52. $(0, 10), \quad m = -1$
53. $(-3, 6), \quad m = -2$
54. $(0, 0), \quad m = 4$
55. $(4, 0), \quad m = -\frac{1}{3}$
56. $(8, 2), \quad m = \frac{1}{4}$
57. $(2, -3), \quad m = -\frac{1}{2}$
58. $(-2, -5), \quad m = \frac{3}{4}$
59. $(6, -1), \quad m$ no está definida.
60. $(-10, 4), \quad m$ no está definida.
61. $\left(4, \frac{5}{2}\right), \quad m = 0$
62. $\left(-\frac{1}{2}, \frac{3}{2}\right), \quad m = 0$
63. $(-5.1, 1.8), \quad m = 5$
64. $(2.3, -8.5), \quad m = -2.5$

En los Ejercicios 65-78, encuentre la forma pendiente-intersección de la ecuación de la recta que pasa por los puntos. Trace la recta.

65. $(5, -1), (-5, 5)$
66. $(4, 3), (-4, -4)$
67. $(-8, 1), (-8, 7)$
68. $(-1, 4), (6, 4)$
69. $\left(2, \frac{1}{2}\right), \left(\frac{1}{2}, \frac{5}{4}\right)$
70. $(1, 1), \left(6, -\frac{2}{3}\right)$
71. $\left(-\frac{1}{10}, -\frac{3}{5}\right), \left(\frac{9}{10}, -\frac{9}{5}\right)$
72. $\left(\frac{3}{4}, \frac{3}{2}\right), \left(-\frac{4}{3}, \frac{7}{4}\right)$
73. $(1, 0.6), (-2, -0.6)$
74. $(-8, 0.6), (2, -2.4)$
75. $(2, -1), \left(\frac{1}{3}, -1\right)$
76. $\left(\frac{1}{5}, -2\right), (-6, -2)$
77. $\left(\frac{7}{3}, -8\right), \left(\frac{7}{3}, 1\right)$
78. $(1.5, -2), (1.5, 0.2)$

En los Ejercicios 79-82, determine si las rectas son paralelas, perpendiculares o ninguna de ellas.

79. L_1: $y = \frac{1}{3}x - 2$
L_2: $y = \frac{1}{3}x + 3$
80. L_1: $y = 4x - 1$
L_2: $y = 4x + 7$
81. L_1: $y = \frac{1}{2}x - 3$
L_2: $y = -\frac{1}{2}x + 1$
82. L_1: $y = -\frac{4}{5}x - 5$
L_2: $y = \frac{5}{4}x + 1$

En los Ejercicios 83-86, determine si las rectas L_1 y L_2 que pasan por los pares de puntos son paralelas, perpendiculares o ninguna de ellas.

83. L_1: $(0, -1), (5, 9)$
L_2: $(0, 3), (4, 1)$
84. L_1: $(-2, -1), (1, 5)$
L_2: $(1, 3), (5, -5)$
85. L_1: $(3, 6), (-6, 0)$
L_2: $(0, -1), \left(5, \frac{7}{3}\right)$
86. L_1: $(4, 8), (-4, 2)$
L_2: $(3, -5), \left(-1, \frac{1}{3}\right)$

En los Ejercicios 87-96, escriba las formas pendiente-intersección de las ecuaciones de las rectas que pasan por el punto dado (a) paralelo a la recta dada y (b) perpendicular a la recta dada.

87. $4x - 2y = 3, \quad (2, 1)$
88. $x + y = 7, \quad (-3, 2)$
89. $3x + 4y = 7, \quad \left(-\frac{2}{3}, \frac{7}{8}\right)$
90. $5x + 3y = 0, \quad \left(\frac{7}{8}, \frac{3}{4}\right)$
91. $y + 3 = 0, \quad (-1, 0)$
92. $y - 2 = 0, \quad (-4, 1)$
93. $x - 4 = 0, \quad (3, -2)$
94. $x + 2 = 0, \quad (-5, 1)$
95. $x - y = 4, \quad (2.5, 6.8)$
96. $6x + 2y = 9, \quad (-3.9, -1.4)$

En los Ejercicios 97-102, use la *forma de intersección* con los ejes para hallar la ecuación de la recta con las intersecciones dadas. La forma de intersección con los ejes de la ecuación de una recta con intersecciones $(a, 0)$ y $(0, b)$ es

$$\frac{x}{a} + \frac{y}{b} = 1, \quad a \neq 0, \quad b \neq 0.$$

97. intersección x: $(2, 0)$
intersección y: $(0, 3)$
98. intersección x: $(-3, 0)$
intersección y: $(0, 4)$
99. intersección x: $\left(-\frac{1}{6}, 0\right)$
intersección y: $\left(0, -\frac{2}{3}\right)$
100. intersección x: $\left(\frac{2}{3}, 0\right)$
intersección y: $(0, -2)$
101. Punto en la recta: $(1, 2)$
intersección x: $(c, 0)$
intersección y: $(0, c), \quad c \neq 0$
102. Punto en la recta: $(-3, 4)$
intersección x: $(d, 0)$
intersección y: $(0, d), \quad d \neq 0$

ANÁLISIS GRÁFICO En los Ejercicios 103-106, identifique cualesquiera relaciones que existan entre las rectas y, a continuación, utilice una calculadora de gráficas para graficar las tres ecuaciones en la misma ventana de observación. Ajuste la ventana para que la pendiente aparezca visualmente correcta, es decir, de modo que las rectas paralelas parezcan paralelas y las rectas perpendiculares parezcan intersecarse en ángulos rectos.

103. (a) $y = 2x$ (b) $y = -2x$ (c) $y = \frac{1}{2}x$
104. (a) $y = \frac{2}{3}x$ (b) $y = -\frac{3}{2}x$ (c) $y = \frac{2}{3}x + 2$
105. (a) $y = -\frac{1}{2}x$ (b) $y = -\frac{1}{2}x + 3$ (c) $y = 2x - 4$
106. (a) $y = x - 8$ (b) $y = x + 1$ (c) $y = -x + 3$

En los Ejercicios 107-110, encuentre la relación entre x y y tal que (x, y) sea equidistante (la misma distancia) desde los dos puntos.

107. $(4, -1), (-2, 3)$
108. $(6, 5), (1, -8)$
109. $\left(3, \frac{5}{2}\right), (-7, 1)$
110. $\left(-\frac{1}{2}, -4\right), \left(\frac{7}{2}, \frac{5}{4}\right)$

111. VENTAS Las siguientes son las pendientes de rectas que representan ventas anuales y en términos de tiempo x en años. Use las pendientes para interpretar cualquier cambio en las ventas anuales para un aumento de un año en tiempo.

(a) La recta tiene una pendiente de $m = 135$.

(b) La recta tiene una pendiente de $m = 0$.

(c) La recta tiene una pendiente de $m = -40$.

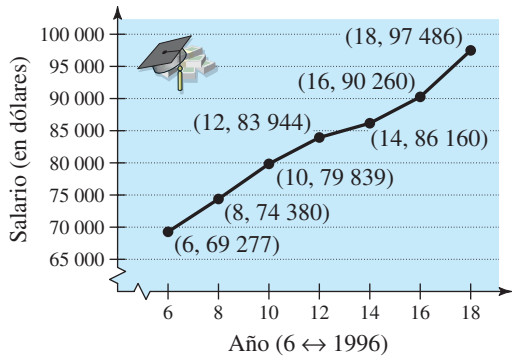
112. INGRESOS Las siguientes son las pendientes de rectas que representan ingresos diarios y en términos de tiempo x en días. Use las pendientes para interpretar cualquier cambio en los ingresos diarios para aumento de un día en tiempo.

(a) La recta tiene una pendiente de $m = 400$.

(b) La recta tiene una pendiente de $m = 100$.

(c) La recta tiene una pendiente de $m = 0$.

113. SALARIO PROMEDIO La gráfica muestra los salarios promedio para directores decanos de preparatoria, de 1996 a 2008. (Fuente: Educational Research Service)

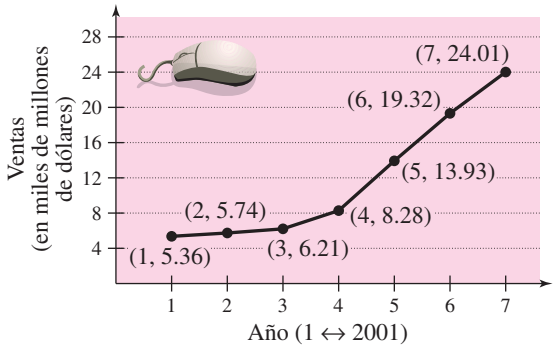


(a) Use las pendientes de los segmentos de recta para determinar los periodos en los que el salario promedio aumentó lo más y lo menos.

(b) Encuentre la pendiente del segmento de recta que enlaza los puntos para los años 1996 y 2008.

(c) Interprete el significado de la pendiente del inciso (b) en el contexto del problema.

114. VENTAS La gráfica muestra las ventas (en miles de millones de dólares) de Apple Inc. para los años 2001 a 2007. (Fuente: Apple Inc.)

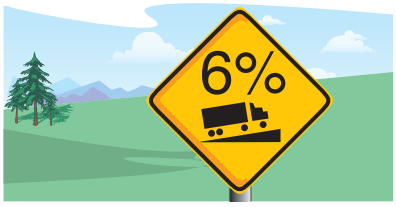


(a) Use las pendientes de los segmentos de recta para determinar los años en los que las ventas mostraron el aumento máximo y mínimo.

(b) Encuentre la pendiente del segmento de recta que enlaza los puntos para los años 2001 y 2007.

(c) Interprete el significado de la pendiente del inciso (b) en el contexto del problema.

115. PENDIENTE EN UNA CARRETERA Una persona conduce un vehículo en una carretera que tiene una cuesta de 6% (vea figura). Esto significa que la cuesta de la carretera es $\frac{6}{100}$. Calcule la variación vertical en su posición si recorre 200 pies.



116. PENDIENTE EN UNA CARRETERA Desde una carretera en lo alto de una montaña, un topógrafo toma varias mediciones horizontales x y varias mediciones verticales y, como se muestra en la tabla (x y y se miden en pies).

x	300	600	900	1200	1500	1800	2100
y	−25	−50	−75	−100	−125	−150	−175

(a) Trace una gráfica de dispersión de los datos.

(b) Utilice una regla para trazar la recta que usted piensa que mejor se ajusta a los datos.

(c) Encuentre una ecuación para la recta que trazó en el inciso (b).

(d) Interprete el significado de la pendiente de la recta en el inciso (c) en el contexto del problema.

(e) El topógrafo necesita poner un señalamiento en la carretera que indique lo empinado de ésta. Por ejemplo, un topógrafo pondría un señalamiento que indicara "pendiente de 8%" en una carretera con una pendiente descendente de $-\frac{8}{100}$. ¿Qué debe indicar el señalamiento de la carretera en este problema?

VARIACIÓN En los Ejercicios 117 y 118, nos dan el valor en dólares de un producto en 2010 y la tasa que se espera cambie durante los siguientes 5 años. Use esta información para escribir una ecuación lineal que dé el valor V en dólares del producto, en términos del año t. (Represente 2010 con $t = 10$.)

	Valor en 2010	*Tasa*
117.	\$2540	\$125 de reducción por año
118.	\$156	\$4.50 de aumento por año

119. DEPRECIACIÓN El valor V de una máquina moldeadora t años después de adquirirla es

$$V = -4000t + 58\,500, \quad 0 \le t \le 5.$$

Explique lo que miden la intersección con V y la pendiente.

120. COSTO El costo C de producir n bolsas para laptops está dado por

$$C = 1.25n + 15\,750, \quad 0 < n.$$

Explique lo que miden la intersección con C y la pendiente.

121. DEPRECIACIÓN Una pequeña tienda compra un horno para pizzas usado en \$875. Después de 5 años, el horno tendrá que cambiarse. Escriba una ecuación lineal que dé el valor V del equipo durante los 5 años que estará en uso.

122. DEPRECIACIÓN Un distrito escolar compra una impresora de alto volumen, copiadora y escáner en \$25 000. Después de 10 años, el equipo tendrá que cambiarse. Se espera que su valor en ese tiempo sea de \$2000. Escriba una ecuación lineal que dé el valor V del equipo durante los 10 años que estará en uso.

123. VENTAS Una tienda de descuento está ofreciendo un 20% de rebaja en todos los artículos. Escriba una ecuación lineal que dé el precio de venta S para un artículo con precio de lista L.

124. SALARIO POR HORA Un fabricante de microchips paga \$12.25 por hora a sus trabajadores de la línea de ensamble. Además, los trabajadores reciben la cantidad de \$0.75 por unidad producida. Escriba una ecuación lineal para hallar el sueldo por hora W en términos del número de unidades x producidas por hora.

125. SALARIO MENSUAL Un vendedor farmacéutico recibe un salario mensual de \$2500 más una comisión de 7% de ventas. Escriba una ecuación lineal para hallar el sueldo mensual W del vendedor, en términos de las ventas mensuales V.

126. COSTOS DE NEGOCIOS Un representante de ventas de una compañía, que usa un auto personal, recibe \$120 por día por alojamiento y comidas más \$0.55 por milla recorrida. Escriba una ecuación lineal que dé el costo diario C a la compañía en términos de x, el número de millas recorridas.

127. FLUJO DE DINERO POR ACCIÓN El flujo de dinero por acción para la Timberland Co. fue de \$1.21 en 1999 y \$1.46 en 2007. Escriba una ecuación lineal que dé el flujo de dinero por acción en términos del año. Represente 1999 con $t = 9$. A continuación pronostique el flujo de dinero para los años 2012 y 2014. (Fuente: The Timberland Co.)

128. NÚMERO DE TIENDAS Para 2003 había 1078 tiendas J.C. Penney y en 2007 había 1067 tiendas. Escriba una ecuación lineal que dé el número de tiendas en términos del año. Represente 2003 con $t = 3$. A continuación pronostique el número de tiendas para los años 2012 y 2014. ¿Sus respuestas son razonables? Explique. (Fuente: J.C. Penney Co.)

129. INSCRIPCIONES EN UNA UNIVERSIDAD La Universidad de Pennsylvania tuvo inscripciones de 40 571 estudiantes en 2000 y 44 112 estudiantes en 2008 en su plantel principal en University Park, Pennsylvania. (Fuente: *Penn State Fact Book*)

(a) Suponiendo que el crecimiento de inscripciones sea lineal, encuentre un modelo lineal que dé las inscripciones en términos del año t, donde $t = 0$ corresponde a 2000.

(b) Use su modelo del inciso (a) para pronosticar la inscripción en 2010 y 2015.

(c) ¿Cuál es la pendiente de su modelo? Explique su significado en el contexto de la situación.

130. INSCRIPCIÓN EN UNA UNIVERSIDAD La Universidad de Florida tuvo inscripciones de 46 107 estudiantes en 2000 y 51 413 estudiantes en 2008. (Fuente: University of Florida)

(a) ¿Cuál es el promedio de cambio anual en inscripción de 2000 a 2008?

(b) Use el promedio de cambio anual en inscripciones para calcular las inscripciones en 2002, 2004 y 2006.

(c) Escriba la ecuación de una recta que represente los datos dados en términos del año t, donde $t = 0$ corresponde a 2000. ¿Cuál es la pendiente? Interprete la pendiente en el contexto del problema.

(d) Usando los resultados de los incisos (a)-(c), escriba un breve párrafo que discuta los conceptos de *pendiente* y *razón de cambio promedio*.

131. COSTO, INGRESO Y UTILIDAD Un contratista de impermeabilizaciones compra en \$42 000 un camión repartidor de tejas con elevador de tejas. El vehículo requiere un promedio de gasto de \$6.50 por hora en combustible y mantenimiento, y al operador se le pagan \$11.50 por hora.

(a) Escriba una ecuación lineal que dé el costo total C de operar este equipo durante t horas. (Incluya el costo de compra del equipo.)

(b) Suponiendo que a los clientes se les cobren \$30 por hora de uso de la máquina, escriba una ecuación para hallar el ingreso R derivado de t horas de uso.

(c) Use la fórmula de la utilidad

$$P = R - C$$

para escribir una ecuación para obtener la utilidad derivada de t horas de uso.

(d) Use la fórmula del inciso (c) para hallar el punto de equilibrio, es decir, el número de horas que este equipo debe usarse para dar una utilidad de 0 dólares.

132. DEMANDA DE RENTAS Una oficina de bienes raíces maneja un complejo de departamentos con 50 unidades. Cuando la renta por unidad es de \$580 por mes, las 50 unidades están ocupadas. No obstante, cuando la renta es de \$625 por mes, el número promedio de unidades ocupadas baja a 47. Suponga que la relación entre la renta mensual p y la demanda x es lineal.

(a) Escriba la ecuación de la recta que dé la demanda x en términos de la renta p.

(b) Use la ecuación para pronosticar el número de unidades ocupadas cuando la renta sea de \$655.

(c) Pronostique el número de unidades ocupadas cuando la renta sea de \$595.

133. GEOMETRÍA El largo y ancho de un jardín rectangular son 15 y 10 metros, respectivamente. Un pasillo de ancho x rodea el jardín.

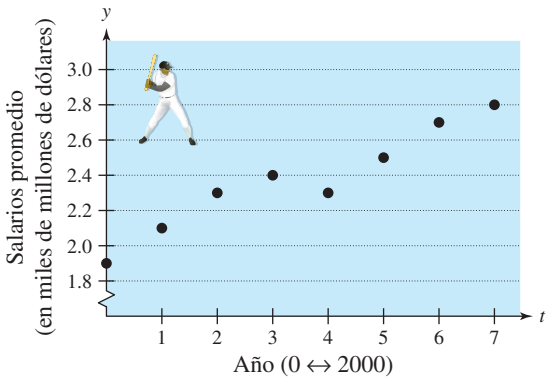
(a) Trace un diagrama que dé una representación visual del problema.

(b) Escriba la ecuación para hallar el perímetro y del pasillo en términos de x.

(c) Use calculadora de gráficas para graficar la ecuación para hallar el perímetro.

(d) Determine la pendiente de la gráfica del inciso (c). Por cada metro adicional de aumento en el ancho del pasillo, determine el aumento en su perímetro.

134. PROMEDIO DE SALARIO ANUAL Los salarios promedio (en millones de dólares) de jugadores de béisbol de las Ligas Mayores de 2000 a 2007 se muestran en la gráfica de dispersión. Encuentre la ecuación de la recta que usted piense que mejor se ajusta a estos datos. (Con y represente el salario promedio y con t represente el año, donde $t = 0$ corresponde a 2000.) (Fuente: Major League Baseball Players Association)



135. ANÁLISIS DE DATOS: NÚMERO DE DOCTORES El número y de doctores de medicina osteopática (en miles) en Estados Unidos, de 2000 a 2008, donde x es el año, se muestra como puntos de datos (x, y). (Fuente: American Osteopathic Association)

(2000, 44.9), (2001, 47.0), (2002, 49.2), (2003, 51.7), (2004, 54.1), (2005, 56.5), (2006, 58.9), (2007, 61.4), (2008, 64.0)

(a) Trace una gráfica de dispersión de los datos. Haga que $x = 0$ corresponda a 2000.

(b) Use una regla para trazar la recta que usted piense que se ajusta mejor a los datos.

(c) Encuentre la ecuación de la recta del inciso (b). Explique el procedimiento que utilizó.

(d) Escriba un breve párrafo que explique los significados de la pendiente y la intersección con el eje y de la recta, en términos de los datos.

(e) Compare los valores obtenidos usando su modelo con los valores reales.

(f) Use su modelo para calcular el número de doctores de medicina osteopática en 2012.

136. ANÁLISIS DE DATOS: PROMEDIO DE CALIFICACIONES Un profesor aplica cuestionarios regulares de 20 puntos y exámenes de 100 puntos en un curso de álgebra. Las calificaciones promedio de seis estudiantes, dadas como puntos de datos (x, y), donde x son calificaciones promedio del cuestionario y y son las calificaciones promedio del examen, son (18, 87), (10, 55), (19, 96), (16, 79), (13, 76) y (15, 82). [*Nota:* Hay numerosas respuestas correctas para los incisos (b)–(d).]

(a) Trace una gráfica de dispersión de los datos.

(b) Use una regla para trazar la recta que usted piense que mejor se ajusta a los datos.

(c) Encuentre una ecuación para la recta que trazó en el inciso (b).

(d) Use la ecuación del inciso (c) para calcular el promedio de calificaciones de examen para una persona con promedio de calificación de cuestionario de 17.

(e) El profesor agrega 4 puntos al promedio de calificaciones de examen de cada estudiante en la clase. Describa los cambios en las posiciones de los puntos localizados y el cambio en la ecuación de la recta.

EXPLORACIÓN

¿VERDADERO O FALSO? En los Ejercicios 137 y 138, determine si la proposición es verdadera o falsa. Justifique su respuesta.

137. Una recta con pendiente de $-\frac{5}{7}$ es más empinada que una recta con pendiente de $-\frac{6}{7}$.

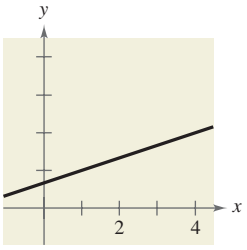
138. La recta que pasa por $(-8, 2)$ y $(-1, 4)$ y la recta que pasa por $(0, -4)$ y $(-7, 7)$ son paralelas.

139. Explique cómo demostraría que los puntos $A(2, 3)$, $B(2, 9)$ y $C(4, 3)$ son los vértices de un triángulo rectángulo.

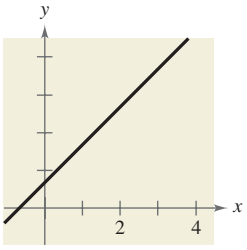
140. Explique por qué se dice que la pendiente de una recta vertical no está definida.

141. Con la información mostrada en las gráficas, ¿es posible determinar la pendiente de cada recta? ¿Es posible que las rectas puedan tener la misma pendiente? Explique.

(a)



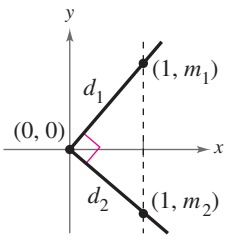
(b)



142. Las pendientes de dos rectas son -4 y $\frac{5}{2}$. ¿Cuál es más empinada? Explique.

143. Use calculadora de gráficas para comparar las pendientes de las rectas $y = mx$, donde $m = 0.5$, 1, 2 y 4. ¿Cuál recta sube más rápidamente? Ahora, sea $m = -0.5$, -1, -2 y -4. ¿Cuál recta baja más rápidamente? Use un ajuste en cuadro para obtener una verdadera perspectiva geométrica. ¿Qué se puede concluir acerca de la pendiente y la "rapidez" a la que sube o baja la recta?

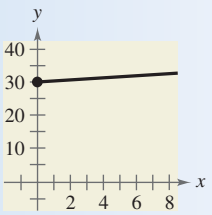
144. Encuentre d_1 y d_2 en términos de m_1 y m_2, respectivamente (vea la figura). A continuación use el Teorema de Pitágoras para hallar una relación entre m_1 y m_2.



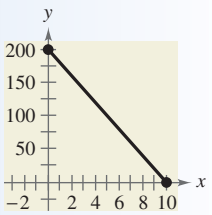
145. PIÉNSELO ¿Es posible que dos rectas con pendientes positivas sean perpendiculares? Explique.

146. TOQUE FINAL Relacione la descripción de la situación con su gráfica. También determine la pendiente y la intersección con el eje y de cada gráfica, e interprete la pendiente y la intersección con el eje y en el contexto de la situación. [Las gráficas están marcadas (i), (ii), (iii) y (iv).]

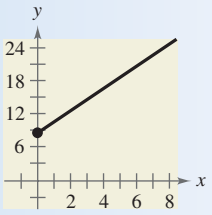
(i)



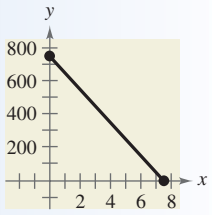
(ii)



(iii)



(iv)



(a) Una persona está pagando \$20 por semana a un amigo para reembolsar un préstamo de \$200.

(b) A un empleado le pagan \$8.50 por hora más \$2 por cada unidad producida por hora.

(c) Un representante de ventas recibe \$30 por día por sus alimentos más \$0.32 por cada milla que recorra.

(d) Una computadora comprada en \$750 se deprecia \$100 por año.

PROYECTO: CALIFICACIONES DE BACHILLER Para resolver una aplicación extendida que analiza los números de títulos de bachiller obtenidos por mujeres en Estados Unidos, de 1996 a 2007, visite el sitio web de este texto en *academic.cengage.com*. (Fuente de datos: U.S. National Center for Education Statistics)

1.4 FUNCIONES

Lo que debe aprender

- Determinar si las relaciones entre dos variables son funciones.
- Usar notación de funciones y evaluar funciones.
- Hallar los dominios de funciones.
- Usar funciones para modelar y resolver problemas reales.
- Evaluar diferencias de cocientes.

Por qué debe aprenderlo

Se pueden usar funciones para modelar y resolver problemas reales. Por ejemplo, en el Ejercicio 100 de la página 52 usaremos una función para modelar la fuerza del agua contra la cara de una represa.

Introducción a las funciones

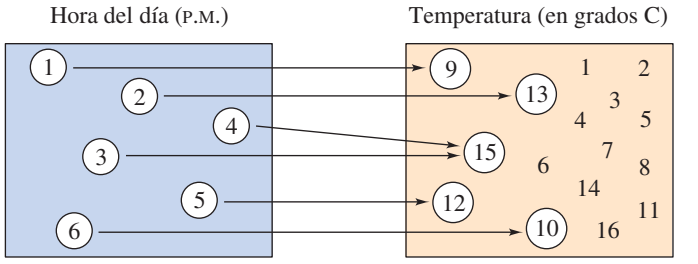
Numerosos fenómenos que ocurren todos los días comprenden dos cantidades que están relacionadas entre sí por alguna regla de correspondencia. El término matemático para esa regla de correspondencia es **relación**. En matemáticas, es frecuente que las relaciones se representen con ecuaciones y fórmulas matemáticas. Por ejemplo, el interés simple I ganado por \$1000 en un año está relacionado con la tasa de interés anual r mediante la fórmula $I = 1000r$.

La fórmula $I = 1000r$ representa una clase especial de relación que compara cada elemento de un conjunto con *exactamente un* elemento de un conjunto diferente. Esa relación se denomina **función.**

Definición de función

Una **función** f de un conjunto A a un conjunto B es una relación que asigna a cada elemento x del conjunto A exactamente un elemento y del conjunto B. El conjunto A es el **dominio** (o conjunto de entradas) de la función f, y el conjunto B contiene el **rango** (o conjunto de salidas).

Para ayudar a entender esta definición, vea la función que relaciona la hora del día con la temperatura en la Figura 1.47.



El conjunto A es el dominio.
Entradas: 1, 2, 3, 4, 5, 6

El conjunto B contiene el rango.
Salidas: 9, 10, 12, 13, 15

FIGURA 1.47

Esta función puede estar representada por los siguientes pares ordenados, en los que la primera coordenada (valor x) es la entrada y la segunda (valor y) es la salida.

$$\{(1, 9°), (2, 13°), (3, 15°), (4, 15°), (5, 12°), (6, 10°)\}$$

Características de una función del conjunto A al conjunto B

1. Cada elemento de A debe relacionarse con un elemento de B.
2. Algunos elementos de B pueden no relacionarse con algún elemento de A.
3. Dos o más elementos de A pueden relacionarse con el mismo elemento de B.
4. Un elemento de A (el dominio) no puede relacionarse con dos elementos diferentes de B.

En general, las funciones se representan de cuatro modos.

Cuatro modos para representar una función

1. *Verbalmente* por medio de una oración que describe la forma en que la variable de entrada está relacionada con la variable de salida
2. *Numéricamente* mediante una tabla o lista de pares ordenados que relacione los valores de entrada con los valores de salida
3. *Gráficamente* por medio de puntos en una gráfica en un plano de coordenadas, en el que los valores de entrada están representados por el eje horizontal y los valores de salida por el eje vertical
4. *Algebraicamente* mediante una ecuación con dos variables.

Para determinar si una relación es o no una función se debe establecer si cada valor de entrada está relacionado con exactamente un valor de salida. Si cualquier valor de entrada está relacionado con dos o más valores de salida, la relación no es una función.

Ejemplo 1 Prueba de funciones

Determine si la relación representa y como función de x.

a. El valor de entrada x es el número de diputados de un estado, y el valor de salida y es el número de senadores.

b.

Entrada, x	Salida, y
2	11
2	10
3	8
4	5
5	1

c.

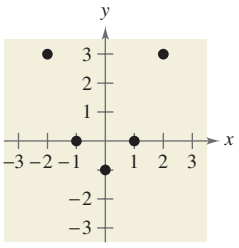


FIGURA 1.48

Solución

a. Esta expresión verbal *describe* a y como función de x. Cualquiera que sea el valor de x, el valor de y siempre es 2. Esas funciones se denominan *funciones constantes.*

b. Esta tabla *no describe* a y como función de x. El valor de entrada 2 está relacionado con dos valores diferentes de y.

c. La gráfica de la Figura 1.48 *describe* a y como función de x. Cada valor de entrada está relacionado con exactamente un valor de salida.

PUNTO *de repaso* Ahora trate de hacer el Ejercicio 11.

Representar funciones por medio de conjuntos o pares ordenados es común en *matemáticas discretas*, pero en álgebra es más frecuente expresarlas mediante ecuaciones o fórmulas con dos variables. Por ejemplo, la ecuación

$$y = x^2 \qquad y \text{ es una función de } x.$$

representa la variable y como función de la variable x. En esta ecuación, x es la **varia-**

NOTA HISTÓRICA

© Bettmann/Corbis

Se considera que el suizo Leonhard Euler (1707-1783), ha sido el matemático más prolífico y productivo de la historia. Una de sus más grandes aportaciones en matemáticas fue su uso de símbolos, o notación. La notación de función $y = f(x)$ fue introducida por Euler.

ble independiente y y es la **variable dependiente.** El dominio de la función es el conjunto de todos los valores tomados por la variable independiente x, y el rango de la función es el conjunto de todos los valores tomados por la variable dependiente y.

Ejemplo 2 Prueba de funciones representadas algebraicamente

¿Cuál de las ecuaciones representa a y como función de x?

a. $x^2 + y = 1$ **b.** $-x + y^2 = 1$

Solución

Para determinar si y es una función de x, trate de despejar y en términos de x.

a. Despejando y tendremos

$$x^2 + y = 1 \qquad \text{Escribir la ecuación original.}$$
$$y = 1 - x^2. \qquad \text{Despejar } y.$$

A cada valor de x corresponde exactamente un valor de y. Entonces, y es una función de x.

b. Despejando y tendremos

$$-x + y^2 = 1 \qquad \text{Escribir la ecuación original.}$$
$$y^2 = 1 + x \qquad \text{Sumar } x \text{ a cada lado.}$$
$$y = \pm\sqrt{1 + x}. \qquad \text{Despejar } y.$$

El signo $\pm$ indica que a un valor determinado de x corresponden dos valores de y. En consecuencia, y no es una función de x.

PUNTO *de repaso* Ahora trate de hacer el Ejercicio 21.

Notación de funciones

Cuando se usa una ecuación para representar una función es conveniente asignar un nombre a la función para que pueda consultarse fácilmente. Por ejemplo, sabemos que la ecuación $y = 1 - x^2$ describe a y como función de x. Supongamos que a esta función se le asigna el nombre de "f." Entonces se puede usar la siguiente **notación de función.**

Entrada	*Salida*	*Ecuación*
x	$f(x)$	$f(x) = 1 - x^2$

El símbolo $f(x)$ se lee como el *valor de f en x* o simplemente *f de x*. El símbolo $f(x)$ corresponde al valor y para una x determinada. Por tanto, se puede escribir $y = f(x)$. Recordemos que f es el *nombre* de la función, en tanto que $f(x)$ es el *valor* de la función en x. Por ejemplo, la función dada por

$$f(x) = 3 - 2x$$

tiene *valores de función* denotados por $f(-1), f(0), f(2)$, etcétera. Para hallar estos valores se sustituyen los valores de entrada especificados en la ecuación dada.

Para $x = -1$, $f(-1) = 3 - 2(-1) = 3 + 2 = 5.$

Para $x = 0$, $f(0) = 3 - 2(0) = 3 - 0 = 3.$

Para $x = 2$, $f(2) = 3 - 2(2) = 3 - 4 = -1.$

Aun cuando es frecuente que f se utilice como un nombre conveniente para una función y x se use como la variable independiente, se pueden usar otras letras. Por ejemplo,

$$f(x) = x^2 - 4x + 7, \quad f(t) = t^2 - 4t + 7 \quad \text{y} \quad g(s) = s^2 - 4s + 7$$

todas definen la misma función. En realidad, el papel de la variable independiente es la de un "ocupante de lugar". En consecuencia, la función podría estar descrita por

$$f(\quad) = (\quad)^2 - 4(\quad) + 7.$$

ATENCIÓN

En el Ejemplo 3, nótese que $g(x + 2)$ no es igual a $g(x) + g(2)$. En general, $g(u + v) \neq g(u) + g(v)$.

Ejemplo 3 Evaluar una función

Sea $g(x) = -x^2 + 4x + 1$. Encuentre cada uno de los valores de la función.

a. $g(2)$ **b.** $g(t)$ **c.** $g(x + 2)$

Solución

a. La sustitución de x con 2 en $g(x) = -x^2 + 4x + 1$ da lo siguiente.

$$g(2) = -(2)^2 + 4(2) + 1 = -4 + 8 + 1 = 5$$

b. La sustitución de x con t da lo siguiente.

$$g(t) = -(t)^2 + 4(t) + 1 = -t^2 + 4t + 1$$

c. La sustitución de x con $x + 2$ da lo siguiente.

$$\begin{aligned} g(x + 2) &= -(x + 2)^2 + 4(x + 2) + 1 \\ &= -(x^2 + 4x + 4) + 4x + 8 + 1 \\ &= -x^2 - 4x - 4 + 4x + 8 + 1 \\ &= -x^2 + 5 \end{aligned}$$

PUNTO *de repaso* Ahora trate de hacer el Ejercicio 41.

Una función definida por dos o más ecuaciones en un dominio especificado recibe el nombre de **función definida por tramos.**

Ejemplo 4 Una función definida por tramos

Evalúe la función cuando $x = -1$, 0 y 1.

$$f(x) = \begin{cases} x^2 + 1, & x < 0 \\ x - 1, & x \geq 0 \end{cases}$$

Solución

Como $x = -1$ es menor que 0, use $f(x) = x^2 + 1$ para obtener

$$f(-1) = (-1)^2 + 1 = 2.$$

Para $x = 0$, use $f(x) = x - 1$ para obtener

$$f(0) = (0) - 1 = -1.$$

Para $x = 1$, use $f(x) = x - 1$ para obtener

$$f(1) = (1) - 1 = 0.$$

PUNTO *de repaso* Ahora trate de hacer el Ejercicio 49.

Ejemplo 5 Hallar valores para los cuales $f(x) = 0$

Encuentre todos los valores reales de x tales que $f(x) = 0$.

a. $f(x) = -2x + 10$

b. $f(x) = x^2 - 5x + 6$

Solución

Para cada una de las ecuaciones, haga $f(x) = 0$ y despeje x.

a. $-2x + 10 = 0$ Hacer $f(x) = 0$.

$-2x = -10$ Restar 10 de cada lado.

$x = 5$ Dividir cada lado entre -2.

Entonces, $f(x) = 0$ cuando $x = 5$.

b. $x^2 - 5x + 6 = 0$ Hacer $f(x) = 0$.

$(x - 2)(x - 3) = 0$ Factorizar.

$x - 2 = 0 \Rightarrow x = 2$ Igualar a 0 el primer factor.

$x - 3 = 0 \Rightarrow x = 3$ Igualar a 0 el segundo factor.

Entonces, $f(x) = 0$ cuando $x = 2$ o $x = 3$.

PUNTO *de repaso* Ahora trate de hacer el Ejercicio 59.

Ejemplo 6 Hallar valores para los cuales $f(x) = g(x)$

Encuentre los valores de x para los que $f(x) = g(x)$.

a. $f(x) = x^2 + 1$ y $g(x) = 3x - x^2$

b. $f(x) = x^2 - 1$ y $g(x) = -x^2 + x + 2$

Solución

a. $x^2 + 1 = 3x - x^2$ Hacer $f(x) = g(x)$.

$2x^2 - 3x + 1 = 0$ Escribir en forma general.

$(2x - 1)(x - 1) = 0$ Factorizar.

$2x - 1 = 0 \Rightarrow x = \frac{1}{2}$ Igualar a 0 el primer factor.

$x - 1 = 0 \Rightarrow x = 1$ Igualar a 0 el segundo factor.

Entonces, $f(x) = g(x)$ cuando $x = \frac{1}{2}$ o $x = 1$.

b. $x^2 - 1 = -x^2 + x + 2$ Hacer $f(x) = g(x)$.

$2x^2 - x - 3 = 0$ Escribir en forma general.

$(2x - 3)(x + 1) = 0$ Factorizar.

$2x - 3 = 0 \Rightarrow x = \frac{3}{2}$ Igualar a 0 el primer factor.

$x + 1 = 0 \Rightarrow x = -1$ Igualar a 0 el segundo factor.

Entonces, $f(x) = g(x)$ cuando $x = \frac{3}{2}$ o $x = -1$.

PUNTO *de repaso* Ahora trate de hacer el Ejercicio 67.

Ayuda de álgebra

Para hacer los Ejemplos 5 y 6 es necesario que el estudiante pueda resolver ecuaciones. En el Apéndice A.5 puede repasar las técnicas de resolución de ecuaciones.

El dominio de una función

TECNOLOGÍA

Use calculadora de gráficas para graficar las funciones dadas por $y = \sqrt{4 - x^2}$ y $y = \sqrt{x^2 - 4}$. ¿Cuál es el dominio de cada función? ¿Se traslapan los dominios de estas dos funciones? Si es así, ¿para qué valores se traslapan los dominios?

Es posible describir explícitamente el dominio de una función o puede estar *implicado* por la expresión que se use para definir la función. El **dominio implicado** es el conjunto de todos los números reales para los cuales la expresión está definida. Por ejemplo, la función dada por

$$f(x) = \frac{1}{x^2 - 4}$$

El dominio excluye valores de x que resulten en división entre cero.

tiene un dominio implicado formado por todos los valores reales de x que no sean $x = \pm 2$. Estos dos valores están excluidos del dominio porque la división entre cero no está definida. Otro tipo común de dominio implicado es el que se usa para evitar raíces pares de números negativos. Por ejemplo, la función dada por

$$f(x) = \sqrt{x}$$

El dominio excluye valores de x que resulten en raíces pares de números negativos.

está definida sólo para $x \geq 0$. Por tanto, su dominio implicado es el intervalo $[0, \infty)$. En general, el dominio de una función *excluye* valores que causarían división entre cero *o* que resultarían en la raíz par de un número negativo.

Ejemplo 7 Hallar el dominio de una función

Encuentre el dominio de cada función.

a. f: $\{(-3, 0), (-1, 4), (0, 2), (2, 2), (4, -1)\}$

b. $g(x) = \dfrac{1}{x + 5}$

c. Volumen de una esfera: $V = \frac{4}{3}\pi r^3$

d. $h(x) = \sqrt{4 - 3x}$

Solución

a. El dominio de f está formado por todas las primeras coordenadas del conjunto de pares ordenados.

$$\text{Dominio} = \{-3, -1, 0, 2, 4\}$$

b. Excluyendo valores de x que den cero en el denominador, el dominio de g es el conjunto de todos los números reales x excepto $x = -5$.

c. Como esta función representa el volumen de una esfera, los valores del radio r deben ser positivos. Por tanto, el dominio es el conjunto de todos los números reales r tales que $r > 0$.

d. Esta función está definida sólo para valores de x para los cuales

$$4 - 3x \geq 0.$$

Al resolver esta desigualdad, se puede concluir que $x \leq \frac{4}{3}$. Entonces, el dominio es el intervalo $\left(-\infty, \frac{4}{3}\right]$.

PUNTO *de repaso* Ahora trate de hacer el Ejercicio 73.

Ayuda de álgebra

En el Ejemplo 7(d), $4 - 3x \geq 0$ es una desigualdad lineal. En el Apéndice A.6 es posible hacer un repaso de las técnicas para resolver una desigualdad lineal.

En el Ejemplo 7(c), nótese que el dominio de una función puede estar implicado por el contexto físico. Por ejemplo, en la ecuación

$$V = \frac{4}{3}\pi r^3$$

no habría razón para restringir r a valores positivos, pero el contexto físico implica que una esfera no puede tener un radio negativo o cero.

FIGURA 1.49

Aplicaciones

Ejemplo 8 Dimensiones de un contenedor

Una persona trabaja en el departamento de ventas de una compañía embotelladora de bebidas y está experimentando con una nueva lata para té helado, que es ligeramente más angosta y más alta que la lata estándar. Para la lata experimental, la razón entre la altura y el radio es 4, como se ve en la Figura 1.49.

a. Escriba el volumen de la lata como función del radio r.

b. Escriba el volumen de la lata como función de la altura h.

Solución

a. $V(r) = \pi r^2 h = \pi r^2(4r) = 4\pi r^3$ Escribir V como función de r.

b. $V(h) = \pi\left(\frac{h}{4}\right)^2 h = \frac{\pi h^3}{16}$ Escribir V como función de h.

PUNTO *de repaso* Ahora trate de hacer el Ejercicio 87.

Ejemplo 9 Trayectoria de una pelota de béisbol

Una pelota de béisbol es bateada en un punto a 3 pies sobre el nivel del suelo a una velocidad de 100 pies por segundo y a un ángulo de 45°. La trayectoria de la pelota está dada por la función

$$f(x) = -0.0032x^2 + x + 3$$

donde x y $f(x)$ se miden en pies. ¿La pelota rebasará una cerca de 10 pies situada a 300 pies desde el plato de home?

Solución algebraica

Cuando $x = 300$, puede hallar la altura de la bola como sigue.

$f(x) = -0.0032x^2 + x + 3$ Escribir la ecuación original.

$f(300) = -0.0032(300)^2 + 300 + 3$ Sustituir 300 por x.

$= 15$ Simplificar.

Cuando $x = 300$, la altura de la pelota es de 15 pies, de modo que la pelota rebasará una cerca de 10 pies.

Solución gráfica

Use calculadora de gráficas para graficar la función $y = -0.0032x^2 + x + 3$. Use la función de valor o las funciones *zoom* y *trace* de la calculadora para calcular que $y = 15$ cuando $x = 300$, como se ve en la Figura 1.50. Por tanto, la pelota rebasará la cerca de 10 pies.

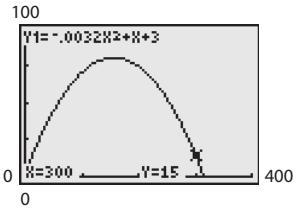


FIGURA 1.50

PUNTO *de repaso* Ahora trate de hacer el Ejercicio 93.

En la ecuación del Ejemplo 9, la altura de la pelota es una función de la distancia desde el plato de home.

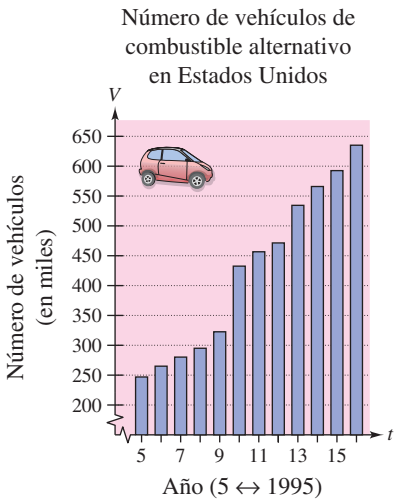


FIGURA 1.51

Ejemplo 10 Vehículos de combustible alternativo

El número V (en miles) de vehículos de combustible alternativo en Estados Unidos aumentó en forma lineal de 1995 a 1999, como se ve en la Figura 1.51. Entonces, en 2000, el número de vehículos dio un salto y, hasta 2006, aumentó en diferente forma lineal. Estas dos formas se pueden calcular mediante la función

$$V(t) = \begin{cases} 18.08t + 155.3, & 5 \le t \le 9 \\ 34.75t + 74.9, & 10 \le t \le 16 \end{cases}$$

donde t representa el año, con $t = 5$ correspondiente a 1995. Use esta función para calcular el número de vehículos de combustible alternativo para cada año de 1995 a 2006. (Fuente: Science Applications International Corporation; Energy Information Administration)

Solución

De 1995 a 1999, use $V(t) = 18.08t + 155.3$.

245.7	263.8	281.9	299.9	318.0
1995	1996	1997	1998	1999

De 2000 a 2006, use $V(t) = 34.75t + 74.9$.

422.4	457.2	491.9	526.7	561.4	596.2	630.9
2000	2001	2002	2003	2004	2005	2006

PUNTO *de repaso* Ahora trate de hacer el Ejercicio 95.

Cocientes de diferencias

Una de las definiciones básicas en cálculo utiliza la relación

$$\frac{f(x + h) - f(x)}{h}, \quad h \neq 0$$

Esta relación se denomina **cocientes de diferencias,** como se ilustra en el Ejemplo 11.

Ejemplo 11 Evaluar un cociente de diferencias

Para $f(x) = x^2 - 4x + 7$, encuentre $\dfrac{f(x + h) - f(x)}{h}$.

Solución

$$\begin{aligned} \frac{f(x + h) - f(x)}{h} &= \frac{[(x + h)^2 - 4(x + h) + 7] - (x^2 - 4x + 7)}{h} \\ &= \frac{x^2 + 2xh + h^2 - 4x - 4h + 7 - x^2 + 4x - 7}{h} \\ &= \frac{2xh + h^2 - 4h}{h} = \frac{h(2x + h - 4)}{h} = 2x + h - 4, \quad h \neq 0 \end{aligned}$$

PUNTO *de repaso* Ahora trate de hacer el Ejercicio 103.

El símbolo ∫ indica un ejemplo o ejercicio en el que se destacan las técnicas algebraicas específicamente empleadas en cálculo.

Usted encontrará más fácil calcular el cociente de diferencias en el Ejemplo 11 si primero encuentra $f(x + h)$ y luego sustituye la expresión resultante en el cociente de diferencias, como sigue.

$$f(x + h) = (x + h)^2 - 4(x + h) + 7 = x^2 + 2xh + h^2 - 4x - 4h + 7$$

$$\frac{f(x + h) - f(x)}{h} = \frac{(x^2 + 2xh + h^2 - 4x - 4h + 7) - (x^2 - 4x + 7)}{h}$$

$$= \frac{2xh + h^2 - 4h}{h} = \frac{h(2x + h - 4)}{h} = 2x + h - 4, \quad h \neq 0$$

Resumen de la terminología de funciones

Función: Una **función** es una relación entre dos variables tal que a cada valor de la variable independiente corresponde exactamente un valor de la variable dependiente.

Notación de función: $y = f(x)$

f es el *nombre* de la función.

y es la **variable dependiente.**

x es la **variable independiente.**

$f(x)$ es el *valor de la función en x.*

Dominio: El **dominio** de una función es el conjunto de todos los valores (entradas) de la variable independiente para los que la función está definida. Si x está en el dominio de f, se dice que f está definida en x. Si x no está en el dominio de f, se dice que f no *está definida* en x.

Rango: El **rango** de una función es el conjunto de todos los valores (salidas) que toma la variable dependiente (es decir, el conjunto de todos los valores de la función).

Dominio implicado: Si f está definida por medio de una expresión algebraica y el dominio no está especificado, el **dominio implicado** está formado por todos los números reales para los que la expresión está definida.

Discusión en clase

Funciones diarias En grupos de dos o tres personas, identifique funciones comunes en la vida real. Considere actividades diarias, eventos y gastos; por ejemplo, llamadas telefónicas de larga distancia y seguro de autos. A continuación veamos dos ejemplos.

a. El enunciado "Tu felicidad es una función de la calificación que recibas en este curso" *no es* un uso matemático correcto de la palabra "función". La palabra "felicidad" es ambigua.

b. El enunciado "Tu impuesto federal sobre la renta es una función de tu ingreso bruto ajustado" es un uso matemático correcto de la palabra "función". Una vez que hayas determinado tu ingreso bruto ajustado, podrá determinarse tu impuesto sobre la renta.

Describa verbalmente sus funciones. Evite usar palabras ambiguas. ¿Puede hallar un ejemplo de una función definida por partes?

1.4 EJERCICIOS

En www.CalcChat.com vea las soluciones a los ejercicios impares.

VOCABULARIO: Llene los espacios en blanco.

1. Una relación que asigna a cada elemento x de un conjunto de entradas, o _____, exactamente un elemento y en un conjunto de salidas, o _____, se denomina _____.
2. Las funciones se representan comúnmente en cuatro formas diferentes, _____, _____, _____ y _____.
3. Para una ecuación que representa a y como función de x, el conjunto de todos los valores tomados por la variable _____ x es el dominio, y el conjunto de todos los valores tomados por la variable _____ y es el rango.
4. La función dada por

$$f(x) = \begin{cases} 2x - 1, & x < 0 \\ x^2 + 4, & x \geq 0 \end{cases}$$

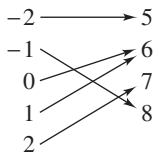
es un ejemplo de una función _____ _____ _____.

5. Si no se da el dominio de la función f, entonces el conjunto de valores de la variable independiente para el que la expresión está definida se denomina _____ _____.
6. En cálculo, una de las definiciones básicas es la de un _____ _____ _____, dado por $\dfrac{f(x+h) - f(x)}{h}, \quad h \neq 0$.

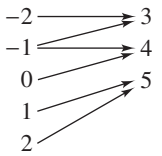
HABILIDADES Y APLICACIONES

En los Ejercicios 7-10, ¿la relación es una función?

7. *Dominio* *Rango*

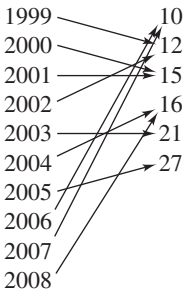


8. *Dominio* *Rango*



9. *Dominio* *Rango*

10. *Dominio* (Año) *Rango* (Número de tormentas tropicales y huracanes en el Atlántico Norte)



En los Ejercicios 11-14, determine si la relación representa a y como función de x.

11.

Entrada, x	−2	−1	0	1	2
Salida, y	−8	−1	0	1	8

12.

Entrada, x	0	1	2	1	0
Salida, y	−4	−2	0	2	4

13.

Entrada, x	10	7	4	7	10
Salida, y	3	6	9	12	15

14.

Entrada, x	0	3	9	12	15
Salida, y	3	3	3	3	3

En los Ejercicios 15 y 16, ¿cuáles conjuntos de pares ordenados representan funciones de A a B? Explique.

15. $A = \{0, 1, 2, 3\}$ y $B = \{-2, -1, 0, 1, 2\}$

(a) $\{(0, 1), (1, -2), (2, 0), (3, 2)\}$

(b) $\{(0, -1), (2, 2), (1, -2), (3, 0), (1, 1)\}$

(c) $\{(0, 0), (1, 0), (2, 0), (3, 0)\}$

(d) $\{(0, 2), (3, 0), (1, 1)\}$

16. $A = \{a, b, c\}$ y $B = \{0, 1, 2, 3\}$

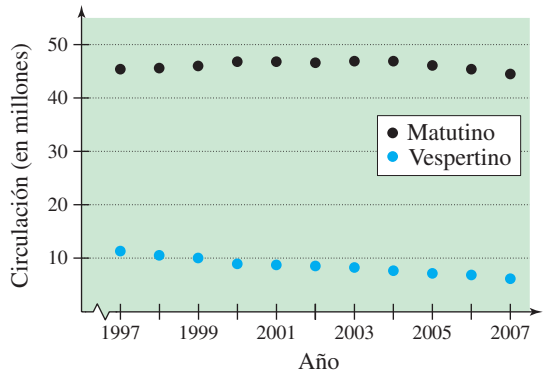
(a) $\{(a, 1), (c, 2), (c, 3), (b, 3)\}$

(b) $\{(a, 1), (b, 2), (c, 3)\}$

(c) $\{(1, a), (0, a), (2, c), (3, b)\}$

(d) $\{(c, 0), (b, 0), (a, 3)\}$

CIRCULACIÓN DE PERIÓDICOS En los Ejercicios 17 y 18, use la gráfica que muestra la circulación (en millones) de diarios en Estados Unidos. (Fuente: Editor & Publisher Company)



17. ¿La circulación de diarios matutinos es una función del año? ¿La circulación de diarios vespertinos es una función del año? Explique.

18. Represente con $f(x)$ la circulación de diarios vespertinos en el año x. Encuentre $f(2002)$.

En los Ejercicios 19-36, determine si la ecuación representa a y como función de x.

19. $x^2 + y^2 = 4$

20. $x^2 - y^2 = 16$

21. $x^2 + y = 4$

22. $y - 4x^2 = 36$

23. $2x + 3y = 4$

24. $2x + 5y = 10$

25. $(x + 2)^2 + (y - 1)^2 = 25$

26. $(x - 2)^2 + y^2 = 4$

27. $y^2 = x^2 - 1$

28. $x + y^2 = 4$

29. $y = \sqrt{16 - x^2}$

30. $y = \sqrt{x + 5}$

31. $y = |4 - x|$

32. $|y| = 4 - x$

33. $x = 14$

34. $y = -75$

35. $y + 5 = 0$

36. $x - 1 = 0$

En los Ejercicios 37-52, evalúe la función en cada valor especificado de la variable independiente y simplifique.

37. $f(x) = 2x - 3$

(a) $f(1)$ (b) $f(-3)$ (c) $f(x - 1)$

38. $g(y) = 7 - 3y$

(a) $g(0)$ (b) $g\left(\frac{7}{3}\right)$ (c) $g(s + 2)$

39. $V(r) = \frac{4}{3}\pi r^3$

(a) $V(3)$ (b) $V\left(\frac{3}{2}\right)$ (c) $V(2r)$

40. $S(r) = 4\pi r^2$

(a) $S(2)$ (b) $S\left(\frac{1}{2}\right)$ (c) $S(3r)$

41. $g(t) = 4t^2 - 3t + 5$

(a) $g(2)$ (b) $g(t - 2)$ (c) $g(t) - g(2)$

42. $h(t) = t^2 - 2t$

(a) $h(2)$ (b) $h(1.5)$ (c) $h(x + 2)$

43. $f(y) = 3 - \sqrt{y}$

(a) $f(4)$ (b) $f(0.25)$ (c) $f(4x^2)$

44. $f(x) = \sqrt{x + 8} + 2$

(a) $f(-8)$ (b) $f(1)$ (c) $f(x - 8)$

45. $q(x) = 1/(x^2 - 9)$

(a) $q(0)$ (b) $q(3)$ (c) $q(y + 3)$

46. $q(t) = (2t^2 + 3)/t^2$

(a) $q(2)$ (b) $q(0)$ (c) $q(-x)$

47. $f(x) = |x|/x$

(a) $f(2)$ (b) $f(-2)$ (c) $f(x - 1)$

48. $f(x) = |x| + 4$

(a) $f(2)$ (b) $f(-2)$ (c) $f(x^2)$

49. $f(x) = \begin{cases} 2x + 1, & x < 0 \\ 2x + 2, & x \geq 0 \end{cases}$

(a) $f(-1)$ (b) $f(0)$ (c) $f(2)$

50. $f(x) = \begin{cases} x^2 + 2, & x \leq 1 \\ 2x^2 + 2, & x > 1 \end{cases}$

(a) $f(-2)$ (b) $f(1)$ (c) $f(2)$

51. $f(x) = \begin{cases} 3x - 1, & x < -1 \\ 4, & -1 \leq x \leq 1 \\ x^2, & x > 1 \end{cases}$

(a) $f(-2)$ (b) $f\left(-\frac{1}{2}\right)$ (c) $f(3)$

52. $f(x) = \begin{cases} 4 - 5x, & x \leq -2 \\ 0, & -2 < x < 2 \\ x^2 + 1, & x \geq 2 \end{cases}$

(a) $f(-3)$ (b) $f(4)$ (c) $f(-1)$

En los Ejercicios 53-58, complete la tabla.

53. $f(x) = x^2 - 3$

x	-2	-1	0	1	2
$f(x)$					

54. $g(x) = \sqrt{x - 3}$

x	3	4	5	6	7
$g(x)$					

55. $h(t) = \frac{1}{2}|t + 3|$

t	-5	-4	-3	-2	-1
$h(t)$					

56. $f(s) = \dfrac{|s-2|}{s-2}$

s	0	1	$\frac{3}{2}$	$\frac{5}{2}$	4
$f(s)$					

57. $f(x) = \begin{cases} -\frac{1}{2}x + 4, & x \le 0 \\ (x-2)^2, & x > 0 \end{cases}$

x	-2	-1	0	1	2
$f(x)$					

58. $f(x) = \begin{cases} 9 - x^2, & x < 3 \\ x - 3, & x \ge 3 \end{cases}$

x	1	2	3	4	5
$f(x)$					

En los Ejercicios 59-66, encuentre todos los valores reales de x tales que $f(x) = 0$.

59. $f(x) = 15 - 3x$

60. $f(x) = 5x + 1$

61. $f(x) = \dfrac{3x-4}{5}$

62. $f(x) = \dfrac{12 - x^2}{5}$

63. $f(x) = x^2 - 9$

64. $f(x) = x^2 - 8x + 15$

65. $f(x) = x^3 - x$

66. $f(x) = x^3 - x^2 - 4x + 4$

En los Ejercicios 67-70, encuentre el valor(es) de x para cada $f(x) = g(x)$.

67. $f(x) = x^2, \quad g(x) = x + 2$

68. $f(x) = x^2 + 2x + 1, \quad g(x) = 7x - 5$

69. $f(x) = x^4 - 2x^2, \quad g(x) = 2x^2$

70. $f(x) = \sqrt{x} - 4, \quad g(x) = 2 - x$

En los Ejercicios 71-82, encuentre el dominio de la función.

71. $f(x) = 5x^2 + 2x - 1$

72. $g(x) = 1 - 2x^2$

73. $h(t) = \dfrac{4}{t}$

74. $s(y) = \dfrac{3y}{y+5}$

75. $g(y) = \sqrt{y - 10}$

76. $f(t) = \sqrt[3]{t+4}$

77. $g(x) = \dfrac{1}{x} - \dfrac{3}{x+2}$

78. $h(x) = \dfrac{10}{x^2 - 2x}$

79. $f(s) = \dfrac{\sqrt{s-1}}{s-4}$

80. $f(x) = \dfrac{\sqrt{x+6}}{6+x}$

81. $f(x) = \dfrac{x-4}{\sqrt{x}}$

82. $f(x) = \dfrac{x+2}{\sqrt{x-10}}$

En los Ejercicios 83-86, suponga que el dominio de f es el conjunto $A = \{-2, -1, 0, 1, 2\}$. Determine el conjunto de pares ordenados que representa la función f.

83. $f(x) = x^2$

84. $f(x) = (x-3)^2$

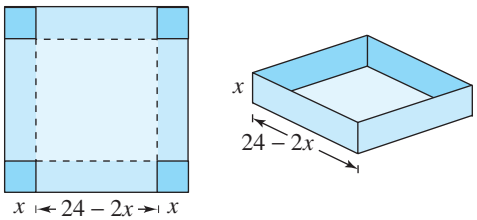
85. $f(x) = |x| + 2$

86. $f(x) = |x+1|$

87. GEOMETRÍA Escriba el área A de un cuadrado como función de su perímetro P.

88. GEOMETRÍA Escriba el área A de un círculo como función de su circunferencia C.

89. VOLUMEN MÁXIMO Se ha de construir una caja abierta de volumen máximo, a partir de una pieza cuadrada de material de 24 centímetros por lado, cortando cuadrados iguales de las esquinas y volteando hacia arriba los lados (vea figura).



(a) La tabla muestra los volúmenes V (en centímetros cúbicos) de la caja para varias alturas x (en centímetros). Use la tabla para calcular el volumen máximo.

Altura, x	1	2	3	4	5	6
Volumen, V	484	800	972	1024	980	864

(b) Determine los puntos (x, V) de la tabla del inciso (a). ¿La relación definida por los pares ordenados representa a V como función de x?

(c) Si V es una función de x, escriba la función y determine el dominio.

90. UTILIDAD MÁXIMA El costo por unidad en la producción de un reproductor de archivos MP3 es \$60. El fabricante cobra \$90 por unidad por pedidos de 100 o menos. Para estimular pedidos grandes, el fabricante reduce el cargo en \$0.15 por cada reproductor MP3 que pase de 100 (por ejemplo, habría un cargo de \$87 por reproductor de un pedido de 120).

(a) La tabla muestra las utilidades P (en dólares) para varios números de unidades pedidas, x. Use la tabla para calcular la utilidad máxima.

Unidades, x	110	120	130	140
Utilidad, P	3135	3240	3315	3360

Unidades, x	150	160	170
Utilidad, P	3375	3360	3315

(b) Grafique los puntos (x, P) de la tabla del inciso (a). ¿La relación definida por los pares ordenados representa a P como función de x?

(c) Si P es una función de x, escriba la función y determine su dominio.

91. GEOMETRÍA Un triángulo rectángulo está formado por los ejes x y y y una recta que pasa por el punto $(2, 1)$ (vea la figura). Escriba el área A del triángulo como función de x y determine el dominio de la función.

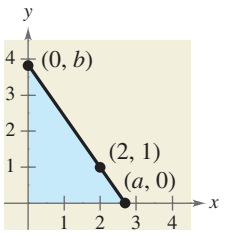


FIGURA PARA 91

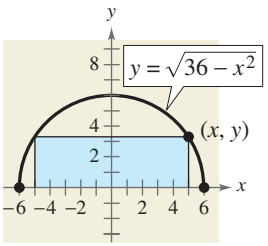


FIGURA PARA 92

92. GEOMETRÍA Un rectángulo está limitado por el eje x y la semicircunferencia $y = \sqrt{36 - x^2}$ (vea la figura). Escriba el área A del rectángulo como función de x y determine gráficamente el dominio de la función.

93. TRAYECTORIA DE UNA PELOTA La altura y (en pies) de una pelota de béisbol lanzada por un niño es

$$y = -\frac{1}{10}x^2 + 3x + 6$$

donde x es la distancia horizontal (en pies) desde donde la pelota es lanzada. ¿La pelota volará sobre la cabeza de otro niño que está a 30 pies de distancia y que trata de atraparla? (Suponga que el niño que está tratando de atrapar la pelota tiene su guante a una altura de 5 pies.)

94. MEDICAMENTOS Los números d (en millones) de recetas surtidas por farmacias independientes en Estados Unidos, de 2000 a 2007 (vea la figura), se pueden calcular con el modelo

$$d(t) = \begin{cases} 10.6t + 699, & 0 \le t \le 4 \\ 15.5t + 637, & 5 \le t \le 7 \end{cases}$$

donde t representa el año, con $t = 0$ correspondiente a 2000. Use este modelo para hallar el número de recetas surtidas por farmacias independientes en cada año de 2000 a 2007. (Fuente: National Association of Chain Drug Stores)

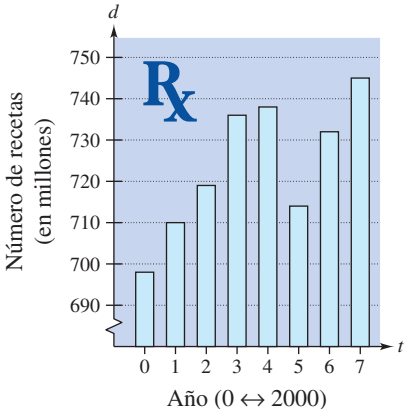
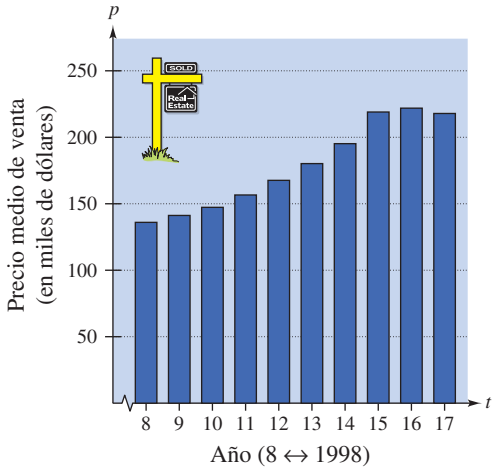


FIGURA PARA 94

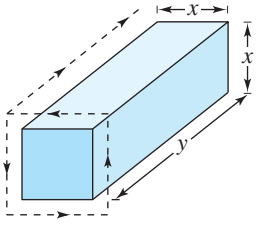
95. PRECIO MEDIO DE VENTA Los precios p medios de venta (en miles de dólares) de una casa unifamiliar existente en Estados Unidos, de 1998 a 2007 (vea la figura), se puede calcular con el modelo

$$p(t) = \begin{cases} 1.011t^2 - 12.38t + 170.5, & 8 \le t \le 13 \\ -6.950t^2 + 222.55t - 1557.6, & 14 \le t \le 17 \end{cases}$$

donde t representa el año, con $t = 8$ correspondiente a 1998. Use este modelo para hallar el precio medio de venta de una casa unifamiliar existente en cada año, de 1998 a 2007. (Fuente: National Association of Realtors)



96. REGLAMENTOS POSTALES Un paquete rectangular, que ha de ser enviado por el Servicio Postal de Estados Unidos, puede tener una longitud máxima y cincha (perímetro de una sección transversal) de 108 pulgadas (vea la figura).



(a) Escriba el volumen V del paquete como función de x. ¿Cuál es el dominio de la función?

(b) Use calculadora de gráficas para graficar su función. Asegúrese de usar un ajuste de ventana apropiado.

(c) ¿Qué dimensiones darán el máximo volumen del paquete? Explique su respuesta.

97. COSTO, INGRESO Y UTILIDAD Una compañía elabora un producto por el cual el costo variable es de \$12.30 por unidad, y los costos fijos son \$98 000. El producto se vende en \$17.98. Sea x el número de unidades producidas y vendidas.

(a) El costo total para una empresa es la suma del costo variable y los costos fijos. Escriba el costo total C como función del número de unidades producidas.

(b) Escriba el ingreso R como función del número de unidades vendidas.

(c) Escriba la utilidad P como función del número de unidades vendidas. (*Nota:* $P = R - C$)

98. COSTO PROMEDIO El inventor de un nuevo juego piensa que el costo variable por producir el juego es de \$0.95 por unidad, y los costos fijos son \$6000. El inventor vende cada juego en \$1.69. Sea x el número de juegos vendidos.

(a) El costo total para una empresa es la suma del costo variable y los costos fijos. Escriba el costo total C como función del número de juegos vendidos.

(b) Escriba el costo promedio por unidad $\overline{C} = C/x$ como función de x.

99. TRANSPORTACIÓN Para grupos de 80 personas o más, una compañía de autobuses de alquiler determina la tarifa por persona según la fórmula

$$\text{Tarifa} = 8 - 0.05(n - 80), \quad n \geq 80$$

donde la tarifa está dada en dólares y n es el número de personas.

(a) Escriba el ingreso R para la compañía de transporte como función de n.

(b) Use la función del inciso (a) para completar la tabla. ¿Qué se puede concluir?

n	90	100	110	120	130	140	150
$R(n)$							

100. FÍSICA La fuerza F (en toneladas) del agua contra la cara de una represa está calculada con la función $F(y) = 149.76\sqrt{10}y^{5/2}$, donde y es la profundidad del agua (en pies).

(a) Complete la tabla. ¿Qué se puede concluir a partir de ella?

y	5	10	20	30	40
$F(y)$					

(b) Use la tabla para calcular la profundidad a la que la fuerza contra la represa es de 1 000 000 de toneladas.

(c) Encuentre algebraicamente la profundidad a la cual la fuerza contra la represa es de 1 000 000 de toneladas.

101. ALTURA DE UN GLOBO Un globo que lleva un transmisor asciende verticalmente desde un punto a 3000 pies de la estación receptora.

(a) Trace un diagrama que dé una representación visual del problema. Represente con h la altura del globo y con d la distancia entre éste y la estación receptora.

(b) Escriba la altura del globo como función de d. ¿Cuál es el dominio de la función?

102. REGISTRO ELECTRÓNICO La tabla siguiente muestra los números de devoluciones de impuestos (en millones) hechas a través de registro electrónico de 2000 a 2007. Represente con $f(t)$ el número de devoluciones de impuestos hechas a través de registro electrónico en el año t. (Fuente: Internal Revenue Service)

Año	Número de devoluciones de impuestos hechas a través de registro electrónico
2000	35.4
2001	40.2
2002	46.9
2003	52.9
2004	61.5
2005	68.5
2006	73.3
2007	80.0

(a) Encuentre $\dfrac{f(2007) - f(2000)}{2007 - 2000}$ e interprete el resultado en el contexto del problema.

(b) Haga una gráfica de dispersión de los datos.

(c) Encuentre algebraicamente un modelo lineal para los datos. Represente con N el número de devoluciones de impuestos hecha a través de registro electrónico, haciendo que $t = 0$ corresponda a 2000.

(d) Use el modelo hallado en el inciso (c) para completar la tabla.

t	0	1	2	3	4	5	6	7
N								

(e) Compare sus resultados del inciso (d) con los datos reales.

(f) Use calculadora de gráficas para hallar un modelo lineal para los datos. Haga que $x = 0$ corresponda a 2000. ¿Cómo se compara el modelo hallado en el inciso (c) con el modelo dado por la calculadora de gráficas?

En los Ejercicios 103-110, encuentre el cociente de diferencias y simplifique su respuesta.

103. $f(x) = x^2 - x + 1, \quad \dfrac{f(2+h) - f(2)}{h}, \quad h \neq 0$

104. $f(x) = 5x - x^2, \quad \dfrac{f(5+h) - f(5)}{h}, \quad h \neq 0$

105. $f(x) = x^3 + 3x, \quad \dfrac{f(x+h) - f(x)}{h}, \quad h \neq 0$

106. $f(x) = 4x^2 - 2x, \quad \dfrac{f(x+h) - f(x)}{h}, \quad h \neq 0$

107. $g(x) = \dfrac{1}{x^2}, \quad \dfrac{g(x) - g(3)}{x - 3}, \quad x \neq 3$

108. $f(t) = \dfrac{1}{t-2}, \quad \dfrac{f(t) - f(1)}{t - 1}, \quad t \neq 1$

109. $f(x) = \sqrt{5x}, \quad \dfrac{f(x) - f(5)}{x - 5}, \quad x \neq 5$

110. $f(x) = x^{2/3} + 1, \quad \dfrac{f(x) - f(8)}{x - 8}, \quad x \neq 8$

En los Ejercicios 111-114, compare los datos con una de las siguientes funciones

$$f(x) = cx, \; g(x) = cx^2, \; h(x) = c\sqrt{|x|} \text{ y } r(x) = \frac{c}{x}$$

y determine el valor de la constante c que hará que la función se ajuste a los datos de la tabla.

111.

x	-4	-1	0	1	4
y	-32	-2	0	-2	-32

112.

x	-4	-1	0	1	4
y	-1	$-\frac{1}{4}$	0	$\frac{1}{4}$	1

113.

x	-4	-1	0	1	4
y	-8	-32	No definido	32	8

114.

x	-4	-1	0	1	4
y	6	3	0	3	6

EXPLORACIÓN

¿VERDADERO O FALSO? **En los Ejercicios 115-118, determine si la proposición es verdadera o falsa. Justifique su respuesta.**

115. Toda relación es una función.

116. Toda función es una relación.

117. El dominio de la función dada por $f(x) = x^4 - 1$ es $(-\infty, \infty)$, y el intervalo de $f(x)$ es $(0, \infty)$.

118. El conjunto de pares ordenados $\{(-8, -2), (-6, 0), (-4, 0), (-2, 2), (0, 4), (2, -2)\}$ representa una función.

119. PIÉNSELO Considere

$$f(x) = \sqrt{x - 1} \quad \text{y} \quad g(x) = \frac{1}{\sqrt{x - 1}}.$$

¿Por qué son diferentes los dominios de f y g?

120. PIÉNSELO Considere

$$f(x) = \sqrt{x - 2} \quad \text{y} \quad g(x) = \sqrt[3]{x - 2}.$$

¿Por qué son diferentes los dominios de f y g?

121. PIÉNSELO Dada $f(x) = x^2$, f es la variable independiente? ¿Por qué sí o por qué no?

122. TOQUE FINAL

(a) Describa cualesquiera diferencias entre una *relación* y una *función*.

(b) Verbalmente, explique los significados de *dominio* y *rango*.

En los Ejercicios 123 y 124, determine si los enunciados usan la palabra *función* en formas que sean matemáticamente correctas. Explique su razonamiento.

123. (a) El impuesto sobre ventas por un artículo comprado es función del precio de venta.

(b) Su calificación en el siguiente examen de álgebra es una función del número de horas que estudie por la noche antes del examen.

124. (a) La cantidad en la cuenta de ahorros de usted es función de su salario.

(b) La rapidez a la que una pelota de béisbol cae al suelo es una función de la altura desde la que fue lanzada.

El símbolo ∫ indica un ejemplo o ejercicio en el que se destacan las técnicas algebraicas específicamente empleadas en cálculo.

1.5 Análisis de gráficas de funciones

Lo que debe aprender

- Usar la prueba de la recta vertical para funciones.
- Encontrar los ceros de funciones.
- Determinar los intervalos en los que las funciones son crecientes o decrecientes y determinar valores relativos máximos y mínimos de funciones.
- Determinar la razón media de cambio de una función.
- Identificar funciones pares e impares.

Por qué debe aprenderlo

Las gráficas de funciones pueden ayudar al estudiante a visualizar relaciones entre variables en la vida real. Por ejemplo, en el Ejercicio 110 de la página 64 se usa la gráfica de una función para representar visualmente la temperatura de una ciudad en un periodo de 24 horas.

Gráfica de una función

En la sección 1.4 estudiamos funciones desde un punto de vista algebraico. En esta sección las estudiaremos desde una perspectiva gráfica.

La **gráfica de una función** f es el conjunto de pares ordenados $(x, f(x))$ tal que x está en el dominio de f. Al estudiar esta sección, recuerde que

$x =$ distancia dirigida desde el eje y

$y = f(x) =$ distancia dirigida desde el eje x

como se ve en la Figura 1.52.

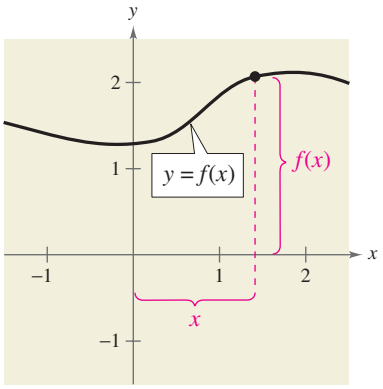


FIGURA 1.52

Ejemplo 1 Hallar el dominio y rango de una función

Use la gráfica de la función f, que se muestra en la Figura 1.53, para hallar (a) el dominio de f, (b) los valores $f(-1)$ y $f(2)$, y (c) el rango de f.

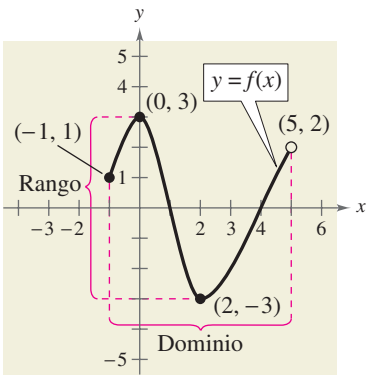


FIGURA 1.53

Solución

a. El punto cerrado en $(-1, 1)$ indica que $x = -1$ está en el dominio de f, en tanto que el punto abierto en $(5, 2)$ indica que $x = 5$ no está en el dominio. Por tanto, el dominio de f es toda x en el intervalo $[-1, 5)$.

b. Como $(-1, 1)$ es un punto en la gráfica de f, se deduce que $f(-1) = 1$. Del mismo modo, como $(2, -3)$ es un punto en la gráfica de f, se deduce que $f(2) = -3$.

c. Como la gráfica no se prolonga debajo de $f(2) = -3$ ni arriba de $f(0) = 3$, el rango de f es el intervalo $[-3, 3]$.

PUNTO *de repaso* Ahora trate de hacer el Ejercicio 9.

El uso de puntos (abiertos o cerrados) en los puntos extremos izquierdo y derecho de una gráfica indica que la gráfica no se prolonga más allá de estos puntos. Si no se muestran esos puntos, suponga que la gráfica se prolonga más allá de ellos.

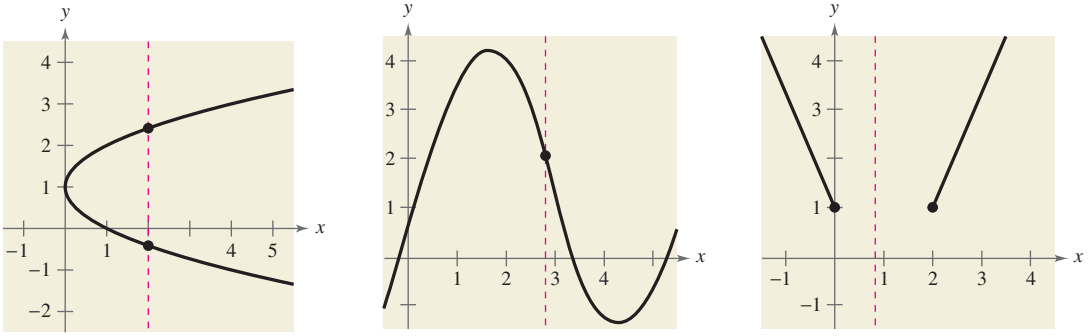
Por la definición de una función, a lo sumo un valor de y corresponde a un valor de x determinado. Esto significa que la gráfica de una función no puede tener dos o más puntos diferentes con la misma coordenada x, y ningunos dos puntos en la gráfica de una función pueden estar verticalmente arriba o abajo uno del otro. Se deduce, por tanto, que una recta vertical puede intersecar la gráfica de una función a lo sumo una vez. Esta observación da una cómoda prueba visual llamada **prueba de la recta vertical** para funciones.

Prueba de la recta vertical para funciones

Un conjunto de puntos en un plano de coordenadas es la gráfica de y como función de x si y sólo si no hay una recta *vertical* que corte la gráfica en más de un punto.

Ejemplo 2 Prueba de la recta vertical para funciones

Use la prueba de la recta vertical para determinar si las gráficas de la Figura 1.54 representan a y como función de x.



(a) (b) (c)

FIGURA 1.54

Solución

a. Ésta *no es* una gráfica de y como función de x, porque podemos hallar una recta vertical que interseca dos veces la gráfica. Esto es, para una entrada x particular, hay más de una salida y.

b. Ésta *es* una gráfica de y como función de x, porque toda recta vertical la interseca a lo sumo una vez. Esto es, para una entrada x particular, hay a lo sumo una salida y.

c. Ésta *es* una gráfica de y como función de x. (Nótese que si una recta vertical no interseca la gráfica, simplemente significa que la función no está definida para ese valor particular de x.) Esto es, para una entrada x particular, hay a lo sumo una salida y.

PUNTO *de repaso* Ahora trate de hacer el Ejercicio 17.

TECNOLOGÍA

Casi todas las calculadoras de gráficas están diseñadas para graficar funciones de x más fácilmente que otros tipos de ecuaciones. Por ejemplo, la gráfica de la Figura 1.54(a) representa la ecuación $x - (y - 1)^2 = 0$. Para usar una calculadora de gráficas para duplicar esta gráfica, primero se debe despejar y de esta ecuación para obtener $y = 1 \pm \sqrt{x}$, y luego graficar las dos ecuaciones $y_1 = 1 + \sqrt{x}$ y $y_2 = 1 - \sqrt{x}$ en la misma pantalla.

Ayuda de álgebra

Para hacer el Ejemplo 3, es necesario que el estudiante pueda resolver ecuaciones. En el Apéndice A.5 puede repasar las técnicas para ello.

Ceros de una función

Si la gráfica de una función de x tiene una intersección con el eje x en $(a, 0)$, entonces a es un **cero** de la función.

Ceros de una función

Los **ceros de una función** f de x son los valores de x para los cuales $f(x) = 0$.

Ejemplo 3 Hallar los ceros de una función

Encuentre los ceros de cada una de las funciones siguientes.

a. $f(x) = 3x^2 + x - 10$ **b.** $g(x) = \sqrt{10 - x^2}$ **c.** $h(t) = \dfrac{2t - 3}{t + 5}$

Solución

Para hallar los ceros de una función, iguale a cero ésta y despeje la variable independiente.

a. $3x^2 + x - 10 = 0$ Igualar $f(x)$ a 0.

$(3x - 5)(x + 2) = 0$ Factorizar.

$3x - 5 = 0 \Rightarrow x = \frac{5}{3}$ Igualar a cero el primer factor.

$x + 2 = 0 \Rightarrow x = -2$ Igualar a cero el segundo factor.

Los ceros de f son $x = \frac{5}{3}$ y $x = -2$. En la Figura 1.55, nótese que la gráfica de f tiene $\left(\frac{5}{3}, 0\right)$ y $(-2, 0)$ como sus intersecciones con el eje x.

b. $\sqrt{10 - x^2} = 0$ Igualar $g(x)$ a 0.

$10 - x^2 = 0$ Elevar al cuadrado ambos lados.

$10 = x^2$ Sumar x^2 a ambos lados.

$\pm\sqrt{10} = x$ Extraer raíces cuadradas.

Los ceros de g son $x = -\sqrt{10}$ y $x = \sqrt{10}$. En la Figura 1.56, nótese que la gráfica de g tiene $\left(-\sqrt{10}, 0\right)$ y $\left(\sqrt{10}, 0\right)$ como sus intersecciones con el eje x.

c. $\dfrac{2t - 3}{t + 5} = 0$ Igualar $h(t)$ a 0.

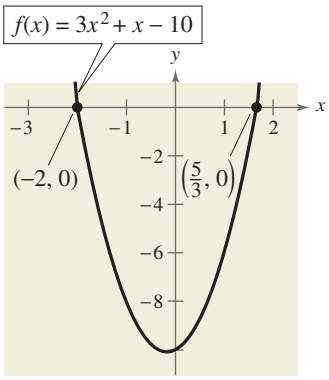
$2t - 3 = 0$ Multiplicar ambos lados por $t + 5$.

$2t = 3$ Sumar 3 a ambos lados.

$t = \dfrac{3}{2}$ Dividir ambos lados entre 2.

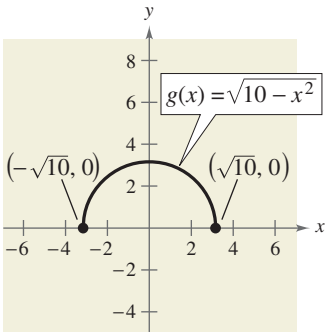
El cero de h es $t = \frac{3}{2}$. En la Figura 1.57, nótese que la gráfica de h tiene $\left(\frac{3}{2}, 0\right)$ como su intersección con el eje t.

PUNTO de repaso Ahora trate de hacer el Ejercicio 23.



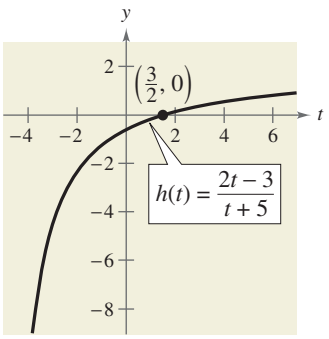
Ceros de f: $x = -2, x = \frac{5}{3}$

FIGURA 1.55



Ceros de g: $x = \pm\sqrt{10}$

FIGURA 1.56



Cero de h: $t = \frac{3}{2}$

FIGURA 1.57

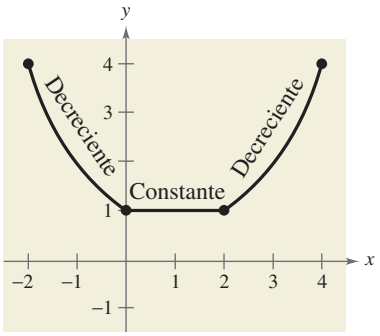


FIGURA 1.58

Funciones crecientes y decrecientes

Cuanto más conozcamos de la gráfica de una función, más sabremos de la función misma. Considere la gráfica de la Figura 1.58. Al moverse de *izquierda a derecha*, esta gráfica baja de $x = -2$ a $x = 0$, es constante de $x = 0$ a $x = 2$, y sube de $x = 2$ a $x = 4$.

Funciones crecientes, decrecientes y constantes

Una función f es **creciente** en un intervalo si, para toda x_1 y x_2 del intervalo, $x_1 < x_2$ implica que $f(x_1) < f(x_2)$.

Una función f es **decreciente** en un intervalo si, para toda x_1 y x_2 del intervalo, $x_1 < x_2$ implica que $f(x_1) > f(x_2)$.

Una función f es **constante** en un intervalo si, para toda x_1 y x_2 del intervalo, $f(x_1) = f(x_2)$.

Ejemplo 4 Funciones crecientes y decrecientes

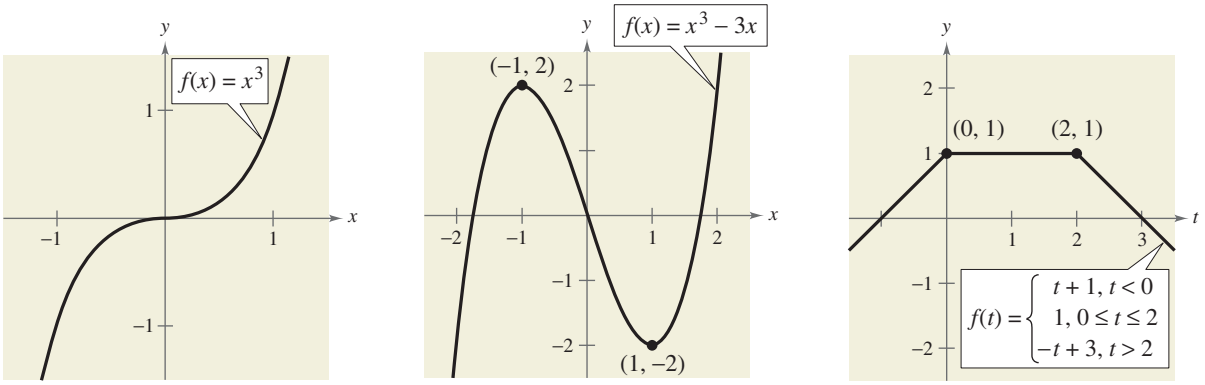
Use las gráficas de la Figura 1.59 para describir el comportamiento creciente o decreciente de cada función.

Solución

a. Esta función es creciente en toda la recta real.

b. Esta función es creciente en el intervalo $(-\infty, -1)$, decreciente en el intervalo $(-1, 1)$ y creciente en el intervalo $(1, \infty)$.

c. Esta función es creciente en el intervalo $(-\infty, 0)$, constante en el intervalo $(0, 2)$ y decreciente en el intervalo $(2, \infty)$.



(a) (b) (c)

FIGURA 1.59

PUNTO *de repaso* Ahora trate de hacer el Ejercicio 41.

Para ayudar a determinar si una función es creciente, decreciente o constante en un intervalo, se puede evaluar para varios valores de x. No obstante, es necesario usar cálculo para determinar con toda certeza todos los intervalos en los que una función es creciente, decreciente o constante.

Tip de estudio

Un mínimo relativo o un máximo relativo también se conocen como mínimo *local* o máximo *local*.

Los puntos en los que una función cambia su comportamiento creciente, decreciente o constante son útiles para determinar los valores **mínimo relativo** o **máximo relativo** de la función.

Definiciones de mínimo relativo y máximo relativo

El valor de una función $f(a)$ se denomina **mínimo relativo** de f si existe un intervalo (x_1, x_2) que contenga a tal que

$$x_1 < x < x_2 \quad \text{implica} \quad f(a) \leq f(x).$$

El valor de una función $f(a)$ se denomina **máximo relativo** de f si existe un intervalo (x_1, x_2) que contenga a tal que

$$x_1 < x < x_2 \quad \text{implica} \quad f(a) \geq f(x).$$

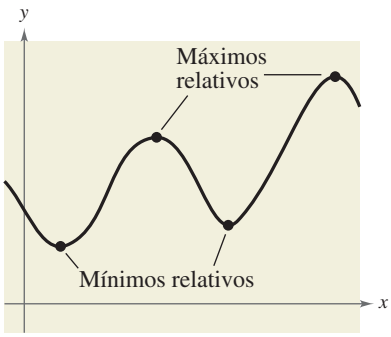


FIGURA 1.60

La Figura 1.60 muestra varios ejemplos de mínimos y máximos relativos. En la Sección 2.1 veremos una técnica para hallar el *punto exacto* en el que una función con polinomios de segundo grado tiene un mínimo o un máximo relativos. Por ahora, entonces, podemos usar calculadora de gráficas para hallar aproximaciones razonables de estos puntos.

Ejemplo 5 Calcular un mínimo relativo

Use calculadora de gráficas para aproximar el mínimo relativo de la función dada por $f(x) = 3x^2 - 4x - 2$.

Solución

La gráfica de f se ilustra en la Figura 1.61. Con las funciones *zoom* y *trace* o la *minimum* de una calculadora de gráficas, es posible calcular que la función tiene un mínimo relativo en el punto

$$(0.67, -3.33).$$ Mínimo relativo

Más adelante, en la Sección 2.1, podremos determinar que el punto exacto en el que se presenta el mínimo relativo es $\left(\frac{2}{3}, -\frac{10}{3}\right)$.

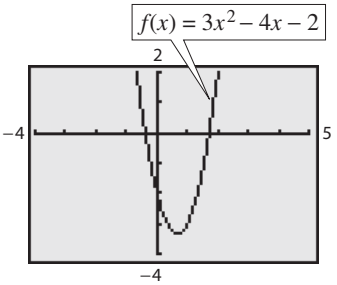


FIGURA 1.61

PUNTO *de repaso* Ahora trate de hacer el Ejercicio 57.

También se puede usar la función *table* de una calculadora de gráficas para aproximar numéricamente el mínimo relativo de la función en el Ejemplo 5. Usando una tabla que empiece en 0.6 e incremente el valor de x en 0.01, es posible calcular que el mínimo de $f(x) = 3x^2 - 4x - 2$ se presenta en el punto $(0.67, -3.33)$.

TECNOLOGÍA

Si se usa calculadora de gráficas para calcular los valores x y y de un mínimo o un máximo relativos, la función *zoom* a veces produce gráficas que son casi planas. Para superar este problema, manualmente se puede cambiar el ajuste vertical de la pantalla. La gráfica se alargará verticalmente si los valores Ymin y Ymax se acercan más.

Razón de cambio promedio

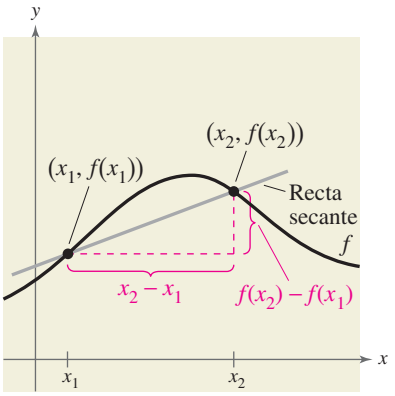


FIGURA 1.62

En la sección 1.3 aprendimos que la pendiente de una recta se puede interpretar como una *razón de cambio*. Para una gráfica no lineal cuya pendiente cambia en cada punto, la **razón de cambio promedio** entre cualesquier dos puntos $(x_1, f(x_1))$ y $(x_2, f(x_2))$ es la pendiente de la recta que pasa por los dos puntos (vea la Figura 1.62). La recta que pasa por los dos puntos se denomina **recta secante**, y la pendiente de esta recta está denotada como m_{sec}.

$$\text{Razón de cambio promedio de } f \text{ de } x_1 \text{ a } x_2 = \frac{f(x_2) - f(x_1)}{x_2 - x_1}$$
$$= \frac{\text{cambio en } y}{\text{cambio en } x}$$
$$= m_{sec}$$

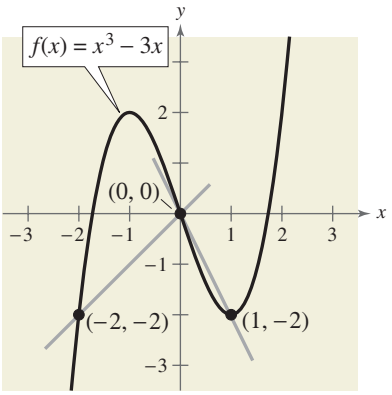


FIGURA 1.63

Ejemplo 6 Razón de cambio promedio de una función

Encuentre las razones de cambio promedio de $f(x) = x^3 - 3x$ (a) de $x_1 = -2$ a $x_2 = 0$ y (b) de $x_1 = 0$ a $x_2 = 1$ (vea Figura 1.63).

Solución

a. La razón de cambio promedio de f de $x_1 = -2$ a $x_2 = 0$ es

$$\frac{f(x_2) - f(x_1)}{x_2 - x_1} = \frac{f(0) - f(-2)}{0 - (-2)} = \frac{0 - (-2)}{2} = 1.$$

La recta secante tiene pendiente positiva.

b. La razón de cambio promedio de f de $x_1 = 0$ a $x_2 = 1$ es

$$\frac{f(x_2) - f(x_1)}{x_2 - x_1} = \frac{f(1) - f(0)}{1 - 0} = \frac{-2 - 0}{1} = -2.$$

La recta secante tiene pendiente negativa.

PUNTO *de repaso* Ahora trate de hacer el Ejercicio 75.

Ejemplo 7 Hallar la rapidez media

La distancia s (en pies) a la que un auto en movimiento está de un reflector está dada por la función $s(t) = 20t^{3/2}$, donde t es el tiempo (en segundos). Encuentre la rapidez media del auto (a) de $t_1 = 0$ a $t_2 = 4$ segundos y (b) de $t_1 = 4$ a $t_2 = 9$ segundos.

Solución

a. La rapidez media del auto de $t_1 = 0$ a $t_2 = 4$ segundos es

$$\frac{s(t_2) - s(t_1)}{t_2 - t_1} = \frac{s(4) - s(0)}{4 - (0)} = \frac{160 - 0}{4} = 40 \text{ pies por segundo.}$$

b. La rapidez media del auto de $t_1 = 4$ a $t_2 = 9$ segundos es

$$\frac{s(t_2) - s(t_1)}{t_2 - t_1} = \frac{s(9) - s(4)}{9 - 4} = \frac{540 - 160}{5} = 76 \text{ pies por segundo.}$$

PUNTO *de repaso* Ahora trate de hacer el Ejercicio 113.

Funciones pares e impares

En la Sección 1.2 estudiamos diferentes tipos de simetría de una gráfica. En la terminología de funciones, se dice que una función es *par* si su gráfica es simétrica respecto al eje y y es *impar* si su gráfica es simétrica respecto al origen. Las pruebas de simetría de la Sección 1.2 dan las siguientes pruebas para funciones pares e impares.

Pruebas para funciones pares e impares

Una función $y = f(x)$ es **par** si, para cada x en el dominio de f,

$$f(-x) = f(x).$$

Una función $y = f(x)$ es **impar** si, para cada x en el dominio de f,

$$f(-x) = -f(x).$$

Ejemplo 8 Funciones pares e impares

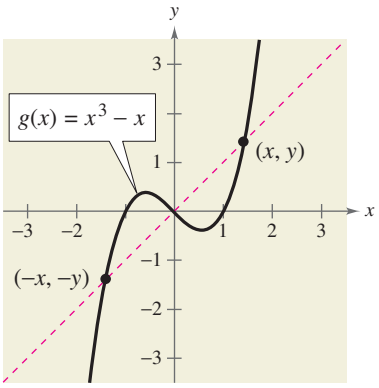
a. La función $g(x) = x^3 - x$ es impar porque $g(-x) = -g(x)$, como sigue:

$$\begin{aligned} g(-x) &= (-x)^3 - (-x) && \text{Sustituir } -x \text{ por } x. \\ &= -x^3 + x && \text{Simplificar.} \\ &= -(x^3 - x) && \text{Propiedad distributiva} \\ &= -g(x) && \text{Prueba para función impar} \end{aligned}$$

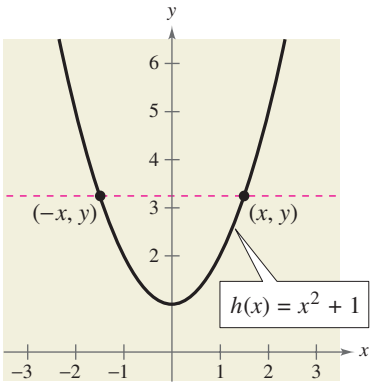
b. La función $h(x) = x^2 + 1$ es par porque $h(-x) = h(x)$, como sigue:

$$\begin{aligned} h(-x) &= (-x)^2 + 1 && \text{Sustituir } -x \text{ por } x. \\ &= x^2 + 1 && \text{Simplificar.} \\ &= h(x) && \text{Prueba para función par} \end{aligned}$$

Las gráficas y simetría de estas dos funciones se muestran en la Figura 1.64.



(a) Simétrica al origen: función impar



(b) Simétrica al eje y: función par

FIGURA 1.64

PUNTO *de repaso* Ahora trate de hacer el Ejercicio 83.

1.5 EJERCICIOS

En www.CalcChat.com vea las soluciones a los ejercicios impares.

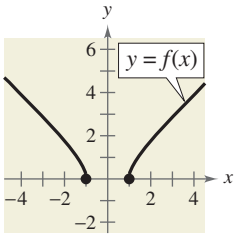
VOCABULARIO: Llene los espacios en blanco.

1. La gráfica de una función f es el conjunto de _____ _____ $(x, f(x))$ tal que x está en el dominio de f.
2. La _____ _____ _____ _____ _____ se usa para determinar si la gráfica de una ecuación es una función de y en términos de x.
3. Los _____ de una función f son los valores de x para los cuales $f(x) = 0$.
4. Una función f está _____ en un intervalo si, para cualquier x_1 y x_2 en el intervalo, $x_1 < x_2$ implica que $f(x_1) > f(x_2)$.
5. El valor de una función $f(a)$ es un _____ relativo de f si existe un intervalo (x_1, x_2) que contenga a a tal que $x_1 < x < x_2$ implica $f(a) \geq f(x)$.
6. La _____ _____ _____ _____ entre cualesquier dos puntos $(x_1, f(x_1))$ y $(x_2, f(x_2))$ es la pendiente de la recta que pasa por los dos puntos, y esta recta se denomina recta _____ .
7. Una función f es _____ si, por cada x en el dominio de f, $f(-x) = -f(x)$.
8. Una función f es _____ si su gráfica es simétrica respecto al eje y.

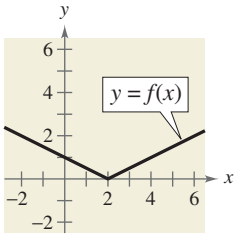
HABILIDADES Y APLICACIONES

En los Ejercicios 9-12, use la gráfica de la función para hallar el dominio y el rango de f.

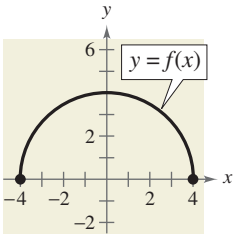
9.



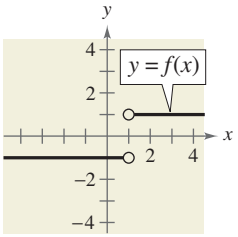
10.



11.

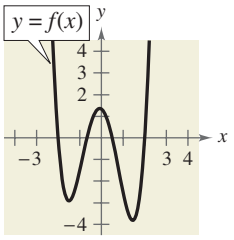


12.

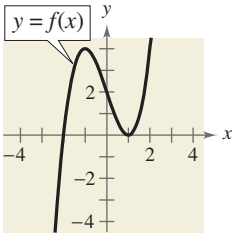


En los Ejercicios 13-16, use la gráfica de la función para hallar el dominio y el rango de f y los valores de función indicados.

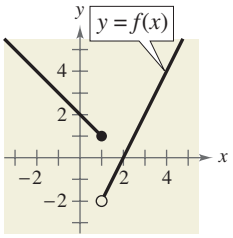
13. (a) $f(-2)$ (b) $f(-1)$ (c) $f\left(\frac{1}{2}\right)$ (d) $f(1)$



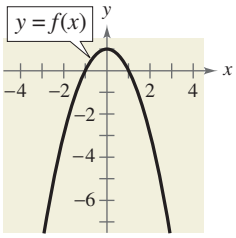
14. (a) $f(-1)$ (b) $f(2)$ (c) $f(0)$ (d) $f(1)$



15. (a) $f(2)$ (b) $f(1)$ (c) $f(3)$ (d) $f(-1)$

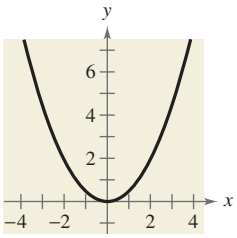


16. (a) $f(-2)$ (b) $f(1)$ (c) $f(0)$ (d) $f(2)$

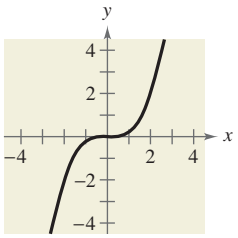


En los Ejercicios 17-22, use la prueba de la recta vertical para determinar si y es una función de x. Para imprimir una copia amplificada de la gráfica, visite el sitio web *www.mathgraphs.com*.

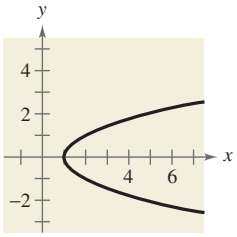
17. $y = \frac{1}{2}x^2$



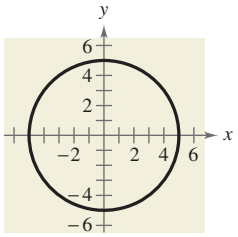
18. $y = \frac{1}{4}x^3$



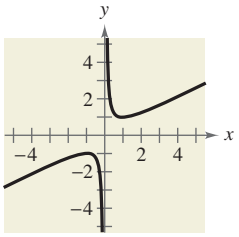
19. $x - y^2 = 1$



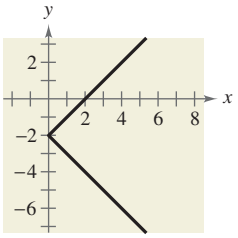
20. $x^2 + y^2 = 25$



21. $x^2 = 2xy - 1$



22. $x = |y + 2|$



En los Ejercicios 23-32, encuentre algebraicamente los ceros de la función.

23. $f(x) = 2x^2 - 7x - 30$

24. $f(x) = 3x^2 + 22x - 16$

25. $f(x) = \dfrac{x}{9x^2 - 4}$

26. $f(x) = \dfrac{x^2 - 9x + 14}{4x}$

27. $f(x) = \frac{1}{2}x^3 - x$

28. $f(x) = x^3 - 4x^2 - 9x + 36$

29. $f(x) = 4x^3 - 24x^2 - x + 6$

30. $f(x) = 9x^4 - 25x^2$

31. $f(x) = \sqrt{2x} - 1$

32. $f(x) = \sqrt{3x + 2}$

En los Ejercicios 33-38, (a) use calculadora de gráficas para graficar la función y hallar sus ceros y (b) verifique algebraicamente sus resultados del inciso (a).

33. $f(x) = 3 + \dfrac{5}{x}$

34. $f(x) = x(x - 7)$

35. $f(x) = \sqrt{2x + 11}$

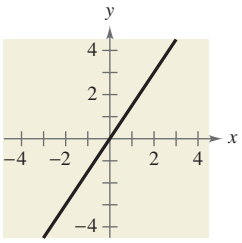
36. $f(x) = \sqrt{3x - 14} - 8$

37. $f(x) = \dfrac{3x - 1}{x - 6}$

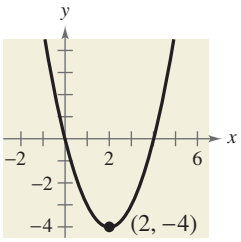
38. $f(x) = \dfrac{2x^2 - 9}{3 - x}$

En los Ejercicios 39-46, determine los intervalos en los que la función es creciente, decreciente o constante.

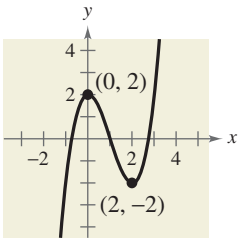
39. $f(x) = \frac{3}{2}x$



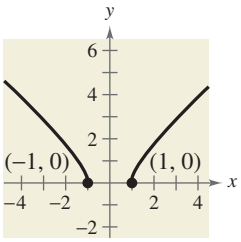
40. $f(x) = x^2 - 4x$



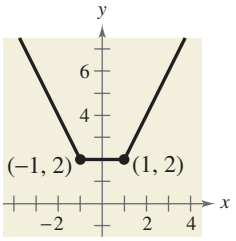
41. $f(x) = x^3 - 3x^2 + 2$



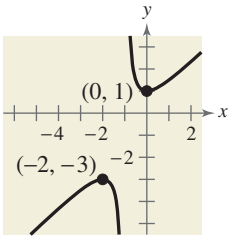
42. $f(x) = \sqrt{x^2 - 1}$



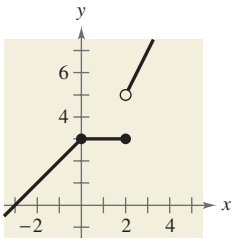
43. $f(x) = |x + 1| + |x - 1|$



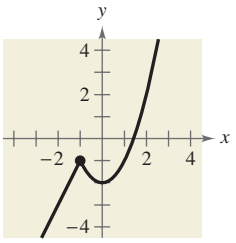
44. $f(x) = \dfrac{x^2 + x + 1}{x + 1}$



45. $f(x) = \begin{cases} x + 3, & x \le 0 \\ 3, & 0 < x \le 2 \\ 2x + 1, & x > 2 \end{cases}$



46. $f(x) = \begin{cases} 2x + 1, & x \le -1 \\ x^2 - 2, & x > -1 \end{cases}$



En los Ejercicios 47-56, (a) use calculadora de gráficas para graficar la función y visualmente determinar los intervalos en los que es creciente, decreciente o constante, y (b) haga una tabla de valores para verificar si la función es creciente, decreciente o constante en los intervalos que haya identificado en el inciso (a).

47. $f(x) = 3$

48. $g(x) = x$

49. $g(s) = \dfrac{s^2}{4}$

50. $h(x) = x^2 - 4$

51. $f(t) = -t^4$

52. $f(x) = 3x^4 - 6x^2$

53. $f(x) = \sqrt{1 - x}$

54. $f(x) = x\sqrt{x + 3}$

55. $f(x) = x^{3/2}$

56. $f(x) = x^{2/3}$

En los Ejercicios 57-66, use calculadora de gráficas para graficar la función y calcular (a dos lugares decimales) cualesquier valores de mínimo o máximo relativos.

57. $f(x) = (x - 4)(x + 2)$
58. $f(x) = 3x^2 - 2x - 5$
59. $f(x) = -x^2 + 3x - 2$
60. $f(x) = -2x^2 + 9x$
61. $f(x) = x(x - 2)(x + 3)$
62. $f(x) = x^3 - 3x^2 - x + 1$
63. $g(x) = 2x^3 + 3x^2 - 12x$
64. $h(x) = x^3 - 6x^2 + 15$
65. $h(x) = (x - 1)\sqrt{x}$
66. $g(x) = x\sqrt{4 - x}$

En los Ejercicios 67-74, grafique la función y determine el intervalo(s) para el que $f(x) \geq 0$.

67. $f(x) = 4 - x$
68. $f(x) = 4x + 2$
69. $f(x) = 9 - x^2$
70. $f(x) = x^2 - 4x$
71. $f(x) = \sqrt{x - 1}$
72. $f(x) = \sqrt{x + 2}$
73. $f(x) = -\left(1 + |x|\right)$
74. $f(x) = \frac{1}{2}\left(2 + |x|\right)$

En los Ejercicios 75-82, encuentre la razón de cambio promedio de la función de x_1 a x_2.

	Función	*Valores x*
75.	$f(x) = -2x + 15$	$x_1 = 0, x_2 = 3$
76.	$f(x) = 3x + 8$	$x_1 = 0, x_2 = 3$
77.	$f(x) = x^2 + 12x - 4$	$x_1 = 1, x_2 = 5$
78.	$f(x) = x^2 - 2x + 8$	$x_1 = 1, x_2 = 5$
79.	$f(x) = x^3 - 3x^2 - x$	$x_1 = 1, x_2 = 3$
80.	$f(x) = -x^3 + 6x^2 + x$	$x_1 = 1, x_2 = 6$
81.	$f(x) = -\sqrt{x - 2} + 5$	$x_1 = 3, x_2 = 11$
82.	$f(x) = -\sqrt{x + 1} + 3$	$x_1 = 3, x_2 = 8$

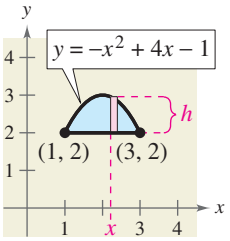
En los Ejercicios 83-90, determine si la función es par, impar o ninguna de éstas. A continuación describa la simetría.

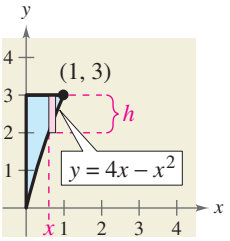
83. $f(x) = x^6 - 2x^2 + 3$
84. $h(x) = x^3 - 5$
85. $g(x) = x^3 - 5x$
86. $f(t) = t^2 + 2t - 3$
87. $h(x) = x\sqrt{x + 5}$
88. $f(x) = x\sqrt{1 - x^2}$
89. $f(s) = 4s^{3/2}$
90. $g(s) = 4s^{2/3}$

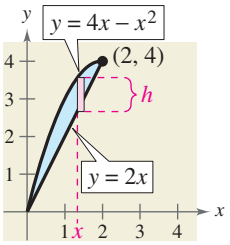
En los Ejercicios 91-100, trace una gráfica de la función y determine si es par, impar o ninguna de éstas. Verifique algebraicamente sus respuestas.

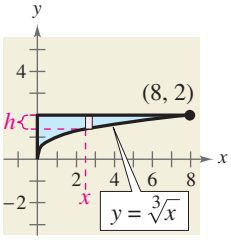
91. $f(x) = 5$
92. $f(x) = -9$
93. $f(x) = 3x - 2$
94. $f(x) = 5 - 3x$
95. $h(x) = x^2 - 4$
96. $f(x) = -x^2 - 8$
97. $f(x) = \sqrt{1 - x}$
98. $g(t) = \sqrt[3]{t - 1}$
99. $f(x) = |x + 2|$
100. $f(x) = -|x - 5|$

En los Ejercicios 101-104, escriba la altura h del rectángulo como función de x.

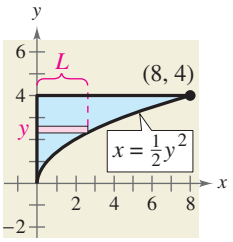
101.


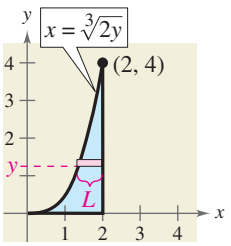
102.


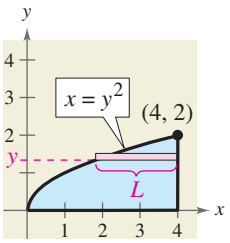
103.


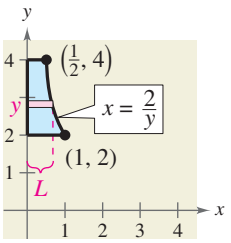
104.


En los Ejercicios 105-108, escriba la longitud L del rectángulo como función de y.

105.


106.


107.


108.


109. ELECTRÓNICA El número de lúmenes (rapidez de flujo de luz) L desde una lámpara fluorescente puede ser calculado con el modelo

$$L = -0.294x^2 + 97.744x - 664.875, \quad 20 \leq x \leq 90$$

donde x es la potencia en watts de la lámpara.

(a) Use calculadora de gráficas para graficar la función.

(b) Use la gráfica del inciso (a) para calcular la potencia en watts necesaria para obtener 2000 lúmenes.

El símbolo indica un ejemplo o ejercicio en el que se destacan las técnicas algebraicas específicamente empleadas en cálculo.

110. ANÁLISIS DE DATOS: TEMPERATURA La tabla siguiente muestra las temperaturas y (en grados Fahrenheit) en cierta ciudad en un periodo de 24 horas. Represente con x la hora del día, donde $x = 0$ corresponde a las 6 A.M.

Hora, x	Temperatura, y
0	34
2	50
4	60
6	64
8	63
10	59
12	53
14	46
16	40
18	36
20	34
22	37
24	45

Un modelo que representa estos datos está dado por

$$y = 0.026x^3 - 1.03x^2 + 10.2x + 34, \quad 0 \le x \le 24.$$

(a) Use una calculadora de gráficas para crear una gráfica de dispersión de los datos. A continuación grafique el modelo en la misma pantalla.

(b) ¿Qué tan bien se ajusta el modelo a los datos?

(c) Use la gráfica para calcular las horas cuando la temperatura era creciente y decreciente.

(d) Use la gráfica para calcular las temperaturas máxima y mínima durante este periodo de 24 horas.

(e) ¿Podría usarse este modelo para pronosticar las temperaturas en la ciudad durante el siguiente periodo de 24 horas? ¿Por qué sí o por qué no?

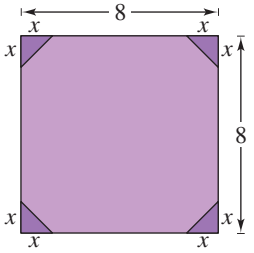
111. ESCALA DE EJES DE COORDENADAS Cada una de las funciones descritas a continuación modela los datos especificados para los años 1998 a 2008, con $t = 8$ correspondiente a 1998. Calcule una escala razonable para el eje vertical (por ejemplo, cientos, miles, millones, etc.) de la gráfica y justifique su respuesta. (Hay numerosas respuestas correctas.)

(a) $f(t)$ representa el salario promedio de profesores universitarios.

(b) $f(t)$ representa la población de Estados Unidos.

(c) $f(t)$ representa el porcentaje de la fuerza laboral civil que está desempleada.

112. GEOMETRÍA Esquinas de igual tamaño se cortan de un cuadrado con lados de 8 metros de longitud (vea figura).



(a) Escriba el área A de la figura resultante como función de x. Determine el dominio de la función.

(b) Use una calculadora de gráficas para graficar la función de área en su dominio. Use la gráfica para hallar el rango de la función.

(c) Identifique la figura que resultaría si x se escogiera como el valor máximo del dominio de la función. ¿Cuál sería la longitud de cada lado de la figura?

113. CANTIDAD DE INSCRIPCIONES Las cantidades r de inscripciones de niños en preescolar en Estados Unidos, de 1970 a 2005 se puede calcular con el modelo

$$r = -0.021t^2 + 1.44t + 39.3, \quad 0 \le t \le 35$$

donde t representa el año, con $t = 0$ correspondiente a 1970. (Fuente: U.S. Census Bureau)

(a) Use una calculadora de gráficas para graficar el modelo.

(b) Encuentre la razón media de cambio del modelo de 1970 a 2005. Interprete su respuesta en el contexto del problema.

114. VENTA DE TECNOLOGÍA EN VEHÍCULOS Los ingresos estimados r (en millones de dólares) por venta de tecnología en vehículos en Estados Unidos, de 2003 a 2008, se puede calcular con el modelo

$$r = 157.30t^2 - 397.4t + 6114, \quad 3 \le t \le 8$$

donde t representa el año, con $t = 3$ correspondiente a 2003. (Fuente: Consumer Electronics Association)

(a) Use una calculadora de gráficas para graficar el modelo.

(b) Encuentre la razón de cambio promedio del modelo de 2003 a 2008. Interprete su respuesta en el contexto del problema.

FÍSICA En los ejercicios 115–120, (a) use la ecuación de posición $s = -16t^2 + v_0t + s_0$ para escribir una función que represente la situación, (b) use una calculadora de gráficas para graficar la función, (c) encuentre la razón de cambio promedio de la función de t_1 a t_2, (d) describa la pendiente de la recta secante que pasa por t_1 y t_2, (e) encuentre la ecuación de la recta secante que pasa por t_1 y t_2, y (f) grafique la recta secante en la misma pantalla como su función de posición.

115. Un cuerpo es lanzado hacia arriba desde una altura de 6 pies a una velocidad de 64 pies por segundo.

$t_1 = 0, t_2 = 3$

116. Un cuerpo es lanzado hacia arriba desde una altura de 6.5 pies a una velocidad de 72 pies por segundo.

$t_1 = 0, t_2 = 4$

117. Un cuerpo es lanzado hacia arriba desde el nivel del suelo a una velocidad de 120 pies por segundo.

$t_1 = 3, t_2 = 5$

118. Un cuerpo es lanzado hacia arriba desde el nivel del suelo a una velocidad de 96 pies por segundo.

$t_1 = 2, t_2 = 5$

119. Un cuerpo se deja caer desde una altura de 120 pies.

$t_1 = 0, t_2 = 2$

120. Un cuerpo se deja caer desde una altura de 80 pies.

$t_1 = 1, t_2 = 2$

EXPLORACIÓN

¿VERDADERO O FALSO? En los Ejercicios 121 y 122, determine si la proposición es verdadera o falsa. Justifique su respuesta.

121. Una función con una raíz cuadrada no puede tener un dominio que sea el conjunto de los números reales.

122. Es posible que una función impar tenga el intervalo $[0, \infty)$ como su dominio.

123. Si f es una función par, determine si g es par, impar o ninguna de éstas. Explique

(a) $g(x) = -f(x)$ (b) $g(x) = f(-x)$

(c) $g(x) = f(x) - 2$ (d) $g(x) = f(x - 2)$

124. PIÉNSELO ¿La gráfica del Ejercicio 19 representa a x como función de y? Explique.

PIÉNSELO En los Ejercicios 125-130, encuentre las coordenadas de un segundo punto en la gráfica de una función f si el punto dado está en la gráfica y la función es (a) par y (b) impar.

125. $\left(-\frac{3}{2}, 4\right)$ **126.** $\left(-\frac{5}{3}, -7\right)$

127. $(4, 9)$ **128.** $(5, -1)$

129. $(x, -y)$ **130.** $(2a, 2c)$

131. ESCRITURA Use una calculadora de gráficas para graficar cada función. Escriba un párrafo que describa cualesquiera similitudes y diferencias que observe entre las gráficas.

(a) $y = x$ (b) $y = x^2$ (c) $y = x^3$

(d) $y = x^4$ (e) $y = x^5$ (f) $y = x^6$

132. CONJETURA Use los resultados del Ejercicio 131 para hacer una conjetura acerca de las gráficas de $y = x^7$ y $y = x^8$. Use una calculadora de gráficas para graficar las funciones y compare los resultados con su conjetura.

133. Use la información del Ejemplo 7 para hallar la rapidez media del auto de $t_1 = 0$ a $t_2 = 9$ segundos. Explique por qué el resultado es menor que el valor obtenido en el inciso (b) del Ejemplo 7.

134. Grafique cada una de las funciones con una calculadora de gráficas. Determine si la función es *par*, *impar* o *ninguna*.

$f(x) = x^2 - x^4$

$g(x) = 2x^3 + 1$

$h(x) = x^5 - 2x^3 + x$

$j(x) = 2 - x^6 - x^8$

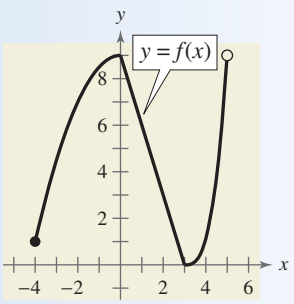
$k(x) = x^5 - 2x^4 + x - 2$

$p(x) = x^9 + 3x^5 - x^3 + x$

¿Qué observa acerca de las ecuaciones de funciones que son impares? ¿Qué es notorio acerca de las ecuaciones de las funciones que son pares? ¿Puede describir una forma de identificar una función como impar o par al inspeccionar la ecuación? ¿Puede describir una forma de identificar una función que no sea impar ni par al inspeccionar la ecuación?

135. ESCRITURA Escriba un breve párrafo que describa tres funciones que representen los comportamientos de cantidades entre 1998 y 2009. Describa una cantidad que disminuyó durante este tiempo, una que aumentó y una que fue constante. Presente gráficamente sus resultados.

136. TOQUE FINAL Use la gráfica de la función para contestar (a)-(e).



(a) Encuentre el dominio y rango de f.

(b) Encuentre el cero(s) de f.

(c) Determine los intervalos en los que f es creciente, decreciente o constante.

(d) Calcule cualesquier valores mínimo o máximo relativos de f.

(e) ¿f es par, impar o ninguna de éstas?

1.6 Biblioteca de funciones principales (o generatrices)

Lo que debe aprender

- Identificar y graficar funciones lineales y cuadráticas.
- Identificar y graficar funciones cúbicas, de raíz cuadrada y recíprocas.
- Identificar y graficar funciones escalón y otras funciones definidas por tramos.
- Reconocer gráficas de funciones principales (o generatrices).

Por qué debe aprenderlo

Las funciones escalón se pueden usar para modelar situaciones reales. Por ejemplo, en el Ejercicio 69 en la página 72 usaremos una función escalón para modelar el costo de enviar un paquete de Los Ángeles a Miami para entrega al día siguiente.

Funciones lineales y cuadráticas

Uno de los objetivos de este texto es hacer posible que el estudiante reconozca las formas básicas de las gráficas de diferentes tipos de funciones. Por ejemplo, sabemos que la gráfica de la **función lineal** $f(x) = ax + b$ es una recta con pendiente $m = a$ e intersección con el eje y en $(0, b)$. La gráfica de la función lineal tiene las siguientes características.

- El dominio de la función es el conjunto de todos los números reales.
- El rango de la función es el conjunto de todos los números reales.
- La gráfica tiene una intersección con el eje x de $(-b/m, 0)$ y una intersección con el eje y de $(0, b)$.
- La gráfica es creciente si $m > 0$, decreciente si $m < 0$, y constante si $m = 0$.

Ejemplo 1 Escribir una función lineal

Escriba la función lineal f para la que $f(1) = 3$ y $f(4) = 0$.

Solución

Para determinar la ecuación de la recta que pasa por $(x_1, y_1) = (1, 3)$ y $(x_2, y_2) = (4, 0)$, primero hallamos la pendiente de la recta.

$$m = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1} = \frac{0 - 3}{4 - 1} = \frac{-3}{3} = -1$$

A continuación, usamos la forma punto-pendiente de la ecuación de una recta.

$$y - y_1 = m(x - x_1) \qquad \text{Forma punto-pendiente}$$
$$y - 3 = -1(x - 1) \qquad \text{Sustituir por } x_1, y_1 \text{ y } m.$$
$$y = -x + 4 \qquad \text{Simplificar.}$$
$$f(x) = -x + 4 \qquad \text{Notación de función}$$

La gráfica de esta función se muestra en la Figura 1.65.

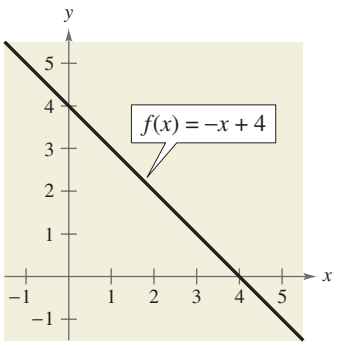


FIGURA 1.65

PUNTO *de repaso* Ahora trate de hacer el Ejercicio 11.

Hay dos tipos especiales de funciones lineales, la **función constante** y la **función identidad.** Una función constante tiene la forma

$$f(x) = c$$

y tiene el dominio de todos los números reales con rango formado por un solo número real c. La gráfica de una función constante es una recta horizontal, como se ve en la Figura 1.66. La función identidad tiene la forma

$$f(x) = x.$$

Su dominio y rango son el conjunto de todos los números reales. La función identidad tiene una pendiente de $m = 1$ e intersección con el eje y en $(0, 0)$. La gráfica de la función identidad es una recta para la cual cada coordenada x es igual a la correspondiente coordenada y. La gráfica es siempre creciente, como se ve en la Figura 1.67.

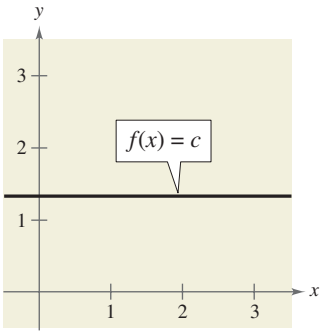


FIGURA 1.66

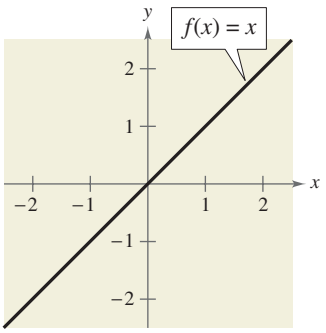


FIGURA 1.67

La gráfica de la **función cuadrada**

$$f(x) = x^2$$

es una curva en forma de U con las siguientes características.

- El dominio de la función es el conjunto de todos los números reales.
- El rango de la función es el conjunto de todos los números reales no negativos.
- La función es par.
- La gráfica tiene una intersección en $(0, 0)$.
- La gráfica es decreciente en el intervalo $(-\infty, 0)$ y creciente en el intervalo $(0, \infty)$.
- La gráfica es simétrica respecto al eje y.
- La gráfica tiene un mínimo relativo en $(0, 0)$.

La gráfica de la función cuadrada se muestra en la Figura 1.68.

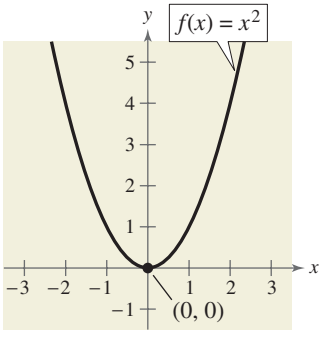


FIGURA 1.68

Funciones cúbicas, de raíz cuadrada y recíprocas

Las características básicas de las gráficas de las **funciones cúbicas, raíz cuadrada** y **recíprocas** se resumen a continuación.

1. La gráfica de la función *cúbica* $f(x) = x^3$ tiene las siguientes características.

- El dominio de la función es el conjunto de todos los números reales.
- El rango de la función es el conjunto de todos los números reales.
- La función es impar.
- La gráfica tiene una intersección en $(0, 0)$.
- La gráfica es creciente en el intervalo $(-\infty, \infty)$.
- La gráfica es simétrica respecto al origen.

La gráfica de la función cúbica se muestra en la Figura 1.69.

2. La gráfica de la función *raíz cuadrada* $f(x) = \sqrt{x}$ tiene las siguientes características.

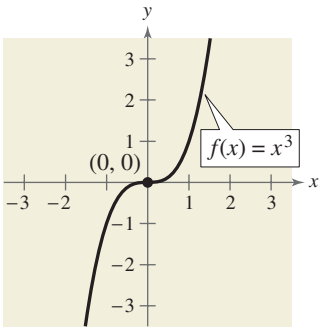
- El dominio de la función es el conjunto de todos los números reales no negativos.
- El rango de la función es el conjunto de todos los números reales no negativos.
- La gráfica tiene una intersección en $(0, 0)$.
- La gráfica es creciente en el intervalo $(0, \infty)$.

La gráfica de la función raíz cuadrada se ilustra en la Figura 1.70.

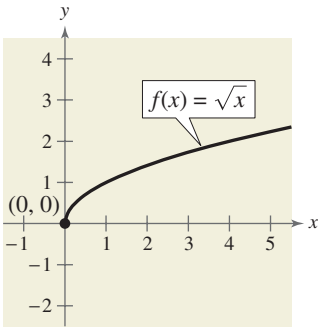
3. La gráfica de la función *recíproca* $f(x) = \dfrac{1}{x}$ tiene las siguientes características.

- El dominio de la función es $(-\infty, 0) \cup (0, \infty)$.
- El rango de la función es $(-\infty, 0) \cup (0, \infty)$.
- La función es impar.
- La gráfica no tiene ninguna intersección.
- La gráfica es decreciente en los intervalos $(-\infty, 0)$ y $(0, \infty)$.
- La gráfica es simétrica respecto al origen.

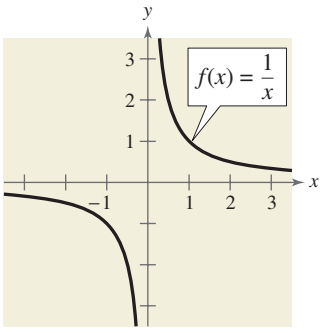
La gráfica de la función recíproca se muestra en la Figura 1.71.



Función cúbica
FIGURA 1.69



Función raíz cuadrada
FIGURA 1.70



Función recíproca
FIGURA 1.71

Funciones escalón y definidas por tramos

Las funciones cuyas gráficas se asemejan a conjuntos de escalones se denominan **funciones escalón.** La más famosa de las funciones de escalón es la **función mayor entero,** que se denota con $[\![x]\!]$ y se define como

$$f(x) = [\![x]\!] = \textit{el mayor entero menor o igual a } x.$$

Algunos valores de la función mayor entero son como sigue.

$$[\![-1]\!] = (\text{mayor entero} \leq -1) = -1$$
$$\left[\!\left[-\tfrac{1}{2}\right]\!\right] = \left(\text{mayor entero} \leq -\tfrac{1}{2}\right) = -1$$
$$\left[\!\left[\tfrac{1}{10}\right]\!\right] = \left(\text{mayor entero} \leq \tfrac{1}{10}\right) = 0$$
$$[\![1.5]\!] = (\text{mayor entero} \leq 1.5) = 1$$

La gráfica de la función mayor entero

$$f(x) = [\![x]\!]$$

tiene las siguientes características, como se muestra en la Figura 1.72.

- El dominio de la función es el conjunto de todos los números reales.
- El rango de la función es el conjunto de todos los enteros.
- La gráfica tiene intersección con el eje y en $(0, 0)$ e intersecciones con el eje x en el intervalo $[0, 1)$.
- La gráfica es constante entre cada par de enteros consecutivos.
- La gráfica salta verticalmente una unidad en cada valor entero.

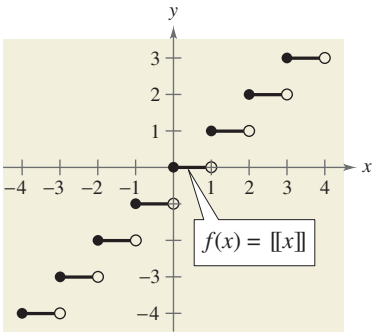


FIGURA 1.72

TECNOLOGÍA

Al graficar una función escalón, usted debe ajustar su calculadora de gráficas en el modo *dot* (*puntos*).

Ejemplo 2 Evaluar una función escalón

Evalúe la función cuando $x = -1, 2,$ y $\frac{3}{2}$.

$$f(x) = [\![x]\!] + 1$$

Solución

Para $x = -1$, el mayor entero es ≤ -1 es -1, por lo que

$$f(-1) = [\![-1]\!] + 1 = -1 + 1 = 0.$$

Para $x = 2$, el mayor entero es ≤ 2 es 2, por lo que

$$f(2) = [\![2]\!] + 1 = 2 + 1 = 3.$$

Para $x = \frac{3}{2}$, el mayor entero es $\leq \frac{3}{2}$ es 1, por lo que

$$f\left(\tfrac{3}{2}\right) = \left[\!\left[\tfrac{3}{2}\right]\!\right] + 1 = 1 + 1 = 2.$$

Usted puede verificar sus respuestas al examinar la gráfica de $f(x) = [\![x]\!] + 1$ mostrada en la Figura 1.73.

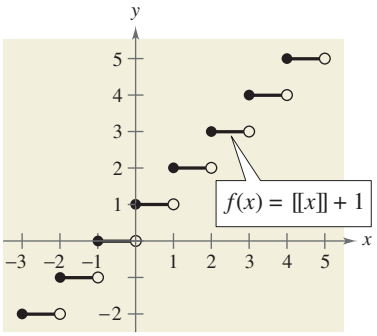


FIGURA 1.73

PUNTO *de repaso* Ahora trate de hacer el Ejercicio 43.

Recuerde de la Sección 1.4 que una función definida por tramos está definida por dos o más ecuaciones en un dominio especificado. Para graficar una función definida por tramos, grafique cada ecuación por separado en el dominio especificado, como se ilustra en el Ejemplo 3.

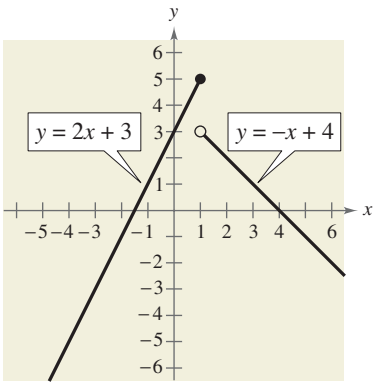


FIGURA 1.74

Ejemplo 3 Graficar una función definida por tramos

Trace la gráfica de

$$f(x) = \begin{cases} 2x + 3, & x \leq 1 \\ -x + 4, & x > 1 \end{cases}.$$

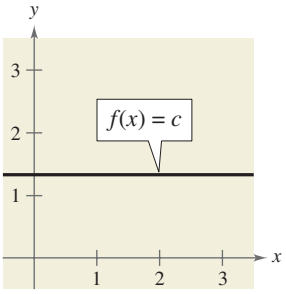
Solución

Esta función definida por tramos está compuesta de dos funciones lineales. En $x = 1$ y a la izquierda de $x = 1$ la gráfica es la recta $y = 2x + 3$, y a la derecha de $x = 1$ la gráfica es la recta $y = -x + 4$, como se ilustra en la Figura 1.74. Nótese que el punto $(1, 5)$ es un punto sólido y el punto $(1, 3)$ es un punto abierto. Esto es porque $f(1) = 2(1) + 3 = 5$.

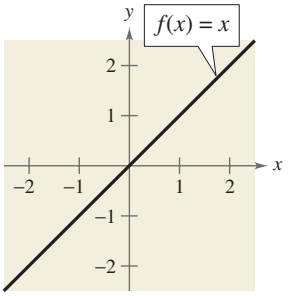
PUNTO *de repaso* Ahora trate de hacer el Ejercicio 57.

Funciones principales

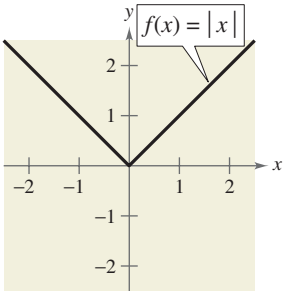
Las ocho gráficas ilustradas en la Figura 1.75 representan las funciones de uso más común en álgebra. La familiaridad del lector con las características básicas de estas sencillas gráficas le ayudarán a analizar las formas de gráficas más complicadas; en particular, las gráficas obtenidas de estas gráficas por las transformaciones rígidas y no rígidas que se estudian en la siguiente sección.



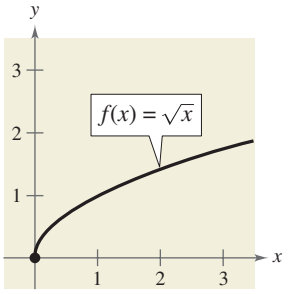
(a) Función constante



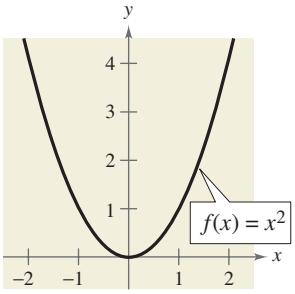
(b) Función identidad



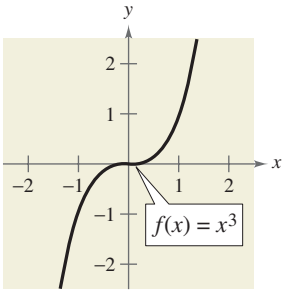
(c) Función valor absoluto



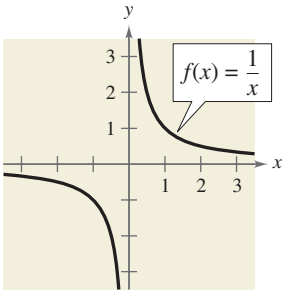
(d) Función raíz cuadrada



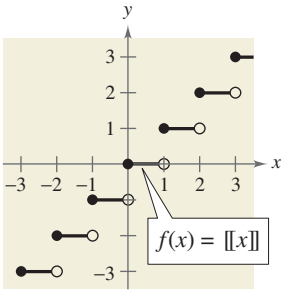
(e) Función cuadrática



(f) Función cúbica



(g) Función recíproca



(h) Función mayor entero

FIGURA 1.75

1.6 EJERCICIOS

En www.CalcChat.com vea las soluciones a los ejercicios impares.

VOCABULARIO

En los ejercicios 1-9, relacione cada función con su nombre.

1. $f(x) = [\![x]\!]$ **2.** $f(x) = x$ **3.** $f(x) = 1/x$

4. $f(x) = x^2$ **5.** $f(x) = \sqrt{x}$ **6.** $f(x) = c$

7. $f(x) = |x|$ **8.** $f(x) = x^3$ **9.** $f(x) = ax + b$

(a) función cuadrática (b) función raíz cuadrada (c) función cúbica

(d) función lineal (e) función constante (f) función valor absoluto

(g) función mayor entero (h) función recíproca (i) función identidad

10. Llene los espacios en blanco. La función constante y la función identidad son dos tipos especiales de funciones _____.

HABILIDADES Y APLICACIONES

En los Ejercicios 11-18, (a) escriba la función lineal f tal que tenga los valores de la función indicada y (b) trace la gráfica de la función.

11. $f(1) = 4, f(0) = 6$ **12.** $f(-3) = -8, f(1) = 2$

13. $f(5) = -4, f(-2) = 17$ **14.** $f(3) = 9, f(-1) = -11$

15. $f(-5) = -1, f(5) = -1$

16. $f(-10) = 12, f(16) = -1$

17. $f\left(\frac{1}{2}\right) = -6, f(4) = -3$

18. $f\left(\frac{2}{3}\right) = -\frac{15}{2}, f(-4) = -11$

En los Ejercicios 19-42, use una calculadora de gráficas para graficar la función. Asegúrese de escoger una pantalla apropiada.

19. $f(x) = 0.8 - x$ **20.** $f(x) = 2.5x - 4.25$

21. $f(x) = -\frac{1}{6}x - \frac{5}{2}$ **22.** $f(x) = \frac{5}{6} - \frac{2}{3}x$

23. $g(x) = -2x^2$ **24.** $h(x) = 1.5 - x^2$

25. $f(x) = 3x^2 - 1.75$ **26.** $f(x) = 0.5x^2 + 2$

27. $f(x) = x^3 - 1$ **28.** $f(x) = 8 - x^3$

29. $f(x) = (x - 1)^3 + 2$ **30.** $g(x) = 2(x + 3)^3 + 1$

31. $f(x) = 4\sqrt{x}$ **32.** $f(x) = 4 - 2\sqrt{x}$

33. $g(x) = 2 - \sqrt{x + 4}$ **34.** $h(x) = \sqrt{x + 2} + 3$

35. $f(x) = -1/x$ **36.** $f(x) = 4 + (1/x)$

37. $h(x) = 1/(x + 2)$ **38.** $k(x) = 1/(x - 3)$

39. $g(x) = |x| - 5$ **40.** $h(x) = 3 - |x|$

41. $f(x) = |x + 4|$ **42.** $f(x) = |x - 1|$

En los Ejercicios 43-50, evalúe la función para los valores indicados.

43. $f(x) = [\![x]\!]$

(a) $f(2.1)$ (b) $f(2.9)$ (c) $f(-3.1)$ (d) $f\left(\frac{7}{2}\right)$

44. $g(x) = 2[\![x]\!]$

(a) $g(-3)$ (b) $g(0.25)$ (c) $g(9.5)$ (d) $g\left(\frac{11}{3}\right)$

45. $h(x) = [\![x + 3]\!]$

(a) $h(-2)$ (b) $h\left(\frac{1}{2}\right)$ (c) $h(4.2)$ (d) $h(-21.6)$

46. $f(x) = 4[\![x]\!] + 7$

(a) $f(0)$ (b) $f(-1.5)$ (c) $f(6)$ (d) $f\left(\frac{5}{3}\right)$

47. $h(x) = [\![3x - 1]\!]$

(a) $h(2.5)$ (b) $h(-3.2)$ (c) $h\left(\frac{7}{3}\right)$ (d) $h\left(-\frac{21}{3}\right)$

48. $k(x) = \left[\!\left[\frac{1}{2}x + 6\right]\!\right]$

(a) $k(5)$ (b) $k(-6.1)$ (c) $k(0.1)$ (d) $k(15)$

49. $g(x) = 3[\![x - 2]\!] + 5$

(a) $g(-2.7)$ (b) $g(-1)$ (c) $g(0.8)$ (d) $g(14.5)$

50. $g(x) = -7[\![x + 4]\!] + 6$

(a) $g\left(\frac{1}{8}\right)$ (b) $g(9)$ (c) $g(-4)$ (d) $g\left(\frac{3}{2}\right)$

En los Ejercicios 51-56, trace la gráfica de la función.

51. $g(x) = -[\![x]\!]$ **52.** $g(x) = 4[\![x]\!]$

53. $g(x) = [\![x]\!] - 2$

54. $g(x) = [\![x]\!] - 1$

55. $g(x) = [\![x + 1]\!]$

56. $g(x) = [\![x - 3]\!]$

En los Ejercicios 57-64, grafique la función.

57. $f(x) = \begin{cases} 2x + 3, & x < 0 \\ 3 - x, & x \geq 0 \end{cases}$

58. $g(x) = \begin{cases} x + 6, & x \leq -4 \\ \frac{1}{2}x - 4, & x > -4 \end{cases}$

59. $f(x) = \begin{cases} \sqrt{4 + x}, & x < 0 \\ \sqrt{4 - x}, & x \geq 0 \end{cases}$

60. $f(x) = \begin{cases} 1 - (x - 1)^2, & x \leq 2 \\ \sqrt{x - 2}, & x > 2 \end{cases}$

61. $f(x) = \begin{cases} x^2 + 5, & x \leq 1 \\ -x^2 + 4x + 3, & x > 1 \end{cases}$

62. $h(x) = \begin{cases} 3 - x^2, & x < 0 \\ x^2 + 2, & x \geq 0 \end{cases}$

63. $h(x) = \begin{cases} 4 - x^2, & x < -2 \\ 3 + x, & -2 \leq x < 0 \\ x^2 + 1, & x \geq 0 \end{cases}$

64. $k(x) = \begin{cases} 2x + 1, & x \leq -1 \\ 2x^2 - 1, & -1 < x \leq 1 \\ 1 - x^2, & x > 1 \end{cases}$

En los Ejercicios 65-68, (a) use una calculadora de gráficas para graficar la función, (b) exprese el dominio y rango de la función y (c) describa la forma de la gráfica.

65. $s(x) = 2\left(\frac{1}{4}x - \left[\!\left[\frac{1}{4}x\right]\!\right]\right)$

66. $g(x) = 2\left(\frac{1}{4}x - \left[\!\left[\frac{1}{4}x\right]\!\right]\right)^2$

67. $h(x) = 4\left(\frac{1}{2}x - \left[\!\left[\frac{1}{2}x\right]\!\right]\right)$

68. $k(x) = 4\left(\frac{1}{2}x - \left[\!\left[\frac{1}{2}x\right]\!\right]\right)^2$

69. CARGO POR ENTREGA El costo de enviar un paquete para entrega al día siguiente, de Los Ángeles a Miami, es $23.40 para un paquete que pese hasta 1 libra sin que llegue a ésta, y $3.75 por cada libra adicional o parte de una libra. Un modelo para el costo total C (en dólares) de enviar el paquete es $C = 23.40 + 3.75[\![x]\!]$, $x > 0$, donde x es el peso en libras.

(a) Trace una gráfica del modelo.

(b) Determine el costo de enviar un paquete que pesa 9.25 libras.

70. CARGO POR ENTREGA El costo de enviar un paquete para entrega al día siguiente, de Nueva York a Atlanta, es $22.65 para un paquete que pese hasta 1 libra sin que llegue a ésta, y $3.70 por cada libra adicional o parte de una libra.

(a) Use la función mayor entero para crear un modelo del costo C de entregar el día siguiente un paquete que pesa x libras, $x > 0$.

(b) Trace la gráfica de la función.

71. SALARIOS A un mecánico se le pagan $14.00 por hora por tiempo normal y tiempo y medio por hora extra. La función de salario semanal está dada por

$$W(h) = \begin{cases} 14h, & 0 < h \leq 40 \\ 21(h - 40) + 560, & h > 40 \end{cases}$$

donde h es el número de horas trabajadas en una semana.

(a) Evalúe $W(30)$, $W(40)$, $W(45)$ y $W(50)$.

(b) La compañía aumentó la semana regular de trabajo a 45 horas. ¿Cuál es la nueva función de salario semanal?

72. TORMENTA DE NIEVE Durante una tormenta de nieve que dura nueve horas, nieva a razón de 1 pulgada por hora durante las primeras 2 horas, a razón de 2 pulgadas por hora durante las siguientes 6 horas, y a razón de 0.5 pulgadas por hora para la hora final. Escriba y grafique una función definida por partes que dé la profundidad de la nieve durante la tormenta. ¿Cuántas pulgadas de nieve se acumularon por la tormenta?

73. INGRESOS La tabla siguiente muestra el ingreso mensual y (en miles de dólares) de una empresa de jardinería, por cada mes del año 2008, con $x = 1$ representando enero.

Mes, x	Ingresos, y
1	5.2
2	5.6
3	6.6
4	8.3
5	11.5
6	15.8
7	12.8
8	10.1
9	8.6
10	6.9
11	4.5
12	2.7

Un modelo matemático que representa estos datos es

$$f(x) = \begin{cases} -1.97x + 26.3 \\ 0.505x^2 - 1.47x + 6.3 \end{cases}$$

(a) Use una calculadora para graficar el modelo. ¿Cuál es el dominio de cada parte de la función definida por tramos? ¿Cómo puede usted indicarlo? Explique su razonamiento.

(b) Encuentre $f(5)$ y $f(11)$ e interprete sus resultados en el contexto del problema.

(c) ¿Cómo se comparan los valores obtenidos del modelo del inciso (a) con los valores de datos reales?

EXPLORACIÓN

¿VERDADERO O FALSO? **En los Ejercicios 74 y 75 determine si la proposición es verdadera o falsa. Justifique su respuesta.**

74. Una función definida por tramos siempre tendrá al menos una intersección con el eje x o al menos una intersección con el eje y.

75. Una ecuación lineal siempre tendrá una intersección con el eje x y una intersección con el eje y.

76. TOQUE FINAL Por cada gráfica de f que se muestre en la Figura 1.75, haga lo siguiente.

(a) Encuentre el dominio y rango de f.

(b) Encuentre las intersecciones con los ejes x y y de la gráfica de f.

(c) Determine los intervalos en los cuales f es creciente, decreciente o constante.

(d) Determine si f es par, impar o ninguna de éstas. A continuación describa la simetría.

1.7 Transformaciones de funciones

Lo que debe aprender

- Usar desplazamientos verticales y horizontales para trazar gráficas de funciones.
- Usar reflexiones para trazar gráficas de funciones.
- Usar transformaciones no rígidas para trazar gráficas de funciones.

Por qué debe aprenderlo

Las transformaciones de funciones pueden utilizarse para modelar aplicaciones a la vida real. Por ejemplo, el Ejercicio 79 en la página 81 muestra cómo la transformación de una función puede usarse para modelar el número total de millas recorridas por vans, pickups y vehículos utilitarios deportivos en los Estados Unidos.

Desplazamiento de funciones

Numerosas funciones tienen gráficas que son transformaciones simples de las gráficas principales resumidas en la Sección 1.6. Por ejemplo, se puede obtener la gráfica de

$$h(x) = x^2 + 2$$

al desplazar la gráfica de $f(x) = x^2$ dos unidades *hacia arriba*, como se ilustra en la Figura 1.76. En notación de funciones, h y f están relacionadas como sigue.

$$h(x) = x^2 + 2 = f(x) + 2$$ Desplazamiento dos unidades hacia arriba

Del mismo modo, se puede obtener la gráfica de

$$g(x) = (x - 2)^2$$

al desplazar la gráfica de $f(x) = x^2$ dos unidades *a la derecha*, como se ve en la Figura 1.77. En este caso, las funciones g y f tienen la siguiente relación.

$$g(x) = (x - 2)^2 = f(x - 2)$$ Desplazamiento de dos unidades a la derecha

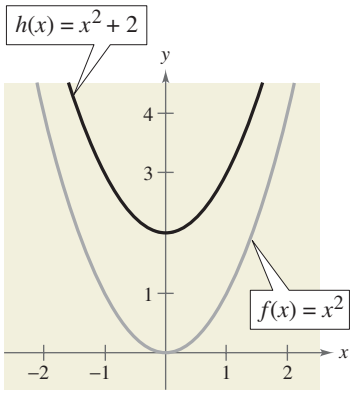


FIGURA 1.76

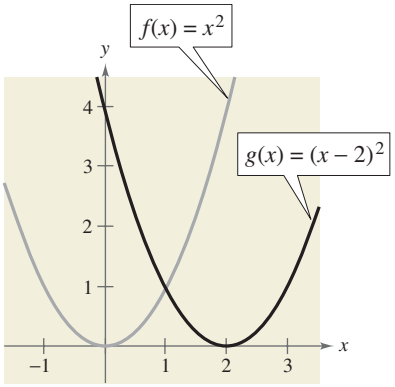


FIGURA 1.77

En la lista que sigue se resume esta exposición sobre los desplazamientos horizontal y vertical.

ATENCIÓN

En los numerales 3 y 4, asegúrese de ver que $h(x) = f(x - c)$ corresponde al desplazamiento *a la derecha* y $h(x) = f(x + c)$ corresponde al desplazamiento a la izquierda para $c > 0$.

Desplazamientos vertical y horizontal

Sea c un número real positivo. Los **desplazamientos vertical y horizontal** en la gráfica de $y = f(x)$ están representados como sigue.

1. Desplazamiento vertical c unidades *hacia arriba:* $h(x) = f(x) + c$
2. Desplazamiento vertical c unidades *hacia abajo:* $h(x) = f(x) - c$
3. Desplazamiento horizontal c unidades *a la derecha:* $h(x) = f(x - c)$
4. Desplazamiento horizontal c unidades *a la izquierda:* $h(x) = f(x + c)$

Algunas gráficas se pueden obtener de combinaciones de desplazamientos verticales y horizontales, como se demuestra en el Ejemplo 1(b). Los desplazamientos verticales y horizontales generan una *familia de funciones*, cada una con la misma forma pero en diferentes lugares del plano.

Ejemplo 1 Desplazamientos en las gráficas de una función

Use la gráfica de $f(x) = x^3$ para trazar la gráfica de cada función.

a. $g(x) = x^3 - 1$ **b.** $h(x) = (x + 2)^3 + 1$

Solución

a. Respecto a la gráfica de $f(x) = x^3$, la gráfica de

$$g(x) = x^3 - 1$$

es un desplazamiento de una unidad hacia abajo, como se ve en la Figura 1.78.

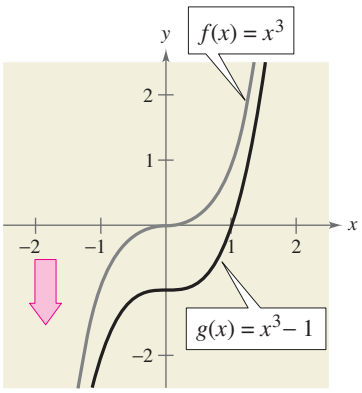


FIGURA 1.78

b. Respecto a la gráfica de $f(x) = x^3$, la gráfica de

$$h(x) = (x + 2)^3 + 1$$

comprende un desplazamiento de dos unidades a la izquierda y de una unidad hacia arriba, como se ve en la Figura 1.79.

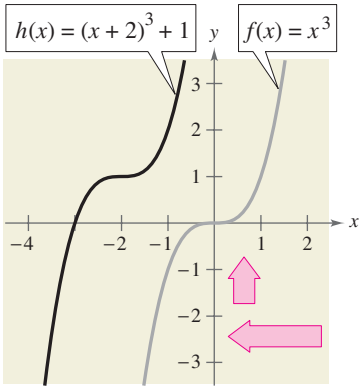


FIGURA 1.79

PUNTO *de repaso* Ahora trate de hacer el Ejercicio 7.

En la Figura 1.79, nótese que se obtiene el mismo resultado si el desplazamiento vertical precede al desplazamiento horizontal, *o bien*, si el desplazamiento horizontal precede al vertical.

Tip de estudio

En el ejemplo 1(a), note que $g(x) = f(x) - 1$ y que en el ejemplo 1(b), $h(x) = f(x + 2) + 1$.

Reflexión de gráficas

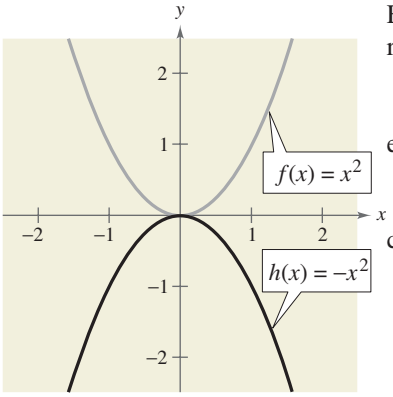


FIGURA 1.80

El segundo tipo común de transformación es una **reflexión**. Por ejemplo, si consideramos que el eje x es un espejo, la gráfica de

$$h(x) = -x^2$$

es la imagen espejo (o reflexión) de la gráfica de

$$f(x) = x^2,$$

como se ve en la Figura 1.80.

Reflexiones en los ejes de coordenadas

Las **reflexiones** en los ejes de coordenadas de la gráfica de $y = f(x)$ están representadas como sigue.

1. La reflexión en el eje x: $h(x) = -f(x)$

2. La reflexión en el eje y: $h(x) = f(-x)$

Ejemplo 2 Hallar ecuaciones a partir de gráficas

La gráfica de la función dada por

$$f(x) = x^4$$

se ilustra en la Figura 1.81. Cada una de las gráficas de la Figura 1.82 es una transformación de la gráfica de f. Encuentre una ecuación para cada una de estas funciones.

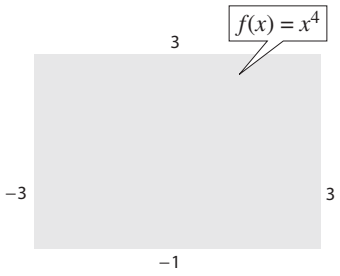
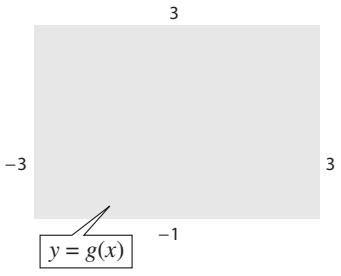
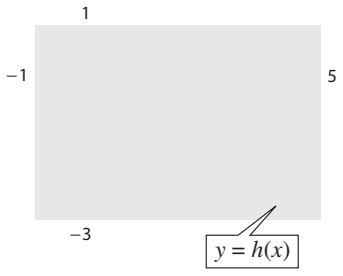


FIGURA 1.81



(a)



(b)

FIGURA 1.82

Solución

a. La gráfica de g es una reflexión en el eje x *seguida por* un desplazamiento de la gráfica $f(x) = x^4$ dos unidades hacia arriba. Entonces, la ecuación para g es

$$g(x) = -x^4 + 2.$$

b. La gráfica de h es un desplazamiento horizontal de tres unidades a la derecha *seguido por* una reflexión en el eje x de la gráfica de $f(x) = x^4$. Entonces, la ecuación para h es

$$h(x) = -(x - 3)^4.$$

PUNTO *de repaso* Ahora trate de hacer el Ejercicio 15.

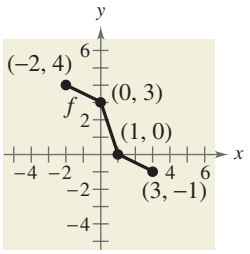


FIGURA PARA 13

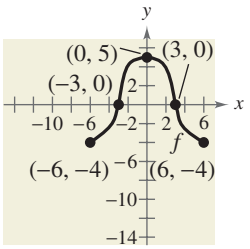
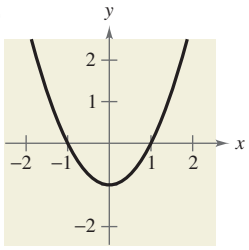


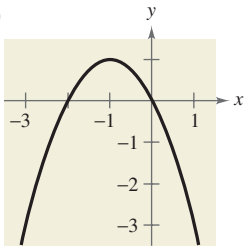
FIGURA PARA 14

15. Use la gráfica de $f(x) = x^2$ para escribir una ecuación para cada función cuya gráfica se muestra.

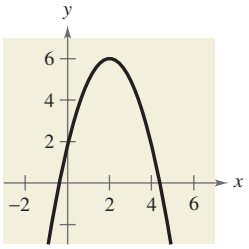
(a)



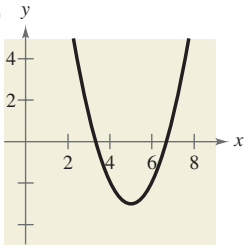
(b)



(c)

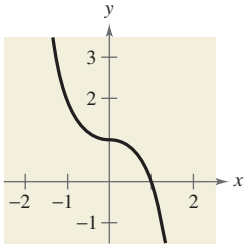


(d)

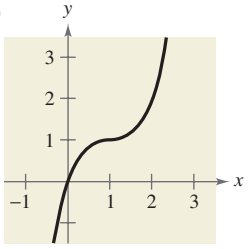


16. Use la gráfica de $f(x) = x^3$ para escribir una ecuación para cada función cuya gráfica se muestra.

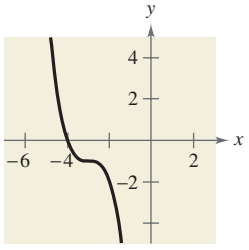
(a)



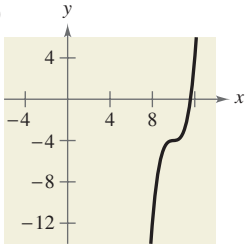
(b)



(c)

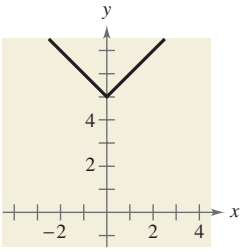


(d)

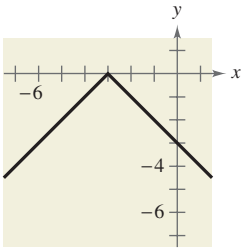


17. Use la gráfica de $f(x) = |x|$ para escribir una ecuación para cada función cuya gráfica se muestra.

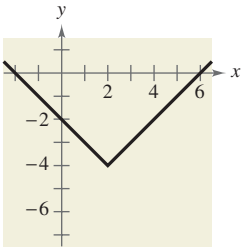
(a)



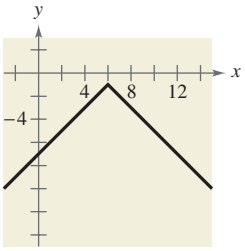
(b)



(c)

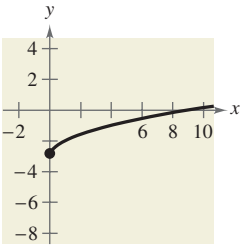


(d)

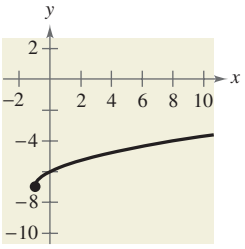


18. Use la gráfica de $f(x) = \sqrt{x}$ para escribir una ecuación para cada función cuya gráfica se muestra.

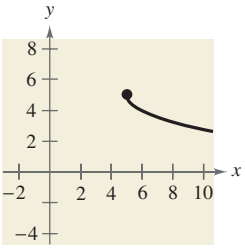
(a)



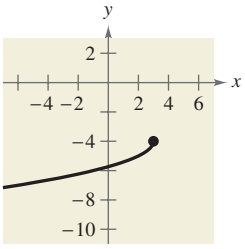
(b)



(c)

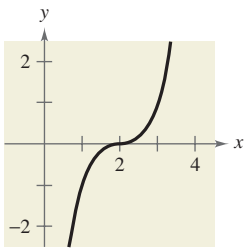


(d)

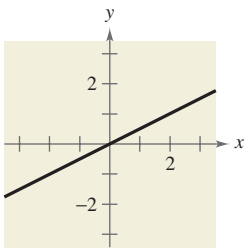


En los Ejercicios 19-24, identifique la función principal y la transformación mostrada en la gráfica. Escriba una ecuación para la función mostrada en la gráfica.

19.



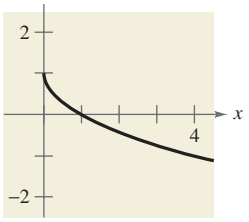
20.



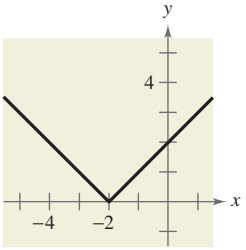
21.

22.

23.



24.



En los Ejercicios 25-54, g está relacionada con una de las funciones principales descritas en la Sección 1.6. (a) Identifique la función principal f. (b) Describa la sucesión de transformaciones de f a g. (c) Trace la gráfica de g. (d) Use notación de funciones para escribir g en términos de f.

25. $g(x) = 12 - x^2$

26. $g(x) = (x - 8)^2$

27. $g(x) = x^3 + 7$

28. $g(x) = -x^3 - 1$

29. $g(x) = \frac{2}{3}x^2 + 4$

30. $g(x) = 2(x - 7)^2$

31. $g(x) = 2 - (x + 5)^2$

32. $g(x) = -(x + 10)^2 + 5$

33. $g(x) = 3 + 2(x - 4)^2$

34. $g(x) = -\frac{1}{4}(x + 2)^2 - 2$

35. $g(x) = \sqrt{3x}$

36. $g(x) = \sqrt{\frac{1}{4}x}$

37. $g(x) = (x - 1)^3 + 2$

38. $g(x) = (x + 3)^3 - 10$

39. $g(x) = 3(x - 2)^3$

40. $g(x) = -\frac{1}{2}(x + 1)^3$

41. $g(x) = -|x| - 2$

42. $g(x) = 6 - |x + 5|$

43. $g(x) = -|x + 4| + 8$

44. $g(x) = |-x + 3| + 9$

45. $g(x) = -2|x - 1| - 4$

46. $g(x) = \frac{1}{2}|x - 2| - 3$

47. $g(x) = 3 - [\![x]\!]$

48. $g(x) = 2[\![x + 5]\!]$

49. $g(x) = \sqrt{x - 9}$

50. $g(x) = \sqrt{x + 4} + 8$

51. $g(x) = \sqrt{7 - x} - 2$

52. $g(x) = -\frac{1}{2}\sqrt{x + 3} - 1$

53. $g(x) = \sqrt{\frac{1}{2}x} - 4$

54. $g(x) = \sqrt{3x} + 1$

En los Ejercicios 55-62, escriba una ecuación para la función descrita por las características dadas.

55. La forma de $f(x) = x^2$, pero desplazada tres unidades a la derecha y siete unidades hacia abajo.

56. La forma de $f(x) = x^2$, pero desplazada dos unidades a la izquierda, nueve unidades hacia arriba y reflejada en el eje x.

57. La forma de $f(x) = x^3$, pero desplazada 13 unidades a la derecha.

58. La forma de $f(x) = x^3$, pero desplazada seis unidades a la izquierda, seis unidades hacia abajo y reflejada en el eje y.

59. La forma de $f(x) = |x|$, pero desplazada 12 unidades hacia arriba y reflejada en el eje x.

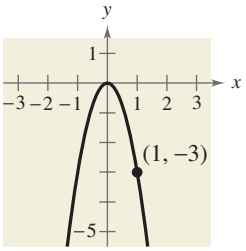
60. La forma de $f(x) = |x|$, pero desplazada cuatro unidades a la izquierda y ocho unidades hacia abajo.

61. La forma de $f(x) = \sqrt{x}$, pero desplazada seis unidades a la izquierda y reflejada en los ejes x y y.

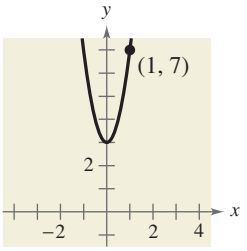
62. La forma de $f(x) = \sqrt{x}$, pero desplazada nueve unidades hacia abajo y reflejada en los ejes x y y.

63. Use la gráfica de $f(x) = x^2$ para escribir una ecuación para cada función cuya gráfica se muestra.

(a)

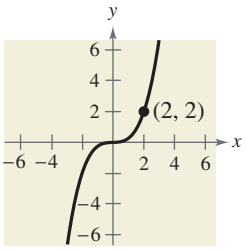


(b)

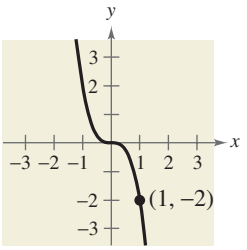


64. Use la gráfica de $f(x) = x^3$ para escribir una ecuación para cada función cuya gráfica se muestra.

(a)

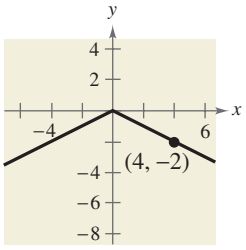


(b)

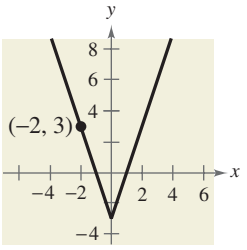


65. Use la gráfica de $f(x) = |x|$ para escribir una ecuación para cada función cuya gráfica se muestra.

(a)

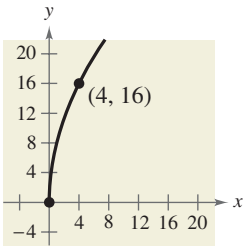


(b)

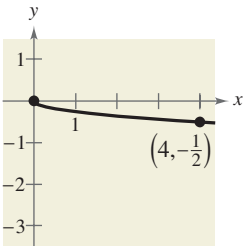


66. Use la gráfica de $f(x) = \sqrt{x}$ para escribir una ecuación para cada función cuya gráfica se muestra.

(a)



(b)



Composición de funciones

Otra forma de combinar dos funciones es formar la **composición** de una con la otra. Por ejemplo, si $f(x) = x^2$ y $g(x) = x + 1$, la composición de f con g es

$$f(g(x)) = f(x + 1)$$
$$= (x + 1)^2.$$

La composición se representa con $f \circ g$, lo que se lee "f compuesta con g."

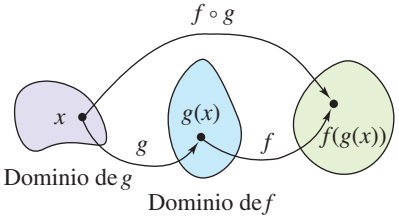


FIGURA 1.90

Definición de la composición de funciones

La **composición** de la función f con la función g es

$$(f \circ g)(x) = f(g(x)).$$

El dominio de $f \circ g$ es el conjunto de toda x en el dominio de g tal que $g(x)$ es en el dominio de f. (Vea Figura 1.90.)

Ejemplo 5 Composición de funciones

Dadas $f(x) = x + 2$ y $g(x) = 4 - x^2$, encuentre lo siguiente.

a. $(f \circ g)(x)$ **b.** $(g \circ f)(x)$ **c.** $(g \circ f)(-2)$

Solución

a. La composición de f con g es como sigue.

$$(f \circ g)(x) = f(g(x)) \quad \text{Definición de } f \circ g$$
$$= f(4 - x^2) \quad \text{Definición de } g(x)$$
$$= (4 - x^2) + 2 \quad \text{Definición de } f(x)$$
$$= -x^2 + 6 \quad \text{Simplificar.}$$

b. La composición de g con f es como sigue:

$$(g \circ f)(x) = g(f(x)) \quad \text{Definición de } g \circ f$$
$$= g(x + 2) \quad \text{Definición de } f(x)$$
$$= 4 - (x + 2)^2 \quad \text{Definición de } g(x)$$
$$= 4 - (x^2 + 4x + 4) \quad \text{Expandir.}$$
$$= -x^2 - 4x \quad \text{Simplificar.}$$

Nótese que, en este caso, $(f \circ g)(x) \neq (g \circ f)(x)$.

c. Usando el resultado del inciso (b) se puede escribir lo siguiente.

$$(g \circ f)(-2) = -(-2)^2 - 4(-2) \quad \text{Sustituir.}$$
$$= -4 + 8 \quad \text{Simplificar.}$$
$$= 4 \quad \text{Simplificar.}$$

PUNTO *de repaso* Ahora trate de hacer el Ejercicio 37.

Tip de estudio

Las siguientes tablas de valores ayudan a ilustrar la composición $(f \circ g)(x)$ dada en el Ejemplo 5

x	0	1	2	3
$g(x)$	4	3	0	-5

$g(x)$	4	3	0	-5
$f(g(x))$	6	5	2	-3

x	0	1	2	3
$f(g(x))$	6	5	2	-3

Nótese que las primeras dos tablas se pueden combinar (o "componer") para producir los valores dados en la tercera tabla.

Ejemplo 6 Hallar el dominio de una función compuesta

Encuentre el dominio de $(f \circ g)(x)$ para las funciones dadas por

$$f(x) = x^2 - 9 \quad \text{y} \quad g(x) = \sqrt{9 - x^2}.$$

Solución algebraica

La composición de las funciones es como sigue.

$$\begin{aligned}(f \circ g)(x) &= f(g(x)) \\ &= f\left(\sqrt{9 - x^2}\right) \\ &= \left(\sqrt{9 - x^2}\right)^2 - 9 \\ &= 9 - x^2 - 9 \\ &= -x^2\end{aligned}$$

De esto, podría parecer que el dominio de la composición es el conjunto de todos los números reales, pero no es así. Como el dominio de f es el conjunto de todos los números reales y el dominio de g es $[-3, 3]$, el dominio de $f \circ g$ es $[-3, 3]$.

PUNTO *de repaso* Ahora trate de hacer el Ejercicio 41.

Solución gráfica

Se puede usar calculadora de gráficas para graficar la composición de las funciones $(f \circ g)(x)$ como $y = \left(\sqrt{9 - x^2}\right)^2 - 9$. Ingrese las funciones como sigue.

$$y_1 = \sqrt{9 - x^2} \qquad y_2 = y_1^2 - 9$$

Grafique y_2, como se ve en la Figura 1.91. Use el comando *trace* para determinar que las coordenadas x de puntos en la gráfica se prolongan de -3 a 3. Entonces, es posible calcular gráficamente que el dominio de $f \circ g$ es $[-3, 3]$.

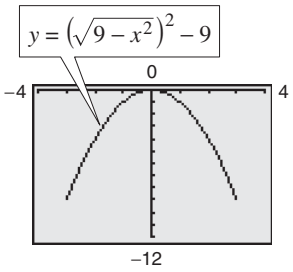


FIGURA 1.91

En los Ejemplos 5 y 6 formamos la composición de dos funciones dadas. En cálculo, también es importante identificar dos funciones que conforman una función compuesta determinada. Por ejemplo, la función h dada por $h(x) = (3x - 5)^3$ es la composición de f con g, donde $f(x) = x^3$ y $g(x) = 3x - 5$. Esto es,

$$h(x) = (3x - 5)^3 = [g(x)]^3 = f(g(x)).$$

Básicamente, para "descomponer" una función compuesta, se busca una función "interior" y una "exterior". En la función h citada líneas antes, $g(x) = 3x - 5$ es la función interior y $f(x) = x^3$ es la exterior.

Ejemplo 7 Descomposición de una función compuesta

Escriba la función dada por $h(x) = \dfrac{1}{(x - 2)^2}$ como composición de dos funciones.

Solución

Una forma de escribir h como composición de dos funciones es tomar la función interior como $g(x) = x - 2$ y la función exterior como

$$f(x) = \frac{1}{x^2} = x^{-2}.$$

A continuación escribimos

$$h(x) = \frac{1}{(x - 2)^2} = (x - 2)^{-2} = f(x - 2) = f(g(x)).$$

PUNTO *de repaso* Ahora trate de hacer el Ejercicio 53.

Aplicación

Ejemplo 8 Cantidad de bacterias

El número N de bacterias en un alimento refrigerado está dado por

$$N(T) = 20T^2 - 80T + 500, \quad 2 \le T \le 14$$

donde T es la temperatura del alimento en grados Celsius. Cuando el alimento se saca del refrigerador, la temperatura del alimento está dada por

$$T(t) = 4t + 2, \quad 0 \le t \le 3$$

donde t es el tiempo en horas. (a) Encuentre la composición $N(T(t))$ e interprete su significado en el contexto. (b) Encuentre el tiempo cuando la cantidad de bacterias llega a 2000.

Solución

a. $N(T(t)) = 20(4t + 2)^2 - 80(4t + 2) + 500$

$= 20(16t^2 + 16t + 4) - 320t - 160 + 500$

$= 320t^2 + 320t + 80 - 320t - 160 + 500$

$= 320t^2 + 420$

La función compuesta $N(T(t))$ representa el número de bacterias en el alimento como función del tiempo que el alimento ha estado fuera de refrigeración.

b. La cantidad de bacterias llegará a 2000 cuando $320t^2 + 420 = 2000$. Resuelva esta ecuación para hallar que la cantidad llegará a 2000 cuando $t \approx 2.2$ horas. Cuando resuelva esta ecuación, observe que el valor negativo es rechazado porque no está en el dominio de la función compuesta.

PUNTO *de repaso* Ahora trate de hacer el Ejercicio 73.

Discusión en clase

Análisis de combinaciones aritméticas de funciones

a. Use las gráficas de f y $(f + g)$ de la Figura 1.92 para hacer una tabla que muestre los valores de $g(x)$ cuando $x = 1, 2, 3, 4, 5$ y 6. Explique su razonamiento.

b. Use las gráficas de f y $(f - h)$ de la Figura 1.92 para hacer una tabla que muestre los valores de $h(x)$ cuando $x = 1, 2, 3, 4, 5$ y 6. Explique su razonamiento.

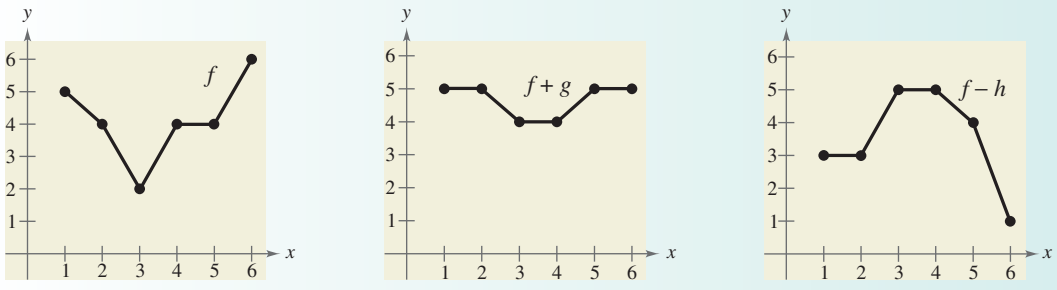


FIGURA 1.92

1.8 EJERCICIOS

En www.CalcChat.com vea las soluciones a los ejercicios impares.

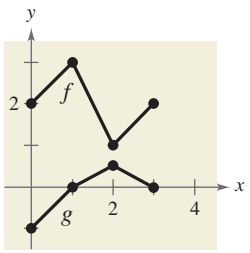
VOCABULARIO: Llene los espacios en blanco.

1. Dos funciones f y g pueden ser combinadas por las operaciones aritméticas de _____, _____, _____, y _____ para crear nuevas funciones.
2. La _____ de una función f con g es $(f \circ g)(x) = f(g(x))$.
3. El dominio de $(f \circ g)$ es toda x en el dominio de g tal que _____ esté en el dominio de f.
4. Para descomponer una función compuesta, busque una función _____ y una función _____.

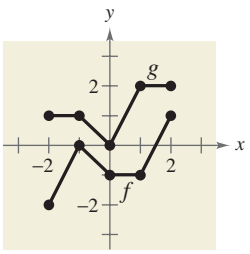
HABILIDADES Y APLICACIONES

En los Ejercicios 5-8, use las gráficas de f y g para graficar $h(x) = (f + g)(x)$. Para imprimir una copia amplificada de la gráfica, visite el sitio web *www.mathgraphs.com*.

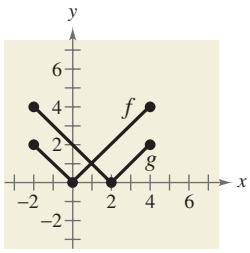
5.



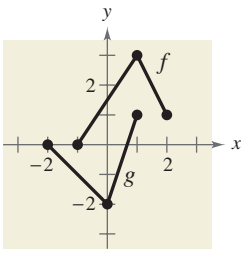
6.



7.



8.



En los Ejercicios 9-16, encuentre (a) $(f + g)(x)$, (b) $(f - g)(x)$, (c) $(fg)(x)$ y (d) $(f/g)(x)$. ¿Cuál es el dominio de f/g?

9. $f(x) = x + 2, \quad g(x) = x - 2$

10. $f(x) = 2x - 5, \quad g(x) = 2 - x$

11. $f(x) = x^2, \quad g(x) = 4x - 5$

12. $f(x) = 3x + 1, \quad g(x) = 5x - 4$

13. $f(x) = x^2 + 6, \quad g(x) = \sqrt{1 - x}$

14. $f(x) = \sqrt{x^2 - 4}, \quad g(x) = \dfrac{x^2}{x^2 + 1}$

15. $f(x) = \dfrac{1}{x}, \quad g(x) = \dfrac{1}{x^2}$

16. $f(x) = \dfrac{x}{x + 1}, \quad g(x) = x^3$

En los Ejercicios 17-28, evalúe la función indicada para $f(x) = x^2 + 1$ y $g(x) = x - 4$.

17. $(f + g)(2)$

18. $(f - g)(-1)$

19. $(f - g)(0)$

20. $(f + g)(1)$

21. $(f - g)(3t)$

22. $(f + g)(t - 2)$

23. $(fg)(6)$

24. $(fg)(-6)$

25. $(f/g)(5)$

26. $(f/g)(0)$

27. $(f/g)(-1) - g(3)$

28. $(fg)(5) + f(4)$

En los Ejercicios 29–32, grafique las funciones f, g y $f + g$ en el mismo sistema de ejes coordenados.

29. $f(x) = \frac{1}{2}x, \quad g(x) = x - 1$

30. $f(x) = \frac{1}{3}x, \quad g(x) = -x + 4$

31. $f(x) = x^2, \quad g(x) = -2x$

32. $f(x) = 4 - x^2, \quad g(x) = x$

RAZONAMIENTO GRÁFICO En los Ejercicios 33-36, use una calculadora de gráficas para graficar f, g y $f + g$ en la misma pantalla. ¿Cuál función aporta más a la magnitud de la suma cuando $0 \le x \le 2$? ¿Cuál función aporta más a la magnitud de la suma cuando $x > 6$?

33. $f(x) = 3x, \quad g(x) = -\dfrac{x^3}{10}$

34. $f(x) = \dfrac{x}{2}, \quad g(x) = \sqrt{x}$

35. $f(x) = 3x + 2, \quad g(x) = -\sqrt{x + 5}$

36. $f(x) = x^2 - \frac{1}{2}, \quad g(x) = -3x^2 - 1$

En los Ejercicios 37-40, encuentre (a) $f \circ g$, (b) $g \circ f$ y (c) $g \circ g$.

37. $f(x) = x^2, \quad g(x) = x - 1$

38. $f(x) = 3x + 5, \quad g(x) = 5 - x$

39. $f(x) = \sqrt[3]{x - 1}, \quad g(x) = x^3 + 1$

40. $f(x) = x^3, \quad g(x) = \dfrac{1}{x}$

En los Ejercicios 41-48, encuentre (a) $f \circ g$ y (b) $g \circ f$. Encuentre el dominio de cada función y cada función compuesta.

41. $f(x) = \sqrt{x + 4}, \quad g(x) = x^2$

42. $f(x) = \sqrt[3]{x - 5}, \quad g(x) = x^3 + 1$

43. $f(x) = x^2 + 1, \quad g(x) = \sqrt{x}$

44. $f(x) = x^{2/3}, \quad g(x) = x^6$

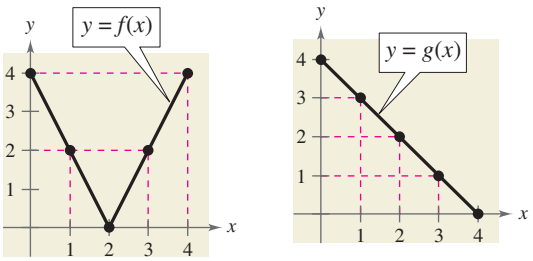
45. $f(x) = |x|, \quad g(x) = x + 6$

46. $f(x) = |x - 4|, \quad g(x) = 3 - x$

47. $f(x) = \dfrac{1}{x}, \quad g(x) = x + 3$

48. $f(x) = \dfrac{3}{x^2 - 1}, \quad g(x) = x + 1$

En los Ejercicios 49-52, use las gráficas de f y g para evaluar las funciones.



49. (a) $(f + g)(3)$ (b) $(f/g)(2)$

50. (a) $(f - g)(1)$ (b) $(fg)(4)$

51. (a) $(f \circ g)(2)$ (b) $(g \circ f)(2)$

52. (a) $(f \circ g)(1)$ (b) $(g \circ f)(3)$

En los Ejercicios 53-60, encuentre dos funciones f y g tales que $(f \circ g)(x) = h(x)$. (Hay numerosas respuestas correctas.)

53. $h(x) = (2x + 1)^2$

54. $h(x) = (1 - x)^3$

55. $h(x) = \sqrt[3]{x^2 - 4}$

56. $h(x) = \sqrt{9 - x}$

57. $h(x) = \dfrac{1}{x + 2}$

58. $h(x) = \dfrac{4}{(5x + 2)^2}$

59. $h(x) = \dfrac{-x^2 + 3}{4 - x^2}$

60. $h(x) = \dfrac{27x^3 + 6x}{10 - 27x^3}$

61. DISTANCIA DE FRENADO El departamento de investigación y desarrollo de un fabricante de automóviles ha determinado que cuando requiere que un conductor se detenga rápidamente para evitar un accidente, la distancia (en pies) que el auto se desplaza durante el tiempo de reacción del conductor está dada por $R(x) = \frac{3}{4}x$, donde x es la velocidad del auto en millas por hora. La distancia (en pies) recorrida cuando el conductor está frenando está dada por $B(x) = \frac{1}{15}x^2$.

(a) Encuentre la función que represente la distancia total de frenado T.

(b) Grafique las funciones R, B y T en el mismo conjunto de ejes de coordenadas para $0 \le x \le 60$.

(c) ¿Cuál función aporta más a la magnitud de la suma a magnitudes de velocidad más altas? Explique.

62. VENTAS De 2003 a 2008, las ventas R_1 (en miles de dólares) para uno de dos restaurantes propiedad de la misma compañía se pueden modelar con

$$R_1 = 480 - 8t - 0.8t^2, \quad t = 3, 4, 5, 6, 7, 8$$

donde $t = 3$ representa 2003. Durante el mismo periodo de seis años, las ventas R_2 (en miles de dólares) para el segundo restaurante pueden modelarse con

$$R_2 = 254 + 0.78t, \quad t = 3, 4, 5, 6, 7, 8.$$

(a) Escriba una función R_3 que represente el total de ventas de los dos restaurantes propiedad de la misma compañía.

(b) Use una calculadora de gráficas para graficar R_1, R_2 y R_3 en la misma pantalla.

63. ESTADÍSTICAS VITALES Sea $b(t)$ el número de nacimientos en Estados Unidos en el año t, y represente con $d(t)$ el número de fallecimientos en Estados Unidos en el año t, donde $t = 0$ corresponde a 2000.

(a) Si $p(t)$ es la población de Estados Unidos en el año t, encuentre la función $c(t)$ que represente el porcentaje de cambio en la población estadounidense.

(b) Interprete el valor de $c(5)$.

64. MASCOTAS Sea $d(t)$ el número de perros en Estados Unidos en el año t, y sea $c(t)$ el número de gatos en ese país en el año t, donde $t = 0$ corresponde a 2000.

(a) Encuentre la función $p(t)$ que represente el número total de perros y gatos en Estados Unidos.

(b) Interprete el valor de $p(5)$.

(c) Represente con $n(t)$ la población de Estados Unidos en el año t, donde $t = 0$ corresponde a 2000. Encuentre e interprete

$$h(t) = \frac{p(t)}{n(t)}.$$

65. PERSONAL MILITAR Los números totales de personal de la Marina N (en miles), y del personal de Infantería de Marina M (en miles) de 2000 a 2007 puede calcularse con los modelos

$$N(t) = 0.192t^3 - 3.88t^2 + 12.9t + 372$$

y

$$M(t) = 0.035t^3 - 0.23t^2 + 1.7t + 172$$

donde t representa el año, con $t = 0$ correspondiente a 2000. (Fuente: Departamento de Defensa)

(a) Encuentre e interprete $(N + M)(t)$. Evalúe esta función para $t = 0$, 6 y 12.

(b) Encuentre e interprete $(N - M)(t)$. Evalúe esta función para $t = 0$, 6 y 12.

66. DEPORTES El número de personas que juega tenis T (en millones) en Estados Unidos, de 2000 a 2007, pueden calcularse con la función

$$T(t) = 0.0233t^4 - 0.3408t^3 + 1.556t^2 - 1.86t + 22.8$$

y la población P de Estados unidos (en millones), de 2000 a 2007 puede calcularse con la función $P(t) = 2.78t + 282.5$, donde t corresponde al año, con $t = 0$ correspondiente a 2000. (Fuente: Tennis Industry Association, U.S. Census Bureau)

(a) Encuentre e interprete $h(t) = \dfrac{T(t)}{P(t)}$.

(b) Evalúe la función del inciso (a) para $t = 0$, 3 y 6.

NACIMIENTOS Y FALLECIMIENTOS En los Ejercicios 67 y 68, use la tabla, que muestra el número total de nacimientos B (en miles) y fallecimientos D (en miles) en Estados Unidos, de 1990 a 2006. (Fuente: U.S. Census Bureau.) (Fuente: U.S. Census Bureau)

Año, t	Nacimientos, B	Fallecimientos, D
1990	4158	2148
1991	4111	2170
1992	4065	2176
1993	4000	2269
1994	3953	2279
1995	3900	2312
1996	3891	2315
1997	3881	2314
1998	3942	2337
1999	3959	2391
2000	4059	2403
2001	4026	2416
2002	4022	2443
2003	4090	2448
2004	4112	2398
2005	4138	2448
2006	4266	2426

Los modelos para estos datos son

$$B(t) = -0.197t^3 + 8.96t^2 - 90.0t + 4180$$

y

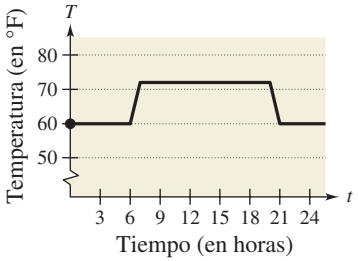
$$D(t) = -1.21t^2 + 38.0t + 2137$$

donde t representa el año, con $t = 0$ correspondiente a 1990.

67. Encuentre e interprete $(B - D)(t)$.

68. Evalúe $B(t)$, $D(t)$ y $(B - D)(t)$ para los años 2010 y 2012. ¿Qué representa el valor de cada función?

69. RAZONAMIENTO GRÁFICO Un termostato controlado electrónicamente en una casa está programado para bajar la temperatura en forma automática durante la noche. La temperatura T en la casa (en grados Fahrenheit) está dada en términos de t, el tiempo en horas en un reloj de 24 horas (vea figura).



(a) Explique por qué T es una función de t.

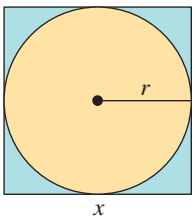
(b) Calcule $T(4)$ y $T(15)$.

(c) El termostato se reprograma para producir una temperatura H para la cual $H(t) = T(t - 1)$. ¿Cómo es que esto cambia la temperatura?

(d) El termostato se reprograma para producir una temperatura H para la cual $H(t) = T(t) - 1$. ¿Cómo es que esto cambia la temperatura?

(e) Escriba una función definida por partes que represente la gráfica.

70. GEOMETRÍA Un cimiento cuadrado de concreto se prepara como base para un tanque cilíndrico (vea figura).



(a) Escriba el radio r del tanque como función de la longitud x de los lados del cuadrado.

(b) Escriba el área A de la base circular del tanque como función del radio r.

(c) Encuentre e interprete $(A \circ r)(x)$.

71. RIZOS Una piedra se deja caer en una charca con aguas en calma, haciendo que se produzcan rizos en forma de círculos concéntricos. El radio r (en pies) del rizo exterior es $r(t) = 0.6t$, donde t es el tiempo en segundos después que la piedra cae en el agua. El área A del círculo está dada por la función $A(r) = \pi r^2$. Encuentre e interprete $(A \circ r)(t)$.

72. CONTAMINACIÓN La dispersión de un contaminante es creciente en forma circular en la superficie de un lago. El radio del contaminante se puede modelar con $r(t) = 5.25\sqrt{t}$, donde r es el radio en metros y t es el tiempo en horas desde la contaminación.

(a) Encuentre una función que dé el área A de la fuga circular en términos del tiempo t desde que empezó la dispersión.

(b) Encuentre el tamaño del área contaminada después de 36 horas.

(c) Encuentre cuándo el tamaño del área contaminada es de 6250 metros cuadrados.

73. CANTIDAD DE BACTERIAS El número N de bacterias en un alimento refrigerado está dado por

$$N(T) = 10T^2 - 20T + 600, \quad 1 \le T \le 20$$

donde T es la temperatura del alimento en grados Celsius. Cuando el alimento se saca de refrigeración, su temperatura está dada por

$$T(t) = 3t + 2, \quad 0 \le t \le 6$$

donde t es el tiempo en horas.

(a) Encuentre la composición $N(T(t))$ e interprete su significado en el contexto.

(b) Encuentre la cantidad de bacterias después de 0.5 horas.

(c) Encuentre el tiempo cuando la cantidad de bacterias llegue a 1500.

74. COSTO El costo semanal C de producir x unidades en un proceso de manufactura está dado por $C(x) = 60x + 750$. El número de unidades x producidas en t horas está dado por $x(t) = 50t$.

(a) Encuentre e interprete $(C \circ x)(t)$.

(b) Encuentre el costo de las unidades producidas en 4 horas.

(c) Encuentre el tiempo que debe transcurrir para que el costo aumente a \$15 000.

75. SALARIO Usted es representante de ventas de una fábrica de ropa; se le paga un salario anual, más un bono de 3% de sus ventas de más de \$500 000. Considere las dos funciones dadas tanto por $f(x) = x - 500\,000$ como por $g(x) = 0.03x$. Si x es mayor a \$500 000, ¿cuál de lo siguiente representa el bono de usted? Explique su razonamiento.

(a) $f(g(x))$ (b) $g(f(x))$

76. CONCIENCIA DE CONSUMIDORES El precio sugerido de minorista para un nuevo auto híbrido es p dólares. El distribuidor anuncia una rebaja de fábrica de \$2000 y un descuento de 10%.

(a) Escriba una función R en términos de p que dé el costo del auto híbrido después de recibir la rebaja de la fábrica.

(b) Escriba una función S en términos de p que dé el costo del auto híbrido después de recibir el descuento del distribuidor.

(c) Forme las funciones compuestas $(R \circ S)(p)$ y $(S \circ R)(p)$ e interprete cada una de ellas.

(d) Encuentre $(R \circ S)(20\,500)$ y $(S \circ R)(20\,500)$. ¿Cuál da el costo más bajo por el auto híbrido? Explique.

EXPLORACIÓN

¿VERDADERO O FALSO? En los Ejercicios 77 y 78, determine si la proposición es verdadera o falsa. Justifique su respuesta.

77. Si $f(x) = x + 1$ y $g(x) = 6x$, entonces $(f \circ g)(x) = (g \circ f)(x)$.

78. Si nos dan dos funciones $f(x)$ y $g(x)$, se puede calcular $(f \circ g)(x)$ si y sólo si el rango de g es un subconjunto del dominio de f.

En los Ejercicios 79 y 80, tres hermanos son de tres diferentes edades. El mayor tiene el doble de la edad del hermano intermedio, y éste tiene seis años más que la mitad de la edad del más joven.

79. (a) Escriba una función compuesta que dé la edad del hermano mayor en términos del más joven. Explique el modo en que llegó a su respuesta.

(b) Si el hermano mayor tiene 16 años, encuentre las edades de los otros dos hermanos.

80. (a) Escriba una función compuesta que dé la edad del hermano más joven en términos del mayor. Explique el modo en que llegó a su respuesta.

(b) Si el hermano más joven tiene dos años de edad, encuentre las edades de los otros dos hermanos.

81. DEMOSTRACIÓN Demuestre que el producto de dos funciones impares es una función par, y que el producto de dos funciones pares es una función par.

82. CONJETURA Use ejemplos para teorizar si el producto de una función impar y una función par es par o impar. A continuación demuestre su hipótesis.

83. DEMOSTRACIÓN

(a) Dada una función f, demuestre que $g(x)$ es par y $h(x)$ es impar, donde $g(x) = \frac{1}{2}[f(x) + f(-x)]$ y $h(x) = h(x) = \frac{1}{2}[f(x) - f(-x)]$.

(b) Use el resultado del inciso (a) para demostrar que cualquier función se puede escribir como una suma de funciones pares e impares. [*Sugerencia*: sume las dos ecuaciones del inciso (a).]

(c) Use el resultado del inciso (b) para escribir cada función como la suma de funciones pares e impares.

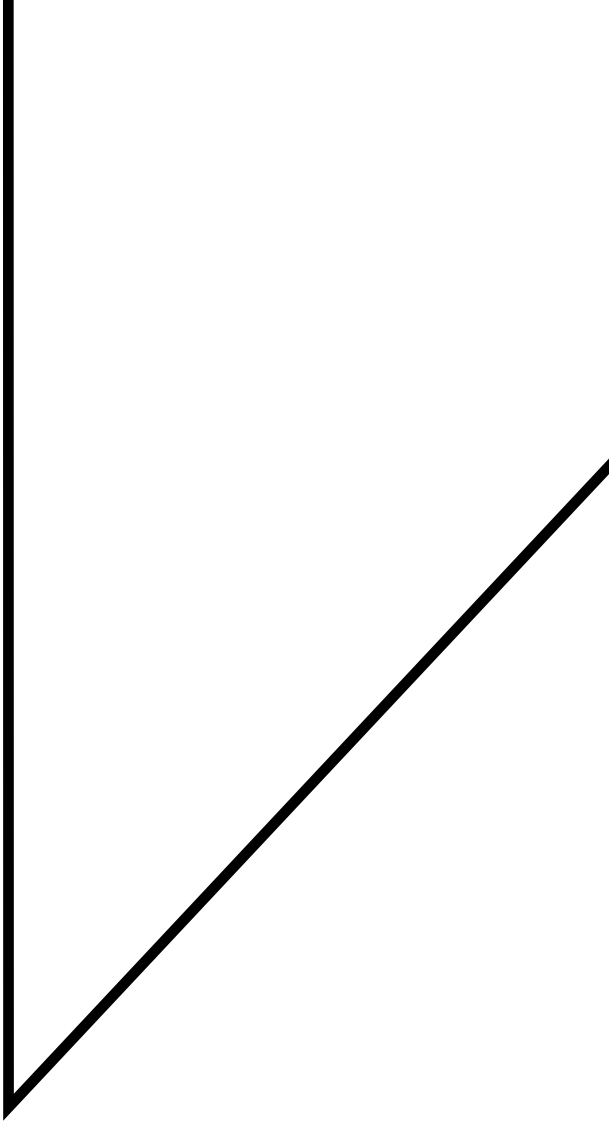
$$f(x) = x^2 - 2x + 1, \quad k(x) = \frac{1}{x + 1}$$

84. TOQUE FINAL Considere las funciones $f(x) = x^2$ y $g(x) = \sqrt{x}$.

(a) Encuentre f/g y su dominio

(b) Encuentre $f \circ g$ y $g \circ f$. Encuentre el dominio de cada función compuesta. ¿Son iguales? Explique.

1.9 Funciones



Definición de función inversa

Sean f y g dos funciones tales que

$$f(g(x)) = x \qquad \text{para toda } x \text{ en el dominio de } g$$

y

$$g(f(x)) = x \qquad \text{para toda } x \text{ en el dominio de } f.$$

En estas condiciones, la función g es la **función inversa** de la función f. La función g está denotada por f^{-1} (léase "f inversa"). Por tanto,

$$f(f^{-1}(x)) = x \qquad \text{y} \qquad f^{-1}(f(x)) = x.$$

El dominio de f debe ser igual al rango de f^{-1}, y el rango de f debe ser igual al dominio de f^{-1}.

No confundir el uso de -1 para denotar la función f^{-1}. En este texto, cuando se escribe f^{-1} *siempre* nos referimos a la función inversa de la función f y *no* al recíproco de $f(x)$.

Si la función g es la función inversa de la función f, también debe ser cierto que la función f es la función inversas de la función g. Por ello, se puede decir que las funciones f y g son funciones inversas una de la otra.

Ejemplo 2 Verificar funciones inversas

¿Cuál de las funciones es la función inversa de $f(x) = \dfrac{5}{x-2}$?

$$g(x) = \frac{x-2}{5} \qquad h(x) = \frac{5}{x} + 2$$

Solución

Al formar la composición de f y g, tenemos

$$f(g(x)) = f\left(\frac{x-2}{5}\right) = \frac{5}{\left(\dfrac{x-2}{5}\right) - 2} = \frac{25}{x-12} \neq x.$$

Como esta composición no es igual a la función identidad x, se deduce que g *no es* la función inversa de f. Al formar la composición de f con h, tendremos

$$f(h(x)) = f\left(\frac{5}{x} + 2\right) = \frac{5}{\left(\dfrac{5}{x} + 2\right) - 2} = \frac{5}{\left(\dfrac{5}{x}\right)} = x.$$

En consecuencia, es evidente que h es la función inversa de f. Se puede confirmar esto si se demuestra que la composición de h con f también es igual a la función identidad, como se ve a continuación.

$$h(f(x)) = h\left(\frac{5}{x-2}\right) = \frac{5}{\left(\dfrac{5}{x-2}\right)} + 2 = x - 2 + 2 = x$$

PUNTO *de repaso* Ahora trate de hacer el Ejercicio 19.

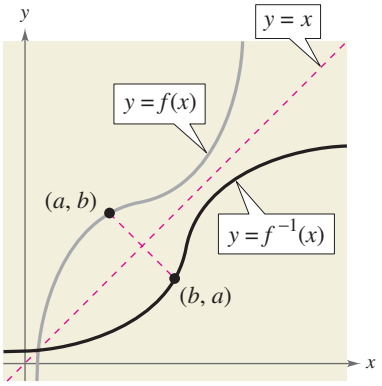


FIGURA 1.94

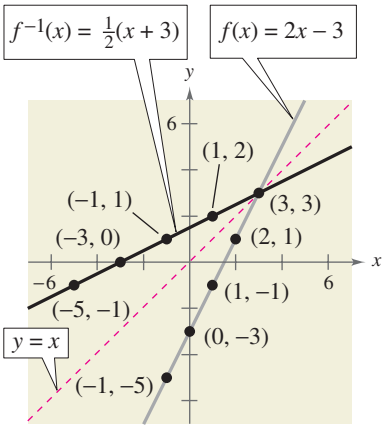


FIGURA 1.95

Gráfica de una función inversa

Las gráficas de una función f y de su función inversa f^{-1} están relacionadas entre sí en la siguiente forma. Si el punto (a, b) está en la gráfica de f, entonces el punto (b, a) debe estar en la gráfica de f^{-1}, y viceversa. Esto significa que la gráfica de f^{-1} es una reflexión de la gráfica de f en la recta $y = x$, como se muestra en la Figura 1.94.

Ejemplo 3 Hallar gráficamente funciones inversas

Trace las gráficas de las funciones inversas $f(x) = 2x - 3$ y $f^{-1}(x) = \frac{1}{2}(x + 3)$ en el mismo sistema de coordenadas rectangulares y demuestre que son reflexiones una de la otra en la recta $y = x$.

Solución

Las gráficas de f y f^{-1} se muestran en la Figura 1.95. Es evidente que son reflexiones una de la otra en la recta $y = x$. Se puede verificar esta propiedad de reflexión si se prueban unos cuantos puntos en cada una de las gráficas. Nótese en la siguiente lista que si el punto (a, b) está en la gráfica de f, el punto (b, a) está en la gráfica de f^{-1}.

Gráfica de $f(x) = 2x - 3$	*Gráfica de* $f^{-1}(x) = \frac{1}{2}(x + 3)$
$(-1, -5)$	$(-5, -1)$
$(0, -3)$	$(-3, 0)$
$(1, -1)$	$(-1, 1)$
$(2, 1)$	$(1, 2)$
$(3, 3)$	$(3, 3)$

PUNTO *de repaso* Ahora trate de hacer el Ejercicio 25.

Ejemplo 4 Hallar gráficamente funciones inversas

Trace las gráficas de las funciones inversas $f(x) = x^2$ $(x \geq 0)$ y $f^{-1}(x) = \sqrt{x}$ en el misma sistema de coordenadas rectangulares y demuestre que son reflexiones una de otra en la recta $y = x$.

Solución

Las gráficas de f y f^{-1} se muestran en la Figura 1.96. Es evidente que son reflexiones una de la otra en la recta $y = x$. Se puede verificar esta propiedad de reflexión si se prueban unos cuantos puntos en cada una de las gráficas. Nótese en la siguiente lista que si el punto (a, b) está en la gráfica de f, el punto (b, a) está en la gráfica de f^{-1}.

Gráfica de $f(x) = x^2, \quad x \geq 0$	*Gráfica de* $f^{-1}(x) = \sqrt{x}$
$(0, 0)$	$(0, 0)$
$(1, 1)$	$(1, 1)$
$(2, 4)$	$(4, 2)$
$(3, 9)$	$(9, 3)$

Trate de demostrar que $f(f^{-1}(x)) = x$ y $f^{-1}(f(x)) = x$.

PUNTO *de repaso* Ahora trate de hacer el Ejercicio 27.

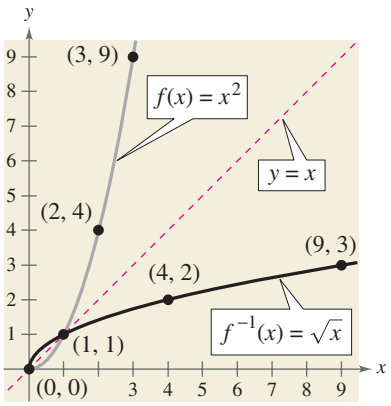


FIGURA 1.96

Funciones biunívocas o uno a uno

La propiedad de reflexión de las gráficas de funciones inversas da una buena prueba *geométrica* para determinar si una función tiene inversa. Esta prueba recibe el nombre de **prueba de la recta horizontal** para funciones inversas

Prueba de la recta horizontal para funciones inversas

Una función f tiene una función inversa si y sólo si ninguna recta *horizontal* interseca la gráfica de f en más de un punto.

Si ninguna recta horizontal interseca la gráfica de f en más de un punto, entonces no hay valor de y relacionado con más de un valor de x. Ésta es la característica esencial de lo que llamamos **funciones biunívocas o uno a uno.**

Funciones biunívocas

Una función f es **biunívoca o uno a uno** si cada valor de la variable dependiente corresponde a exactamente un valor de la variable independiente. Una función f tiene una función inversa si y sólo si f es biunívoca.

Considere la función dada por $f(x) = x^2$. La tabla de la izquierda muestra valores para $f(x) = x^2$. La tabla de valores de la derecha está conformada al intercambiar las columnas de la primera tabla. La tabla de la derecha no representa una función porque la entrada $x = 4$ está relacionada con dos salidas diferentes: $y = -2$ y $y = 2$. Por tanto, $f(x) = x^2$ no es biunívoca y no tiene función inversa

x	$f(x) = x^2$
-2	4
-1	1
0	0
1	1
2	4
3	9

x	y
4	-2
1	-1
0	0
1	1
4	2
9	3

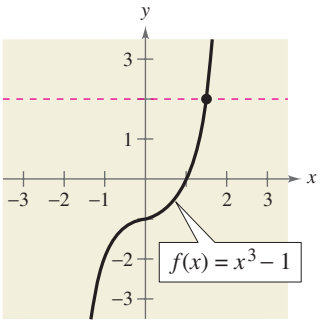


FIGURA 1.97

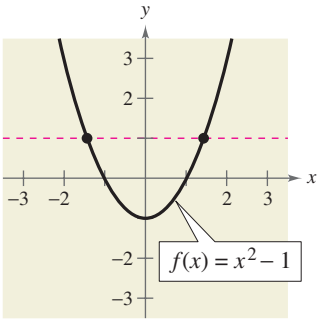


FIGURA 1.98

Ejemplo 5 Aplicar la prueba de la recta horizontal

a. La gráfica de la función dada por $f(x) = x^3 - 1$ se ilustra en la Figura 1.97. Como ninguna recta horizontal interseca la gráfica de f en más de un punto, se puede concluir que f es una función biunívoca y *tiene* una función inversa.

b. La gráfica de la función dada por $f(x) = x^2 - 1$ se muestra en la Figura 1.98. Como es posible hallar una recta horizontal que corte la gráfica de f en más de un punto, se puede concluir que f *no es* una función biunívoca y *no tiene* una función inversa.

PUNTO *de repaso* Ahora trate de hacer el Ejercicio 39.

ATENCIÓN

Observe lo que ocurre al tratar de hallar la función inversa de una función que no es biunívoca.

$f(x) = x^2 + 1$ Función original

$y = x^2 + 1$ Sustituya $f(x)$ con y.

$x = y^2 + 1$ Intercambie x y y.

$x - 1 = y^2$ Aísle el término en y.

$y = \pm\sqrt{x - 1}$ Despeje y.

Se obtienen dos valores de y por cada uno de x.

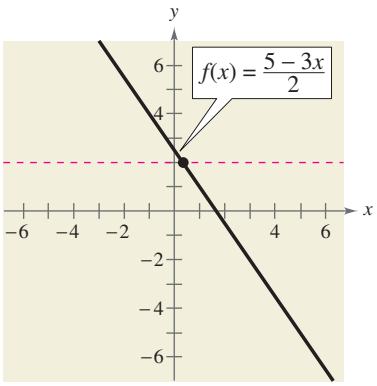


FIGURA 1.99

Hallar algebraicamente funciones inversas

Para funciones sencillas (como la del Ejemplo 1), se pueden hallar funciones inversas por inspección pero, para funciones más complicadas, es mejor usar las siguientes guías. El paso clave de estas guías es el 3, que es intercambiar los papeles de x y y. Este paso corresponde al hecho de que las funciones inversas tienen pares ordenados con las coordenadas invertidas.

Para hallar una función inversa

1. Use la prueba de la recta horizontal para determinar si f tiene una función inversa.
2. En la ecuación para $f(x)$, sustituya $f(x)$ por y.
3. Intercambie los papeles de x y y, y despeje y
4. Sustituya y con $f^{-1}(x)$ en la nueva ecuación.
5. Verifique que f y f^{-1} son funciones inversas entre sí al demostrar que el dominio de f es igual al rango de f^{-1}, el rango de f es igual al dominio de f^{-1}, y $f(f^{-1}(x)) = x$ y $f^{-1}(f(x)) = x$.

Ejemplo 6 Hallar algebraicamente una función inversa

Encuentre la función inversa de

$$f(x) = \frac{5 - 3x}{2}.$$

Solución

La gráfica de f es una recta, como se ve en la Figura 1.99. Esta gráfica pasa la prueba de la recta horizontal. Por tanto, sabemos que f es biunívoca y tiene una función inversa

$f(x) = \dfrac{5 - 3x}{2}$ Escribir la función original.

$y = \dfrac{5 - 3x}{2}$ Sustituir $f(x)$ por y.

$x = \dfrac{5 - 3y}{2}$ Intercambiar x y y.

$2x = 5 - 3y$ Multiplicar cada lado por 2.

$3y = 5 - 2x$ Aíslar el término en y.

$y = \dfrac{5 - 2x}{3}$ Despejar y.

$f^{-1}(x) = \dfrac{5 - 2x}{3}$ Sustituir y por $f^{-1}(x)$.

Nótese que tanto f como f^{-1} tienen dominios y rangos formados por todo el conjunto de números reales. Verifique que $f(f^{-1}(x)) = x$ y $f^{-1}(f(x)) = x$.

PUNTO *de repaso* Ahora trate de hacer el Ejercicio 63.

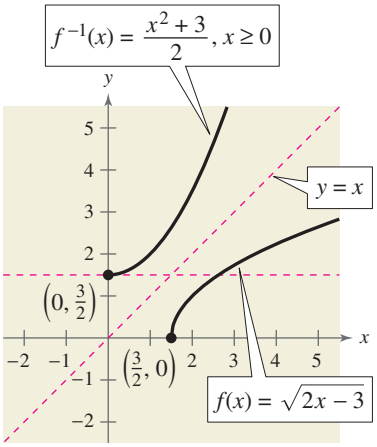


FIGURA 1.100

Ejemplo 7 Hallar una función inversa

Encuentre la función inversa de

$$f(x) = \sqrt{2x - 3}.$$

Solución

La gráfica de f es una curva, como se muestra en la Figura 1.100. Como esta gráfica pasa la prueba de la recta horizontal, sabemos que f es biunívoca y tiene una función inversa.

$$f(x) = \sqrt{2x - 3}$$ Escribir la función original.

$$y = \sqrt{2x - 3}$$ Sustituir $f(x)$ por y.

$$x = \sqrt{2y - 3}$$ Intercambiar x y y.

$$x^2 = 2y - 3$$ Elevar al cuadrado cada lado.

$$2y = x^2 + 3$$ Aislar el término en y.

$$y = \frac{x^2 + 3}{2}$$ Despejar y.

$$f^{-1}(x) = \frac{x^2 + 3}{2}, \quad x \geq 0$$ Sustituir y por $f^{-1}(x)$.

La gráfica de f^{-1} de la Figura 1.100 es la reflexión de la gráfica de f en la recta $y = x$. Nótese que el rango de f es el intervalo $[0, \infty)$, lo cual implica que el dominio de f^{-1} es el intervalo $[0, \infty)$. Además, el dominio de f es el intervalo $\left[\frac{3}{2}, \infty\right)$, lo cual implica que el rango de f^{-1} es el intervalo $\left[\frac{3}{2}, \infty\right)$. Verifique que $f(f^{-1}(x)) = x$ y $f^{-1}(f(x)) = x$.

PUNTO *de repaso* Ahora trate de hacer el Ejercicio 69.

Discusión en clase

La existencia de una función inversa Describa en un breve párrafo por qué las siguientes funciones tienen o no tienen funciones inversas.

a. Represente con x el precio al por menor de un artículo (en dólares), y con $f(x)$ represente el impuesto de ventas sobre el artículo. Suponga que el impuesto de ventas es 6% del precio al por menor y que el impuesto de ventas se redondea al centavo más cercano. ¿Esta función tiene una función inversa? (*Sugerencia:* ¿puede deshacer esta función? Por ejemplo, si usted sabe que el impuesto de ventas es \$0.12, ¿puede determinar exactamente cuál es el precio al por menor?)

b. Represente con x la temperatura en grados Celsius, y represente con $f(x)$ la temperatura en grados Fahrenheit. ¿Esta función tiene una función inversa? (*Sugerencia:* la fórmula para convertir de grados Celsius a grados Fahrenheit es $F = \frac{9}{5}C + 32$.)

1.9 EJERCICIOS

En www.CalcChat.com vea las soluciones a los ejercicios impares.

VOCABULARIO: Llene los espacios en blanco.

1. Si las funciones compuestas $f(g(x))$ y $g(f(x))$ son ambas iguales a x, entonces la función g es la _____ de la función f.
2. La función inversa de f está denotada por _____.
3. El dominio de f es el _____ de f^{-1}, y el _____ de f^{-1} es el rango de f.
4. Las gráficas de f y f^{-1} son reflexiones una de la otra en la recta _____.
5. Una función f es _____ si cada valor de la variable dependiente corresponde a exactamente un valor de la variable independiente.
6. Una prueba gráfica para la existencia de una función inversa de f se denomina prueba de la recta _____.

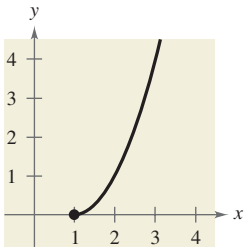
HABILIDADES Y APLICACIONES

En los Ejercicios 7-14, encuentre la función inversa de f informalmente. Verifique que $f(f^{-1}(x)) = x$ y $f^{-1}(f(x)) = x$.

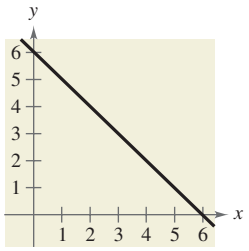
7. $f(x) = 6x$
8. $f(x) = \frac{1}{3}x$
9. $f(x) = x + 9$
10. $f(x) = x - 4$
11. $f(x) = 3x + 1$
12. $f(x) = \dfrac{x - 1}{5}$
13. $f(x) = \sqrt[3]{x}$
14. $f(x) = x^5$

En los Ejercicios 15-18, relacione la gráfica de la función con la gráfica de su función inversa. [Las gráficas de las funciones inversas están marcadas (a), (b), (c) y (d).]

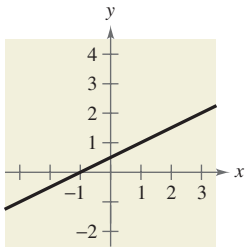
(a)



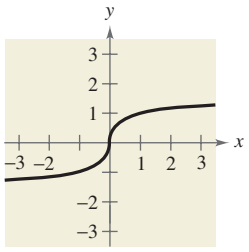
(b)



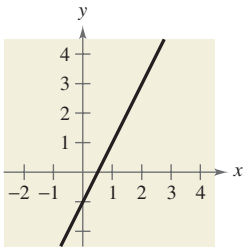
(c)



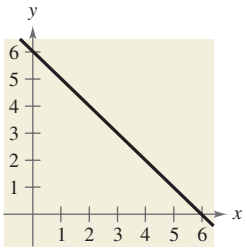
(d)



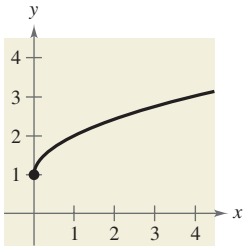
15.



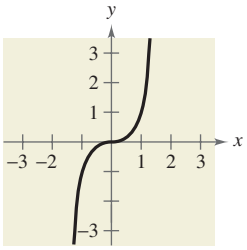
16.



17.



18.



En los Ejercicios 19-22, verifique que f y g son funciones inversas.

19. $f(x) = -\dfrac{7}{2}x - 3, \quad g(x) = -\dfrac{2x + 6}{7}$
20. $f(x) = \dfrac{x - 9}{4}, \quad g(x) = 4x + 9$
21. $f(x) = x^3 + 5, \quad g(x) = \sqrt[3]{x - 5}$
22. $f(x) = \dfrac{x^3}{2}, \quad g(x) = \sqrt[3]{2x}$

En los Ejercicios 23-34, demuestre que f y g son funciones inversas (a) algebraicamente y (b) gráficamente.

23. $f(x) = 2x, \quad g(x) = \dfrac{x}{2}$
24. $f(x) = x - 5, \quad g(x) = x + 5$
25. $f(x) = 7x + 1, \quad g(x) = \dfrac{x - 1}{7}$
26. $f(x) = 3 - 4x, \quad g(x) = \dfrac{3 - x}{4}$
27. $f(x) = \dfrac{x^3}{8}, \quad g(x) = \sqrt[3]{8x}$
28. $f(x) = \dfrac{1}{x}, \quad g(x) = \dfrac{1}{x}$
29. $f(x) = \sqrt{x - 4}, \quad g(x) = x^2 + 4, \quad x \geq 0$
30. $f(x) = 1 - x^3, \quad g(x) = \sqrt[3]{1 - x}$
31. $f(x) = 9 - x^2, \quad x \geq 0, \quad g(x) = \sqrt{9 - x}, \quad x \leq 9$

32. $f(x) = \dfrac{1}{1+x}, \quad x \geq 0, \quad g(x) = \dfrac{1-x}{x}, \quad 0 < x \leq 1$

33. $f(x) = \dfrac{x-1}{x+5}, \quad g(x) = -\dfrac{5x+1}{x-1}$

34. $f(x) = \dfrac{x+3}{x-2}, \quad g(x) = \dfrac{2x+3}{x-1}$

En los Ejercicios 35 y 36, ¿la función tiene función inversa?

35.

x	-1	0	1	2	3	4
$f(x)$	-2	1	2	1	-2	-6

36.

x	-3	-2	-1	0	2	3
$f(x)$	10	6	4	1	-3	-10

En los Ejercicios 37 y 38, use la tabla de valores para $y = f(x)$ para completar una tabla para $y = f^{-1}(x)$.

37.

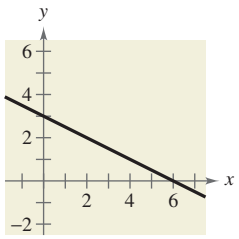
x	-2	-1	0	1	2	3
$f(x)$	-2	0	2	4	6	8

38.

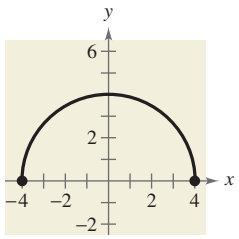
x	-3	-2	-1	0	1	2
$f(x)$	-10	-7	-4	-1	2	5

En los Ejercicios 39-42, ¿la función tiene inversa?

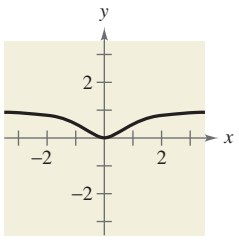
39.



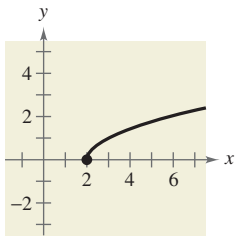
40.



41.



42.



En los Ejercicios 43-48, use una calculadora de gráficas para graficar la función, y use la prueba de la recta horizontal para determinar si la función es biunívoca y, por tanto, tiene una función inversa.

43. $g(x) = \dfrac{4-x}{6}$

44. $f(x) = 10$

45. $h(x) = |x+4| - |x-4|$

46. $g(x) = (x+5)^3$

47. $f(x) = -2x\sqrt{16-x^2}$

48. $f(x) = \frac{1}{8}(x+2)^2 - 1$

En los Ejercicios 49-62, (a) encuentre la función inversa de f, (b) grafique f y f^{-1} en el mismo conjunto de ejes de coordenadas, (c) describa la relación entre las gráficas de f y f^{-1}, y (d) exprese el dominio y rango de f y f^{-1}.

49. $f(x) = 2x - 3$

50. $f(x) = 3x + 1$

51. $f(x) = x^5 - 2$

52. $f(x) = x^3 + 1$

53. $f(x) = \sqrt{4-x^2}, \quad 0 \leq x \leq 2$

54. $f(x) = x^2 - 2, \quad x \leq 0$

55. $f(x) = \dfrac{4}{x}$

56. $f(x) = -\dfrac{2}{x}$

57. $f(x) = \dfrac{x+1}{x-2}$

58. $f(x) = \dfrac{x-3}{x+2}$

59. $f(x) = \sqrt[3]{x-1}$

60. $f(x) = x^{3/5}$

61. $f(x) = \dfrac{6x+4}{4x+5}$

62. $f(x) = \dfrac{8x-4}{2x+6}$

En los Ejercicios 63-76, determine si la función tiene inversa. Si la tiene, encuéntrela.

63. $f(x) = x^4$

64. $f(x) = \dfrac{1}{x^2}$

65. $g(x) = \dfrac{x}{8}$

66. $f(x) = 3x + 5$

67. $p(x) = -4$

68. $f(x) = \dfrac{3x+4}{5}$

69. $f(x) = (x+3)^2, \quad x \geq -3$

70. $q(x) = (x-5)^2$

71. $f(x) = \begin{cases} x+3, & x < 0 \\ 6-x, & x \geq 0 \end{cases}$

72. $f(x) = \begin{cases} -x, & x \leq 0 \\ x^2 - 3x, & x > 0 \end{cases}$

73. $h(x) = -\dfrac{4}{x^2}$

74. $f(x) = |x-2|, \quad x \leq 2$

75. $f(x) = \sqrt{2x+3}$

76. $f(x) = \sqrt{x-2}$

PIÉNSELO En los Ejercicios 77-86, restrinja el dominio de la función f de modo que la función sea biunívoca y tenga inversa. A continuación halle la función inversa f^{-1}. Exprese los dominios y rangos de f y f^{-1}. Explique sus resultados. (Hay numerosas respuestas correctas.)

77. $f(x) = (x - 2)^2$ **78.** $f(x) = 1 - x^4$

79. $f(x) = |x + 2|$ **80.** $f(x) = |x - 5|$

81. $f(x) = (x + 6)^2$ **82.** $f(x) = (x - 4)^2$

83. $f(x) = -2x^2 + 5$ **84.** $f(x) = \frac{1}{2}x^2 - 1$

85. $f(x) = |x - 4| + 1$ **86.** $f(x) = -|x - 1| - 2$

En los Ejercicios 87-92, use las funciones dadas por $f(x) = \frac{1}{8}x - 3$ y $g(x) = x^3$ para hallar el valor o función indicados.

87. $(f^{-1} \circ g^{-1})(1)$ **88.** $(g^{-1} \circ f^{-1})(-3)$

89. $(f^{-1} \circ f^{-1})(6)$ **90.** $(g^{-1} \circ g^{-1})(-4)$

91. $(f \circ g)^{-1}$ **92.** $g^{-1} \circ f^{-1}$

En los Ejercicios 93-96, use las funciones dadas por $f(x) = x + 4$ y $g(x) = 2x - 5$ para hallar la función especificada.

93. $g^{-1} \circ f^{-1}$ **94.** $f^{-1} \circ g^{-1}$

95. $(f \circ g)^{-1}$ **96.** $(g \circ f)^{-1}$

97. MEDIDAS DE CALZADO La tabla muestra las medidas de calzado para hombres en Estados Unidos y las correspondientes medidas de calzado europeas. Represente con $y = f(x)$ la función que dé la medida de calzado europea para hombres en términos de x, que es la medida para hombres en Estados Unidos.

Medida de calzado para hombres E.U.A	Medida de calzado para hombres en Europa
8	41
9	42
10	43
11	45
12	46
13	47

(a) ¿f es biunívoca? Explique.

(b) Encuentre $f(11)$.

(c) Encuentre $f^{-1}(43)$, si es posible.

(d) Encuentre $f(f^{-1}(41))$.

(e) Encuentre $f^{-1}(f(13))$.

98. MEDIDAS DE CALZADO La tabla siguiente muestra las medidas de calzado para damas en Estados Unidos y las correspondientes medidas de calzado europeas. Represente con $y = g(x)$ la función que dé la medida de calzado europea para mujeres en términos de x, que es la medida para mujeres en Estados Unidos.

Medida de calzado para mujeres en E.U.A.	Medida de calzado europea para mujeres
4	35
5	37
6	38
7	39
8	40
9	42

(a) ¿g es biunívoca? Explique.

(b) Encuentre $g(6)$.

(c) Encuentre $g^{-1}(42)$.

(d) Encuentre $g(g^{-1}(39))$.

(e) Encuentre $g^{-1}(g(5))$.

99. TELEVISORES DE LCD Las ventas S (en millones de dólares) de televisores con pantalla de cristal líquido en Estados Unidos, de 2001 a 2007, se muestran en la tabla siguiente. El tiempo (en años) está dado por t, con $t = 1$ correspondiente a 2001. (Fuente: Consumer Electronics Association)

Año, t	Ventas, $S(t)$
1	62
2	246
3	664
4	1579
5	3258
6	8430
7	14 532

(a) ¿Existe S^{-1}?

(b) Si S^{-1} existe, ¿qué representa en el contexto del problema?

(c) Si S^{-1} existe, encuentre $S^{-1}(8430)$.

(d) Si la tabla se extiende a 2009 y si las ventas de televisores de pantalla de cristal líquido para ese año fueron de \$14 532 millones, ¿existiría S^{-1}? Explique.

100. POBLACIÓN La población proyectada P (en millones de personas) en Estados Unidos para 2015 a 2040 se muestran en la tabla. El tiempo (en años) está

dado por t, con $t = 15$ correspondiente a 2015. (Fuente: U.S. Census Bureau)

Año, t	Población, $P(t)$
15	325.5
20	341.4
25	357.5
30	373.5
35	389.5
40	405.7

(a) ¿Existe P^{-1}?

(b) Si P^{-1} existe, ¿qué representa en el contexto del problema?

(c) Si P^{-1} existe, encuentre $P^{-1}(357.5)$.

(d) Si la tabla se extiende a 2050 y si la población proyectada de Estados Unidos para ese año fuera de 373.5 millones, ¿existiría P^{-1}? Explique.

101. SALARIO POR HORA El salario de usted es \$10.00 por hora más \$0.75 por cada unidad producida por hora. Por tanto, su sueldo y por hora en términos del número de unidades producidas x es $y = 10 + 0.75x$.

(a) Encuentre la función inversa. ¿Qué representa cada variable en la función inversa?

(b) Determine el número de unidades producidas cuando su sueldo por hora es \$24.25.

102. MECÁNICA DIESEL La función dada por

$$y = 0.03x^2 + 245.50, \quad 0 < x < 100$$

calcula la temperatura de escape y en grados Fahrenheit, donde x es el porcentaje de carga para un motor diesel

(a) Encuentre la función inversa. ¿Qué representa cada variable en la función inversa?

(b) Use una calculadora de gráficas para graficar la función inversa.

(c) La temperatura de escape del motor no debe pasar de 500 grados Fahrenheit. ¿Cuál es el intervalo del porcentaje de carga?

EXPLORACIÓN

¿VERDADERO O FALSO? En los Ejercicios 103 y 104, determine si la proposición es verdadera o falsa. Justifique su respuesta.

103. Si f es una función par, entonces f^{-1} existe.

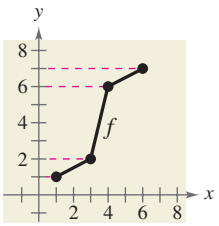
104. Si la función inversa de f existe y la gráfica de f tiene intersección con el eje y, entonces esa intersección de f es una intersección con el eje x de f^{-1}.

105. DEMOSTRACIÓN Demuestre que si f y g son funciones biunívocas, entonces $(f \circ g)^{-1}(x) = (g^{-1} \circ f^{-1})(x)$.

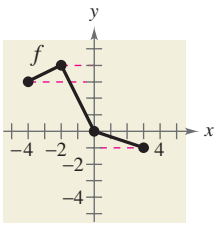
106. DEMOSTRACIÓN Demuestre que si f es función biunívoca impar, entonces f^{-1} es función impar.

En los Ejercicios 107 y 108, use la gráfica de la función f para crear una tabla de valores para los puntos dados. A continuación genere una segunda tabla que se pueda usar para hallar f^{-1} y trace la gráfica de f^{-1} si es posible.

107.



108.



En los Ejercicios 109-112, determine si la situación podría estar representada por una función biunívoca. Si es así, escriba un enunciado que describa la función inversa.

109. El número n de millas que un corredor de maratón ha completado en términos del tiempo t en horas.

110. La población p de Carolina del Sur en términos del año t de 1960 a 2008.

111. La profundidad de la marea d en una playa en términos del tiempo t en un periodo de 24 horas

112. La estatura h en pulgadas de un niño nacido en el año 2000 en términos de su edad n en años.

113. PIÉNSELO La función dada por $f(x) = k(2 - x - x^3)$ tiene una función inversas, y $f^{-1}(3) = -2$. Encuentre k.

114. PIÉNSELO Considere las funciones dadas por $f(x) = x + 2$ y $f^{-1}(x) = x - 2$. Evalúe $f(f^{-1}(x))$ y $f^{-1}(f(x))$ para los valores indicados de x. ¿Qué se puede concluir acerca de las funciones?

x	-10	0	7	45
$f(f^{-1}(x))$				
$f^{-1}(f(x))$				

115. PIÉNSELO Restrinja el dominio de $f(x) = x^2 + 1$ para $x \geq 0$. Use una calculadora de gráficas para graficar la función. ¿La función restringida tiene función inversa? Explique.

116. TOQUE FINAL Describa y corrija el error.

Dada $f(x) = \sqrt{x - 6}$, entonces $f^{-1}(x) = \dfrac{1}{\sqrt{x - 6}}$.

1.10 Modelado y variación matemáticos

Lo que debe aprender

- Usar modelos matemáticos para aproximar conjuntos de puntos de datos.
- Usar el comando *regression* de una calculadora de gráficas para hallar la ecuación de una recta de regresión de mínimos cuadrados.
- Escribir modelos matemáticos para variación directa.
- Escribir modelos matemáticos para variación directa como n potencias.
- Escribir modelos matemáticos para variación inversa.
- Escribir modelos matemáticos para variación conjunta.

Por qué debe aprenderlo

Se pueden usar funciones como modelos para representar una amplia variedad de conjuntos de datos de la vida real. Por ejemplo, en el Ejercicio 83 de la página 112 es posible usar un modelo de variación para modelar las temperaturas del agua de los océanos a diversas profundidades.

Introducción

Ya ha estudiado algunas técnicas para ajustar modelos a datos. Por ejemplo, en la sección 1.3, aprendió a hallar la ecuación de una recta que pasa por dos puntos. En esta sección estudiará otras técnicas para ajustar modelos a datos: *regresión de mínimos cuadrados* y *variación directa e inversa*. Los modelos resultantes son ya sea funciones polinomiales o funciones racionales. (Las funciones racionales se estudiaron en el capítulo 2.)

Ejemplo 1 Un modelo matemático

Las poblaciones y (en millones) de Estados Unidos de 2000 a 2007 se muestran en la tabla siguiente. (Fuente: U.S. Census Bureau)

Año	Población, y
2000	282.4
2001	285.3
2002	288.2
2003	290.9
2004	293.6
2005	296.3
2006	299.2
2007	302.0

Un modelo lineal que calcula los datos es $y = 2.78t + 282.5$ para $0 \le t \le 7$, donde t es el año, con $t = 0$ correspondiente a 2000. Determine los datos reales y *además* el modelo en la misma gráfica. ¿Qué tan cercanamente representa el modelo los datos?

Solución

Los datos reales están situados en la Figura 1.101, junto con la gráfica del modelo lineal. De la gráfica, es evidente que el modelo es un "buen ajuste" para los datos reales. Se puede ver lo bien que el modelo se ajusta si comparamos los valores reales de y con los dados por el modelo. Los valores dados por el modelo están marcados como y^* en la tabla siguiente.

t	0	1	2	3	4	5	6	7
y	282.4	285.3	288.2	290.9	293.6	296.3	299.2	302.0
y^*	282.5	285.3	288.1	290.8	293.6	296.4	299.2	302.0

PUNTO *de repaso* Ahora trate de hacer el Ejercicio 11.

Nótese en el Ejemplo 1 que podrían haberse escogido cualesquiera dos puntos para hallar una recta que se ajuste a los datos. No obstante, el modelo lineal dado se encontró con el uso del comando *regression* de una calculadora de gráficas y es la recta que mejor se ajusta a los datos. Este concepto de una recta de "mejor ajuste" se estudia en la siguiente página.

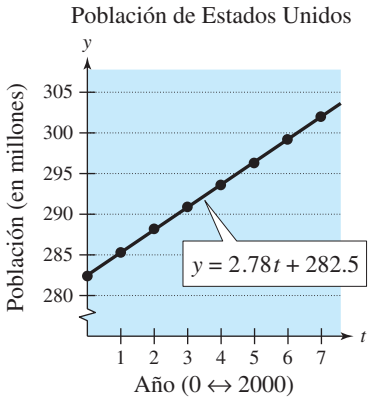


FIGURA 1.101

Regresión de mínimos cuadrados y calculadoras de gráficas

Hasta aquí hemos trabajado con numerosos tipos de modelos matemáticos que calculan datos de la vida real. En algunos casos el modelo se nos dio (como en el Ejemplo 1), mientras que en otros se nos pidió hallarlo usando técnicas algebraicas sencillas o una calculadora de gráficas.

Para hallar un modelo que calcule los datos con más precisión, los estadísticos usan una medida llamada **suma de diferencias cuadradas,** que es la suma de los cuadrados de las diferencias entre valores reales de datos y valores del modelo. El modelo lineal de "mejor ajuste", llamado **recta de regresión de mínimos cuadrados,** es el de mínima suma de diferencias cuadradas. Recuerde que se puede calcular esta recta visualmente si se determinan los puntos de datos y se traza la recta que parece ajustar mejor, o se pueden ingresar datos en una calculadora o computadora y usar el comando *regression* de esos aparatos. Cuando se usa la función *regression* de una calculadora o programa de computadora, se observa que el programa también puede dar como salida un "valor r". Este valor r es el **coeficiente de correlación** de los datos y da una medida de qué tan bien se ajusta el modelo a estos últimos. Cuanto más cercano sea el valor de $|r|$ a 1, mejor es el ajuste.

Ejemplo 2 Hallar una recta de regresión de mínimos cuadrados

Los datos de la tabla muestran la deuda D de mercado de crédito hipotecario pendiente de pago (en billones de dólares) de 2000 a 2007. Construya una gráfica de dispersión que represente los datos y encuentre la recta de regresión de mínimos cuadrados para ellos. (Fuente: Board of Governors of the Federal Reserve System)

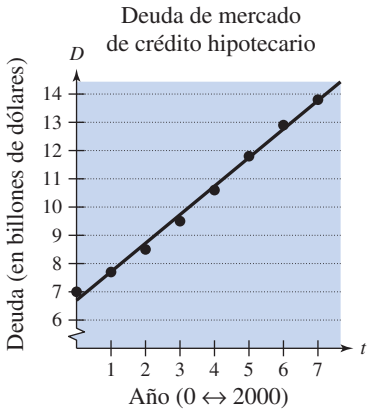


FIGURA 1.102

Año	Deuda, D, de mercado de crédito hipotecario
2000	7.0
2001	7.7
2002	8.5
2003	9.5
2004	10.6
2005	11.8
2006	12.9
2007	13.8

Solución

Con $t = 0$ represente al año 2000. La gráfica de dispersión para los puntos se ilustra en la Figura 1.102. Usando el comando *regression* de una calculadora de gráficas, es posible determinar que la ecuación de la recta de regresión de mínimos cuadrados es

$$D = 1.01t + 6.7.$$

Para comprobar este modelo, compare los valores D reales con los valores D dados por el modelo, los cuales están marcados como D* en la tabla de la izquierda. El coeficiente de correlación para este modelo es $r \approx 0.997$, lo cual implica que el modelo es un buen ajuste.

t	D	D*
0	7.0	6.7
1	7.7	7.7
2	8.5	8.7
3	9.5	9.7
4	10.6	10.7
5	11.8	11.8
6	12.9	12.8
7	13.8	13.8

PUNTO *de repaso* Ahora trate de hacer el Ejercicio 17.

Variación directa

Hay dos tipos básicos de modelos lineales. El modelo más general tiene una intersección con el eje y que es diferente de cero.

$$y = mx + b, \quad b \neq 0$$

El modelo más sencillo

$$y = kx$$

tiene una intersección con el eje y que es cero. En el modelo más sencillo, se dice que y **varía directamente** con x, o que es **directamente proporcional** a x.

Variación directa

Los siguientes enunciados son equivalentes.

1. y **varía directamente** con x.

2. y es **directamente proporcional** a x.

3. $y = kx$ para alguna constante k diferente de cero.

k es la **constante de variación** o la **constante de proporcionalidad.**

Ejemplo 3 Variación directa

En Pennsylvania, el impuesto estatal sobre la renta es directamente proporcional al *ingreso bruto.* Usted está trabajando en Pennsylvania y su deducción de impuesto estatal sobre la renta es de $46.05 para un ingreso bruto mensual de $1500. Encuentre un modelo matemático que dé el impuesto estatal sobre la renta en Pennsylvania en términos de ingreso bruto.

Solución

Modelo verbal: Impuesto estatal de ingreso sobre la renta $=$ k $\cdot$ Ingreso bruto

Leyendas:
Impuesto estatal de ingreso sobre la renta $= y$ (dólares)
Ingreso bruto $= x$ (dólares)
Tasa de impuesto sobre la renta $= k$ (porcentaje en forma decimal)

Ecuación: $y = kx$

Para despejar k, sustituya la información dada en la ecuación $y = kx$, y a continuación despeje k.

$y = kx$ Escribir el modelo de variación directa.

$46.05 = k(1500)$ Sustituir $y = 46.05$ y $x = 1500$.

$0.0307 = k$ Simplificar.

Por tanto, la ecuación (o modelo) para el impuesto estatal sobre la renta en Pennsylvania es

$$y = 0.0307x.$$

En otras palabras, Pennsylvania tiene una tasa de impuesto estatal sobre la renta de 3.07% del ingreso bruto. La gráfica de esta ecuación se ilustra en la Figura 1.103.

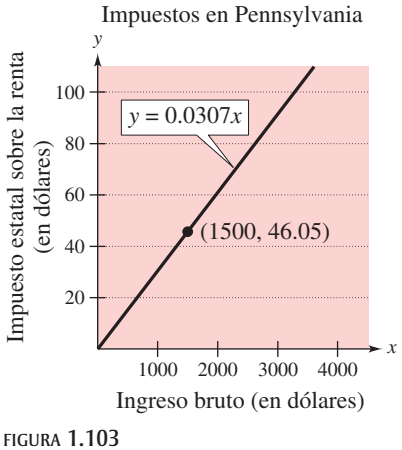


FIGURA 1.103

PUNTO *de repaso* Ahora trate de hacer el Ejercicio 43.

Variación directa como *n*-ésima potencia

Otro tipo de variación directa relaciona una variable con una *potencia* de otra variable. Por ejemplo, en la fórmula para el área de un círculo

$$A = \pi r^2$$

el área A es directamente proporcional al cuadrado del radio r. Nótese que, para esta fórmula, π es la constante de proporcionalidad.

Tip de estudio

Nótese que el modelo de variación directa $y = kx$ es un caso especial de $y = kx^n$ con $n = 1$.

Variación directa como *n*-ésima potencia

Los siguientes enunciados son equivalentes.

1. y **varía directamente con la *n*-ésima potencia** de x.
2. y es **directamente proporcional a la *n*-ésima potencia** de x.
3. $y = kx^n$ para alguna constante k.

Ejemplo 4 Variación directa con *n*-ésima potencia

La distancia que una pelota se desplaza hacia abajo en un plano inclinado es directamente proporcional al cuadrado del tiempo que se mueva. Durante el primer segundo, la pelota recorre 8 pies. (Vea Figura 1.104.)

a. Escriba una ecuación que relacione la distancia recorrida con el tiempo.

b. ¿Qué distancia recorrerá la pelota durante los primeros 3 segundos?

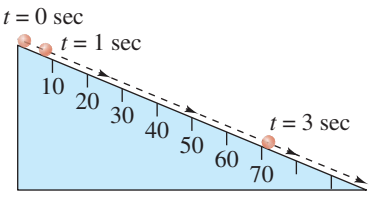


FIGURA 1.104

Solución

a. Sea d la distancia (en pies) que la pelota se desplaza y sea t el tiempo (en segundos); tenemos

$$d = kt^2.$$

A continuación, como $d = 8$ cuando $t = 1$, se puede ver que $k = 8$, como sigue.

$$d = kt^2$$
$$8 = k(1)^2$$
$$8 = k$$

Por tanto, la ecuación que relaciona la distancia con el tiempo es

$$d = 8t^2.$$

b. Cuando $t = 3$, la distancia recorrida es $d = 8(3)^2 = 8(9) = 72$ pies.

PUNTO *de repaso* Ahora trate de hacer el Ejercicio 75.

En los Ejemplos 3 y 4, las variaciones directas son tales que un *aumento* en una variable corresponde a un *aumento* en la otra. Esto también es verdadero en el modelo $d = \frac{1}{5}F$, $F > 0$, donde un aumento en F resulta en un aumento en d. Sin embargo, no debe suponerse que esto siempre ocurre con una variación directa. Por ejemplo, en el modelo $y = -3x$, un aumento en x resulta en una disminución en y, y todavía se dice que y varía directamente con x.

Variación inversa

Variación inversa

Los siguientes enunciados son equivalentes.

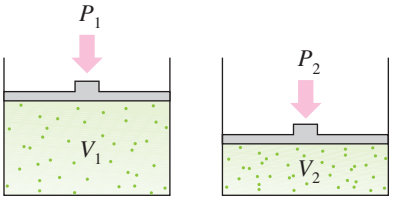
1. y **varía inversamente** con x.

2. y es **inversamente proporcional** a x.

3. $y = \dfrac{k}{x}$ para alguna constante k.

Si x y y están relacionadas por una ecuación de la forma $y = k/x^n$, entonces y varía directamente con la n-ésima potencia de x (o y es inversamente proporcional a la n-ésima potencia de x).

Algunas aplicaciones de variación implican problemas con variación tanto directa como inversa en el mismo modelo. Se dice que estos tipos de modelos tienen **variación combinada.**



$P_2 > P_1$, luego, $V_2 < V_1$

FIGURA 1.105 Si la temperatura se mantiene constante y la presión aumenta, el volumen disminuye.

Ejemplo 5 Variación directa e inversa

Una ley de gases expresa que el volumen de un gas encerrado varía directamente con la temperatura e inversamente con la presión, como se ilustra en la Figura 1.105. La presión de un gas es 0.75 kilogramos por centímetro cuadrado cuando la temperatura es 294 K y el volumen es 8000 centímetros cúbicos. (a) Escriba una ecuación que relacione presión, temperatura y volumen. (b) Encuentre la presión cuando la temperatura sea de 300 K y el volumen sea 7000 centímetros cúbicos.

Solución

a. Sea V el volumen (en centímetros cúbicos), sea P la presión (en kilogramos por centímetro cuadrado), y sea T la temperatura (en Kelvin). Como V varía directamente con T e inversamente con P, tendremos

$$V = \frac{kT}{P}.$$

Ahora, como $P = 0.75$ cuando $T = 294$ y $V = 8000$, tenemos

$$8000 = \frac{k(294)}{0.75}$$

$$k = \frac{6000}{294} = \frac{1000}{49}.$$

Por tanto, la ecuación que relaciona presión, temperatura y volumen es

$$V = \frac{1000}{49}\left(\frac{T}{P}\right).$$

b. Cuando $T = 300$ y $V = 7000$, la presión es

$$P = \frac{1000}{49}\left(\frac{300}{7000}\right) = \frac{300}{343} \approx 0.87 \text{ kilogramos por centímetro cuadrado.}$$

PUNTO *de repaso* Ahora trate de hacer el Ejercicio 77.

Variación conjunta

En el Ejemplo 5, nótese que cuando se presenta una variación directa y una variación inversa en el mismo enunciado, están acoplados con la conjunción "y." Para describir dos distintas variaciones *directas* en el mismo enunciado se usa la palabra **conjuntamente.**

Variación conjunta

Los siguientes enunciados son equivalentes.

1. z **varía conjuntamente** con x y y.
2. z es **conjuntamente proporcional** a x y a y.
3. $z = kxy$ para alguna constante k.

Si x, y y z están relacionadas por una ecuación de la forma

$$z = kx^n y^m$$

entonces z varía conjuntamente con la n-ésima potencia de x y la m-ésima potencia de y.

Ejemplo 6 Variación conjunta

El interés *simple* para cierta cuenta de ahorros es conjuntamente proporcional al tiempo y al capital. Después de un trimestre (3 meses), el interés sobre un capital de \$5000 es \$43.75.

a. Escriba una ecuación que relacione el interés, el capital y el tiempo.

b. Encuentre el interés después de tres trimestres.

Solución

a. Sea I = interés (en dólares), P = capital (en dólares) y t = tiempo (en años). Como I es conjuntamente proporcional a P y t, tenemos

$$I = kPt.$$

Para $I = 43.75$, $P = 5000$ y $t = \frac{1}{4}$, tendremos

$$43.75 = k(5000)\left(\frac{1}{4}\right)$$

lo cual implica que $k = 4(43.75)/5000 = 0.035$. Entonces, la ecuación que relacione interés, capital y tiempo es

$$I = 0.035Pt$$

que es la conocida fórmula para el interés simple, donde la constante de proporcionalidad, 0.035, representa una tasa de interés anual de 3.5%.

b. Cuando $P = \$5000$ y $t = \frac{3}{4}$, el interés es

$$I = (0.035)(5000)\left(\frac{3}{4}\right)$$

$$= \$131.25.$$

PUNTO *de repaso* Ahora trate de hacer el Ejercicio 79.

1.10 EJERCICIOS

En www.CalcChat.com vea las soluciones a los ejercicios impares.

VOCABULARIO: Llene los espacios en blanco.

1. Dos técnicas para ajustar modelos a datos se denominan _____ directa y _____ de mínimos cuadrados.
2. Los expertos en estadística usan una medida llamada _____ de_____ _____ para hallar un modelo que calcule un conjunto de datos con más precisión.
3. El modelo lineal con la mínima suma de diferencias cuadradas se denomina recta de _____ _____ _____ _____.
4. Un valor r de un conjunto de datos, también llamado _____ _____, da una medida de lo bien que un modelo se ajusta al conjunto de datos.
5. Los modelos de variación directa se pueden describir como "y varía directamente con x", o "y es _____ _____ a x".
6. En modelos de variación directa de la forma $y = kx$, k se denomina _____ de _____.
7. El modelo de variación directa $y = kx^n$ se puede describir como "y varía directamente con la n-ésima potencia de x", o "y es _____ _____ a la n-ésima potencia de x".
8. El modelo matemático $y = \frac{k}{x}$ es un ejemplo de variación _____.
9. Se dice que los modelos matemáticos que contengan tanto variación directa como inversa tienen variación _____.
10. El modelo de variación conjunta $z = kxy$ se puede describir como "z varía conjuntamente con x y y", o "z es _____ _____ a x y y".

HABILIDADES Y APLICACIONES

11. **EMPLEO** El número total de personas (en miles) en la fuerza laboral civil en Estados Unidos, de 1992 a 2007, están dados por los siguientes pares ordenados.

(1992, 128 105) (2000, 142 583)
(1993, 129 200) (2001, 143 734)
(1994, 131 056) (2002, 144 863)
(1995, 132 304) (2003, 146 510)
(1996, 133 943) (2004, 147 401)
(1997, 136 297) (2005, 149 320)
(1998, 137 673) (2006, 151 428)
(1999, 139 368) (2007, 153 124)

Un modelo lineal para aproximar los datos es $y = 1695.9t + 124\,320$, donde y representa el número de empleados (en miles) y $t = 2$ representa 1992. Localice los datos reales y el modelo en el mismo conjunto de ejes de coordenadas. ¿Qué tan cercanamente representa el modelo a los datos? (Fuente: U.S. Bureau of Labor Statistics)

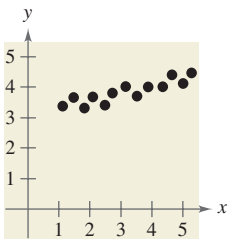
12. **DEPORTES** Los tiempos ganadores (en minutos) en la prueba de natación de estilo libre de 400 metros para mujeres, en los Juegos Olímpicos de 1948 a 2008, están dados por los siguientes pares ordenados.

(1948, 5.30) (1972, 4.32) (1996, 4.12)
(1952, 5.20) (1976, 4.16) (2000, 4.10)
(1956, 4.91) (1980, 4.15) (2004, 4.09)
(1960, 4.84) (1984, 4.12) (2008, 4.05)
(1964, 4.72) (1988, 4.06)
(1968, 4.53) (1992, 4.12)

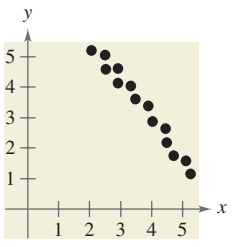
Un modelo lineal para aproximar los datos es $y = -0.020t + 5.00$, donde y representa el tiempo ganador (en minutos) y $t = 0$ representa 1950. Trace los datos reales y el modelo en el mismo conjunto de ejes de coordenadas. ¿Qué tan cercanamente representa el modelo a los datos? ¿Le parece que otro tipo de modelo se ajuste mejor? Explique. (Fuente: International Olympic Committee)

En los Ejercicios 13-16, haga un bosquejo de la recta que usted considere que mejor se aproxima a los datos en la gráfica de dispersión. Para imprimir una copia más grande de la gráfica vaya al sitio web *www.mathgraphs.com*.

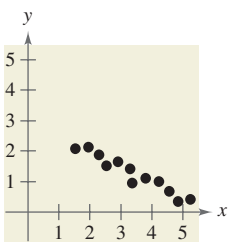
13.



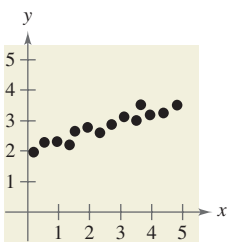
14.



15.



16.



17. DEPORTES La longitud (en pies) de lanzamientos ganadores de disco para hombres, en los Juegos Olímpicos de 1920 a 2008, se dan a continuación. (Fuente: International Olympic Committee)

1920	146.6	1956	184.9	1984	218.5
1924	151.3	1960	194.2	1988	225.8
1928	155.3	1964	200.1	1992	213.7
1932	162.3	1968	212.5	1996	227.7
1936	165.6	1972	211.3	2000	227.3
1948	173.2	1976	221.5	2004	229.3
1952	180.5	1980	218.7	2008	225.8

(a) Trace una gráfica de dispersión de los datos. Represente con y la longitud del lanzamiento ganador de disco (en pies) y con $t = 20$ represente 1920.

(b) Use una regla para trazar la recta de mejor ajuste que pase por los puntos y encuentre una ecuación de la recta.

(c) Use el comando *regression* de una calculadora de gráficas para hallar la recta de regresión de mínimos cuadrados que se ajuste a los datos.

(d) Compare el modelo lineal que encontró en el inciso (b) con el modelo lineal dado por la calculadora de gráficas en el inciso (c).

(e) Use los modelos de los incisos (b) y (c) para calcular el lanzamiento ganador de disco para hombres en el año 2012.

18. VENTAS El total de ventas (en miles de millones de dólares) para Coca-Cola Enterprises, de 2000 a 2007, se dan a continuación. (Fuente: Coca-Cola Enterprises, Inc.)

2000	14.750	2004	18.185
2001	15.700	2005	18.706
2002	16.899	2006	19.804
2003	17.330	2007	20.936

(a) Trace una gráfica de dispersión de los datos. Con y represente el ingreso total (en miles de millones de dólares) y con $t = 0$ represente 2000.

(b) Use una regla para trazar la recta de mejor ajuste que pase por los puntos y encuentre una ecuación de la recta.

(c) Use el comando *regression* de una calculadora de gráficas para hallar la recta de regresión de mínimos cuadrados que se ajuste a los datos.

(d) Compare el modelo lineal que encontró en el inciso (b) con el modelo lineal dado por la calculadora de gráficas del inciso(c).

(e) Use los modelos de los incisos (b) y (c) para calcular las ventas de Coca-Cola Enterprises en 2008.

(f) Use la biblioteca de su escuela, internet o alguna otra fuente de consulta para analizar la precisión del cálculo del inciso (e).

19. ANÁLISIS DE DATOS: OBRAS TEATRALES EN BROADWAY La tabla siguiente muestra las ventas brutas anuales de boletos S (en millones de dólares) para obras teatrales de Broadway en la ciudad de Nueva York, de 1995 a 2006. (Fuente: The League of American Theatres and Producers, Inc.)

Año	Ventas, S
1995	406
1996	436
1997	499
1998	558
1999	588
2000	603
2001	666
2002	643
2003	721
2004	771
2005	769
2006	862

(a) Use una calculadora de gráficas para crear una gráfica de dispersión de los datos. Sea $t = 5$ para 1995.

(b) Use el comando *regression* de una calculadora de gráficas para hallar la ecuación de la recta de regresión de mínimos cuadrados que se ajuste a los datos.

(c) Use una calculadora de gráficas para trazar la gráfica de dispersión que creó en el inciso (a) y el modelo que encontró en el inciso (b) en la misma pantalla. ¿Qué tan cercanamente representa el modelo a los datos?

(d) Use el modelo para calcular las ventas brutas anuales de boletos en 2007 y 2009.

(e) Interprete el significado de la pendiente del modelo lineal en el contexto del problema.

20. ANÁLISIS DE DATOS: TELEVISORES La tabla siguiente muestra el número N (en millones) de televisores en hogares de Estados Unidos, de 2000 a 2006. (Fuente: Television Bureau of Advertising, Inc.)

Año	Televisores, N
2000	245
2001	248
2002	254
2003	260
2004	268
2005	287
2006	301

(a) Use el comando *regression* de una calculadora de gráficas para hallar la ecuación de la recta de regresión de mínimos cuadrados que mejor se ajuste a los datos. Con $t = 0$ represente 2000.

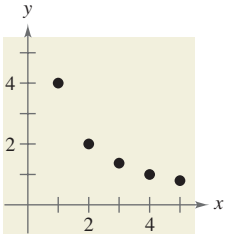
(b) Use la calculadora de gráficas para crear una gráfica de dispersión de los datos. A continuación grafique el modelo que encontró en el inciso (a) y la gráfica de dispersión en la misma pantalla. ¿Qué tan cercanamente representa el modelo a los datos?

(c) Use el modelo para calcular el número de televisores en familias en Estados Unidos en 2008.

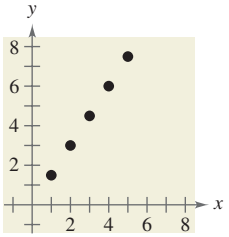
(d) Use la biblioteca de su escuela, el internet o alguna otra fuente de consulta para analizar la precisión del cálculo del inciso (c).

PIÉNSELO En los Ejercicios 21 y 22, use la gráfica para determinar si y varía directa o inversamente con alguna potencia de x. Explique.

21.



22.



En los Ejercicios 23-26, use el valor dado de k para completar la tabla para el modelo de variación directa

$y = kx^2$.

Grafique los puntos en un sistema de coordenadas rectangulares.

x	2	4	6	8	10
$y = kx^2$					

23. $k = 1$ **24.** $k = 2$

25. $k = \frac{1}{2}$ **26.** $k = \frac{1}{4}$

En los Ejercicios 27-30, use el valor dado de k para completar la tabla para el modelo de variación inversa

$y = \dfrac{k}{x^2}$.

Grafique los puntos en un sistema de coordenadas rectangulares.

x	2	4	6	8	10
$y = \dfrac{k}{x^2}$					

27. $k = 2$ **28.** $k = 5$

29. $k = 10$ **30.** $k = 20$

En los Ejercicios 31-34, determine si el modelo de variación es de la forma $y = kx$ o $y = k/x$, y encuentre k. A continuación escriba un modelo que relacione con y con k.

31.

x	5	10	15	20	25
y	1	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{3}$	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{5}$

32.

x	5	10	15	20	25
y	2	4	6	8	10

33.

x	5	10	15	20	25
y	-3.5	-7	-10.5	-14	-17.5

34.

x	5	10	15	20	25
y	24	12	8	6	$\frac{24}{5}$

VARIACIÓN DIRECTA En los Ejercicios 35-38, suponga que y es directamente proporcional a x. Use el valor de x y el valor de y dados para hallar un modelo lineal que relacione y y x.

35. $x = 5, y = 12$ **36.** $x = 2, y = 14$

37. $x = 10, y = 2050$ **38.** $x = 6, y = 580$

39. INTERÉS SIMPLE El interés simple sobre una inversión es directamente proporcional al monto de la inversión. Al invertir \$3250 en cierta emisión de bonos, una persona obtuvo un pago de interés de \$113.75 después de 1 año. Encuentre un modelo matemático que dé el interés I para esta emisión de bonos después de 1 año, en términos del monto invertido P.

40. INTERÉS SIMPLE El interés simple sobre una inversión es directamente proporcional a la cantidad de la inversión. Al invertir \$6500 en un bono municipal, una persona obtuvo un pago de interés de \$211.25 después de 1 año. Encuentre un modelo matemático que dé el interés I para este bono municipal después de 1 año en términos del monto invertido P.

41. MEDICIÓN En una regla graduada con escalas en pulgadas y centímetros, una persona observa que 13 pulgadas es aproximadamente la misma longitud que 33 centímetros. Use esta información para hallar un modelo matemático que relacione centímetros y con pulgadas x. A continuación use el modelo para hallar los centímetros que hay en 10 pulgadas y 20 pulgadas.

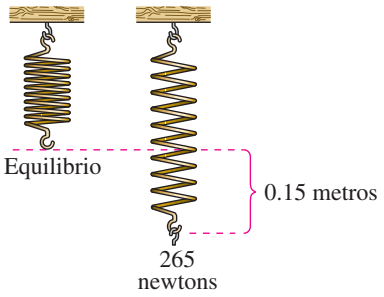
42. MEDICIÓN Al comprar gasolina, usted observa que 14 galones es aproximadamente la misma cantidad que 53 litros. Use esta información para hallar un modelo lineal que relacione litros y con galones x. A continuación use el modelo para hallar los litros que hay en 5 galones y 25 galones.

43. IMPUESTOS Las contribuciones (o impuesto sobre bienes raíces) están basadas en el valor estimado de una propiedad. Una casa que tiene un valor estimado de $150 000 tiene un impuesto de $5520. Encuentre un modelo matemático que dé la cantidad de impuesto sobre bienes raíces y en términos del valor estimado x de la propiedad. Use el modelo para hallar el impuesto sobre una casa que tiene un valor estimado de $225 000.

44. IMPUESTOS El impuesto estatal sobre ventas está basado en precios de venta al por menor. Un artículo que se vende en $189.99 tiene un impuesto sobre ventas de $11.40. Encuentre un modelo matemático que dé la cantidad de impuesto de ventas y en términos del precio al por menor x. Use el modelo para hallar el impuesto sobre ventas en una compra de $639.99.

LEY DE HOOKE En los Ejercicios 45-48, use la ley de Hooke para resortes, la cual expresa que la distancia que un resorte se estira (o comprime) varía directamente con la fuerza aplicada sobre él.

45. Una fuerza de 265 newtons estira un resorte 0.15 metros (vea figura).



(a) ¿Qué distancia se estira un resorte al aplicarle una fuerza de 90 newtons?

(b) ¿Qué fuerza se requiere para estirarlo 0.1 metros?

46. Una fuerza de 220 newtons estira 0.12 metros un resorte. ¿Qué fuerza se requiere para estirarlo 0.16 metros?

47. La espira de resorte de un juguete soporta el peso de un niño. El resorte es comprimido una distancia de 1.9 pulgadas por el peso de un niño de 25 libras. El juguete no funcionará en forma apropiada si su resorte se comprime más de 3 pulgadas. ¿Cuál es el peso del niño más pesado al que debe permitirse usar el juguete?

48. Una puerta superior de garage tiene dos resortes, uno en cada lado de la puerta (vea figura). Se requiere una fuerza de 15 libras para estirar cada resorte 1 pie. Por efecto de un sistema de poleas, los resortes se estiran sólo la mitad de la distancia que recorre la puerta. La puerta se mueve un total de 8 pies, y los resortes están en su longitud natural cuando se abre la puerta. Encuentre la fuerza combinada de levantamiento aplicada a la puerta por los resortes cuando la puerta se cierre.

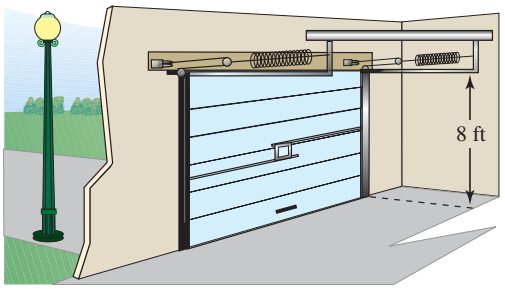


FIGURA PARA 48

En los Ejercicios 49-58, encuentre un modelo matemático para el enunciado verbal.

49. A varía directamente con el cuadrado de r.

50. V varía directamente con el cubo de e.

51. y varía inversamente con el cuadrado de x.

52. h varía inversamente con la raíz cuadrada de s.

53. F varía directamente con g e inversamente con r^2.

54. z es conjuntamente proporcional al cuadrado de x y al cubo de y.

55. LEY DE BOYLE: Para una temperatura constante, la presión P de un gas es inversamente proporcional al volumen V del gas.

56. LEY DE NEWTON DEL ENFRIAMIENTO: La variación R de la temperatura de un cuerpo es proporcional a la diferencia entre la temperatura T del cuerpo y la temperatura T_e del medio ambiente en el que se encuentre el cuerpo.

57. LEY DE NEWTON DE LA GRAVITACIÓN UNIVERSAL: La atracción gravitacional F entre dos cuerpos de masas m_1 y m_2 es proporcional al producto de las masas e inversamente proporcional al cuadrado de la distancia r que los separa.

58. CRECIMIENTO LOGÍSTICO: La variación de crecimiento R de una población es conjuntamente proporcional al tamaño S de la población y a la diferencia entre S y el tamaño máximo L de población que el ambiente puede sostener.

En los Ejercicios 59-66, escriba una oración usando la terminología de variación de esta sección para describir la fórmula.

59. ***Área de un triángulo:*** $A = \frac{1}{2}bh$

60. ***Área de un rectángulo:*** $A = lw$

61. ***Área de un triángulo equivalente:*** $A = \left(\sqrt{3}s^2\right)/4$

62. ***Área superficial de una esfera:*** $S = 4\pi r^2$

63. ***Volumen de una esfera:*** $V = \frac{4}{3}\pi r^3$

64. ***Volumen de un cilindro circular recto:*** $V = \pi r^2 h$

65. ***Rapidez media:*** $r = d/t$

66. ***Vibraciones libres:*** $\omega = \sqrt{(kg)/W}$

En los Ejercicios 67-74, encuentre un modelo matemático que represente el enunciado. (En cada caso, determine la constante de proporcionalidad.)

67. A varía directamente con r^2. ($A = 9\pi$ cuando $r = 3$.)

68. y varía inversamente con x. ($y = 3$ cuando $x = 25$.)

69. y es inversamente proporcional a x. ($y = 7$ cuando $x = 4$.)

70. z varía conjuntamente con x y y. ($z = 64$ cuando $x = 4$ y $y = 8$.)

71. F es conjuntamente proporcional a r y a la tercera potencia de s. ($F = 4158$ cuando $r = 11$ y $s = 3$.)

72. P varía directamente con x e inversamente con el cuadrado de y. $\left(P = \frac{28}{3}\text{ cuando } x = 42 \text{ y } y = 9.\right)$

73. z varía directamente con el cuadrado de x e inversamente con y. ($z = 6$ cuando $x = 6$ y $y = 4$.)

74. v varía conjuntamente con p y q e inversamente con el cuadrado de s. ($v = 1.5$ cuando $p = 4.1$, $q = 6.3$ y $s = 1.2$.)

ECOLOGÍA **En los Ejercicios 75 y 76, use el hecho de que el diámetro de la partícula más grande que puede ser movida por una corriente varía más o menos directamente con el cuadrado de la velocidad de la corriente.**

75. Una corriente con velocidad de $\frac{1}{4}$ de milla por hora puede mover partículas gruesas de arena de unos 0.02 pulgadas de diámetro. Calcule la velocidad requerida para llevar partículas de 0.12 pulgadas de diámetro.

76. Una corriente de velocidad v puede mover partículas de diámetro d o menores. ¿En qué factor aumenta d cuando se duplica la velocidad?

RESISTENCIA **En los Ejercicios 77 y 78, use el hecho de que la resistencia de un alambre, portador de una corriente eléctrica, es directamente proporcional a su longitud e inversamente proporcional a su área de sección transversal.**

77. Si el alambre de cobre #28 (que tiene un diámetro de 0.0126 de pulgada) tiene una resistencia de 66.17 ohms por mil pies, ¿qué longitud de alambre de cobre #28 producirá una resistencia de 33.5 ohms?

78. Una sección de alambre de cobre de 14 pies produce una resistencia de 0.05 ohms. Use la constante de proporcionalidad del Ejercicio 77 para hallar el diámetro del alambre.

79. TRABAJO El trabajo W (en joules) realizado al levantar un cuerpo varía conjuntamente con la masa m (en kilogramos) del cuerpo y la altura h (en metros) que el cuerpo es levantado. El trabajo realizado cuando un cuerpo de 120 kg es levantado 1.8 m es 2116.8 joules. ¿Cuánto trabajo se realiza al levantar 1.5 m un cuerpo de 100 kg?

80. MÚSICA La frecuencia de vibración de una cuerda de piano varía directamente con la raíz cuadrada de la tensión de la cuerda e inversamente con la longitud de ésta. La cuerda del la medio tiene una frecuencia de 440 vibraciones por segundo. Halle la frecuencia de una cuerda 1.25 veces más tensa y 1.2 veces más larga.

81. FLUJO LÍQUIDO La velocidad v de un fluido que se mueve en un conducto es inversamente proporcional al área de sección transversal del conducto. (Suponga que el volumen del flujo por unidad de tiempo se mantiene constante.) Determine el cambio en la velocidad de flujo de agua de una manguera cuando una persona pone un dedo en uno de sus extremos para disminuir su área de sección transversal en 25%.

82. CARGA EN UNA VIGA La máxima carga que puede ser soportada con seguridad por una viga horizontal varía conjuntamente con el ancho de la viga y el cuadrado de su profundidad, e inversamente con la longitud de la viga. Determine los cambios en la máxima carga segura bajo las siguientes condiciones.

(a) El ancho y longitud de la viga se duplican.

(b) El ancho y profundidad de la viga se duplican.

(c) Las tres dimensiones se duplican.

(d) La profundidad de la viga se reduce a la mitad.

83. ANÁLISIS DE DATOS: TEMPERATURAS DEL OCÉANO Un oceanógrafo toma lecturas de temperaturas C del agua (en grados Celsius) a varias profundidades d (en metros). Los datos recolectados se muestran en la tabla.

Profundidad, d	Temperatura, C
1000	4.2°
2000	1.9°
3000	1.4°
4000	1.2°
5000	0.9°

(a) Trace una gráfica de dispersión de los datos.

(b) ¿Le parece que los datos pueden ser modelados por el modelo de variación inversa $C = k/d$? Si es así, encuentre k para cada par de coordenadas.

(c) Determine el valor medio de k del inciso (b) para hallar el modelo de variación inversa $C = k/d$.

(d) Use una calculadora de gráficas para trazar los puntos de datos y el modelo inverso del inciso(c).

(e) Use el modelo para calcular la profundidad a la que la temperatura del agua sea de 3° C.

84. ANÁLISIS DE DATOS: EXPERIMENTO FÍSICO Un experimento en un laboratorio de física requiere que un estudiante mida las longitudes comprimidas y (en centímetros) de un resorte, cuando se aplican varias fuerzas de F libras. Los datos se muestran en la tabla.

Fuerza, F	Longitud, y
0	0
2	1.15
4	2.3
6	3.45
8	4.6
10	5.75
12	6.9

(a) Trace una gráfica de dispersión de los datos.

(b) ¿Le parece que los datos pueden ser modelados por la ley de Hooke? Si es así, calcule k. (Vea Ejercicios 45–48.)

(c) Use el modelo del inciso (b) para calcular la fuerza necesaria para comprimir 9 centímetros el resorte.

85. ANÁLISIS DE DATOS: INTENSIDAD DE LUZ Un medidor de luz está colocado a x centímetros de una fuente de luz, y se mide la intensidad y de la luz (en microwatts por centímetro cuadrado). Los resultados se muestran como pares ordenados (x, y).

(30, 0.1881) (34, 0.1543) (38, 0.1172)
(42, 0.0998) (46, 0.0775) (50, 0.0645)

Un modelo para los datos es $y = 262.76/x^{2.12}$.

(a) Use una calculadora de gráficas para graficar los puntos de datos y el modelo en la misma pantalla.

(b) Use el modelo para calcular la intensidad luminosa a 25 centímetros de la fuente de luz.

86. ILUMINACIÓN La iluminación desde una fuente de luz varía inversamente con el cuadrado de la distancia desde la fuente de luz. Cuando la distancia desde una fuente de luz se duplica, ¿cómo cambia la iluminación? Discuta este modelo en términos de los datos dados en el Ejercicio 85. Dé una posible explicación de la diferencia.

EXPLORACIÓN

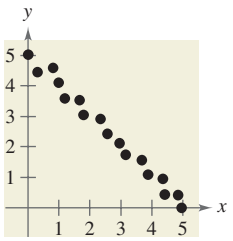
¿VERDADERO O FALSO? En los Ejercicios 87 y 88, determine si la proposición es verdadera o falsa. Justifique su respuesta.

87. En la ecuación para hallar la energía cinética, $E = \frac{1}{2}mv^2$, la cantidad de energía cinética E es directamente proporcional a la masa m de un objeto y el cuadrado de su velocidad v.

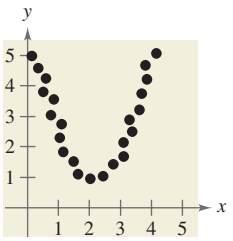
88. Si el coeficiente de correlación de una recta de regresión de mínimos cuadrados se aproxima a -1, la recta de regresión no puede usarse para describir los datos.

89. Analice cómo pueden ser calculados, por un modelo lineal, los datos mostrados en cada gráfica de dispersión.

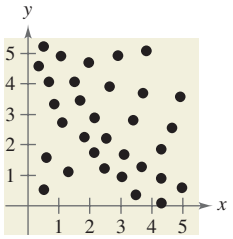
(a)



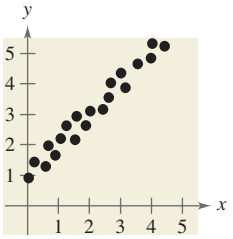
(b)



(c)



(d)



90. ESCRITURA Un modelo lineal para el pronóstico de ganar premios en una carrera está basado en datos de tres años. Escriba un párrafo que analice la potencial precisión o imprecisión de ese modelo.

91. ESCRITURA Suponga que la constante de proporcionalidad es positiva y y varía directamente con x. Cuando aumenta una de las variables, ¿cómo cambiará la otra? Explique su razonamiento.

92. ESCRITURA Suponga que la constante de proporcionalidad es positiva y que y varía inversamente con x. Cuando aumenta una de las variables, ¿cómo cambiará la otra? Explique su razonamiento.

93. ESCRITURA

(a) Dado que y varía inversamente con el cuadrado de x y x se duplica, ¿cómo cambiará y? Explique.

(b) Dado que y varía directamente con el cuadrado de x y x se duplica, ¿cómo cambiará y? Explique.

94. TOQUE FINAL Los precios de tres tamaños de pizza en un restaurante son como sigue.

9 pulgadas: \$8.78, 12 pulgadas: \$11.78, 15 pulgadas: \$14.18

Es de esperarse que el precio de cierto tamaño de pizza fuera directamente proporcional a su área superficial. ¿Es ese el caso de este restaurante de pizzas? Si no lo es, ¿qué tamaño de pizza es la mejor compra?

PROYECTO: FRAUDE Y ROBO DE IDENTIDAD Para trabajar una aplicación extendida, analizando los números de víctimas de quejas por fraude y robo de identidad en Estados Unidos en 2007, visite el sitio web del texto en *academic.cengage.com*. (Fuente: U.S. Census Bureau)

1 Resumen del capítulo

	¿Qué aprendió?	Explicación/Ejemplos	Ejercicios de repaso
Sección 1.1	Localizar puntos en el plano cartesiano *(p. 2)*.	Para un par ordenado (x, y), la coordenada x es la distancia dirigida desde el eje y al punto, y la coordenada y es la distancia dirigida del eje x al punto.	1–4
	Usar la fórmula de la distancia *(p. 4)* y la fórmula del punto medio *(p. 5)*.	**Fórmula de la distancia:** $d = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2}$ **Fórmula del punto medio:** Punto medio $= \left(\frac{x_1 + x_2}{2}, \frac{y_1 + y_2}{2}\right)$	5–8
	Usar el plano de coordenadas para modelar y resolver problemas reales *(p. 6)*.	El plano de coordenadas se puede usar para hallar la longitud de un pase de fútbol. (Vea Ejemplo 6.)	9–12
Sección 1.2	Trazar gráficas de ecuaciones *(p. 13)*, hallar intersecciones con los ejes x y y de gráficas *(p. 16)* y usar simetría para trazar gráficas de ecuaciones *(p. 17)*.	Para graficar una ecuación, haga una tabla de valores, localice los puntos y luego únalos con una curva lisa o recta. Para hallar intersecciones con el eje x, iguale y a cero y despeje x. Para hallar intersecciones con el eje y, iguale x a cero y despeje y. Las gráficas pueden tener simetría respecto a uno de los ejes de coordenadas o respecto al origen.	13–34
	Encontrar ecuaciones de gráficas de circunferencias y trazarlas *(p. 19)*.	El punto (x, y) está en la circunferencia de radio r y centro (h, k) si y sólo si $(x - h)^2 + (y - k)^2 = r^2$.	35–42
	Usar gráficas de ecuaciones al resolver problemas de la vida real *(p. 20)*.	La gráfica de una ecuación se puede usar para calcular el peso recomendado de un hombre. (Vea Ejemplo 9.)	43, 44
Sección 1.3	Usar la pendiente para graficar ecuaciones lineales con dos variables *(p. 24)*.	La gráfica de la ecuación $y = mx + b$ es una recta cuya pendiente es m y cuya intersección con el eje y es $(0, b)$.	45–48
	Encontrar la pendiente de una recta dados dos puntos en ésta *(p. 26)*.	La pendiente m de la recta no vertical que pasa por (x_1, y_1) y (x_2, y_2) es $m = (y_2 - y_1)/(x_2 - x_1)$, donde $x_1 \neq x_2$.	49–52
	Escribir ecuaciones lineales con dos variables *(p. 28)*.	La ecuación de la recta con pendiente m que pasa por el punto (x_1, y_1) es $y - y_1 = m(x - x_1)$.	53–60
	Usar la pendiente para identificar rectas paralelas y perpendiculares *(p. 29)*.	**Rectas paralelas:** las pendientes son iguales. **Rectas perpendiculares:** las pendientes son recíprocas negativas entre sí.	61, 62
	Usar pendiente y ecuaciones lineales con dos variables para modelar y resolver problemas de la vida real *(p. 30)*.	Una ecuación lineal con dos variables se puede usar para describir el valor en libros del equipo de ejercicio en un año determinado. (Vea Ejemplo 7.)	63, 64
Sección 1.4	Determinar si las relaciones entre dos variables son funciones *(p. 39)*.	Una función f de un conjunto A (dominio) a un conjunto B (rango) es una relación que asigna a cada elemento x del conjunto A exactamente un elemento y del conjunto B.	65–68
	Usar notación de función, evaluar funciones y hallar dominios *(p. 41)*.	**Ecuación:** $f(x) = 5 - x^2$ **$f(2)$:** $f(2) = 5 - 2^2 = 1$ **Dominio de $f(x) = 5 - x^2$:** Todos los números reales	69–74
	Usar funciones para modelar y resolver problemas de la vida real *(p. 45)*.	Una función se puede usar para modelar el número de vehículos de combustible alterno en Estados Unidos. (Vea Ejemplo 10.)	75, 76
	Evaluar cocientes de diferencias *(p. 46)*.	**Cociente de diferencias:** $[f(x + h) - f(x)]/h, h \neq 0$	77, 78
Sección 1.5	Usar la prueba de la recta vertical para funciones *(p. 55)*.	Una gráfica representa una función si y sólo si ninguna recta *vertical* la interseca en más de un punto.	79–82
	Hallar los ceros de funciones *(p. 56)*.	**Ceros de $f(x)$:** valores de x para los cuales $f(x) = 0$	83–86

	¿Qué aprendió?	Explicación/Ejemplos	Ejercicios de repaso
Sección 1.5	Determinar intervalos en los que las funciones son crecientes o decrecientes *(p. 57)*, hallar valores relativos mínimo y máximo *(p. 58)* y hallar el promedio de variación de una función *(p. 59)*.	Para determinar si una función es creciente, decreciente o constante en un intervalo, hay que evaluar la función para varios valores de x. Los puntos en los que cambia el comportamiento de una función pueden ayudar a determinar el mínimo o el máximo relativos. El promedio de variación entre cualesquier dos puntos es la pendiente de la recta (recta secante) que pasa por los dos puntos.	87–96
	Identificar funciones pares e impares *(p. 60)*.	**Par:** Para cada x en el dominio de f, $f(-x) = f(x)$. **Impar:** Para cada x en el dominio de f, $f(-x) = -f(x)$.	97–100
Sección 1.6	Identificar y graficar diferentes tipos de funciones *(p. 66)* y reconocer gráficas de funciones principales *(p. 70)*.	**Lineal:** $f(x) = ax + b$; **cuadrática:** $f(x) = x^2$; **cúbica:** $f(x) = x^3$; **raíz cuadrada:** $f(x) = \sqrt{x}$; **recíproca:** $f(x) = 1/x$ Ocho de las funciones que más se usan en álgebra se ven en la Figura 1.75.	101–114
Sección 1.7	Usar desplazamientos verticales y horizontales *(p. 73)*, reflexiones *(p. 75)* y transformaciones no rígidas *(p. 77)* para trazar gráficas de funciones.	**Desplazamientos verticales:** $h(x) = f(x) + c$ o $h(x) = f(x) - c$ **Desplazamientos horizontales:** $h(x) = f(x - c)$ o $h(x) = f(x + c)$ **Reflexión en el eje *x*:** $h(x) = -f(x)$ **Reflexión en el eje *y*:** $h(x) = f(-x)$ **Transformaciones no rígidas:** $h(x) = cf(x)$ or $h(x) = f(cx)$	115–128
Sección 1.8	Sumar, restar, multiplicar y dividir funciones *(p. 83)* y hallar las composiciones de funciones *(p. 85)*.	$(f + g)(x) = f(x) + g(x)$ $\quad (f - g)(x) = f(x) - g(x)$ $(fg)(x) = f(x) \cdot g(x)$ $\quad (f/g)(x) = f(x)/g(x), g(x) \neq 0$ **Composición de funciones:** $(f \circ g)(x) = f(g(x))$	129–134
	Usar combinaciones y composiciones de funciones para modelar y resolver problemas de la vida real *(p. 87)*.	Una función compuesta se puede usar para representar el número de bacterias en alimentos como función del tiempo que el alimento ha estado en refrigeración. (Vea Ejemplo 8.)	135, 136
Sección 1.9	Hallar funciones inversas informalmente y verificar que dos funciones son inversas una de otra *(p. 92)*.	Sean f y g dos funciones tales que $f(g(x)) = x$ para toda x en el dominio de g y $g(f(x)) = x$ para toda x en el dominio de f. Bajo estas condiciones, la función g es la inversa de la función f.	137, 138
	Usar gráficas de funciones para determinar si las funciones tienen inversas *(p. 94)*.	Si el punto (a, b) está en la gráfica de f, entonces el punto (b, a) debe estar en la gráfica de f^{-1}, y viceversa. En pocas palabras, f^{-1} es una reflexión de f en la recta $y = x$.	139, 140
	Usar la prueba de la recta horizontal para determinar si las funciones son biunívocas *(p. 95)*.	**Prueba de la recta horizontal para funciones inversas** Una función f tiene una función inversa si y sólo si ninguna recta *horizontal* interseca a f en más de un punto.	141–144
	Hallar funciones inversas algebraicamente *(p. 96)*.	Para hallar funciones inversas, sustituya $f(x)$ por y, intercambie los papeles de x y y y despeje y. Sustituya y por $f^{-1}(x)$.	145–150
Sección 1.10	Usar modelos matemáticos para calcular conjuntos de puntos de datos *(p. 102)* y usar el comando *regression* de una calculadora de gráficas para hallar la ecuación de una recta de regresión de mínimos cuadrados *(p. 103)*.	Para ver lo bien que un modelo se ajusta a un conjunto de datos, compare los valores reales y los del modelo de y. La suma de diferencias cuadradas es la suma de los cuadrados de las diferencias entre los valores reales de datos y los del modelo. La recta de regresión de mínimos cuadrados es el modelo lineal con la suma mínima de diferencias cuadradas.	151, 152
	Escribir modelos matemáticos para variación directa, variación directa como n-ésima potencia, variación inversa y variación conjunta *(pp. 104-107)*.	**Variación directa:** $y = kx$ para alguna constante k diferente de cero **Variación directa como *n*-ésima potencia:** $y = kx^n$ para alguna constante k **Variación inversa:** $y = k/x$ para alguna constante k **Variación conjunta:** $z = kxy$ para alguna constante k	153–158

1 Ejercicios de repaso

En www.CalcChat.com vea las soluciones a los ejercicios impares.

1.1 En los Ejercicios 1 y 2, localice los puntos en el plano cartesiano.

1. $(5, 5), (-2, 0), (-3, 6), (-1, -7)$

2. $(0, 6), (8, 1), (4, -2), (-3, -3)$

En los Ejercicios 3 y 4, determine el cuadrante(s) en el que (x, y) está ubicada de modo que se satisface la condición(es).

3. $x > 0$ y $y = -2$

4. $xy = 4$

En los Ejercicios 5-8, (a) localice los puntos, (b) encuentre la distancia entre ellos, y (c) encuentre el punto medio del segmento de recta que los enlaza.

5. $(-3, 8), (1, 5)$

6. $(-2, 6), (4, -3)$

7. $(5.6, 0), (0, 8.2)$

8. $(1.8, 7.4), (-0.6, -14.5)$

En los Ejercicios 9 y 10, el polígono está desplazado a una nueva posición en el plano. Encuentre las coordenadas de los vértices del polígono en su nueva posición.

9. Coordenadas originales de los vértices:

$(4, 8), (6, 8), (4, 3), (6, 3)$

Desplazamiento: ocho unidades hacia abajo, cuatro unidades a la izquierda

10. Coordenadas originales de los vértices:

$(0, 1), (3, 3), (0, 5), (-3, 3)$

Desplazamiento: tres unidades hacia arriba, dos unidades a la izquierda

11. VENTAS Starbucks tuvo ventas anuales de \$2170 millones de dólares en 2000 y \$10 380 millones de dólares en 2008. Use la fórmula del punto medio para calcular las ventas en 2004. (Fuente: Starbucks Corp.)

12. METEOROLOGÍA La temperatura aparente es una medida de incomodidad relativa para una persona debido al calor o a elevada humedad. La tabla siguiente muestra las temperaturas reales x (en grados Fahrenheit) contra las temperaturas aparentes y (en grados Fahrenheit) para una humedad relativa de 75%.

x	70	75	80	85	90	95	100
y	70	77	85	95	109	130	150

(a) Trace una gráfica de dispersión de los datos mostrados en la tabla.

(b) Encuentre el cambio en la temperatura aparente cuando la temperatura real cambia de 70 °F a 100 °F.

1.2 En los Ejercicios 13-16, complete una tabla de valores. Use los puntos de solución para trazar la gráfica de la ecuación.

13. $y = 3x - 5$

14. $y = -\frac{1}{2}x + 2$

15. $y = x^2 - 3x$

16. $y = 2x^2 - x - 9$

En los Ejercicios 17-22, trace la gráfica *manualmente*.

17. $y - 2x - 3 = 0$

18. $3x + 2y + 6 = 0$

19. $y = \sqrt{5 - x}$

20. $y = \sqrt{x + 2}$

21. $y + 2x^2 = 0$

22. $y = x^2 - 4x$

En los Ejercicios 23-26, encuentre las intersecciones con los ejes x y y de la gráfica de la ecuación.

23. $y = 2x + 7$

24. $y = |x + 1| - 3$

25. $y = (x - 3)^2 - 4$

26. $y = x\sqrt{4 - x^2}$

En los Ejercicios 27-34, identifique cualesquiera intersecciones con los ejes y pruebe si hay simetría. A continuación trace la gráfica de la ecuación.

27. $y = -4x + 1$

28. $y = 5x - 6$

29. $y = 5 - x^2$

30. $y = x^2 - 10$

31. $y = x^3 + 3$

32. $y = -6 - x^3$

33. $y = \sqrt{x + 5}$

34. $y = |x| + 9$

En los Ejercicios 35-40, encuentre el centro y radio de la circunferencia y trace su gráfica.

35. $x^2 + y^2 = 9$

36. $x^2 + y^2 = 4$

37. $(x + 2)^2 + y^2 = 16$

38. $x^2 + (y - 8)^2 = 81$

39. $\left(x - \frac{1}{2}\right)^2 + (y + 1)^2 = 36$

40. $(x + 4)^2 + \left(y - \frac{3}{2}\right)^2 = 100$

41. Encuentre la forma estándar de la ecuación de la circunferencia para la cual los puntos extremos de un diámetro son $(0, 0)$ y $(4, -6)$.

42. Encuentre la forma estándar de la ecuación de la circunferencia para la cual los puntos extremos de un diámetro son $(-2, -3)$ y $(4, -10)$.

43. NÚMERO DE TIENDAS El número N de tiendas Walgreen para los años 2000 al 2008 se pueden calcular con el modelo

$$N = 439.9t + 2987, \quad 0 \le t \le 8$$

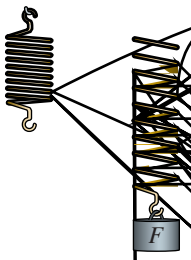
donde t representa el año, con $t = 0$ correspondiente a 2000. (Fuente: Walgreen Co.)

(a) Trace la gráfica del modelo.

(b) Use la gráfica para calcular el año en el que el número de tiendas era de 6500.

44. FÍSICA La fuerza F (en libras) necesaria para estirar un resorte x pulgadas desde su longitud natural (vea figura) es

$$F = \frac{5}{4}x,\ 0 \le x \le 20.$$



(a) Use el modelo para completar la tabla.

x	0	4	8	12	16	20
Fuerza, F						

(b) Trace una gráfica del modelo.

(c) Use la gráfica para calcular la fuerza necesaria para estirar el resorte 10 pulgadas.

En los Ejercicios 45-48, encuentre la pendiente e intersección con el eje y (si es posible) de la ecuación de la recta. Trace la recta.

45.

46.

47.

48.

En los Ejercicios 49-52, localice los puntos y encuentre la pendiente de la recta que pasa por el par indicado.

49.

50.

51.

52.

En los Ejercicios 53-56, encuentre la forma pendiente-intersección de la ecuación de la recta que pasa por el punto dado y tiene la pendiente indicada. Trace la recta.

Punto	*Pendiente*
53.	
54.	
55.	
56.	no está definida.

En los Ejercicios 57-60, encuentre la forma pendiente-intersección de la ecuación de la recta que pase por los puntos.

57.

58.

59.

60.

En los Ejercicios 61 y 62, escriba las formas pendiente-intersección de las ecuaciones de las rectas que pasan por el punto dado (a) paralelo a la recta dada y (b) perpendicular a la recta dada.

Punto	*Recta*
61.	
62.	

RAZÓN DE CAMBIO En los Ejercicios 63 y 64 se da el valor en dólares de un producto en 2010 y la tasa a la que se espera que el valor del producto cambie durante los siguientes 5 años. Use esta información para escribir la ecuación lineal que dé el valor en dólares V del producto en términos del año

76. PROBLEMA DE MEZCLAS De un recipiente de 50 litros lleno con un ácido al 40% de concentración, se sacan x litros y se sustituyen con un ácido al 100% de concentración.

(a) Escriba la cantidad de ácido de la mezcla final como función de x.

(b) Determine el dominio y rango de la función.

(c) Determine x si la mezcla final es 50% ácida.

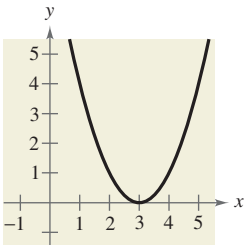
En los Ejercicios 77 y 78, encuentre los cocientes de diferencias y simplifique su respuesta.

77. $f(x) = 2x^2 + 3x - 1, \quad \dfrac{f(x+h) - f(x)}{h}, \quad h \neq 0$

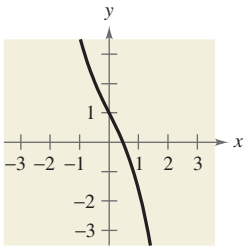
78. $f(x) = x^3 - 5x^2 + x, \quad \dfrac{f(x+h) - f(x)}{h}, \quad h \neq 0$

1.5 En los Ejercicios 79-82, use la prueba de la recta vertical para determinar si y es función de x. Para imprimir una copia amplificada de la gráfica, visite el sitio web *www.mathgraphs.com*.

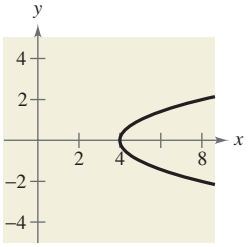
79. $y = (x - 3)^2$



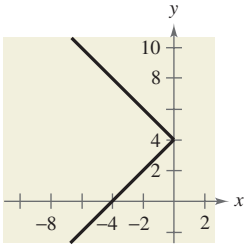
80. $y = -\frac{3}{5}x^3 - 2x + 1$



81. $x - 4 = y^2$



82. $x = -|4 - y|$



En los Ejercicios 83-86, encuentre algebraicamente los ceros de la función.

83. $f(x) = 3x^2 - 16x + 21$

84. $f(x) = 5x^2 + 4x - 1$

85. $f(x) = \dfrac{8x + 3}{11 - x}$

86. $f(x) = x^3 - x^2 - 25x + 25$

En los Ejercicios 87 y 88, use una calculadora de gráficas para graficar la función y visualmente determine los intervalos en los que ésta es creciente, decreciente o constante.

87. $f(x) = |x| + |x + 1|$ **88.** $f(x) = (x^2 - 4)^2$

En los Ejercicios 89-92, use una calculadora de gráficas para graficar la función y calcular cualesquier valores mínimo o máximo relativos.

89. $f(x) = -x^2 + 2x + 1$

90. $f(x) = x^4 - 4x^2 - 2$

91. $f(x) = x^3 - 6x^4$

92. $f(x) = x^3 - 4x^2 - 1$

En los Ejercicios 93-96, encuentre la razón de cambio promedio de la función de x_1 a x_2.

Función	*Valores de x*
93. $f(x) = -x^2 + 8x - 4$	$x_1 = 0, x_2 = 4$
94. $f(x) = x^3 + 12x - 2$	$x_1 = 0, x_2 = 4$
95. $f(x) = 2 - \sqrt{x + 1}$	$x_1 = 3, x_2 = 7$
96. $f(x) = 1 - \sqrt{x + 3}$	$x_1 = 1, x_2 = 6$

En los Ejercicios 97-100, determine si la función es par, impar o ninguna de éstas.

97. $f(x) = x^5 + 4x - 7$

98. $f(x) = x^4 - 20x^2$

99. $f(x) = 2x\sqrt{x^2 + 3}$

100. $f(x) = \sqrt[5]{6x^2}$

1.6 En los Ejercicios 101 y 102, escriba la función lineal f tal que tenga los valores indicados. A continuación trace la gráfica de la función.

101. $f(2) = -6, \; f(-1) = 3$

102. $f(0) = -5, \; f(4) = -8$

En los Ejercicios 103-112, grafique la función.

103. $f(x) = 3 - x^2$ **104.** $h(x) = x^3 - 2$

105. $f(x) = -\sqrt{x}$ **106.** $f(x) = \sqrt{x + 1}$

107. $g(x) = \dfrac{3}{x}$ **108.** $g(x) = \dfrac{1}{x + 5}$

109. $f(x) = [\![x]\!] + 2$

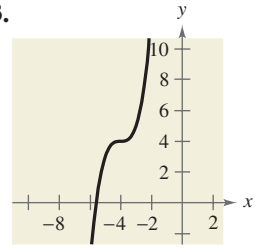
110. $g(x) = [\![x + 4]\!]$

111. $f(x) = \begin{cases} 5x - 3, & x \geq -1 \\ -4x + 5, & x < -1 \end{cases}$

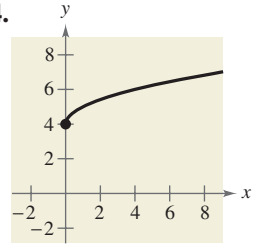
112. $f(x) = \begin{cases} x^2 - 2, & x < -2 \\ 5, & -2 \leq x \leq 0 \\ 8x - 5, & x > 0 \end{cases}$

En los Ejercicios 113 y 114, la figura muestra la gráfica de una función principal transformada. Identifique la función principal.

113.



114.



1.7 En los Ejercicios 115-128, h está relacionada con una de las funciones principales descritas en este capítulo. (a) Identifique la función principal f. (b) Describa la sucesión de transformaciones de f a h. (c) Trace la gráfica de h. (d) Use la notación de funciones para escribir h en términos de f.

115. $h(x) = x^2 - 9$

116. $h(x) = (x - 2)^3 + 2$

117. $h(x) = -\sqrt{x} + 4$

118. $h(x) = |x + 3| - 5$

119. $h(x) = -(x + 2)^2 + 3$

120. $h(x) = \frac{1}{2}(x - 1)^2 - 2$

121. $h(x) = -[\![x]\!] + 6$

122. $h(x) = -\sqrt{x + 1} + 9$

123. $h(x) = -|-x + 4| + 6$

124. $h(x) = -(x + 1)^2 - 3$

125. $h(x) = 5[\![x - 9]\!]$

126. $h(x) = -\frac{1}{3}x^3$

127. $h(x) = -2\sqrt{x - 4}$

128. $h(x) = \frac{1}{2}|x| - 1$

1.8 En los Ejercicios 129 y 130, encuentre (a) $(f + g)(x)$, (b) $(f - g)(x)$, (c) $(fg)(x)$, y (d) $(f/g)(x)$. ¿Cuál es el dominio de f/g?

129. $f(x) = x^2 + 3, \quad g(x) = 2x - 1$

130. $f(x) = x^2 - 4, \quad g(x) = \sqrt{3 - x}$

En los Ejercicios 131 y 132, encuentre (a) $f \circ g$ y (b) $g \circ f$. Encuentre el dominio de cada función y cada función compuesta.

131. $f(x) = \frac{1}{3}x - 3, \quad g(x) = 3x + 1$

132. $f(x) = x^3 - 4, \quad g(x) = \sqrt[3]{x + 7}$

En los Ejercicios 133 y 134, encuentre dos funciones f y g tales que $(f \circ g)(x) = h(x)$. (Hay numerosas respuestas correctas.)

133. $h(x) = (1 - 2x)^3$

134. $h(x) = \sqrt[3]{x + 2}$

135. GASTOS DE TELÉFONO El promedio de gastos anuales (en dólares) por servicios de telefonía residencial $r(t)$ y celular $c(t)$ de 2001 a 2006 se puede calcular con las funciones $r(t) = 27.5t + 705$ y $c(t) = 151.3t + 151$, donde t representa el año, con $t = 1$ correspondiente a 2001. (Fuente: Bureau of Labor Statistics)

(a) Encuentre e interprete $(r + c)(t)$.

(b) Use una calculadora de gráficas para graficar $r(t)$, $c(t)$, y $(r + c)(t)$ en la misma pantalla.

(c) Encuentre $(r + c)(13)$. Use la gráfica del inciso (b) para verificar su resultado.

136. CANTIDAD DE BACTERIAS El número N de bacterias en un alimento refrigerado está dado por

$$N(T) = 25T^2 - 50T + 300, \quad 2 \le T \le 20$$

donde T es la temperatura del alimento en grados Celsius. Cuando el alimento se retira de refrigeración, su temperatura está dada por

$$T(t) = 2t + 1, \quad 0 \le t \le 9$$

donde t es el tiempo en horas. (a) Encuentre la composición $N(T(t))$ e interprete su significado en el contexto y (b) encuentre el tiempo cuando la cantidad de bacterias llegue a 750.

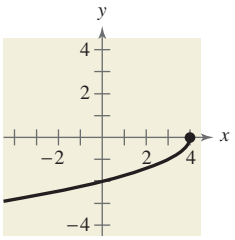
1.9 En los Ejercicios 137 y 138, encuentre la función inversa de f informalmente. Verifique que $f(f^{-1}(x)) = x$ y $f^{-1}(f(x)) = x$.

137. $f(x) = 3x + 8$

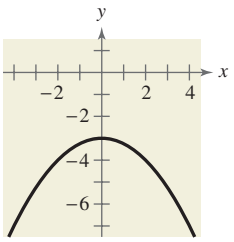
138. $f(x) = \dfrac{x - 4}{5}$

En los Ejercicios 139 y 140, determine si la función tiene una función inversa.

139.



140.



En los Ejercicios 141-144, use una calculadora de gráficas para graficar la función y use la prueba de la recta horizontal para determinar si ésta es biunívoca y por tanto tiene una función inversa.

141. $f(x) = 4 - \frac{1}{3}x$

142. $f(x) = (x - 1)^2$

143. $h(t) = \dfrac{2}{t - 3}$

144. $g(x) = \sqrt{x + 6}$

En los Ejercicios 145-148, (a) encuentre la función inversa de f, (b) grafique f y f^{-1} en el mismo conjunto de ejes de coordenadas, (c) describa la relación entre las gráficas de f y f^{-1}, y (d) exprese los dominios y rangos de f y f^{-1}.

145. $f(x) = \frac{1}{2}x - 3$

146. $f(x) = 5x - 7$

147. $f(x) = \sqrt{x + 1}$

148. $f(x) = x^3 + 2$

En los Ejercicios 149 y 150, restrinja el dominio de la función f a un intervalo en el que la función sea creciente y determine f^{-1} en ese intervalo.

149. $f(x) = 2(x - 4)^2$

150. $f(x) = |x - 2|$

1.10

151. DISCOS COMPACTOS Los valores V (en miles de millones de dólares) de embarques de discos compactos en Estados Unidos, de 2000 a 2007, se muestran en la tabla siguiente. Un modelo lineal que calcula estos datos es

$$V = -0.742t + 13.62$$

donde t representa el año, con $t = 0$ correspondiente a 2000. (Fuente: Recording Industry Association of America)

Año	Valor, V
2000	13.21
2001	12.91
2002	12.04
2003	11.23
2004	11.45
2005	10.52
2006	9.37
2007	7.45

(a) Grafique los datos reales y el modelo en el mismo conjunto de ejes de coordenadas.

(b) ¿Qué tan cercanamente el modelo representa los datos?

152. ANÁLISIS DE DATOS: USO DE TV La tabla siguiente muestra el número proyectado de horas H de uso de la televisión en Estados Unidos, de 2003 a 2011. (Fuente: Communications Industry Forecast and Report)

Año	Horas, H
2003	1615
2004	1620
2005	1659
2006	1673
2007	1686
2008	1704
2009	1714
2010	1728
2011	1742

(a) Use una calculadora de gráficas para crear una gráfica de dispersión de los datos. Con t represente el año, con $t = 3$ correspondiente a 2003.

(b) Use el comando *regression* de la calculadora de gráficas para hallar la ecuación de la recta de regresión de mínimos cuadrados que se ajuste a los datos. A continuación, grafique el modelo y la gráfica de dispersión que encontró en el inciso (a) en la misma pantalla. ¿Qué tan cercanamente el modelo representa a los datos?

(c) Use el modelo para calcular el número proyectado de horas de uso de televisión en 2020.

(d) Interprete el significado de la pendiente del modelo lineal en el contexto del problema.

153. MEDICIÓN Usted observa un señalamiento que indica que faltan 2.5 millas o 4 kilómetros para llegar al siguiente restaurante de una cadena nacional de comida rápida. Use esta información para hallar un modelo matemático que relacione millas y kilómetros. A continuación use el modelo para hallar el número de kilómetros que hay en 2 y 10 millas.

154. ENERGÍA La potencia P producida por una turbina de viento es proporcional al cubo de la rapidez del viento S. Una rapidez del viento de 27 millas por hora produce una potencia de 750 kilowatts. Encuentre la salida para una rapidez de viento de 40 millas por hora.

155. FUERZA DE FRICCIÓN La fuerza de fricción F entre las llantas y el pavimento, necesaria para mantener un auto en una sección curva de una carretera, es directamente proporcional al cuadrado de la rapidez s del auto. Si la rapidez del auto se duplica, ¿en qué factor cambiará la fuerza?

156. DEMANDA Una compañía ha encontrado que la demanda diaria x de sus cajas de chocolates es inversamente proporcional al precio p. Cuando el precio es \$5, la demanda es 800 cajas. Calcule la demanda cuando el precio se aumente a \$6.

157. TIEMPO DE VIAJE El tiempo de viaje entre dos ciudades es inversamente proporcional a la velocidad media o promedio. Un tren corre entre las ciudades en 3 horas a un promedio de velocidad de 65 millas por hora. ¿Cuánto tardará en moverse entre las ciudades a una velocidad media promedio de 80 millas por hora?

158. COSTO El costo de construir una caja de madera con base cuadrada varía conjuntamente con la altura de la caja y el cuadrado del ancho de ésta. Una caja de 16 pulgadas de alto y 6 pulgadas de ancho cuesta \$28.80. ¿Cuánto costaría una caja de 14 pulgadas de alto y 8 pulgadas de ancho?

EXPLORACIÓN

¿VERDADERO O FALSO? En los Ejercicios 159 y 160, determine si la proposición es verdadera o falsa. Justifique su respuesta.

159. Respecto a la gráfica de $f(x) = \sqrt{x}$, la función dada por $h(x) = -\sqrt{x + 9} - 13$ se desplaza 9 unidades a la izquierda y 13 hacia abajo, y luego se refleja en el eje x.

160. Si f y g son dos funciones inversas, entonces el dominio de g es igual al rango de f.

161. ESCRITURA Explique la diferencia entre la prueba de la recta vertical y la prueba de la recta horizontal.

162. ESCRITURA Explique cómo decir si una relación entre dos variables es una función.

1 EXAMEN DEL CAPÍTULO

En www.CalcChat.com vea las soluciones a los ejercicios impares.

Tome este examen como si lo hiciera en clase. Cuando termine, verifique su trabajo contra las respuestas dadas al final del libro.

1. Grafique los puntos $(-2, 5)$ y $(6, 0)$. Encuentre las coordenadas del punto medio del segmento de recta que enlaza los puntos y la distancia entre los puntos.

2. Una lata cilíndrica tiene un volumen de 600 centímetros cúbicos y un radio de 4 centímetros. Encuentre la altura de la lata.

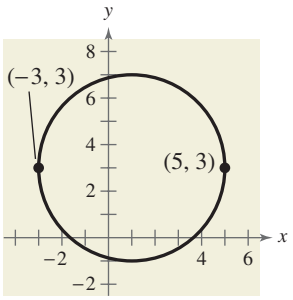


FIGURA PARA 6

En los Ejercicios 3-5, use intersecciones con los ejes y simetría para trazar la gráfica de la ecuación.

3. $y = 3 - 5x$ **4.** $y = 4 - |x|$ **5.** $y = x^2 - 1$

6. Escriba en forma estándar la ecuación de la circunferencia mostrada a la izquierda.

En los Ejercicios 7 y 8, encuentre la forma pendiente-intersección de la ecuación de la recta que pasa por los puntos.

7. $(2, -3), (-4, 9)$ **8.** $(3, 0.8), (7, -6)$

9. Encuentre las ecuaciones de las rectas que pasan por el punto $(0, 4)$ y son (a) paralelas y (b) perpendiculares a la recta $5x + 2y = 3$.

10. Evalúe $f(x) = \dfrac{\sqrt{x+9}}{x^2 - 81}$ en cada valor: (a) $f(7)$ (b) $f(-5)$ (c) $f(x - 9)$.

11. Encuentre el dominio de $f(x) = 10 - \sqrt{3 - x}$.

En los Ejercicios 12-14, (a) encuentre los ceros de la función, (b) use una calculadora de gráficas para graficar la función, (c) calcule los intervalos en los que la función es creciente, decreciente o constante y (d) determine si la función es par, impar o ninguna de éstas.

12. $f(x) = 2x^6 + 5x^4 - x^2$ **13.** $f(x) = 4x\sqrt{3 - x}$ **14.** $f(x) = |x + 5|$

15. Trace la gráfica de $f(x) = \begin{cases} 3x + 7, & x \leq -3 \\ 4x^2 - 1, & x > -3 \end{cases}$.

En los Ejercicios 16-18, identifique la función principal en la transformación. A continuación, trace una gráfica de la función.

16. $h(x) = -[\![x]\!]$ **17.** $h(x) = -\sqrt{x + 5} + 8$ **18.** $h(x) = -2(x - 5)^3 + 3$

En los Ejercicios 19 y 20, encuentre (a) $(f + g)(x)$, (b) $(f - g)(x)$, (c) $(fg)(x)$, (d) $(f/g)(x)$, (e) $(f \circ g)(x)$ y (f) $(g \circ f)(x)$.

19. $f(x) = 3x^2 - 7, \quad g(x) = -x^2 - 4x + 5$ **20.** $f(x) = 1/x, \quad g(x) = 2\sqrt{x}$

En los Ejercicios 21-23, determine si la función tiene inversa y, si es así, encuéntrela.

21. $f(x) = x^3 + 8$ **22.** $f(x) = |x^2 - 3| + 6$ **23.** $f(x) = 3x\sqrt{x}$

En los Ejercicios 24-26, encuentre un modelo matemático que represente el enunciado. (En cada caso, determine la constante de proporcionalidad.)

24. v varía directamente con la raíz cuadrada de s. ($v = 24$ cuando $s = 16$.)

25. A varía conjuntamente con x y y. ($A = 500$ cuando $x = 15$ y $y = 8$.)

26. b varía inversamente con a. ($b = 32$ cuando $a = 1.5$.)

DEMOSTRACIONES EN MATEMÁTICAS

Para usted, ¿qué significa la palabra *demostración*? En matemáticas, la palabra *demostración* se usa para indicar simplemente un argumento válido. Cuando alguien demuestra una proposición o un teorema, debe usar en un orden lógico datos, definiciones y propiedades aceptadas. Con este fin, también se pueden usar teoremas previamente demostrados. Por ejemplo, la fórmula de la distancia se usa en la comprobación de la fórmula del punto medio que sigue. Hay varios métodos de demostración, que veremos en siguientes capítulos.

La fórmula del punto medio (p. 5)

El punto medio del segmento de recta que enlaza los puntos (x_1, y_1) y (x_2, y_2) está dado por la fórmula del punto medio.

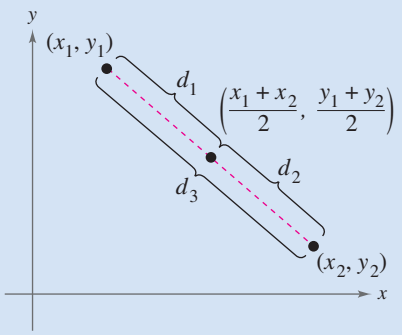
$$\text{Punto medio} = \left(\frac{x_1 + x_2}{2}, \frac{y_1 + y_2}{2}\right).$$

El plano cartesiano

El plano cartesiano recibe ese nombre en honor al matemático francés René Descartes (1596-1650). Cuando Descartes se encontraba en cama, observó que una mosca volaba por las tejas cuadradas del techo. Descubrió que la posición de la mosca podría describirse según la teja en la que se posara. Esto llevó al desarrollo del plano cartesiano. Descartes pensó que un plano de coordenadas podría usarse para facilitar la descripción de las posiciones de objetos.

Demostración

Usando la figura, se debe demostrar que $d_1 = d_2$ y $d_1 + d_2 = d_3$.



Por la fórmula de la distancia, se obtiene

$$d_1 = \sqrt{\left(\frac{x_1 + x_2}{2} - x_1\right)^2 + \left(\frac{y_1 + y_2}{2} - y_1\right)^2}$$

$$= \frac{1}{2}\sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2}$$

$$d_2 = \sqrt{\left(x_2 - \frac{x_1 + x_2}{2}\right)^2 + \left(y_2 - \frac{y_1 + y_2}{2}\right)^2}$$

$$= \frac{1}{2}\sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2}$$

$$d_3 = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2}$$

Por tanto, se deduce que $d_1 = d_2$ y $d_1 + d_2 = d_3$.

RESOLUCIÓN DE PROBLEMAS

Este conjunto de ejercicios, difíciles y que invitan a meditar, amplía y explora más a fondo los conceptos aprendidos en este capítulo.

1. Como vendedor, usted recibe un salario mensual de $2000, más una comisión de 7% sobre ventas. Le ofrecen un nuevo trabajo con $2300 por mes más una comisión de 5% sobre ventas.

(a) Escriba una ecuación lineal para su actual sueldo mensual W_1 en términos de sus ventas mensuales S.

(b) Escriba una ecuación lineal para el sueldo mensual W_2 de su nueva oferta de trabajo en términos de las ventas mensuales S.

(c) Use una calculadora de gráficas para graficar ambas ecuaciones en la misma pantalla. Encuentre el punto de intersección. ¿Qué significa?

(d) Usted piensa que puede vender $20 000 al mes. ¿Debe cambiar de trabajo? Explique.

2. Para los números 2 a 9 de un teclado de teléfono (vea figura), genere dos relaciones: una que relacione números con letras y la otra que relacione letras con números. ¿Ambas relaciones son funciones? Explique.

3. ¿Qué se puede decir acerca de la suma y diferencia de cada uno de lo siguiente?

(a) Dos funciones pares. (b) Dos funciones impares.

(c) Una función impar y una función par.

4. Las dos funciones dadas por

$$f(x) = x \quad \text{y} \quad g(x) = -x$$

son sus propias funciones inversas. Grafique cada una de las funciones y explique por qué esto es verdadero. Grafique otras funciones lineales que sean sus propias funciones inversas. Encuentre una fórmula general para una familia de funciones lineales que sean sus propias funciones inversas.

5. Demuestre que una función de la siguiente forma es par.

$$y = a_{2n}x^{2n} + a_{2n-2}x^{2n-2} + \cdots + a_2x^2 + a_0$$

6. Un profesional de golf en miniatura está tratando de hacer un tiro en uno en el "green" en miniatura que se muestra. Un plano de coordenadas se coloca sobre el green de golf. La pelota está en el punto (2.5, 2) y el hoyo está en el punto (9.5, 2). El jugador desea dar un tiro para que la pelota toque la pared lateral del green en el punto (x, y). Encuentre las coordenadas del punto (x, y). A continuación, escriba una ecuación para hallar la trayectoria de la pelota.

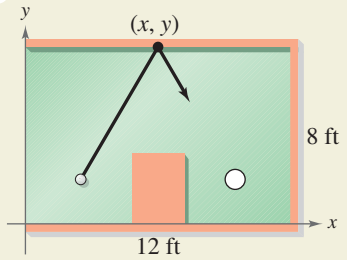


FIGURA PARA 6

7. A las 2:00 P.M. del 11 de abril de 1912, el *Titanic* zarpó de Cobh, Irlanda, en su viaje a la ciudad de Nueva York. A las 11.40 P.M. del 14 de abril, el *Titanic* chocó con un témpano de hielo y se hundió, habiendo cubierto sólo 2100 millas del viaje de aproximadamente 3400 millas.

(a) ¿Cuál fue la duración total del viaje en horas?

(b) ¿Cuál fue la velocidad media promedio en millas por hora?

(c) Escriba una función que relacione la distancia del *Titanic* desde la ciudad de Nueva York y el número de horas del viaje. Encuentre el dominio y rango de la función.

(d) Grafique la función del inciso (c).

8. Considere la función dada por $f(x) = -x^2 + 4x - 3$. Encuentre la razón de cambio promedio de la función de x_1 a x_2.

(a) $x_1 = 1, x_2 = 2$ (b) $x_1 = 1, x_2 = 1.5$

(c) $x_1 = 1, x_2 = 1.25$ (d) $x_1 = 1, x_2 = 1.125$

(e) $x_1 = 1, x_2 = 1.0625$

(f) ¿Le parece que la razón de cambio promedio se está aproximando a un valor? Si es así, ¿qué valor?

(g) Encuentre las ecuaciones de las rectas secantes que pasan por los puntos $(x_1, f(x_1))$ y $(x_2, f(x_2))$ para los incisos (a)–(e).

(h) Encuentre la ecuación de la recta que pasa por el punto $(1, f(1))$ usando su respuesta al inciso (f) como la pendiente de la recta.

9. Considere las funciones dadas por $f(x) = 4x$ y $g(x) = x + 6$.

(a) Encuentre $(f \circ g)(x)$. (b) Encuentre $(f \circ g)^{-1}(x)$.

(c) Encuentre $f^{-1}(x)$ y $g^{-1}(x)$.

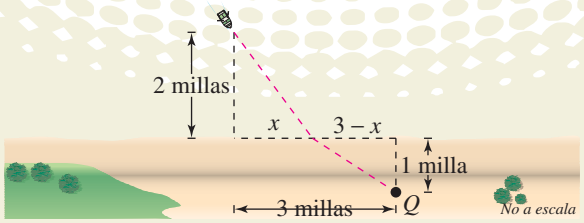
(d) Encuentre $(g^{-1} \circ f^{-1})(x)$ y compare el resultado con el del inciso (b).

(e) Repita los incisos del (a) al (d) para $f(x) = x^3 + 1$ y $g(x) = 2x$.

(f) Escriba dos funciones biunívocas f y g, y repita los incisos del (a) al (d) para estas funciones.

(g) Haga una conjetura acerca de $(f \circ g)^{-1}(x)$ y $(g^{-1} \circ f^{-1})(x)$.

10. Usted se encuentra en un bote a 2 millas del punto más cercano en la costa. Está viajando a un punto Q, a 3 millas por la costa y 1 milla tierra adentro (vea figura). Puede remar a 2 millas por hora y puede caminar a 4 millas por hora.



(a) Escriba el tiempo total T del viaje como función de x.

(b) Determine el dominio de la función.

(c) Use una calculadora de gráficas para graficar la función. Asegúrese de escoger una pantalla apropiada.

(d) Use las funciones *zoom* y *trace* para hallar el valor de x que reduzca T al mínimo.

(e) Escriba un breve párrafo que interprete estos valores.

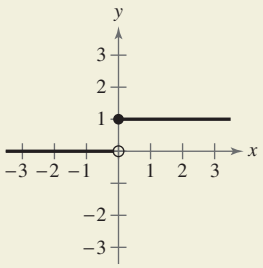
11. La **función de Heaviside** $H(x)$ se usa ampliamente en aplicaciones de ingeniería. (Vea figura.) Para imprimir una copia amplificada de la gráfica, visite el sitio web *www.mathgraphs.com*.

$$H(x) = \begin{cases} 1, & x \geq 0 \\ 0, & x < 0 \end{cases}$$

Trace manualmente la gráfica de cada una de las funciones.

(a) $H(x) - 2$ (b) $H(x - 2)$ (c) $-H(x)$

(d) $H(-x)$ (e) $\frac{1}{2}H(x)$ (f) $-H(x - 2) + 2$



12. Sea $f(x) = \dfrac{1}{1 - x}$.

(a) ¿Cuáles son el dominio y rango de f?

(b) Encuentre $f(f(x))$. ¿Cuál es el dominio de esta función?

(c) Encuentre $f(f(f(x)))$. ¿La gráfica es una recta? ¿Por qué sí o por qué no?

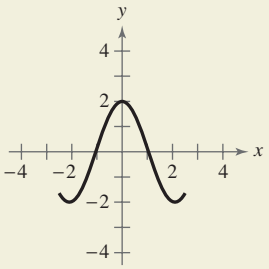
13. Demuestre que se cumple la propiedad asociativa para composiciones de funciones, es decir,

$$(f \circ (g \circ h))(x) = ((f \circ g) \circ h)(x).$$

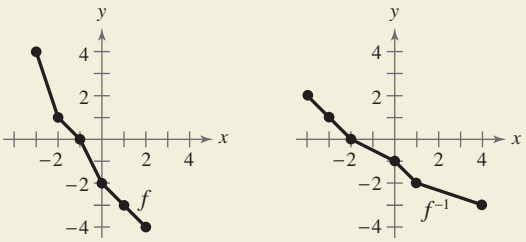
14. Considere la gráfica de la función f que se muestra en la figura y úsela para trazar la gráfica de cada función. Para imprimir una copia amplificada de la gráfica, visite el sitio web *www.mathgraphs.com*.

(a) $f(x + 1)$ (b) $f(x) + 1$ (c) $2f(x)$ (d) $f(-x)$

(e) $-f(x)$ (f) $|f(x)|$ (g) $f(|x|)$



15. Use las gráficas de f y f^{-1} para completar cada una de las tablas de valores de función.



(a)

x	-4	-2	0	4
$(f(f^{-1}(x))$				

(b)

x	-3	-2	0	1
$(f + f^{-1})(x)$				

(c)

x	-3	-2	0	1
$(f \cdot f^{-1})(x)$				

(d)

x	-4	-3	0	4
$\lvert f^{-1}(x)\rvert$				

Funciones polinomiales y racionales

2

2.1 Funciones y modelos cuadráticos
2.2 Funciones polinomiales de grado superior
2.3 Polinomios y división sintética
2.4 Números complejos
2.5 Ceros de funciones polinomiales
2.6 Funciones racionales
2.7 Desigualdades no lineales

En matemáticas

Las funciones definidas por expresiones con polinomios reciben el nombre de funciones polinomiales, y las funciones definidas por expresiones racionales se llaman funciones racionales.

En la vida real

Las funciones polinomiales y las racionales se usan con frecuencia para modelar fenómenos de la vida real. Por ejemplo, con una función polinomial se puede modelar el consumo de cigarrillos per cápita en Estados Unidos. Se puede usar el modelo para determinar si las advertencias contra los cigarrillos afectó el consumo. (Vea Ejercicio 85, página 134.)

Michael Newman/PhotoEdit

EN CARRERAS

Hay numerosas carreras que usan funciones polinomiales y racionales. A continuación se mencionan algunas.

- Arquitecto
  Ejercicio 82, página 134
- Silvicultor
  Ejercicio 103, página 148
- Químico
  Ejemplo 80, página 192
- Ingeniero en seguridad
  Ejercicio 78, página 203

2.1 Funciones y modelos cuadráticos

Lo que debe aprender

- Analizar gráficas de funciones cuadráticas.
- Escribir funciones cuadráticas en forma estándar y usar los resultados para trazar gráficas de funciones.
- Hallar los valores mínimo y máximo de funciones cuadráticas en aplicaciones de la vida real.

Por qué debe aprenderlo

Se pueden usar funciones cuadráticas para modelar datos para analizar el comportamiento de los consumidores. Por ejemplo, en el Ejercicio 79 de la página 134 usaremos una función cuadrática para modelar el ingreso ganado por manufacturar juegos de vídeo portátiles.

© John Henley/Corbis

Gráfica de una función cuadrática

En esta sección y en la siguiente estudiaremos las gráficas de funciones polinomiales. En la Sección 1.6 se explicaron las siguientes funciones básicas.

$f(x) = ax + b$ Función lineal

$f(x) = c$ Función constante

$f(x) = x^2$ Función cuadrática

Estas funciones son ejemplos de **funciones polinomiales.**

Definición de funciones polinomiales

Sea n un entero no negativo y sean $a_n, a_{n-1}, \ldots, a_2, a_1, a_0$ números reales con $a_n \neq 0$. La función dada por

$$f(x) = a_n x^n + a_{n-1}x^{n-1} + \cdots + a_2 x^2 + a_1 x + a_0$$

se denomina **función polinomial de x con grado n.**

Las funciones polinomiales se clasifican por grado. Por ejemplo, una función constante $f(x) = c$, con $c \neq 0$, tiene grado 0, y una función lineal $f(x) = ax + b$, con $a \neq 0$, tiene grado 1. En esta sección estudiaremos funciones polinomiales de segundo grado, las cuales se denominan **funciones cuadráticas.**

Por ejemplo, cada una de las funciones siguientes es una función cuadrática.

$f(x) = x^2 + 6x + 2$

$g(x) = 2(x + 1)^2 - 3$

$h(x) = 9 + \frac{1}{4}x^2$

$k(x) = -3x^2 + 4$

$m(x) = (x - 2)(x + 1)$

Observe que la función cuadrática es una simple función que tiene grado 2.

Definición de función cuadrática

Sean a, b y c números reales, con $a \neq 0$. La función dada por

$f(x) = ax^2 + bx + c$ Función cuadrática

se denomina **función cuadrática.**

La gráfica de una función cuadrática es un tipo especial de curva en forma de U llamada **parábola**. Las parábolas se presentan en numerosas aplicaciones de la vida real, en especial las que comprenden propiedades reflexivas de discos satelitales y reflectores de linternas. Estudiaremos estas propiedades en la Sección 10.2.

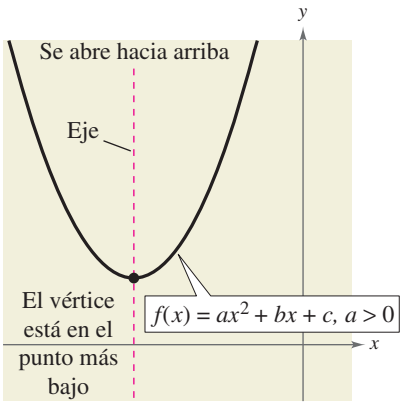
Todas las parábolas son simétricas respecto a una recta llamada **eje de simetría**, o simplemente **eje** de la parábola. El punto donde el eje interseca la parábola es el **vértice** de ésta, como se muestra en la Figura 2.1. Si el coeficiente principal es positivo, la gráfica de

$$f(x) = ax^2 + bx + c$$

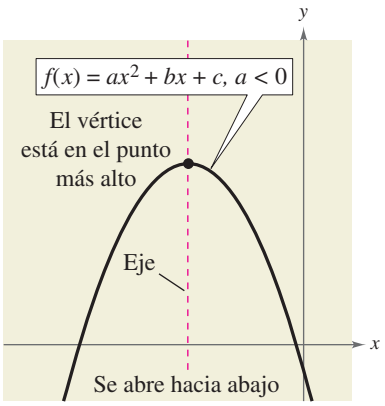
es una parábola que se abre hacia arriba. Si el coeficiente principal es negativo, la gráfica de

$$f(x) = ax^2 + bx + c$$

es una parábola que se abre hacia abajo.



El coeficiente principal es positivo.



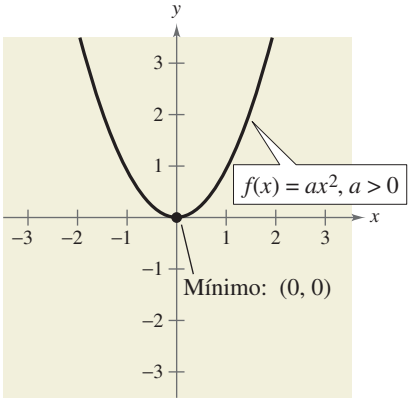
El coeficiente principal es negativo.

FIGURA 2.1

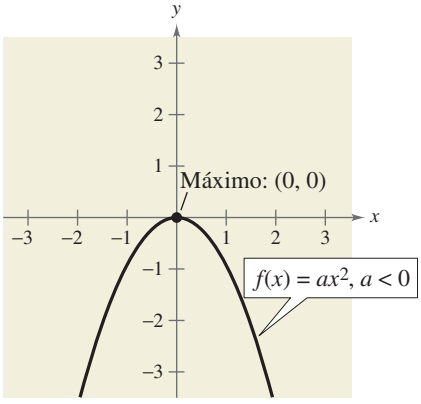
El tipo más sencillo de función cuadrática es

$$f(x) = ax^2.$$

Su gráfica es una parábola cuyo vértice está en (0, 0). Si $a > 0$, el vértice es el punto con el valor *mínimo* de y en la gráfica, y si $a < 0$ el vértice es el punto con el valor *máximo* de y en la gráfica, como se ve en la Figura 2.2.



El coeficiente principal es positivo.



El coeficiente principal es negativo.

FIGURA 2.2

Cuando se trace la gráfica de $f(x) = ax^2$, es útil usar la gráfica de $y = x^2$ como referencia, como se explica en la Sección 1.7.

Ejemplo 1 Trazar gráficas de funciones cuadráticas

a. Compare las gráficas de $y = x^2$ y $f(x) = \frac{1}{3}x^2$.

b. Compare las gráficas de $y = x^2$ y $g(x) = 2x^2$.

Ayuda de álgebra

En la Sección 1.7 puede repasar las técnicas para desplazar, reflejar y estirar gráficas.

Solución

a. En comparación con $y = x^2$, cada salida de $f(x) = \frac{1}{3}x^2$ "se contrae" en un factor de $\frac{1}{3}$, creando la parábola más ancha que se ve en la Figura 2.3.

b. En comparación con $y = x^2$, cada salida de $g(x) = 2x^2$ "se estira" en un factor de 2, creando la parábola más angosta que se ve en la Figura 2.4.

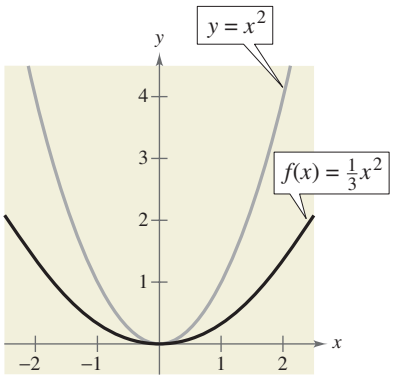


FIGURA 2.3

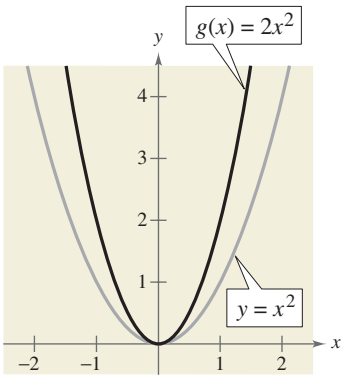
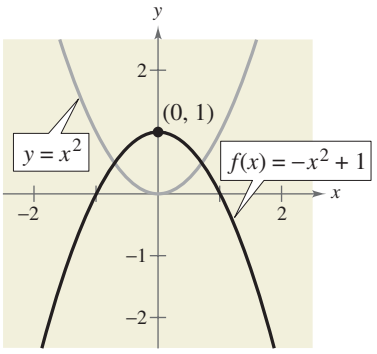


FIGURA 2.4

PUNTO *de repaso* Ahora trate de hacer el Ejercicio 13.

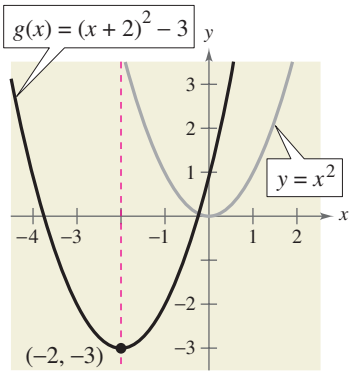
En el Ejemplo 1, observe que el coeficiente a determina cuánto se abre la parábola dada por $f(x) = ax^2$. Si $|a|$ es pequeño, la parábola se abre más ancha que si $|a|$ es grande.

Recuerde de la Sección 1.7 que las gráficas de $y = f(x \pm c)$, $y = f(x) \pm c$, $y = f(-x)$ y $y = -f(x)$ son transformaciones rígidas de la gráfica de $y = f(x)$. Por ejemplo, en la Figura 2.5, observe la forma en que la gráfica de $y = x^2$ se puede transformar para producir las gráficas de $f(x) = -x^2 + 1$ y $g(x) = (x + 2)^2 - 3$.



Reflexión en el eje x seguida por un desplazamiento de una unidad hacia arriba

FIGURA 2.5



Desplazamiento de dos unidades a la izquierda seguida por un desplazamiento de tres unidades hacia abajo

Forma estándar de una función cuadrática

La **forma estándar** de una función cuadrática es $f(x) = a(x - h)^2 + k$. Esta forma es especialmente conveniente para trazar una parábola porque identifica el vértice de la parábola como (h, k).

Forma estándar de una función cuadrática

La función cuadrática dada por

$$f(x) = a(x - h)^2 + k, \quad a \neq 0$$

es una **forma estándar**. La gráfica de f es una parábola cuyo eje es la recta vertical está en $x = h$ y cuyo vértice es el punto (h, k). Si $a > 0$, la parábola abre hacia arriba, y si $a < 0$ la parábola abre hacia abajo.

Tip de estudio

La forma estándar de una función cuadrática identifica cuatro transformaciones de la gráfica de $y = x^2$.

a. El factor $|a|$ produce un estiramiento o contracción vertical.

b. Si $a < 0$, la gráfica se refleja en el eje x.

c. El factor $(x - h)^2$ representa un desplazamiento horizontal de h unidades.

d. El término k representa un desplazamiento vertical de k unidades.

Para graficar una parábola es útil empezar por escribir la función cuadrática en forma estándar usando el proceso de completar el cuadrado, como se ilustra en el Ejemplo 2. En este ejemplo, observe que al completar el cuadrado se *suma y se resta* el cuadrado de la mitad del coeficiente de x dentro de los paréntesis, en lugar de sumar el valor a cada lado (miembro) de la ecuación, como se hace en el Apéndice A.5

Ejemplo 2 Graficar una parábola en forma estándar

Trace la gráfica de $f(x) = 2x^2 + 8x + 7$ e identifique el vértice y el eje de la parábola.

Solución

Empiece por escribir la función cuadrática en forma estándar. Observe que el primer paso para completar el cuadrado es factorizar cualquier coeficiente de x^2 que no sea 1.

$$\begin{aligned} f(x) &= 2x^2 + 8x + 7 && \text{Escribir la función original.} \\ &= 2(x^2 + 4x) + 7 && \text{Factorizar 2 de los términos en } x. \\ &= 2(x^2 + 4x + 4 - 4) + 7 && \text{Sumar y restar 4 dentro de paréntesis.} \end{aligned}$$

$(4/2)^2$

Ayuda de álgebra

En el Apéndice A.5 se pueden repasar las técnicas para completar el cuadrado.

Después de sumar y restar 4 dentro de los paréntesis, deben ahora reagruparse los términos para formar un trinomio cuadrado perfecto. El -4 se puede eliminar de dentro del paréntesis; no obstante, debido al 2 fuera del paréntesis, debe multiplicarse -4 por 2, como se ve a continuación.

$$\begin{aligned} f(x) &= 2(x^2 + 4x + 4) - 2(4) + 7 && \text{Reagrupar términos.} \\ &= 2(x^2 + 4x + 4) - 8 + 7 && \text{Simplificar.} \\ &= 2(x + 2)^2 - 1 && \text{Escribir en forma estándar.} \end{aligned}$$

De esta forma, se puede ver que la gráfica de f es una parábola que se abre hacia arriba y tiene su vértice en $(-2, -1)$. Esto corresponde a un desplazamiento de dos unidades a la izquierda y un desplazamiento de una unidad hacia abajo respecto a la gráfica de $y = 2x^2$, como se ve en la Figura 2.6. En la figura se puede ver que el eje de la parábola es la recta vertical que pasa por el vértice, $x = -2$.

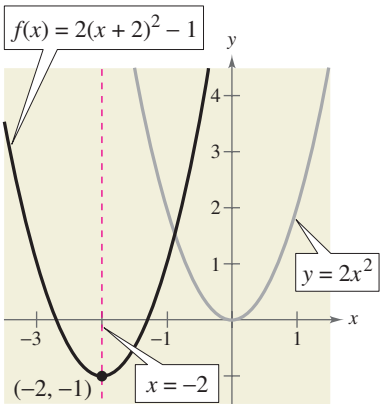


FIGURA 2.6

PUNTO de repaso Ahora trate de hacer el Ejercicio 19.

Ayuda de álgebra

En el Apéndice A.5 se pueden repasar las técnicas para usar la fórmula cuadrática

Para hallar las intersecciones con el eje x de la gráfica de $f(x) = ax^2 + bx + c$ se debe resolver la ecuación $ax^2 + bx + c = 0$. Si $ax^2 + bx + c$ no se factoriza, se puede usar la fórmula cuadrática para hallar intersecciones, pero recuerde que una parábola puede no tenerlas.

Ejemplo 3 Hallar el vértice de una parábola y sus intersecciones con el eje x

Trace la gráfica de $f(x) = -x^2 + 6x - 8$ e identifique el vértice y las intersecciones con el eje x.

Solución

$$f(x) = -x^2 + 6x - 8$$ Escribir la función original.

$$= -(x^2 - 6x) - 8$$ Factorizar -1 de los términos en x.

$$= -(x^2 - 6x + 9 - 9) - 8$$ Sumar y restar 9 dentro del paréntesis.

$(-6/2)^2$

$$= -(x^2 - 6x + 9) - (-9) - 8$$ Reagrupar términos.

$$= -(x - 3)^2 + 1$$ Escribir en forma estándar.

De esta forma, se puede ver que f es una parábola que se abre hacia abajo con vértice en $(3, 1)$. Las intersecciones con el eje x de la gráfica se determinan como sigue.

$$-(x^2 - 6x + 8) = 0$$ Factorizar -1.

$$-(x - 2)(x - 4) = 0$$ Factorizar.

$$x - 2 = 0 \Rightarrow x = 2$$ Igualar a 0 el primer factor.

$$x - 4 = 0 \Rightarrow x = 4$$ Igualar a 0 el segundo factor.

Por tanto, las intersecciones con el eje x son $(2, 0)$ y $(4, 0)$, como se ilustra en la Figura 2.7.

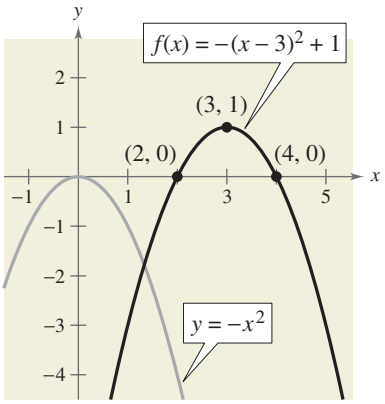


FIGURA 2.7

PUNTO *de repaso* Ahora trate de hacer el Ejercicio 25.

Ejemplo 4 Escribir la ecuación de una parábola

Escriba la forma estándar de la ecuación de la parábola cuyo vértice está en $(1, 2)$ y que pasa por el punto $(3, -6)$

Solución

Como el vértice de la parábola está en $(h, k) = (1, 2)$, la ecuación tiene la forma

$$f(x) = a(x - 1)^2 + 2.$$ Sustituir por h y k en forma estándar.

Puesto que la parábola pasa por el punto $(3, -6)$, se deduce que $f(3) = -6$. Por tanto,

$$f(x) = a(x - 1)^2 + 2$$ Escribir en forma estándar.

$$-6 = a(3 - 1)^2 + 2$$ Sustituir 3 por x y -6 por $f(x)$.

$$-6 = 4a + 2$$ Simplificar.

$$-8 = 4a$$ Restar 2 de cada lado.

$$-2 = a.$$ Dividir cada lado entre 4.

La ecuación en forma estándar es $f(x) = -2(x - 1)^2 + 2$. La gráfica de f se muestra en la Figura 2.8.

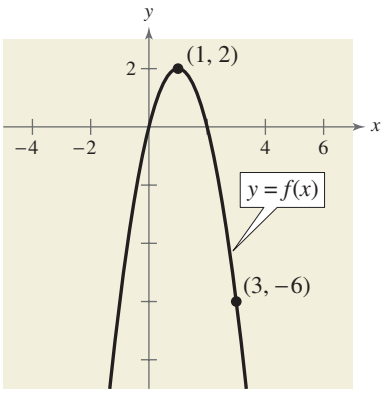


FIGURA 2.8

PUNTO *de repaso* Ahora trate de hacer el Ejercicio 47.

Hallar valores mínimo y máximo

Muchas aplicaciones suponen hallar el valor máximo o mínimo de una función cuadrática. Al completar el cuadrado de la función cuadrática $f(x) = ax^2 + bx + c$ se puede reescribir la función en forma normal (vea Ejercicio 95).

$$f(x) = a\left(x + \frac{b}{2a}\right)^2 + \left(c - \frac{b^2}{4a}\right) \qquad \text{Forma estándar}$$

Por tanto, el vértice de la gráfica de f es $\left(-\frac{b}{2a},\ f\left(-\frac{b}{2a}\right)\right)$, lo cual implica lo siguiente.

Valores mínimo y máximo de funciones cuadráticas

Considere la función $f(x) = ax^2 + bx + c$ con vértice $\left(-\frac{b}{2a},\ f\left(-\frac{b}{2a}\right)\right)$.

1. Si $a > 0$, f tiene un *mínimo* en $x = -\frac{b}{2a}$. El valor mínimo es $f\left(-\frac{b}{2a}\right)$.

2. Si $a < 0$, f tiene un *máximo* en $x = -\frac{b}{2a}$. El valor máximo es $f\left(-\frac{b}{2a}\right)$.

Ejemplo 5 Altura máxima de una pelota de béisbol

Una pelota de béisbol es golpeada en un punto a 3 pies arriba del suelo con una rapidez de 100 pies por segundo y con un ángulo de 45° respecto al suelo. La trayectoria de la pelota está dada por la función $f(x) = -0.0032x^2 + x + 3$, donde $f(x)$ es la altura de la pelota (en pies) y x es la distancia horizontal desde el plato del *home* (en pies). ¿Cuál es la máxima altura alcanzada por la pelota?

Solución algebraica

Para esta función cuadrática tenemos

$$\begin{aligned} f(x) &= ax^2 + bx + c \\ &= -0.0032x^2 + x + 3 \end{aligned}$$

lo cual implica que $a = -0.0032$ y $b = 1$. Como $a < 0$, la función tiene un máximo cuando $x = -b/(2a)$. Por tanto, podemos concluir que la pelota alcanza su máxima altura cuando está a x pies del *home*, donde x es

$$\begin{aligned} x &= -\frac{b}{2a} \\ &= -\frac{1}{2(-0.0032)} \\ &= 156.25 \text{ pies.} \end{aligned}$$

A esta distancia, la altura máxima es

$$\begin{aligned} f(156.25) &= -0.0032(156.25)^2 + 156.25 + 3 \\ &= 81.125 \text{ pies.} \end{aligned}$$

PUNTO *de repaso* Ahora trate de hacer el Ejercicio 75.

Solución gráfica

Use una calculadora de gráficas para trazar

$$y = -0.0032x^2 + x + 3$$

de modo que se puedan ver las características importantes de la parábola. Use el comando *maximum* (vea Figura 2.9) o los comandos *zoom* y *trace* (vea Figura 2.10) de la calculadora para ver que la altura máxima en la gráfica es $y \approx 81.125$ pies a $x \approx 156.25$.

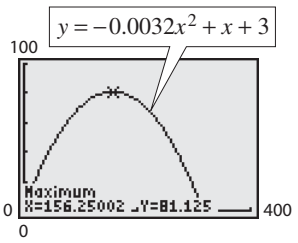


FIGURA 2.9

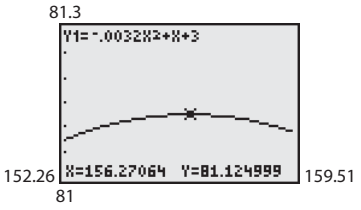


FIGURA 2.10

2.1 EJERCICIOS

En www.CalcChat.com vea las soluciones a los ejercicios impares.

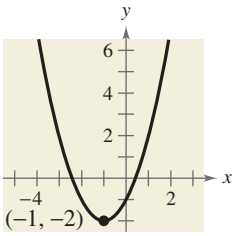
VOCABULARIO: Llene los espacios en blanco.

1. Las funciones lineal, constante y cuadrática son ejemplos de funciones _____.
2. Una función polinomial de grado n y coeficiente principal a_n es una función de la forma $f(x) = a_n x^n + a_{n-1}x^{n-1} + \cdots + a_1 x + a_0$ $(a_n \neq 0)$, donde n es un _____ _____ _____ y $a_n, a_{n-1}, \ldots, a_1, a_0$ son números _____.
3. Una función _____ es una función polinomial de segundo grado, y su gráfica se llama _____.
4. La gráfica de una función cuadrática es simétrica alrededor de su _____.
5. Si la gráfica de una función cuadrática abre hacia arriba, entonces su coeficiente principal es _____ y el vértice de la gráfica es _____.
6. Si la gráfica de una función cuadrática abre hacia abajo, entonces su coeficiente principal es _____ y el vértice de la gráfica es un _____.

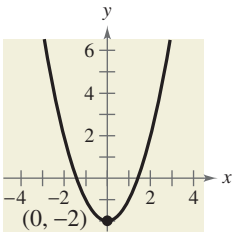
HABILIDADES Y APLICACIONES

En los Ejercicios 7-12, relacione la función cuadrática con su gráfica. [Las gráficas están marcadas (a),(b),(c),(d),(e) y (f).]

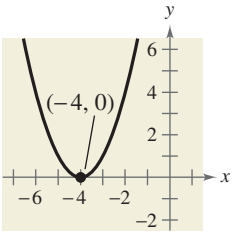
(a)



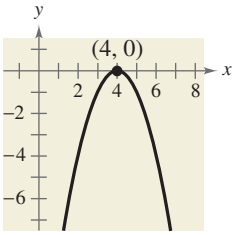
(b)



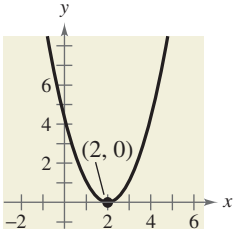
(c)



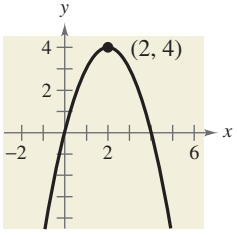
(d)



(e)



(f)



7. $f(x) = (x - 2)^2$
8. $f(x) = (x + 4)^2$
9. $f(x) = x^2 - 2$
10. $f(x) = (x + 1)^2 - 2$
11. $f(x) = 4 - (x - 2)^2$
12. $f(x) = -(x - 4)^2$

En los Ejercicios 13-16, grafique cada función. Compare la gráfica de cada función con la de $y = x^2$.

13. (a) $f(x) = \frac{1}{2}x^2$ (b) $g(x) = -\frac{1}{8}x^2$
    (c) $h(x) = \frac{3}{2}x^2$ (d) $k(x) = -3x^2$
14. (a) $f(x) = x^2 + 1$ (b) $g(x) = x^2 - 1$
    (c) $h(x) = x^2 + 3$ (d) $k(x) = x^2 - 3$
15. (a) $f(x) = (x - 1)^2$ (b) $g(x) = (3x)^2 + 1$
    (c) $h(x) = \left(\frac{1}{3}x\right)^2 - 3$ (d) $k(x) = (x + 3)^2$
16. (a) $f(x) = -\frac{1}{2}(x - 2)^2 + 1$
    (b) $g(x) = \left[\frac{1}{2}(x - 1)\right]^2 - 3$
    (c) $h(x) = -\frac{1}{2}(x + 2)^2 - 1$
    (d) $k(x) = [2(x + 1)]^2 + 4$

En los Ejercicios 17-34, trace la gráfica de la función cuadrática sin usar una calculadora de gráficas. Identifique el vértice, el eje de simetría y la(s) intersección(es) con el eje x.

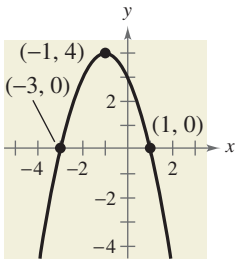
17. $f(x) = 1 - x^2$
18. $g(x) = x^2 - 8$
19. $f(x) = x^2 + 7$
20. $h(x) = 12 - x^2$
21. $f(x) = \frac{1}{2}x^2 - 4$
22. $f(x) = 16 - \frac{1}{4}x^2$
23. $f(x) = (x + 4)^2 - 3$
24. $f(x) = (x - 6)^2 + 8$
25. $h(x) = x^2 - 8x + 16$
26. $g(x) = x^2 + 2x + 1$
27. $f(x) = x^2 - x + \frac{5}{4}$
28. $f(x) = x^2 + 3x + \frac{1}{4}$
29. $f(x) = -x^2 + 2x + 5$
30. $f(x) = -x^2 - 4x + 1$
31. $h(x) = 4x^2 - 4x + 21$
32. $f(x) = 2x^2 - x + 1$
33. $f(x) = \frac{1}{4}x^2 - 2x - 12$
34. $f(x) = -\frac{1}{3}x^2 + 3x - 6$

En los Ejercicios 35-42, use una calculadora de gráficas para graficar la función cuadrática. Identifique el vértice, el eje de simetría y las intersecciones con el eje x. A continuación compruebe sus resultados algebraicamente escribiendo la función cuadrática en forma estándar.

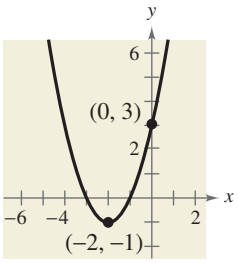
35. $f(x) = -(x^2 + 2x - 3)$
36. $f(x) = -(x^2 + x - 30)$
37. $g(x) = x^2 + 8x + 11$
38. $f(x) = x^2 + 10x + 14$
39. $f(x) = 2x^2 - 16x + 31$
40. $f(x) = -4x^2 + 24x - 41$
41. $g(x) = \frac{1}{2}(x^2 + 4x - 2)$
42. $f(x) = \frac{3}{5}(x^2 + 6x - 5)$

En los Ejercicios 43-46, escriba una ecuación en forma estándar para la parábola.

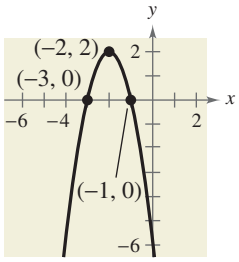
43.



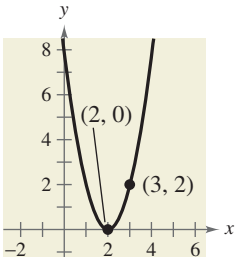
44.



45.



46.



En los Ejercicios 47-56, escriba la forma estándar de la ecuación de la parábola que tiene el vértice indicado y cuya gráfica pasa por el punto dado.

47. Vértice: $(-2, 5)$; punto: $(0, 9)$

48. Vértice: $(4, -1)$; punto: $(2, 3)$

49. Vértice: $(1, -2)$; punto: $(-1, 14)$

50. Vértice: $(2, 3)$; punto: $(0, 2)$

51. Vértice: $(5, 12)$; punto: $(7, 15)$

52. Vértice: $(-2, -2)$; punto: $(-1, 0)$

53. Vértice: $\left(-\frac{1}{4}, \frac{3}{2}\right)$; punto: $(-2, 0)$

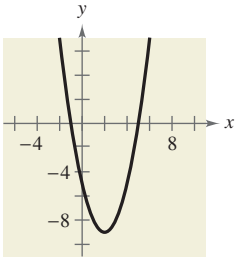
54. Vértice: $\left(\frac{5}{2}, -\frac{3}{4}\right)$; punto: $(-2, 4)$

55. Vértice: $\left(-\frac{5}{2}, 0\right)$; punto: $\left(-\frac{7}{2}, -\frac{16}{3}\right)$

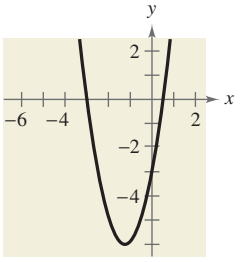
56. Vértice: $(6, 6)$; punto: $\left(\frac{61}{10}, \frac{3}{2}\right)$

RAZONAMIENTO GRÁFICO En los Ejercicios 57 y 58, determine visualmente la(s) intersección(es) de la gráfica con el eje x. A continuación encuentre algebraicamente tal(es) intersección(es) para confirmar sus resultados.

57. $y = x^2 - 4x - 5$



58. $y = 2x^2 + 5x - 3$



En los Ejercicios 59-64, use una calculadora de gráficas para graficar la función cuadrática. Encuentre las intersecciones con el eje x de la gráfica y compárelas con las soluciones de la ecuación cuadrática correspondiente cuando $f(x) = 0$.

59. $f(x) = x^2 - 4x$

60. $f(x) = -2x^2 + 10x$

61. $f(x) = x^2 - 9x + 18$

62. $f(x) = x^2 - 8x - 20$

63. $f(x) = 2x^2 - 7x - 30$

64. $f(x) = \frac{7}{10}(x^2 + 12x - 45)$

En los Ejercicios 65-70, encuentre dos funciones cuadráticas, una que abra hacia arriba y otra hacia abajo, cuyas gráficas tengan las intersecciones con el eje x dadas. (Hay numerosas respuestas correctas.)

65. $(-1, 0), (3, 0)$

66. $(-5, 0), (5, 0)$

67. $(0, 0), (10, 0)$

68. $(4, 0), (8, 0)$

69. $(-3, 0), \left(-\frac{1}{2}, 0\right)$

70. $\left(-\frac{5}{2}, 0\right), (2, 0)$

En los Ejercicios 71-74, encuentre dos números reales positivos cuyo producto sea un máximo.

71. La suma es 110.

72. La suma es S.

73. La suma del primero y el doble del segundo es 24.

74. La suma del primero y tres veces el segundo es 42.

75. TRAYECTORIA DE UN CLAVADISTA La trayectoria de un clavadista está dada por

$$y = -\frac{4}{9}x^2 + \frac{24}{9}x + 12$$

donde y es la altura (en pies) y x es la distancia horizontal desde el extremo del trampolín (en pies). ¿Cuál es la máxima altura del clavadista?

76. ALTURA DE UNA PELOTA La altura y (en pies) de un balón pateado está dada por

$$y = -\frac{16}{2025}x^2 + \frac{9}{5}x + 1.5$$

donde x es la distancia horizontal (en pies) desde el punto en el que el balón es pateado.

(a) ¿A qué altura está el balón cuando es pateado?

(b) ¿Cuál es la máxima altura de la patada?

(c) ¿Qué tan larga es la patada?

77. COSTO MÍNIMO Un fabricante de accesorios para iluminación tiene costos diarios de producción expresados por $C = 800 - 10x + 0.25x^2$, donde C es el costo total (en dólares) y x es el número de unidades producidas. ¿Cuántos accesorios deben ser producidos cada día para dar un costo mínimo?

78. UTILIDAD MÁXIMA La utilidad P (en cientos de dólares) que gana una compañía depende de la cantidad x (en cientos de dólares) que gasta en publicidad, de acuerdo con el modelo $P = 230 + 20x - 0.5x^2$. ¿Qué gasto en publicidad dará máxima utilidad?

79. INGRESO MÁXIMO El ingreso total R ganado (en miles de dólares) por manufacturar juegos de vídeo portátiles está dado por

$$R(p) = -25p^2 + 1200p$$

donde p es el precio por unidad (en dólares).

(a) Encuentre el ingreso cuando el precio por unidad es \$20, \$25 y \$30.

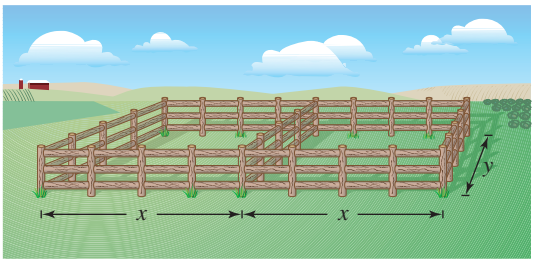
(b) Encuentre el precio unitario que dará un ingreso máximo. ¿Cuál es el ingreso máximo? Explique sus resultados.

80. INGRESO MÁXIMO El ingreso total R ganado por día (en dólares) por un servicio de cuidar mascotas está dado por $R(p) = -12p^2 + 150p$, donde p es el precio cobrado por mascota (en dólares).

(a) Encuentre el ingreso cuando el precio por mascota sea \$4, \$6 y \$8.

(b) Encuentre el precio que dará el ingreso máximo. ¿Cuál es el ingreso máximo? Explique sus resultados.

81. ANÁLISIS NUMÉRICO, GRÁFICO Y ANALÍTICO Un agricultor tiene 200 pies de cerca para encerrar dos corrales rectangulares adyacentes (vea la figura).



(a) Escriba el área A de los corrales como función de x.

(b) Genere una tabla que muestre valores posibles de x y las áreas correspondientes del corral. Úsela para calcular las dimensiones que producirán la máxima área encerrada.

(c) Use una calculadora de gráficas para graficar la función del área. Use la gráfica para calcular las dimensiones que producirán la máxima área encerrada.

(d) Escriba la función del área en forma estándar para hallar analíticamente las dimensiones que producirán la máxima área.

(e) Compare sus resultados de los incisos (b), (c) y (d).

82. GEOMETRÍA Un salón interior para acondicionamiento físico está formado por una región rectangular con un semicírculo en cada extremo. El perímetro del salón ha de ser una pista de carreras de 200 metros de un solo carril.

(a) Trace un diagrama que ilustre el problema. Con x y y represente la longitud y el ancho de la región rectangular, respectivamente.

(b) Determine el radio de cada extremo semicircular del salón. Determine la distancia, en términos de y, alrededor del borde interior de cada parte semicircular de la pista.

(c) Use el resultado del inciso (b) para escribir una ecuación, en términos de x y y, para la distancia recorrida en una vuelta alrededor de la pista. Despeje y.

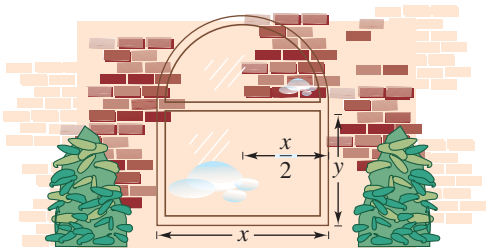
(d) Use el resultado del inciso (c) para escribir el área A de la región rectangular como función de x. ¿Qué dimensiones producirán un rectángulo de máxima área?

83. INGRESO MÁXIMO Un pequeño teatro tiene una capacidad de 2000 asientos. Cuando el precio del billete es \$20, la asistencia es de 1500. Por cada reducción de \$1 en precio, la asistencia aumenta en 100.

(a) Escriba el ingreso R del teatro como función del precio x del billete.

(b) ¿Qué precio del billete dará un ingreso máximo? ¿Cuál es el ingreso máximo?

84. ÁREA MÁXIMA Una ventana "normanda" se construye al unir un semicírculo a la parte superior de una ventana rectangular ordinaria (vea figura). El perímetro de la ventana es 16 pies.



(a) Escriba el área A de la ventana como función de x.

(b) ¿Qué dimensiones producirán una ventana de máxima área?

85. ANÁLISIS GRÁFICO De 1950 a 2005, el consumo C per cápita de cigarrillos por estadounidenses (18 años de edad o mayores) se puede modelar con la expresión $C = 3565.0 + 60.30t - 1.783t^2$, $0 \le t \le 55$, donde t es el año, con $t = 0$ para 1950. (Fuente: *Tobacco Outlook Report*)

(a) Use una calculadora de gráficas para graficar el modelo.

(b) Use la gráfica del modelo para calcular el promedio máximo de consumo anual. A partir del año 1966, por ley todos los paquetes de cigarrillos deben llevar una advertencia de riesgos de salud. ¿Piensa usted que la advertencia tuvo algún efecto? Explique.

(c) En 2005, la población de Estados Unidos (18 años de edad o mayores) era de 296 329 000. De éstos, unos 59 858 458 eran fumadores. ¿Cuál era el promedio anual de consumo de cigarrillos *por fumador* en 2005? ¿Cuál era el promedio diario de consumo de cigarrillos *por fumador*?

86. ANÁLISIS DE DATOS: VENTAS Las ventas y (en miles de millones de dólares) de Harley-Davidson de 2000 a 2007 se ilustran en la tabla siguiente. (Fuente: U.S. Harley-Davidson, Inc.)

Año	Ventas, y
2000	2.91
2001	3.36
2002	4.09
2003	4.62
2004	5.02
2005	5.34
2006	5.80
2007	5.73

(a) Use una calculadora de gráficas para crear una gráfica de dispersión de los datos. Con x represente el año, con $x = 0$ correspondiente a 2000

(b) Use el comando *regression* de la calculadora de gráficas para hallar un modelo cuadrático para los datos.

(c) Use la calculadora de gráficas para graficar el modelo en la misma pantalla que la gráfica de dispersión. ¿Qué tan bien se ajusta el modelo a los datos?

(d) Use el comando *trace* de la calculadora de gráficas para calcular el año en el que las ventas de Harley-Davidson fueron máximas.

(e) Verifique algebraicamente su respuesta al inciso (d).

(f) Use el modelo para pronosticar las ventas de Harley-Davidson en 2010.

EXPLORACIÓN

¿VERDADERO O FALSO? En los Ejercicios 87–90, indique si la proposición es verdadera o falsa. Justifique su respuesta.

87. La función dada por $f(x) = -12x^2 - 1$ no tiene intersecciones con el eje x.

88. Las gráficas de $f(x) = -4x^2 - 10x + 7$ y $g(x) = 12x^2 + 30x + 1$ tienen el mismo eje de simetría.

89. La gráfica de una función cuadrática con coeficiente principal negativo tendrá un valor máximo en su vértice.

90. La gráfica de una función cuadrática con coeficiente principal positivo tendrá un valor mínimo en su vértice.

PIÉNSELO En los Ejercicios 91-94, encuentre los valores de b tales que la función tenga el valor máximo o mínimo dado.

91. $f(x) = -x^2 + bx - 75$; valor máximo: 25

92. $f(x) = -x^2 + bx - 16$; valor máximo: 48

93. $f(x) = x^2 + bx + 26$; valor mínimo: 10

94. $f(x) = x^2 + bx - 25$; valor mínimo: -50

95. Escriba la función cuadrática

$$f(x) = ax^2 + bx + c$$

en forma estándar para verificar que el vértice se presenta en

$$\left(-\frac{b}{2a}, f\left(-\frac{b}{2a}\right)\right).$$

96. TOQUE FINAL La utilidad P (en millones de dólares) para un vendedor de vehículos de recreación está modelada por una función cuadrática de la forma

$$P = at^2 + bt + c$$

donde t representa el año. Si usted fuera director general de la compañía, ¿cuál de los modelos siguientes preferiría? Explique su razonamiento.

(a) a es positiva y $-b/(2a) \leq t$.

(b) a es positiva y $t \leq -b/(2a)$.

(c) a es negativa y $-b/(2a) \leq t$.

(d) a es negativa y $t \leq -b/(2a)$.

97. ANÁLISIS GRÁFICO

(a) Grafique $y = ax^2$ para $a = -2, -1, -0.5, 0.5, 1$ y 2. ¿En qué forma la gráfica resulta afectada por el cambio de valor de a?

(b) Grafique $y = (x - h)^2$ para $h = -4, -2, 2$ y 4. ¿En qué forma la gráfica resulta afectada por el cambio de valor de h?

(c) Grafique $y = x^2 + k$ para $k = -4, -2, 2$ y 4. ¿En qué forma la gráfica resulta afectada por el cambio de valor de k?

98. Describa la sucesión de la transformación de f a g dado que $f(x) = x^2$ y $g(x) = a(x - h)^2 + k$. (Suponga que a, h y k son positivas.)

99. ¿Es posible que una ecuación cuadrática tenga sólo una intersección con el eje x? Explique.

100. Suponga que la función dada por

$$f(x) = ax^2 + bx + c, \quad a \neq 0$$

tiene dos ceros reales. Demuestre que la coordenada x del vértice de la gráfica es el promedio de los ceros de f. (*Sugerencia*: use la fórmula cuadrática.)

PROYECTO: ALTURA DE UN BALÓN DE BALONCESTO Para trabajar una aplicación ampliada analizando la altura de un balón de baloncesto después de dejarlo caer, visite el sitio web del texto en *academic.cengage.com*.

2.2 Funciones polinomiales de grado superior

Lo que debe aprender

- Use transformaciones para trazar gráficas de funciones polinomiales.
- Use la prueba del coeficiente principal para determinar el comportamiento final de gráficas de funciones polinomiales.
- Encuentre y use ceros de funciones polinomiales como ayudas para el trazado.
- Use el teorema del valor intermedio para ayudar a localizar ceros de funciones polinomiales

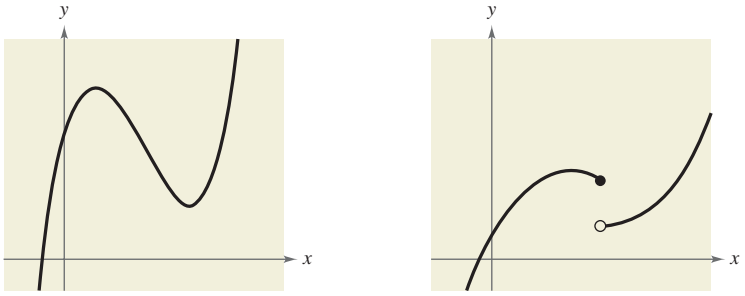
Por qué debe aprenderlo

Usted puede usar funciones polinomiales para analizar situaciones financieras; por ejemplo, la forma en que el ingreso está relacionado con gastos hechos en publicidad, como se estudia en el Ejercicio 104 de la página 148.

Bill Aron/PhotoEdit, Inc.

Gráficas de funciones polinomiales

En esta sección estudiaremos características básicas de las gráficas de las funciones polinomiales. La primera característica es que la gráfica de una función polinomial es **continua**. En esencia, esto significa que la gráfica no tiene interrupciones, huecos o brechas, como se ve en la Figura 2.11(a). La gráfica que se muestra en la Figura 2.11(b) es un ejemplo de una función definida por tramos que no es continua.

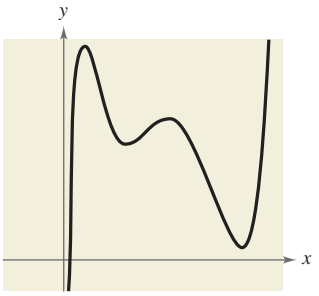


(a) Las funciones polinomiales tienen gráficas continuas

(b) Las funciones con gráficas que no son continuas no son funciones polinomiales

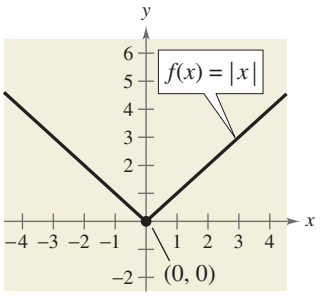
FIGURA 2.11

La segunda característica es que la gráfica de una función polinomial tiene cambios de dirección suaves y redondeados, como se ilustra en la Figura 2.12. Una función polinomial no puede tener un cambio de dirección agudo. Por ejemplo, la función dada por $f(x) = |x|$, que tiene una vuelta aguda en el punto (0, 0), como se ve en la Figura 2.13, no es polinomial.



Las funciones polinomiales tienen gráficas con cambios de dirección suaves y redondeados

FIGURA 2.12



Las gráficas de funciones polinomiales no pueden tener cambios agudos de dirección

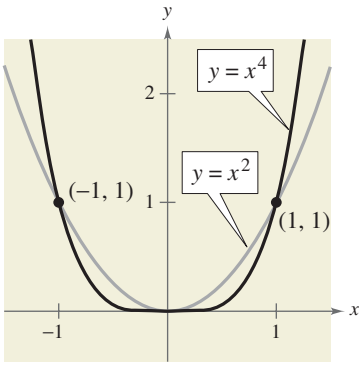
FIGURA 2.13

Las gráficas de funciones polinomiales, de grado superior a 2, son más difíciles de analizar que las gráficas polinomiales de grado 0, 1 o 2. No obstante, usando las características presentadas en esta sección, junto con el conocimiento que el estudiante ya tenga de localizar puntos, intersecciones y simetría, ya debe estar en aptitud de hacer trazos razonablemente precisos *manualmente*.

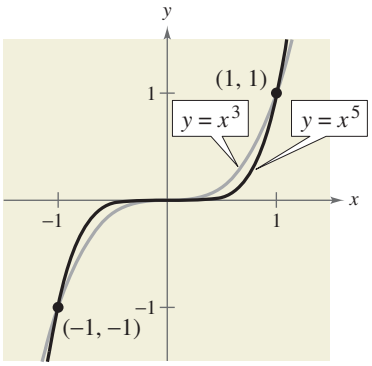
Tip de estudio

Para funciones potencia dadas por $f(x) = x^n$, si n es par, entonces la gráfica de la función es simétrica respecto al eje y, y si n es impar, entonces la gráfica de la función es simétrica respecto al origen.

Las funciones polinomiales que tienen las gráficas más sencillas son con monomios de la forma $f(x) = x^n$, donde n es un entero mayor a cero. En la Figura 2.14 se puede ver que cuando n es *par*, la gráfica es similar a la de $f(x) = x^2$, y cuando n es impar, la gráfica es similar a la de $f(x) = x^3$. Además, cuanto mayor sea el valor de n, la gráfica será más plana cerca del origen. A veces las funciones polinomiales de la forma $f(x) = x^n$ se conocen como **funciones potencia.**



(a) Si *n* es par, la gráfica de $y = x^n$ toca el eje en la intersección con el eje *x*



(b) Si *n* es impar, la gráfica de $y = x^n$ corta el eje en la intersección con el eje *x*

FIGURA 2.14

Ejemplo 1 Trazar transformaciones de funciones polinomiales

Trace la gráfica de cada función.

a. $f(x) = -x^5$ **b.** $h(x) = (x + 1)^4$

Solución

a. Como el grado de $f(x) = -x^5$ es impar, su gráfica es similar a la de $y = x^3$. En la Figura 2.15, observe que el coeficiente negativo tiene el efecto de reflejar la gráfica en el eje x.

b. La gráfica de $h(x) = (x + 1)^4$, como se ilustra en la Figura 2.16, es un desplazamiento de una unidad a la izquierda de la gráfica de $y = x^4$.

Ayuda de álgebra

En la Sección 1.7 puede repasar las técnicas para desplazamiento, reflexión y estiramiento.

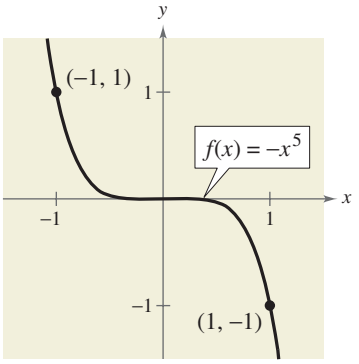


FIGURA 2.15

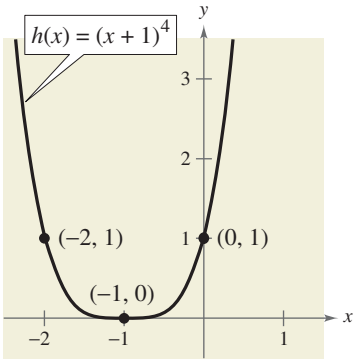


FIGURA 2.16

PUNTO *de repaso* Ahora trate de hacer el Ejercicio 17.

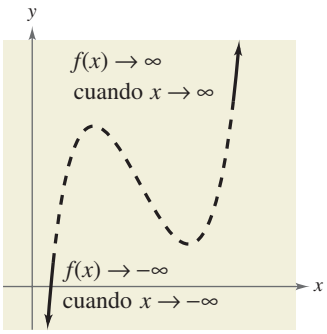
Prueba del coeficiente principal

En el Ejemplo 1, observe que ambas gráficas finalmente suben o bajan sin límite cuando x se mueve a la derecha. Que la gráfica de una función polinomial finalmente suba o baje puede determinarse con el grado de la función (par o impar) y con su coeficiente principal, como lo indica la **prueba del coeficiente principal.**

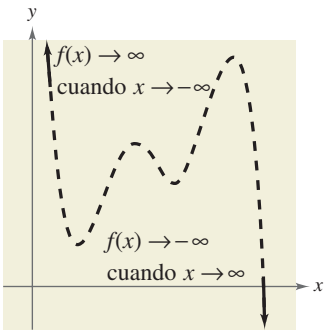
Prueba del coeficiente principal

Cuando x se mueve sin límite a la izquierda o a la derecha, la gráfica de la función polinomial $f(x) = a_n x^n + \cdots + a_1 x + a_0$ finalmente sube o baja en la forma siguiente.

1. Cuando n es *impar:*

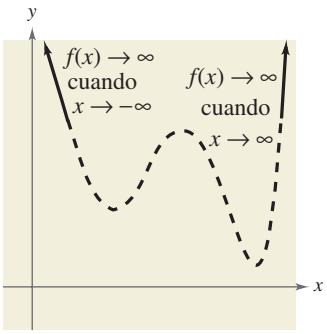


Si el coeficiente principal es positivo ($a_n > 0$), la gráfica baja por la izquierda y sube por la derecha.

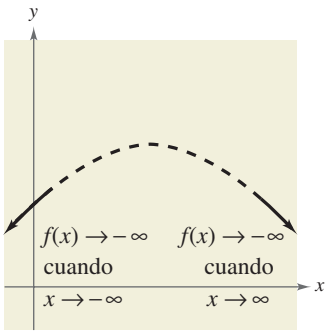


Si el coeficiente principal es negativo ($a_n < 0$), la gráfica sube por la izquierda y baja por la derecha.

2. Cuando n es par*:*



Si el coeficiente principal es positivo ($a_n > 0$), la gráfica sube por la izquierda y por la derecha.



Si el coeficiente principal es negativo ($a_n < 0$), la gráfica baja por la izquierda y por la derecha.

Las partes interrumpidas de las gráficas indican que la prueba determina *sólo* su comportamiento a la derecha e izquierda.

Tip de estudio

La notación "$f(x) \to -\infty$ cuando $x \to -\infty$" indica que la gráfica baja por la izquierda. La notación "$f(x) \to \infty$ cuando $x \to \infty$" indica que la gráfica sube por la derecha.

ATENCIÓN

Una función polinomial se escribe en **forma estándar** si sus términos se escriben en orden descendente de exponentes de izquierda a derecha. Antes de aplicar la prueba del coeficiente principal a una función polinomial, es buena idea asegurarse que esté escrita en forma estándar.

Ejemplo 2 Aplicar la prueba del coeficiente principal

Describa el comportamiento a la derecha e izquierda de la gráfica de cada una de las funciones siguientes.

a. $f(x) = -x^3 + 4x$ **b.** $f(x) = x^4 - 5x^2 + 4$ **c.** $f(x) = x^5 - x$

Solución

a. Como el grado es impar y el coeficiente principal es negativo, la gráfica sube por la izquierda y baja por la derecha, como se ve en la Figura 2.17.

b. Como el grado es impar y el coeficiente principal es positivo, la gráfica sube por la izquierda y por la derecha, como se ve en la Figura 2.18.

c. Como el grado es impar y el coeficiente principal es positivo, la gráfica baja por la izquierda y sube por la derecha, como se ve en la Figura 2.19.

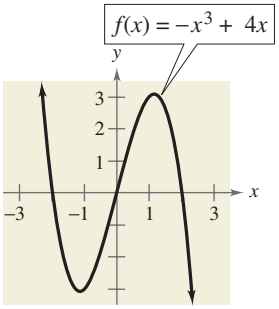


FIGURA 2.17

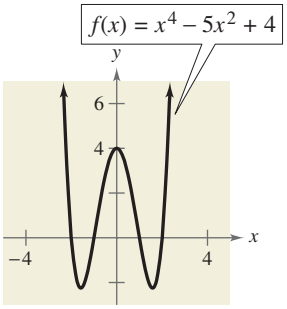


FIGURA 2.18

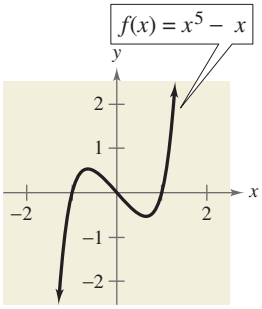


FIGURA 2.19

PUNTO *de repaso* Ahora trate de hacer el Ejercicio 23.

En el Ejemplo 2, observe que la prueba del coeficiente principal sólo nos dice si la gráfica *finalmente* sube o baja por la derecha o por la izquierda. Otras características de la gráfica, como son intersecciones y puntos mínimo y máximo, deben ser determinadas por medio de otras pruebas

Ceros de funciones polinomiales

Se puede demostrar que para una función f polinomial de grado n, las siguientes proposiciones son verdaderas.

1. La función f tiene, a lo sumo, n ceros reales. (Estudiaremos en detalle este resultado en el análisis del teorema fundamental del álgebra en la Sección 2.5.)

2. La gráfica de f tiene, a lo sumo, $n - 1$ puntos extremos. (Los puntos extremos, también llamados mínimos relativos o máximos relativos, son puntos en los que la gráfica cambia de creciente a decreciente o viceversa.)

Tip de estudio

Recuerde que los *ceros* de una función de x son los valores de x para los cuales la función es cero.

Hallar los ceros de funciones polinomiales es uno de los más importantes problemas en álgebra. Hay una fuerte interacción entre los métodos gráfico y algebraico para resolverlo. A veces se puede usar información acerca de la gráfica de una función para ayudar a encontrar sus ceros y, en otros casos, se puede usar información acerca de los ceros de una función para ayudar a trazar su gráfica. Hallar los ceros de funciones polinomiales está estrechamente relacionado con factorizar y determinar intersecciones con el eje x.

Ayuda de álgebra

Para hacer algebraicamente el Ejemplo 3 es necesario que el estudiante pueda factorizar polinomios en su totalidad. En el Apéndice A.3 puede revisar las técnicas para factorizar.

Ceros reales de funciones polinomiales

Si f es una función polinomial y a es un número real, los siguientes enunciados son equivalentes.

1. $x = a$ es un *cero* de la función f.
2. $x = a$ es una *solución* de la ecuación polinomial $f(x) = 0$.
3. $(x - a)$ es un *factor* del polinomio $f(x)$.
4. $(a, 0)$ es una *intersección* de la gráfica de f con el eje x.

Ejemplo 3 Hallar los ceros de una función polinomial

Encuentre todos los ceros reales de

$$f(x) = -2x^4 + 2x^2.$$

A continuación determine el número de puntos extremos de la gráfica de la función.

Solución algebraica

Para hallar los ceros reales de la función, iguale $f(x)$ a 0 y despeje x.

$$-2x^4 + 2x^2 = 0 \qquad \text{Igualar } f(x) \text{ a 0.}$$

$$-2x^2(x^2 - 1) = 0 \qquad \text{Eliminar el factor monomio común.}$$

$$-2x^2(x - 1)(x + 1) = 0 \qquad \text{Factorizar por completo.}$$

Entonces, los ceros reales son $x = 0$, $x = 1$ y $x = -1$. Como la función es un polinomio de cuarto grado, la gráfica de f puede tener como máximo $4 - 1 = 3$ puntos extremos.

Solución gráfica

Use una calculadora de gráficas para graficar $y = -2x^4 + 2x^2$. En la Figura 2.20, la gráfica parece tener ceros en $(0, 0)$, $(1, 0)$ y $(-1, 0)$. Use el comando *zero* o *root*, o los comandos *zoom* y *trace*, de la calculadora para verificar estos ceros. Entonces, los ceros reales son $x = 0$, $x = 1$ y $x = -1$. De la figura, se puede ver que la gráfica tiene tres puntos extremos. Esto es consistente con el hecho de que un polinomio de cuarto grado puede tener como máximo tres puntos extremos.

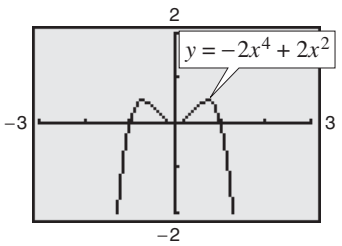


FIGURA 2.20

PUNTO de repaso Ahora trate de hacer el Ejercicio 35.

En el ejemplo 3, observe que como el exponente es mayor que 1, el factor $-2x^2$ produce el cero *repetido* $x = 0$. Puesto que el exponente es par, la gráfica toca el eje x en $x = 0$, como se muestra en la Figura 2.20.

Ceros repetidos

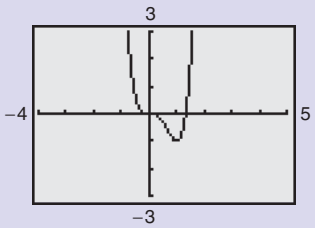
Un factor $(x - a)^k$, $k > 1$, da un **cero repetido** $z = a$ de **multiplicidad** k.

1. Si k es impar, la gráfica *corta* el eje x en $x = a$.
2. Si k es par, la gráfica *toca* el eje x (pero no corta) en $x = a$.

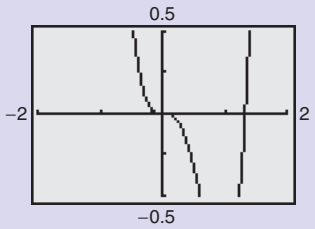
TECNOLOGÍA

El Ejemplo 4 usa un *método algebraico* para describir la gráfica de la función. Una calculadora de gráficas es un complemento para este método. Recuerde que un aspecto importante de usar calculadora de gráficas es hallar una pantalla que muestre todas las características significativas de la gráfica. Por ejemplo, la pantalla del inciso (a) ilustra todas las características significativas de la función del Ejemplo 4, mientras que la pantalla del inciso (b) no las ilustra.

a.



b.



ATENCIÓN

Si no está seguro de la forma de una parte de la gráfica de una función polinomial, grafique algunos puntos adicionales; por ejemplo el punto $(0.5, -0.3125)$, como se ve en la Figura 2.22.

Para graficar funciones polinomiales se puede usar el hecho de que una función polinomial puede cambiar signos sólo en sus ceros. Entre dos ceros consecutivos, un polinomio debe ser enteramente positivo o enteramente negativo. (Esto se deduce del teorema de valor intermedio, que estudiaremos más adelante en esta sección.) Esto significa que cuando los ceros reales de una función polinomial se ponen en orden, dividen la recta numérica real en intervalos en los que la función no tiene cambios de signo. Estos intervalos resultantes son **intervalos de prueba** en los que un valor de x representativo del intervalo se escoge para determinar si el valor de la función polinomial es positivo (la gráfica se encuentra arriba del eje x) o negativo (la gráfica está abajo del eje x).

Ejemplo 4 Trazar la gráfica de una función polinomial

Trace la gráfica de $f(x) = 3x^4 - 4x^3$.

Solución

1. *Aplique la prueba del coeficiente principal.* Como el coeficiente principal es positivo y el grado es par, sabemos que la gráfica finalmente sube por la izquierda y por la derecha (vea Figura 2.21.)

2. *Encuentre los ceros del polinomio.* Al factorizar $f(x) = 3x^4 - 4x^3$ como $f(x) = x^3(3x - 4)$, se puede ver que los ceros de f son $x = 0$ y $x = \frac{4}{3}$ (ambos de multiplicidad impar). Por tanto, las intersecciones con el eje x se presentan en $(0, 0)$ y $\left(\frac{4}{3}, 0\right)$. Agregue estos puntos a su gráfica, como se muestra en la Figura 2.21.

3. *Localice unos cuantos puntos adicionales.* Use los ceros del polinomio para hallar los intervalos de prueba. En cada intervalo de prueba, escoja un valor de x representativo y evalúe la función polinomial, como se muestra en la tabla.

Intervalo de prueba	Valor representativo de x	Valor de f	Signo	Punto en la gráfica
$(-\infty, 0)$	-1	$f(-1) = 7$	Positivo	$(-1, 7)$
$\left(0, \frac{4}{3}\right)$	1	$f(1) = -1$	Negativo	$(1, -1)$
$\left(\frac{4}{3}, \infty\right)$	1.5	$f(1.5) = 1.6875$	Positivo	$(1.5, 1.6875)$

4. *Trace la gráfica.* Trace una curva continua que pase por los puntos, como se ve en la Figura 2.22. Como ambos ceros son de multiplicidad impar, sabemos que la gráfica debe cortar el eje x en $x = 0$ y $x = \frac{4}{3}$.

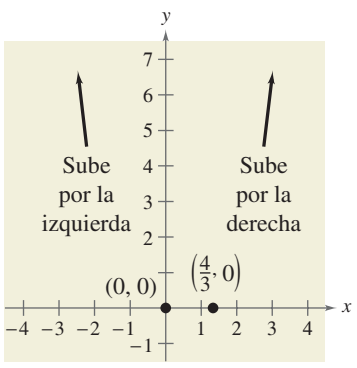


FIGURA 2.21

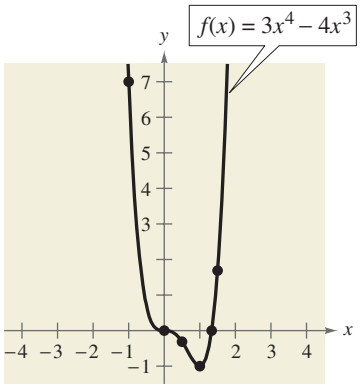


FIGURA 2.22

PUNTO *de repaso* Ahora trate de hacer el Ejercicio 75.

Ejemplo 5 Trazar la gráfica de una función polinomial

Trace la gráfica de $f(x) = -2x^3 + 6x^2 - \frac{9}{2}x$.

Solución

1. *Aplique la prueba del coeficiente principal.* Como el coeficiente principal es negativo y el grado es impar, sabemos que la gráfica finalmente sube por la izquierda y baja por la derecha (vea Figura 2.23).

2. *Encuentre los ceros del polinomio.* Al factorizar

$$\begin{aligned} f(x) &= -2x^3 + 6x^2 - \tfrac{9}{2}x \\ &= -\tfrac{1}{2}x(4x^2 - 12x + 9) \\ &= -\tfrac{1}{2}x(2x - 3)^2 \end{aligned}$$

se puede ver que los ceros de f son $x = 0$ (multiplicidad impar) y $x = \frac{3}{2}$ (multiplicidad par). Por tanto, las intersecciones con el eje x ocurren en $(0, 0)$ y $\left(\frac{3}{2}, 0\right)$. Sume estos puntos a su gráfica, como se muestra en la Figura 2.23.

3. *Localice cuantos pocos puntos adicionales.* Use los ceros del polinomio para hallar los intervalos de prueba. En cada intervalo de prueba, escoja un valor representativo de x y evalúe la función polinomial, como se muestra en la tabla.

Intervalo de prueba	Valor representativo de x	Valor de f	Signo	Punto en la gráfica
$(-\infty, 0)$	-0.5	$f(-0.5) = 4$	Positivo	$(-0.5, 4)$
$\left(0, \frac{3}{2}\right)$	0.5	$f(0.5) = -1$	Negativo	$(0.5, -1)$
$\left(\frac{3}{2}, \infty\right)$	2	$f(2) = -1$	Negativo	$(2, -1)$

Tip de estudio

Observe en el Ejemplo 5 que el signo de $f(x)$ es positivo a la izquierda y negativo a la derecha del cero $x = 0$. Del mismo modo, el signo de $f(x)$ es negativo a la izquierda y a la derecha del cero $x = \frac{3}{2}$. Esto sugiere que si el cero de una función polinomial es de multiplicidad *impar*, entonces el signo de $f(x)$ cambia de un lado del cero al otro. Si el cero es de multiplicidad *par*, entonces el signo de $f(x)$ no cambia de ese modo.

4. *Trace la gráfica.* Trace una curva continua que pase por los puntos, como se ve en la Figura 2.24. Como está indicado por la multiplicidad de los ceros, la gráfica corta el eje x en $(0, 0)$ pero no x en $\left(\frac{3}{2}, 0\right)$.

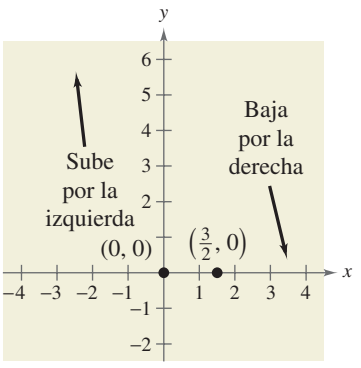


FIGURA 2.23

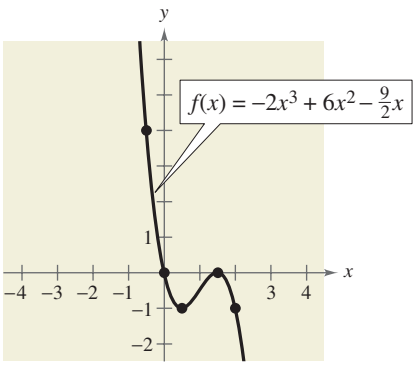


FIGURA 2.24

PUNTO *de repaso* Ahora trate de hacer el Ejercicio 77.

Teorema del valor intermedio

El siguiente teorema, llamado **teorema del valor intermedio**, ilustra la existencia de ceros reales de funciones polinomiales. Este teorema implica que si $(a, f(a))$ y $(b, f(b))$ son dos puntos en la gráfica de una función polinomial tal que $f(a) \neq f(b)$, entonces para cualquier número d entre $f(a)$ y $f(b)$ debe haber un número c entre a y b tal que $f(c) = d$. (Vea Figura 2.25.)

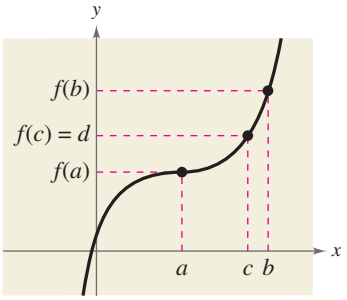


FIGURA 2.25

Teorema del valor intermedio

Sean a y b números reales tales que $a < b$. Si f es una función polinomial tal que $f(a) \neq f(b)$, entonces, en el intervalo $[a, b]$ f toma todo valor entre $f(a)$ y $f(b)$.

El teorema del valor intermedio ayuda a localizar los ceros reales de una función polinomial en la siguiente forma. Si se puede hallar un valor $x = a$ en el que una función polinomial es positiva, y otro valor $x = b$ en el que es negativa, se puede concluir que la función tiene al menos un cero real entre estos dos valores. Por ejemplo, la función dada por $f(x) = x^3 + x^2 + 1$ es negativa cuando $x = -2$ y positiva cuando $x = -1$. Por tanto, del teorema del valor intermedio se deduce que f debe tener un cero real en algún punto entre -2 y -1, como se ve en la Figura 2.26.

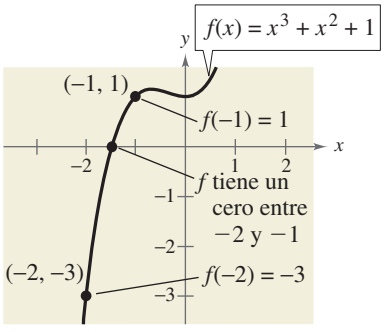


FIGURA 2.26

Para continuar con esta línea de razonamiento, puede calcular cualesquiera ceros reales de una función polinomial a cualquier precisión deseada. Este concepto se demuestra más a fondo en el Ejemplo 6.

Ejemplo 6 Aproximar un cero de una función polinomial

Use el teorema de valor intermedio para calcular el cero real de

$$f(x) = x^3 - x^2 + 1.$$

Solución

Empiece por calcular algunos valores de la función, como sigue.

x	$f(x)$
-2	-11
-1	-1
0	1
1	1

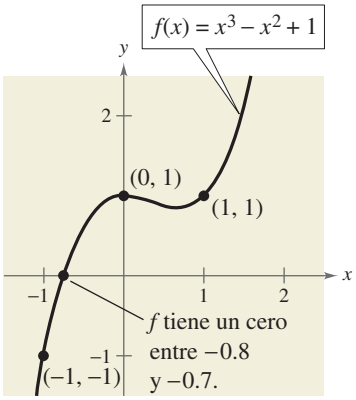


FIGURA 2.27

Como $f(-1)$ es negativa y $f(0)$ es positiva, se puede aplicar el teorema del valor intermedio para concluir que la función tiene un cero entre -1 y 0. Para localizar este cero con más precisión, divida el intervalo $[-1, 0]$ en décimos y evalúe la función en cada punto. Cuando haga esto, encontrará que

$$f(-0.8) = -0.152 \quad \text{y} \quad f(-0.7) = 0.167.$$

Por tanto, f debe tener un cero entre -0.8 y -0.7, como se muestra en la Figura 2.27. Para una aproximación más precisa, calcule valores de función entre $f(-0.8)$ y $f(-0.7)$ y aplique de nuevo el teorema del valor intermedio. Al continuar este proceso, puede calcular este cero a cualquier precisión deseada.

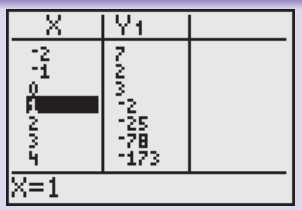
PUNTO *de repaso* Ahora trate de hacer el Ejercicio 93.

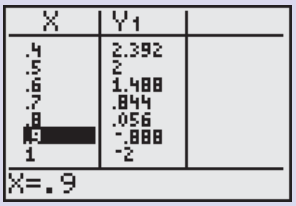
TECNOLOGÍA

El estudiante puede usar el comando *table* de una calculadora de gráficas para aproximar los ceros de una función polinomial. Por ejemplo, para la función dada por

$$f(x) = -2x^3 - 3x^2 + 3$$

genere una tabla que muestre los valores de función para $-20 \le x \le 20$, como se muestra en la primera tabla de la derecha. Arrastre el cursor por la tabla, en busca de valores de función consecutivos que difieran de signo. De la tabla, se ve que $f(0)$ y $f(1)$ difieren de signo. Por tanto, del teorema del valor intermedio se concluye que la función tiene un cero entre 0 y 1. Se puede ajustar la tabla para que muestre valores de función para $0 \le x \le 1$ usando incrementos de 0.1, como se ilustra en la segunda tabla de la derecha. Al arrastrar el cursor por la tabla, el estudiante verá que $f(0.8)$ y $f(0.9)$ difieren en signo. En consecuencia, la función tiene un cero entre 0.8 y 0.9. Si repite este proceso varias veces, debe obtener $x \approx 0.806$ como cero de la función. Use el comando *zero* o *root* de una calculadora de gráficas para confirmar este resultado.





2.2 EJERCICIOS

En www.CalcChat.com vea las soluciones a los ejercicios impares.

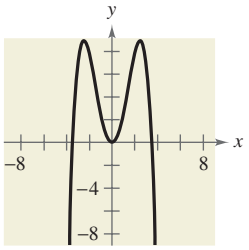
VOCABULARIO: Llene los espacios en blanco.

1. Las gráficas de todas las funciones polinomiales son _____, lo cual significa que no tienen interrupciones, huecos o brechas.
2. La _____ _____ _____ se usa para determinar el comportamiento por la izquierda y por la derecha de la gráfica de una función polinomial.
3. Es frecuente que las funciones polinomiales, de la forma $f(x) =$ _____ se denominen funciones potencia.
4. Una función polinomial de grado n tiene a lo sumo _____ ceros reales y _____ puntos extremos.
5. Si $x = a$ es un cero de una función f polinomial, entonces los siguientes tres enunciados son verdaderos.
   (a) $x = a$ es un _____ de la ecuación polinomial $f(x) = 0$..
   (b) _____ es un factor del polinomio $f(x)$.
   (c) $(a, 0)$ es un _____ de la gráfica de f.
6. Si un cero real de una función polinomial es de multiplicidad par, entonces la gráfica de f _____ el eje x en $x = a$, y si es de multiplicidad impar, entonces la gráfica de f _____ el eje x en $x = a$.
7. Una función polinomial se escribe en forma _____ si sus términos se escriben en orden descendente de exponentes de izquierda a derecha.
8. El teorema del _____ _____ expresa que si f es una función polinomial tal que $f(a) \neq f(b)$, entonces, en el intervalo $[a, b]$, f toma todo valor entre $f(a)$ y $f(b)$.

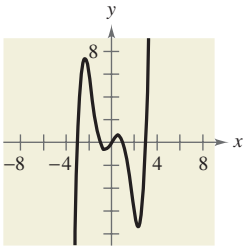
HABILIDADES Y APLICACIONES

En los Ejercicios 9-16, relacione la función polinomial con su gráfica. [Las gráficas están marcadas (a), (b), (c), (d), (e), (f), (g) y (h).]

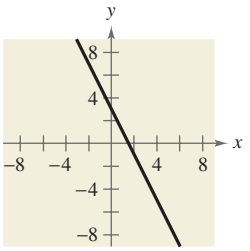
(a)



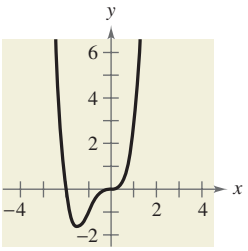
(b)



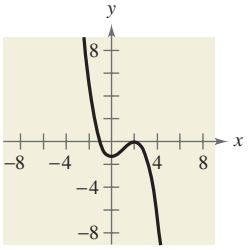
(c)



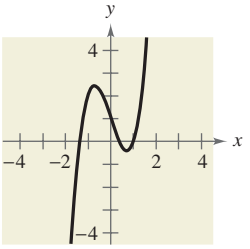
(d)



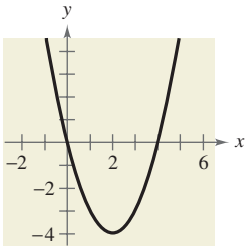
(e)



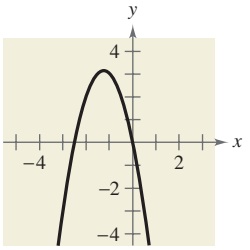
(f)



(g)



(h)



9. $f(x) = -2x + 3$
10. $f(x) = x^2 - 4x$
11. $f(x) = -2x^2 - 5x$
12. $f(x) = 2x^3 - 3x + 1$
13. $f(x) = -\frac{1}{4}x^4 + 3x^2$
14. $f(x) = -\frac{1}{3}x^3 + x^2 - \frac{4}{3}$
15. $f(x) = x^4 + 2x^3$
16. $f(x) = \frac{1}{5}x^5 - 2x^3 + \frac{9}{5}x$

En los Ejercicios 17-20, trace la gráfica de $y = x^n$ y cada transformación.

17. $y = x^3$
    (a) $f(x) = (x - 4)^3$
    (b) $f(x) = x^3 - 4$
    (c) $f(x) = -\frac{1}{4}x^3$
    (d) $f(x) = (x - 4)^3 - 4$
18. $y = x^5$
    (a) $f(x) = (x + 1)^5$
    (b) $f(x) = x^5 + 1$
    (c) $f(x) = 1 - \frac{1}{2}x^5$
    (d) $f(x) = -\frac{1}{2}(x + 1)^5$
19. $y = x^4$
    (a) $f(x) = (x + 3)^4$
    (b) $f(x) = x^4 - 3$
    (c) $f(x) = 4 - x^4$
    (d) $f(x) = \frac{1}{2}(x - 1)^4$
    (e) $f(x) = (2x)^4 + 1$
    (f) $f(x) = \left(\frac{1}{2}x\right)^4 - 2$

20. $y = x^6$

(a) $f(x) = -\frac{1}{8}x^6$ (b) $f(x) = (x + 2)^6 - 4$

(c) $f(x) = x^6 - 5$ (d) $f(x) = -\frac{1}{4}x^6 + 1$

(e) $f(x) = \left(\frac{1}{4}x\right)^6 - 2$ (f) $f(x) = (2x)^6 - 1$

En los Ejercicios 21-30, describa el comportamiento a la derecha e izquierda de la gráfica de la función polinomial.

21. $f(x) = \frac{1}{5}x^3 + 4x$ **22.** $f(x) = 2x^2 - 3x + 1$

23. $g(x) = 5 - \frac{7}{2}x - 3x^2$ **24.** $h(x) = 1 - x^6$

25. $f(x) = -2.1x^5 + 4x^3 - 2$

26. $f(x) = 4x^5 - 7x + 6.5$

27. $f(x) = 6 - 2x + 4x^2 - 5x^3$

28. $f(x) = (3x^4 - 2x + 5)/4$

29. $h(t) = -\frac{3}{4}(t^2 - 3t + 6)$

30. $f(s) = -\frac{7}{8}(s^3 + 5s^2 - 7s + 1)$

ANÁLISIS GRÁFICO En los Ejercicios 31-34, use una calculadora de gráficas para graficar las funciones f y g en la misma pantalla. Utilice el comando *zoom* lo suficiente como para demostrar que los comportamientos a la derecha e izquierda de f y g parezcan idénticos.

31. $f(x) = 3x^3 - 9x + 1, \quad g(x) = 3x^3$

32. $f(x) = -\frac{1}{3}(x^3 - 3x + 2), \quad g(x) = -\frac{1}{3}x^3$

33. $f(x) = -(x^4 - 4x^3 + 16x), \quad g(x) = -x^4$

34. $f(x) = 3x^4 - 6x^2, \quad g(x) = 3x^4$

En los Ejercicios 35-50, (a) encuentre todos los ceros reales de la función polinomial, (b) determine la multiplicidad de cada cero y el número de puntos de inflexión de la gráfica de la función y (c) use una calculadora de gráficas para graficar la función y verificar sus respuestas.

35. $f(x) = x^2 - 36$ **36.** $f(x) = 81 - x^2$

37. $h(t) = t^2 - 6t + 9$ **38.** $f(x) = x^2 + 10x + 25$

39. $f(x) = \frac{1}{3}x^2 + \frac{1}{3}x - \frac{2}{3}$ **40.** $f(x) = \frac{1}{2}x^2 + \frac{5}{2}x - \frac{3}{2}$

41. $f(x) = 3x^3 - 12x^2 + 3x$ **42.** $g(x) = 5x(x^2 - 2x - 1)$

43. $f(t) = t^3 - 8t^2 + 16t$ **44.** $f(x) = x^4 - x^3 - 30x^2$

45. $g(t) = t^5 - 6t^3 + 9t$ **46.** $f(x) = x^5 + x^3 - 6x$

47. $f(x) = 3x^4 + 9x^2 + 6$ **48.** $f(x) = 2x^4 - 2x^2 - 40$

49. $g(x) = x^3 + 3x^2 - 4x - 12$

50. $f(x) = x^3 - 4x^2 - 25x + 100$

ANÁLISIS GRÁFICO En los Ejercicios 51-54, (a) use una calculadora de gráficas para graficar la función, (b) use la gráfica para calcular cualesquiera intersecciones de la gráfica con el eje x, (c) haga $y = 0$ y resuelva la ecuación resultante y (d) compare los resultados del inciso (c) con cualesquiera intersecciones de la gráfica con el eje x.

51. $y = 4x^3 - 20x^2 + 25x$ **52.** $y = 4x^3 + 4x^2 - 8x - 8$

53. $y = x^5 - 5x^3 + 4x$ **54.** $y = \frac{1}{4}x^3(x^2 - 9)$

En los Ejercicios 55-64, encuentre una función polinomial que tenga los ceros dados. (Hay numerosas respuestas correctas.)

55. 0, 8 **56.** 0, −7

57. 2, −6 **58.** −4, 5

59. 0, −4, −5 **60.** 0, 1, 10

61. 4, −3, 3, 0 **62.** −2, −1, 0, 1, 2

63. $1 + \sqrt{3}, 1 - \sqrt{3}$ **64.** $2, 4 + \sqrt{5}, 4 - \sqrt{5}$

En los Ejercicios 65-74, encuentre una función polinomial de grado n que tenga los ceros dados. (Hay numerosas respuestas correctas.)

Cero(s)	*Grado*
65. $x = -3$	$n = 2$
66. $x = -12, -6$	$n = 2$
67. $x = -5, 0, 1$	$n = 3$
68. $x = -2, 4, 7$	$n = 3$
69. $x = 0, \sqrt{3}, -\sqrt{3}$	$n = 3$
70. $x = 9$	$n = 3$
71. $x = -5, 1, 2$	$n = 4$
72. $x = -4, -1, 3, 6$	$n = 4$
73. $x = 0, -4$	$n = 5$
74. $x = -1, 4, 7, 8$	$n = 5$

En los Ejercicios 75-88, trace la gráfica de la función al (a) aplicar la prueba del coeficiente principal, (b) hallar los ceros del polinomio, (c) localizar suficientes puntos de solución y (d) trazar una curva continua que pase por los puntos.

75. $f(x) = x^3 - 25x$ **76.** $g(x) = x^4 - 9x^2$

77. $f(t) = \frac{1}{4}(t^2 - 2t + 15)$

78. $g(x) = -x^2 + 10x - 16$

79. $f(x) = x^3 - 2x^2$ **80.** $f(x) = 8 - x^3$

81. $f(x) = 3x^3 - 15x^2 + 18x$

82. $f(x) = -4x^3 + 4x^2 + 15x$

83. $f(x) = -5x^2 - x^3$ **84.** $f(x) = -48x^2 + 3x^4$

85. $f(x) = x^2(x - 4)$ **86.** $h(x) = \frac{1}{3}x^3(x - 4)^2$

87. $g(t) = -\frac{1}{4}(t - 2)^2(t + 2)^2$

88. $g(x) = \frac{1}{10}(x + 1)^2(x - 3)^3$

En los Ejercicios 89-92, use una calculadora de gráficas para graficar la función. Use el comando *zero* o *root* para aproximar los ceros reales de el comando. A continuación determine la multiplicidad de cada cero.

89. $f(x) = x^3 - 16x$ **90.** $f(x) = \frac{1}{4}x^4 - 2x^2$

91. $g(x) = \frac{1}{5}(x + 1)^2(x - 3)(2x - 9)$

92. $h(x) = \frac{1}{5}(x + 2)^2(3x - 5)^2$

En los Ejercicios 93-96, use el teorema del valor intermedio y el comando *table* de una calculadora de gráficas para hallar intervalos de una unidad de longitud, en los que se garantice que la función polinomial tiene un cero. Ajuste la tabla para aproximar los ceros de la función. Use el comando *zero* o *root* de la calculadora de gráficas para verificar sus resultados.

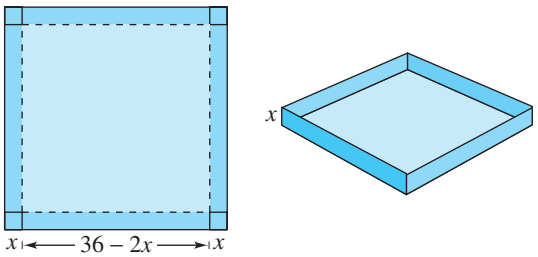
93. $f(x) = x^3 - 3x^2 + 3$

94. $f(x) = 0.11x^3 - 2.07x^2 + 9.81x - 6.88$

95. $g(x) = 3x^4 + 4x^3 - 3$

96. $h(x) = x^4 - 10x^2 + 3$

97. ANÁLISIS NUMÉRICO Y GRÁFICO Se ha de construir una caja abierta a partir de una pieza cuadrada de material, de 36 pulgadas por lado, cortando cuadrados iguales con lados de longitud x desde las esquinas y volteando hacia arriba los lados (vea figura).



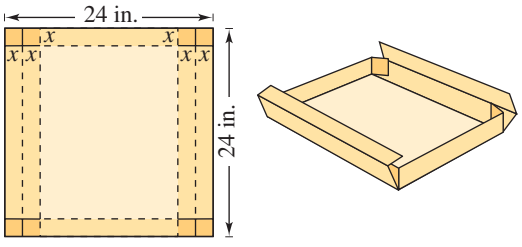
(a) Escriba una función $V(x)$ que represente el volumen de la caja.

(b) Determine el dominio de la función.

(c) Use una calculadora de gráficas para crear una tabla que muestre alturas x de la caja y los correspondientes volúmenes V. Use la tabla para estimar las dimensiones que producirán un volumen máximo.

(d) Use una calculadora de gráficas para graficar V y use la gráfica para estimar el valor de x para el que $V(x)$ sea máximo. Compare su resultado con el del inciso (c).

98. VOLUMEN MÁXIMO Una caja abierta con pestañas de cierre se ha de construir a partir de una pieza cuadrada de material de 24 pulgadas por lado. Esto se ha de hacer cortando cuadrados iguales de las esquinas y doblando a lo largo de las líneas discontinuas que se ven en la figura.

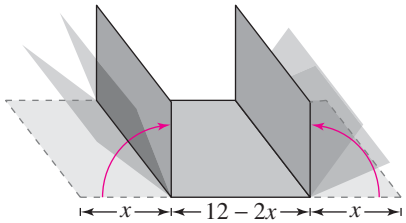


(a) Escriba una función $V(x)$ que represente el volumen de la caja.

(b) Determine el dominio de la función V.

(c) Trace una gráfica de la función y calcule el valor de x para el cual $V(x)$ sea máximo.

99. CONSTRUCCIÓN Un contratista de impermeabilizaciones está fabricando canales de techo para desagüe, con hojas de aluminio de 12 pulgadas. El contratista piensa usar una prensa de dobleces laterales de aluminio para hacer una canal al doblar longitudes iguales para los costados (vea figura).



(a) Represente con x la altura de la pared lateral de la canal. Escriba una función A que represente el área de sección transversal de la canal.

(b) La longitud de la hoja de aluminio es de 16 pies. Escriba una función V que represente el volumen de un tramo de x en términos de x.

(c) Determine el dominio de la función del inciso (b).

(d) Use una calculadora de gráficas para crear una tabla que muestre varias alturas x de pared y los correspondientes volúmenes V. Use la tabla para estimar las dimensiones que producirán un volumen máximo.

(e) Use una calculadora de gráficas para graficar V. Use la gráfica para estimar el valor de x para el cual $V(x)$ es máximo. Compare su resultado con el del inciso (d).

(f) ¿Cambiaría el valor de x si la hoja de aluminio fuera de longitud diferente? Explique.

100. CONSTRUCCIÓN Un tanque de gas propano industrial se forma al unir dos hemisferios a los extremos de un cilindro circular recto. La longitud de la parte cilíndrica del tanque es cuatro veces el radio de los componentes hemisféricos (vea figura).

(a) Escriba una función que represente el volumen total V del tanque en términos de r

(b) Encuentre el dominio de la función.

(c) Use una calculadora de gráficas para graficar la función.

(d) El volumen total del tanque ha de ser de 120 pies cúbicos. Use la gráfica del inciso (c) para estimar el radio y longitud de la parte cilíndrica del tanque.

101. INGRESO El total de ingresos R (en millones de dólares) de Krispy Kreme de 2000 a 2007 se muestra en la tabla siguiente.

Año	Ingresos, R
2000	300.7
2001	394.4
2002	491.5
2003	665.6
2004	707.8
2005	543.4
2006	461.2
2007	429.3

Un modelo que representa estos datos está dado por $R = 3.0711t^4 - 42.803t^3 + 160.59t^2 - 62.6t + 307$, $0 \le t \le 7$, donde t representa el año, con $t = 0$ para el año 2000. (Fuente: Krispy Kreme)

(a) Use una calculadora de gráficas para crear una gráfica de dispersión de los datos. A continuación grafique el modelo en la misma pantalla.

(b) ¿Qué tan bien se ajusta el modelo a los datos?

(c) Use una calculadora de gráficas para aproximar cualesquier extremos relativos del modelo sobre su dominio.

(d) Use una calculadora de gráficas para aproximar los intervalos sobre los cuales el ingreso para Krispy Kreme fue creciente y decreciente en su dominio.

(e) Use los resultados de los incisos (c) y (d) para escribir un breve párrafo acerca del ingreso de Krispy Kreme durante este periodo.

102. INGRESO El ingreso total R (en millones de dólares) para Papa John's International, de 2000 a 2007, se muestra en la tabla siguiente.

Año	Ingreso, R
2000	944.7
2001	971.2
2002	946.2
2003	917.4
2004	942.4
2005	968.8
2006	1001.6
2007	1063.6

Un modelo que representa estos datos está dado por $R = -0.5635t^4 + 9.019t^3 - 40.20t^2 + 49.0t + 947$, $0 \le t \le 7$, donde t representa el año, con $t = 0$ correspondiente a 2000. (Fuente: Papa John's International)

(a) Use una calculadora de gráficas para crear una gráfica de dispersión de los datos. A continuación grafique el modelo en la misma pantalla.

(b) ¿Qué tan bien se ajusta el modelo a los datos?

(c) Use una calculadora de gráficas para aproximar cualesquier extremos relativos del modelo sobre su dominio.

(d) Use una calculadora de gráficas para aproximar los intervalos sobre los cuales el ingreso para Papa John's International fue creciente y decreciente en su dominio.

(e) Use los resultados de los incisos (c) y (d) para escribir un breve párrafo acerca del ingreso de Papa John's International durante este periodo.

103. CRECIMIENTO DE ÁRBOLES El crecimiento de un roble rojo se calcula mediante la función

$$G = -0.003t^3 + 0.137t^2 + 0.458t - 0.839$$

donde G es la altura del árbol (en pies) y t $(2 \le t \le 34)$ es su edad (en años).

(a) Use una calculadora de gráficas para graficar la función. (*Sugerencia*: use una pantalla en la que $-10 \le x \le 45$ y $-5 \le y \le 60$.)

(b) Calcule la edad del árbol cuando esté creciendo más rápidamente. Este punto se denomina *punto de rendimiento a la baja* porque el aumento en tamaño será menor con cada año adicional.

(c) Usando cálculo, el punto de rendimiento a la baja también se puede hallar si se encuentra el vértice de la parábola dado por

$$y = -0.009t^2 + 0.274t + 0.458.$$

Encuentre el vértice de esta parábola.

(d) Compare sus resultados de los incisos (b) y (c).

104. INGRESO El ingreso total R (en millones de dólares) para una compañía está relacionado con su gasto en publicidad mediante la función

$$R = \frac{1}{100\,000}(-x^3 + 600x^2), \quad 0 \le x \le 400$$

donde x es la cantidad gastada en publicidad (en decenas de miles de dólares). Use la gráfica de esta función, que se muestra en la figura siguiente, para calcular el punto de la gráfica en el que la función crece con máxima rapidez. Este punto recibe el nombre de *punto de rendimiento a la baja*, porque cualquier gasto arriba de esta cantidad dará menor rendimiento por dólar invertido en publicidad.

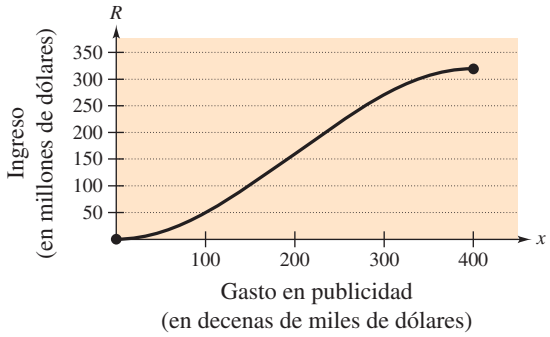


FIGURA PARA EL EJERCICIO 104

EXPLORACIÓN

¿VERDADERO O FALSO? En los Ejercicios 105-107, determine si la proposición es verdadera o falsa. Justifique su respuesta.

105. Un polinomio de quinto grado puede tener cinco puntos extremos en su gráfica.

106. Es posible que un polinomio de sexto grado tenga sólo una solución.

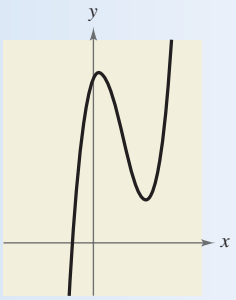
107. La gráfica de la función dada por

$$f(x) = 2 + x - x^2 + x^3 - x^4 + x^5 + x^6 - x^7$$

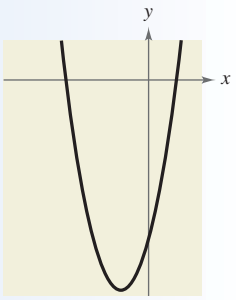
sube por la izquierda y baja por la derecha.

108. **TOQUE FINAL** Describa una función polinomial que pueda representar cada gráfica. (Indique el grado de la función y el signo de su coeficiente principal.)

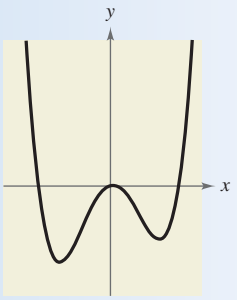
(a)



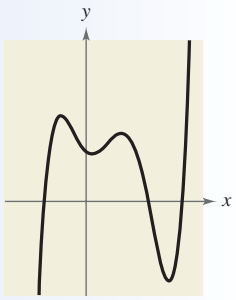
(b)



(c)



(d)



109. **RAZONAMIENTO GRÁFICO** Trace una gráfica de la función dada por $f(x) = x^4$. Explique la forma en que la gráfica de cada función g difiere (si es así) de la de cada función f. Determine si g es impar, par o ninguna de éstas.

(a) $g(x) = f(x) + 2$ (b) $g(x) = f(x + 2)$

(c) $g(x) = f(-x)$ (d) $g(x) = -f(x)$

(e) $g(x) = f\left(\frac{1}{2}x\right)$ (f) $g(x) = \frac{1}{2}f(x)$

(g) $g(x) = f\left(x^{3/4}\right)$ (h) $g(x) = (f \circ f)(x)$

110. **PIÉNSELO** Para cada función, identifique su grado y si éste es par o impar. Identifique el coeficiente principal y si es positivo o negativo. Use una calculadora de gráficas para graficar cada función. Describa la relación entre el grado de la función y el signo del coeficiente principal y el comportamiento a la derecha e izquierda de la gráfica.

(a) $f(x) = x^3 - 2x^2 - x + 1$

(b) $f(x) = 2x^5 + 2x^2 - 5x + 1$

(c) $f(x) = -2x^5 - x^2 + 5x + 3$

(d) $f(x) = -x^3 + 5x - 2$

(e) $f(x) = 2x^2 + 3x - 4$

(f) $f(x) = x^4 - 3x^2 + 2x - 1$

(g) $f(x) = x^2 + 3x + 2$

111. **PIÉNSELO** Trace la gráfica de cada función polinomial. En seguida cuente el número de ceros de la función y el número de mínimos relativos y máximos relativos. Compare estos números con el grado del polinomio. ¿Qué observa?

(a) $f(x) = -x^3 + 9x$ (b) $f(x) = x^4 - 10x^2 + 9$

(c) $f(x) = x^5 - 16x$

112. Explore las transformaciones de la forma

$$g(x) = a(x - h)^5 + k.$$

(a) Use una calculadora de gráficas para graficar las funciones $y_1 = -\frac{1}{3}(x - 2)^5 + 1$ y $y_2 = \frac{3}{5}(x + 2)^5 - 3$. Determine si las gráficas son crecientes o decrecientes. Explique.

(b) ¿La gráfica de g siempre será creciente o decreciente? Si es así, ¿su comportamiento está determinado por a, h o k? Explique.

(c) Use una calculadora de gráficas para graficar la función dada por $H(x) = x^5 - 3x^3 + 2x + 1$. Use la gráfica y el resultado del inciso (b) para determinar si H puede escribirse en la forma $H(x) = a(x - h)^5 + k$. Explique.

2.3 División de polinomios y sintética

Lo que debe aprender

- Usar división larga para dividir polinomios entre polinomios.
- Usar división sintética para dividir polinomios entre binomios de la forma $(x - k)$.
- Usar el teorema del residuo y el teorema del factor.

Por qué debe aprenderlo

La división sintética puede ayudar a evaluar funciones polinomiales. Por ejemplo, en el Ejercicio 85 de la página 157 el lector usará división sintética para determinar la cantidad donada para sostener la educación superior en Estados Unidos en 2010.

MBI/Alamy

División larga de polinomios

En esta sección estudiaremos dos procedimientos para *dividir* polinomios. Estos procedimientos son especialmente valiosos para hallar los ceros de funciones polinomiales. Para empezar, supóngase que nos dan la gráfica de

$$f(x) = 6x^3 - 19x^2 + 16x - 4.$$

Observe que un cero de f ocurre en $x = 2$, como se ve en la Figura 2.28. Como $x = 2$ es un cero de f, sabemos que $(x - 2)$ es un factor de $f(x)$. Esto significa que existe un polinomio de segundo grado $q(x)$ tal que

$$f(x) = (x - 2) \cdot q(x).$$

Para hallar $q(x)$ se puede usar la **división larga**, como se ve en el Ejemplo 1.

Ejemplo 1 División larga de polinomios

Divida $6x^3 - 19x^2 + 16x - 4$ por $x - 2$ y use el resultado para factorizar completamente el polinomio.

Solución

Considerar $\frac{6x^3}{x} = 6x^2$.
Considerar $\frac{-7x^2}{x} = -7x$.
Considerar $\frac{2x}{x} = 2$.

$$\begin{array}{rl} & 6x^2 - 7x + 2 \\ x - 2 \,\overline{)}\; & 6x^3 - 19x^2 + 16x - 4 \\ & \underline{6x^3 - 12x^2} \qquad\qquad \text{Multiplicar: } 6x^2(x - 2). \\ & -7x^2 + 16x \qquad\qquad \text{Restar.} \\ & \underline{-7x^2 + 14x} \qquad\qquad \text{Multiplicar: } -7x(x - 2). \\ & 2x - 4 \qquad\qquad \text{Restar.} \\ & \underline{2x - 4} \qquad\qquad \text{Multiplicar: } 2(x - 2). \\ & 0 \qquad\qquad \text{Restar.} \end{array}$$

De esta división, se puede concluir que

$$6x^3 - 19x^2 + 16x - 4 = (x - 2)(6x^2 - 7x + 2)$$

y al factorizar $6x^2 - 7x + 2$, tenemos

$$6x^3 - 19x^2 + 16x - 4 = (x - 2)(2x - 1)(3x - 2).$$

Observe que esta factorización está acorde con la gráfica de la Figura 2.28 en que las tres intersecciones con el eje x se presentan en $x = 2$, $x = \frac{1}{2}$ y $x = \frac{2}{3}$.

PUNTO *de repaso* Ahora trate de hacer el Ejercicio 11.

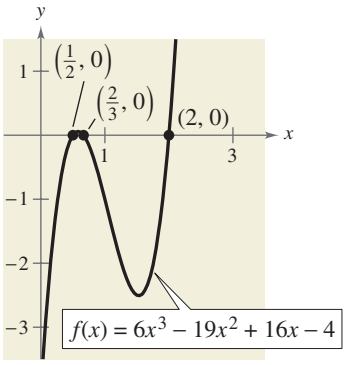


FIGURA 2.28

En el Ejemplo 1, $x - 2$ es un factor del polinomio $6x^3 - 19x^2 + 16x - 4$, y el proceso de división larga produce un residuo de cero. A veces la división larga produce un residuo diferente de cero. Por ejemplo, si dividimos $x^2 + 3x + 5$ entre $x + 1$ obtenemos lo siguiente.

$$\begin{array}{rl} & x + 2 \quad \leftarrow \text{Cociente} \\ \text{Divisor} \rightarrow \; x + 1 \,\big)\, & x^2 + 3x + 5 \quad \leftarrow \text{Dividendo} \\ & \underline{x^2 + \;\; x} \\ & \quad 2x + 5 \\ & \quad \underline{2x + 2} \\ & \quad\quad 3 \quad \leftarrow \text{Residuo} \end{array}$$

En forma fraccionaria, se puede escribir este resultado como sigue.

$$\underbrace{\frac{\overbrace{x^2 + 3x + 5}^{\text{Dividendo}}}{\underbrace{x + 1}_{\text{Divisor}}}}_{} = \overbrace{x + 2}^{\text{Cociente}} + \underbrace{\frac{\overbrace{3}^{\text{Residuo}}}{\underbrace{x + 1}_{\text{Divisor}}}}_{}$$

Esto implica que

$$x^2 + 3x + 5 = (x + 1)(x + 2) + 3 \qquad \text{Multiplicar cada lado por } (x + 1).$$

que ilustra el siguiente teorema, llamado **algoritmo de la división.**

Algoritmo de la división

Si $f(x)$ y $d(x)$ son polinomios tales que $d(x) \neq 0$ y el grado de $d(x)$ es menor o igual al grado de $f(x)$, existen polinomios únicos $q(x)$ y $r(x)$ tales que

$$f(x) = d(x)q(x) + r(x)$$

Dividendo, Divisor, Cociente, Residuo

donde $r(x) = 0$, o bien el grado de $r(x)$ es menor que el de $d(x)$. Si el residuo $r(x)$ es cero, $d(x)$ *se divide uniformemente* entre $f(x)$.

El algoritmo de la división también se puede escribir como

$$\frac{f(x)}{d(x)} = q(x) + \frac{r(x)}{d(x)}.$$

En el algoritmo de la división, la expresión racional $f(x)/d(x)$ es **impropia** porque el grado de $f(x)$ es mayor o igual que el de $d(x)$. Por otra parte, la expresión racional $r(x)/d(x)$ es **propia** porque el grado de $r(x)$ es menor que el de $d(x)$.

Antes de aplicar el algoritmo de la división, siga estos pasos.

1. Escriba el dividendo y el divisor en potencias descendentes de la variable.

2. Inserte dígitos con coeficientes cero en lugar de potencias faltantes de la variable.

Ejemplo 2 División larga de polinomios

Divida $x^3 - 1$ entre $x - 1$.

Solución

Como no hay término en x^2 ni término en x en el dividendo, es necesario alinear la sustracción usando coeficientes cero (o dejando espacio) en lugar de términos faltantes.

$$\begin{array}{r} x^2 + x + 1 \\ x - 1 \overline{)\, x^3 + 0x^2 + 0x - 1} \\ \underline{x^3 - x^2} \\ x^2 + 0x \\ \underline{x^2 - x} \\ x - 1 \\ \underline{x - 1} \\ 0 \end{array}$$

Por tanto, $x - 1$ se divide uniformemente entre $x^3 - 1$, y podemos escribir

$$\frac{x^3 - 1}{x - 1} = x^2 + x + 1, \quad x \neq 1.$$

PUNTO *de repaso* Ahora trate de hacer el Ejercicio 17.

Es posible verificar el resultado del Ejemplo 2 multiplicando:

$$(x - 1)(x^2 + x + 1) = x^3 + x^2 + x - x^2 - x - 1 = x^3 - 1$$

Ayuda de álgebra

La verificación de un problema de división larga se hace multiplicando. En el Apéndice A.3 se pueden revisar las técnicas para multiplicar polinomios.

Ejemplo 3 División larga de polinomios

Divida $-5x^2 - 2 + 3x + 2x^4 + 4x^3$ entre $2x - 3 + x^2$.

Solución

Empiece por escribir el dividendo y el divisor en potencias descendentes de x.

$$\begin{array}{r} 2x^2 + 1 \\ x^2 + 2x - 3 \overline{)\, 2x^4 + 4x^3 - 5x^2 + 3x - 2} \\ \underline{2x^4 + 4x^3 - 6x^2} \\ x^2 + 3x - 2 \\ \underline{x^2 + 2x - 3} \\ x + 1 \end{array}$$

Observe que la primera sustracción eliminó dos términos del dividendo. Cuando ocurre esto, el cociente se salta un término. Podemos escribir el resultado como

$$\frac{2x^4 + 4x^3 - 5x^2 + 3x - 2}{x^2 + 2x - 3} = 2x^2 + 1 + \frac{x + 1}{x^2 + 2x - 3}.$$

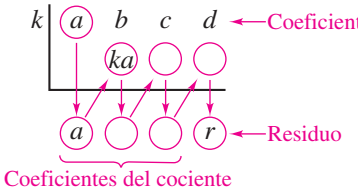
PUNTO *de repaso* Ahora trate de hacer el Ejercicio 23

División sintética

Hay un práctico atajo para la división larga de polinomios entre divisores de la forma $x - k$. Este atajo se llama **división sintética.** La forma para la división sintética de un polinomio cúbico se resume como sigue. (La forma para polinomios de grado superior es similar.)

División sintética (para un polinomio cúbico)

Para dividir $ax^3 + bx^2 + cx + d$ entre $x - k$, use la siguiente forma.



Forma vertical: Sumar términos.
Forma diagonal: Multiplicar por k.

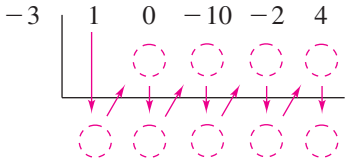
Este algoritmo de la división sintética funciona sólo para divisores de la forma $x - k$. Recuerde que $x + k = x - (-k)$.

Ejemplo 4 Uso de división sintética

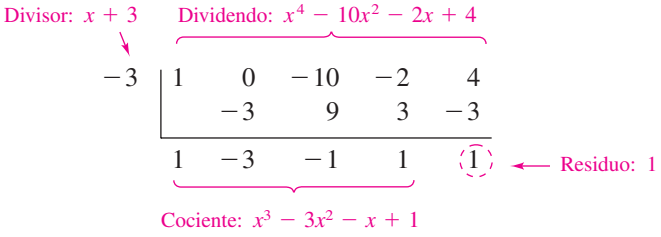
Use división sintética para dividir $x^4 - 10x^2 - 2x + 4$ entre $x + 3$.

Solución

El estudiante debe escribir el arreglo como sigue. Observe que está incluido un cero por el término x^3 faltante en el dividendo.



A continuación, use la forma de la división sintética sumando términos en columnas y multiplicando por -3 los resultados.



Por tanto, tenemos

$$\frac{x^4 - 10x^2 - 2x + 4}{x + 3} = x^3 - 3x^2 - x + 1 + \frac{1}{x + 3}.$$

PUNTO *de repaso* Ahora trate de hacer el Ejercicio 27.

Teoremas del residuo y del factor

El residuo obtenido en el proceso de división sintética tiene una interpretación importante, como se describe en el **teorema del residuo.**

Teorema del residuo

Si un polinomio $f(x)$ se divide entre $x - k$, el residuo es

$$r = f(k).$$

Para una demostración del teorema del residuo, vea la página 211.

El teorema del residuo indica que la división sintética se puede usar para evaluar una función polinomial. Esto es, para evaluar una función polinomial $f(x)$ cuando $x = k$, divida $f(x)$ entre $x - k$. El residuo será $f(k)$, como se ilustra en el Ejemplo 5.

Ejemplo 5 Uso del teorema del residuo

Use el teorema del residuo para evaluar la siguiente función en $x = -2$.

$$f(x) = 3x^3 + 8x^2 + 5x - 7$$

Solución

Usando división sintética, se obtiene lo siguiente.

$$\begin{array}{r|cccc} -2 & 3 & 8 & 5 & -7 \\ & & -6 & -4 & -2 \\ \hline & 3 & 2 & 1 & -9 \end{array}$$

Como el residuo es $r = -9$, se puede concluir que

$$f(-2) = -9. \qquad r = f(k)$$

Esto significa que $(-2, -9)$ es un punto en la gráfica de f. Se puede verificar esto al sustituir $x = -2$ en la función original.

Comprobación

$$\begin{aligned} f(-2) &= 3(-2)^3 + 8(-2)^2 + 5(-2) - 7 \\ &= 3(-8) + 8(4) - 10 - 7 = -9 \end{aligned}$$

PUNTO *de repaso* Ahora trate de hacer el Ejercicio 55.

Otro importante teorema es el **teorema del factor,** que se expresa a continuación. Este teorema indica que se puede probar para ver si un polinomio tiene $(x - k)$ como factor al evaluar el polinomio en $x = k$. Si el resultado es 0, $(x - k)$ es un factor.

Teorema del factor

Un polinomio $f(x)$ tiene un factor $(x - k)$ si y sólo si $f(k) = 0$.

Para una demostración del teorema del factor, vea la página 211.

Ejemplo 6 Factorizar un polinomio: división repetida

Demuestre que $(x - 2)$ y $(x + 3)$ son factores de $f(x) = 2x^4 + 7x^3 - 4x^2 - 27x - 18$. A continuación encuentre los factores restantes de $f(x)$.

Solución algebraica

Usando división sintética con el factor $(x - 2)$ se obtiene lo siguiente.

2	2	7	−4	−27	−18
		4	22	36	18
	2	11	18	9	0

Residuo 0, entonces $f(2) = 0$ y $(x - 2)$ es un factor.

Tome el resultado de esta división y realice división sintética una vez más usando el factor $(x + 3)$.

−3	2	11	18	9
		−6	−15	−9
	2	5	3	0

$2x^2 + 5x + 3$

Residuo 0, entonces $f(-3) = 0$ y $(x + 3)$ es un factor.

Como la expresión cuadrática resultante se factoriza como

$$2x^2 + 5x + 3 = (2x + 3)(x + 1)$$

la factorización completa de $f(x)$ es

$$f(x) = (x - 2)(x + 3)(2x + 3)(x + 1).$$

PUNTO *de repaso* Ahora trate de hacer el Ejercicio 67.

Solución gráfica

De la gráfica de $f(x) = 2x^4 + 7x^3 - 4x^2 - 27x - 18$ se puede ver que hay cuatro intersecciones con x (vea Figura 2.29). Éstas ocurren en $x = -3$, $x = -\frac{3}{2}$, $x = -1$ y $x = 2$. (Verifíquelo algebraicamente.) Esto implica que $(x + 3)$, $\left(x + \frac{3}{2}\right)$, $(x + 1)$ y $(x - 2)$ son factores de $f(x)$. [Observe que $\left(x + \frac{3}{2}\right)$ y $(2x + 3)$ son factores equivalentes porque ambos dan el mismo cero, $x = -\frac{3}{2}$.]

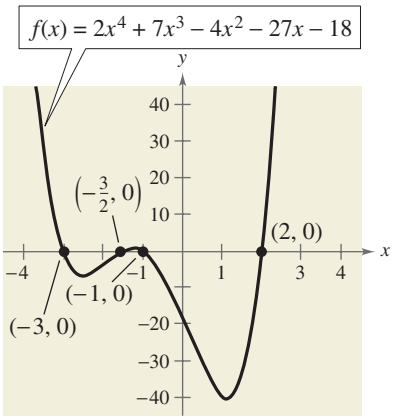


FIGURA 2.29

Tip de estudio

Observe en el Ejemplo 6 que la factorización completa de $f(x)$ implica que f tiene cuatro ceros reales: $x = 2$, $x = -3$, $x = -\frac{3}{2}$ y $x = -1$. Esto se confirma por la gráfica de f, que se muestra en la Figura 2.29.

Usos del residuo en división sintética

El residuo r, obtenido en la división sintética de $f(x)$ entre $x - k$, proporciona la siguiente información.

1. El residuo r da el valor de f en $x = k$. Esto es, $r = f(k)$.
2. Si $r = 0$, $(x - k)$ es un factor de $f(x)$.
3. Si $r = 0$, $(k, 0)$ es una intersección con el eje x de la gráfica de f.

En todo este texto destacamos la importancia de desarrollar varias estrategias para resolver problemas. En los ejercicios de esta sección, trate de usar más de una para resolver varios de ellos. Por ejemplo, si usted encuentra que $x - k$ se divide uniformemente entre $f(x)$ (sin residuo), trate de trazar la gráfica de f. Debe hallar que $(k, 0)$ es una intersección de la gráfica con el eje x.

2.3 EJERCICIOS

En www.CalcChat.com vea las soluciones a los ejercicios impares.

VOCABULARIO

1. A continuación veamos dos formas del algoritmo de la división. Identifique y marque cada término o función.

$$f(x) = d(x)q(x) + r(x) \qquad \frac{f(x)}{d(x)} = q(x) + \frac{r(x)}{d(x)}$$

En los Ejercicios 2-6, llene los espacios en blanco.

2. La expresión racional $p(x)/q(x)$ se denomina _____ si el grado del numerador es mayor o igual que el del denominador, y _____ si el grado del numerador es menor que el del denominador.

3. En el algoritmo de la división, la expresión racional $f(x)/d(x)$ es _____ porque el grado de $f(x)$ es mayor o igual que el de $d(x)$.

4. Un método alternativo a la división larga de polinomios se llama _____ _____, en el que el divisor debe ser de la forma $x - k$.

5. El teorema _____ expresa que un polinomio $f(x)$ tiene un factor $(x - k)$ si y sólo si $f(k) = 0$.

6. El teorema _____ expresa que si un polinomio $f(x)$ se divide entre $x - k$, el residuo es $r = f(k)$.

HABILIDADES Y APLICACIONES

ANÁLISIS NUMÉRICO En los Ejercicios 7 y 8, use división larga para verificar que $y_1 = y_2$.

7. $y_1 = \dfrac{x^2}{x + 2}, \quad y_2 = x - 2 + \dfrac{4}{x + 2}$

8. $y_1 = \dfrac{x^4 - 3x^2 - 1}{x^2 + 5}, \quad y_2 = x^2 - 8 + \dfrac{39}{x^2 + 5}$

ANÁLISIS GRÁFICO En los Ejercicios 9 y 10, (a) use una calculadora de gráficas para graficar las dos ecuaciones en la misma pantalla, (b) use las gráficas para verificar que las expresiones son equivalentes, y (c) use división larga para verificar algebraicamente los resultados.

9. $y_1 = \dfrac{x^2 + 2x - 1}{x + 3}, \quad y_2 = x - 1 + \dfrac{2}{x + 3}$

10. $y_1 = \dfrac{x^4 + x^2 - 1}{x^2 + 1}, \quad y_2 = x^2 - \dfrac{1}{x^2 + 1}$

En los Ejercicios 11-26, use división larga para dividir.

11. $(2x^2 + 10x + 12) \div (x + 3)$

12. $(5x^2 - 17x - 12) \div (x - 4)$

13. $(4x^3 - 7x^2 - 11x + 5) \div (4x + 5)$

14. $(6x^3 - 16x^2 + 17x - 6) \div (3x - 2)$

15. $(x^4 + 5x^3 + 6x^2 - x - 2) \div (x + 2)$

16. $(x^3 + 4x^2 - 3x - 12) \div (x - 3)$

17. $(x^3 - 27) \div (x - 3)$

18. $(x^3 + 125) \div (x + 5)$

19. $(7x + 3) \div (x + 2)$

20. $(8x - 5) \div (2x + 1)$

21. $(x^3 - 9) \div (x^2 + 1)$

22. $(x^5 + 7) \div (x^3 - 1)$

23. $(3x + 2x^3 - 9 - 8x^2) \div (x^2 + 1)$

24. $(5x^3 - 16 - 20x + x^4) \div (x^2 - x - 3)$

25. $\dfrac{x^4}{(x - 1)^3}$

26. $\dfrac{2x^3 - 4x^2 - 15x + 5}{(x - 1)^2}$

En los Ejercicios 27-46, use división sintética para dividir.

27. $(3x^3 - 17x^2 + 15x - 25) \div (x - 5)$

28. $(5x^3 + 18x^2 + 7x - 6) \div (x + 3)$

29. $(6x^3 + 7x^2 - x + 26) \div (x - 3)$

30. $(2x^3 + 14x^2 - 20x + 7) \div (x + 6)$

31. $(4x^3 - 9x + 8x^2 - 18) \div (x + 2)$

32. $(9x^3 - 16x - 18x^2 + 32) \div (x - 2)$

33. $(-x^3 + 75x - 250) \div (x + 10)$

34. $(3x^3 - 16x^2 - 72) \div (x - 6)$

35. $(5x^3 - 6x^2 + 8) \div (x - 4)$

36. $(5x^3 + 6x + 8) \div (x + 2)$

37. $\dfrac{10x^4 - 50x^3 - 800}{x - 6}$

38. $\dfrac{x^5 - 13x^4 - 120x + 80}{x + 3}$

39. $\dfrac{x^3 + 512}{x + 8}$

40. $\dfrac{x^3 - 729}{x - 9}$

41. $\dfrac{-3x^4}{x - 2}$

42. $\dfrac{-3x^4}{x + 2}$

43. $\dfrac{180x - x^4}{x - 6}$

44. $\dfrac{5 - 3x + 2x^2 - x^3}{x + 1}$

45. $\dfrac{4x^3 + 16x^2 - 23x - 15}{x + \frac{1}{2}}$

46. $\dfrac{3x^3 - 4x^2 + 5}{x - \frac{3}{2}}$

En los Ejercicios 47-54, escriba la función en la forma $f(x) = (x - k)q(x) + r$ para el valor dado de k, y demuestre que $f(k) = r$.

47. $f(x) = x^3 - x^2 - 14x + 11, \quad k = 4$

48. $f(x) = x^3 - 5x^2 - 11x + 8, \quad k = -2$

49. $f(x) = 15x^4 + 10x^3 - 6x^2 + 14, \quad k = -\frac{2}{3}$

50. $f(x) = 10x^3 - 22x^2 - 3x + 4, \quad k = \frac{1}{5}$

51. $f(x) = x^3 + 3x^2 - 2x - 14, \quad k = \sqrt{2}$

52. $f(x) = x^3 + 2x^2 - 5x - 4, \quad k = -\sqrt{5}$

53. $f(x) = -4x^3 + 6x^2 + 12x + 4, \quad k = 1 - \sqrt{3}$

54. $f(x) = -3x^3 + 8x^2 + 10x - 8, \quad k = 2 + \sqrt{2}$

En los Ejercicios 55-58, use el teorema del residuo y división sintética para hallar el valor de cada función. Verifique sus respuestas usando otro método.

55. $f(x) = 2x^3 - 7x + 3$

(a) $f(1)$ (b) $f(-2)$ (c) $f\left(\frac{1}{2}\right)$ (d) $f(2)$

56. $g(x) = 2x^6 + 3x^4 - x^2 + 3$

(a) $g(2)$ (b) $g(1)$ (c) $g(3)$ (d) $g(-1)$

57. $h(x) = x^3 - 5x^2 - 7x + 4$

(a) $h(3)$ (b) $h(2)$ (c) $h(-2)$ (d) $h(-5)$

58. $f(x) = 4x^4 - 16x^3 + 7x^2 + 20$

(a) $f(1)$ (b) $f(-2)$ (c) $f(5)$ (d) $f(-10)$

En los Ejercicios 59-66, use división sintética para demostrar que x es una solución de la ecuación de tercer grado con polinomios, y use el resultado para factorizar el polinomio completamente. Haga una lista de todas las soluciones reales de la ecuación.

59. $x^3 - 7x + 6 = 0, \quad x = 2$

60. $x^3 - 28x - 48 = 0, \quad x = -4$

61. $2x^3 - 15x^2 + 27x - 10 = 0, \quad x = \frac{1}{2}$

62. $48x^3 - 80x^2 + 41x - 6 = 0, \quad x = \frac{2}{3}$

63. $x^3 + 2x^2 - 3x - 6 = 0, \quad x = \sqrt{3}$

64. $x^3 + 2x^2 - 2x - 4 = 0, \quad x = \sqrt{2}$

65. $x^3 - 3x^2 + 2 = 0, \quad x = 1 + \sqrt{3}$

66. $x^3 - x^2 - 13x - 3 = 0, \quad x = 2 - \sqrt{5}$

En los Ejercicios 67-74, (a) verifique los factores dados de la función f, (b) encuentre los factores restantes de f, (c) use sus resultados para escribir la factorización completa de f, (d) haga una lista de todos los ceros reales de f y (e) confirme sus resultados usando una calculadora de gráficas para graficar la función.

	Función	*Factores*
67.	$f(x) = 2x^3 + x^2 - 5x + 2$	$(x + 2), (x - 1)$
68.	$f(x) = 3x^3 + 2x^2 - 19x + 6$	$(x + 3), (x - 2)$
69.	$f(x) = x^4 - 4x^3 - 15x^2 + 58x - 40$	$(x - 5), (x + 4)$
70.	$f(x) = 8x^4 - 14x^3 - 71x^2 - 10x + 24$	$(x + 2), (x - 4)$
71.	$f(x) = 6x^3 + 41x^2 - 9x - 14$	$(2x + 1), (3x - 2)$
72.	$f(x) = 10x^3 - 11x^2 - 72x + 45$	$(2x + 5), (5x - 3)$
73.	$f(x) = 2x^3 - x^2 - 10x + 5$	$(2x - 1), \left(x + \sqrt{5}\right)$
74.	$f(x) = x^3 + 3x^2 - 48x - 144$	$\left(x + 4\sqrt{3}\right), (x + 3)$

ANÁLISIS GRÁFICO En los Ejercicios 75-80, (a) use el comando *zero* o *root* de una calculadora de gráficas para aproximar los ceros de la función, con una precisión de tres lugares decimales, (b) determine uno de los ceros exactos, y (c) use división sintética para verificar su resultado del inciso (b), y luego factorice completamente el polinomio.

75. $f(x) = x^3 - 2x^2 - 5x + 10$

76. $g(x) = x^3 - 4x^2 - 2x + 8$

77. $h(t) = t^3 - 2t^2 - 7t + 2$

78. $f(s) = s^3 - 12s^2 + 40s - 24$

79. $h(x) = x^5 - 7x^4 + 10x^3 + 14x^2 - 24x$

80. $g(x) = 6x^4 - 11x^3 - 51x^2 + 99x - 27$

En los Ejercicios 81-84, simplifique la expresión racional usando división larga o división sintética.

81. $\dfrac{4x^3 - 8x^2 + x + 3}{2x - 3}$

82. $\dfrac{x^3 + x^2 - 64x - 64}{x + 8}$

83. $\dfrac{x^4 + 6x^3 + 11x^2 + 6x}{x^2 + 3x + 2}$

84. $\dfrac{x^4 + 9x^3 - 5x^2 - 36x + 4}{x^2 - 4}$

85. ANÁLISIS DE DATOS: EDUCACIÓN SUPERIOR Las cantidades A (en miles de millones de dólares) donadas para sostener la educación superior en Estados Unidos, de 2000 a 2007, se dan en la tabla siguiente, donde t representa el año, con $t = 0$ correspondiente a 2000.

Año, t	Cantidad, A
0	23.2
1	24.2
2	23.9
3	23.9
4	24.4
5	25.6
6	28.0
7	29.8

(a) Use una calculadora de gráficas para crear una gráfica de dispersión de los datos.

(b) Use el comando *regression* de la calculadora de gráficas para hallar un modelo cúbico para los datos. Grafique el modelo en la misma pantalla que la gráfica de dispersión.

(c) Use el modelo para crear una tabla de valores estimados de A. Compare el modelo con los datos originales.

(d) Use división sintética para evaluar el modelo para el año 2010. Aun cuando el modelo sea relativamente preciso para estimar los datos dados, ¿lo usaría usted para predecir la cantidad donada para la educación superior en el futuro? Explique.

86. ANÁLISIS DE DATOS: SERVICIO MÉDICO Las cantidades A (en miles de millones de dólares) de gastos de servicio médico nacional en Estados Unidos, de 2000 a 2007, se ilustran en la tabla siguiente, donde t representa el año, *con* $t = 0$ correspondiente a 2000.

Año, t	Cantidad, A
0	30.5
1	32.2
2	34.2
3	38.0
4	42.7
5	47.9
6	52.7
7	57.6

(a) Use una calculadora de gráficas para crear una gráfica de dispersión de los datos.

(b) Use el comando *regression* de la calculadora de gráficas para hallar un modelo cúbico para los datos. Grafique el modelo en la misma pantalla que la gráfica de dispersión.

(c) Use el modelo para crear una tabla de valores estimados de A. Compare el modelo con los datos originales.

(d) Use división sintética para evaluar el modelo para el año 2010.

EXPLORACIÓN

¿VERDADERO O FALSO? En los Ejercicios 87-89, determine si la proposición es verdadera o falsa. Justifique su respuesta.

87. Si $(7x + 4)$ es un factor de alguna función f polinomial, entonces $\frac{4}{7}$ es un cero de f.

88. $(2x - 1)$ es un factor del polinomio

$$6x^6 + x^5 - 92x^4 + 45x^3 + 184x^2 + 4x - 48.$$

89. La expresión racional

$$\frac{x^3 + 2x^2 - 13x + 10}{x^2 - 4x - 12}$$

es impropia.

90. Use la forma $f(x) = (x - k)q(x) + r$ para crear una función cúbica que (a) pase por el punto $(2,5)$ y suba por la derecha, y (b) pase por el punto $(-3, 1)$ y baje por la derecha. (Hay numerosas respuestas correctas.)

PIÉNSELO En los Ejercicios 91 y 92, realice la división suponiendo que n es un entero positivo.

91. $\dfrac{x^{3n} + 9x^{2n} + 27x^n + 27}{x^n + 3}$ **92.** $\dfrac{x^{3n} - 3x^{2n} + 5x^n - 6}{x^n - 2}$

93. ESCRITURA Brevemente explique qué significa que un divisor se divida uniformemente en un dividendo.

94. Brevemente explique cómo verificar una división con polinomios y justifique su razonamiento. Dé un ejemplo.

EXPLORACIÓN En los Ejercicios 95 y 96, encuentre la constante c tal que el denominador se divida uniformemente en el numerador.

95. $\dfrac{x^3 + 4x^2 - 3x + c}{x - 5}$ **96.** $\dfrac{x^5 - 2x^2 + x + c}{x + 2}$

97. PIÉNSELO Encuentre el valor de k tal que $x - 4$ sea un factor de $x^3 - kx^2 + 2kx - 8$.

98. PIÉNSELO Encuentre el valor de k tal que $x - 3$ sea un factor de $x^3 - kx^2 + 2kx - 12$.

99. ESCRITURA Complete cada una de las divisiones con polinomios siguientes. Escriba una breve descripción de la forma que usted obtuvo y use su resultado para hallar una fórmula para la división con polinomios $(x^n - 1)/(x - 1)$. Genere un ejemplo numérico para probar su fórmula.

(a) $\dfrac{x^2 - 1}{x - 1} =$ (b) $\dfrac{x^3 - 1}{x - 1} =$

(c) $\dfrac{x^4 - 1}{x - 1} =$

100. TOQUE FINAL Considere la división

$$f(x) \div (x - k)$$

donde

$$f(x) = (x + 3)^2(x - 3)(x + 1)^3.$$

(a) ¿Cuál es el residuo cuando $k = -3$? Explique.

(b) Si es necesario hallar $f(2)$, ¿es más fácil evaluar la función directamente o usar división sintética? Explique.

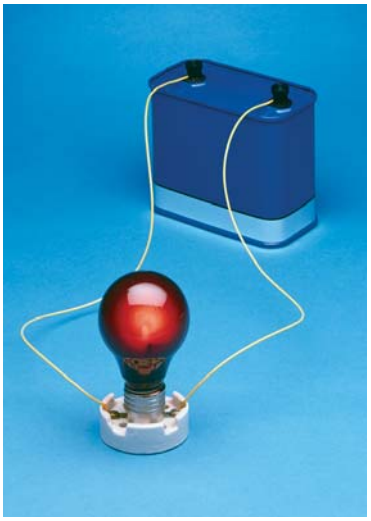
2.4 NÚMEROS COMPLEJOS

Lo que debe aprender

- Usar la unidad imaginaria *i* para escribir números complejos.
- Sumar, restar y multiplicar números complejos.
- Usar conjugados complejos para escribir el cociente de dos números complejos en forma estándar.
- Hallar soluciones complejas de ecuaciones cuadráticas.

Por qué debe aprenderlo

El lector puede usar números complejos para modelar y resolver problemas de la vida real en electrónica. Por ejemplo, en el Ejercicio 89 de la página 165 aprenderá a usar números complejos para hallar la impedancia de un circuito eléctrico.



© Richard Megna/Fundamental Photographs

Unidad imaginaria *i*

Ya ha aprendido que algunas ecuaciones cuadráticas no tienen soluciones reales. Por ejemplo, la ecuación cuadrática $x^2 + 1 = 0$ no tiene solución real porque no hay número real x que pueda elevarse al cuadrado y producir -1. Para superar esta deficiencia, los matemáticos crearon un sistema expandido de números usando la **unidad imaginaria *i***, definida como

$$i = \sqrt{-1}$$ Unidad imaginaria

donde $i^2 = -1$. Al sumar números reales a múltiplos reales de esta unidad imaginaria, se obtiene el **conjunto de números complejos**. Cada número complejo se puede escribir en la **forma estándar *a* + *bi*.** Por ejemplo, la forma estándar para el número complejo $-5 + \sqrt{-9}$ es $-5 + 3i$ porque

$$-5 + \sqrt{-9} = -5 + \sqrt{3^2(-1)} = -5 + 3\sqrt{-1} = -5 + 3i.$$

En la forma estándar $a + bi$, el número real a se denomina **parte real** del **número complejo *a* + *bi*,** y el número bi (donde b es un número real) se llama **parte imaginaria** del número complejo.

Definición de un número complejo

Si a y b son números reales, el número $a + bi$ es un **número complejo** y se dice que está escrito en **forma estándar.** Si $b = 0$, el número $a + bi = a$ es un número real. Si $b \neq 0$, el número $a + bi$ se llama **número imaginario.** Un número de la forma bi, donde $b \neq 0$, se llama **número imaginario puro.**

El conjunto de los números reales es un subconjunto del conjunto de los números complejos, como se muestra en la Figura 2.30. Esto es cierto porque todo número real a se puede escribir como un número complejo usando $b = 0$. Esto es, para todo número real a, se puede escribir $a = a + 0i$.

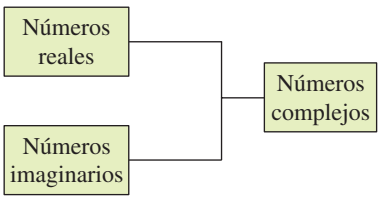


FIGURA 2.30

Igualdad de los números complejos

Dos números complejos $a + bi$ y $c + di$, escritos en forma estándar, son iguales entre sí

$$a + bi = c + di$$ Igualdad de dos números complejos.

si y sólo si $a = c$ y $b = d$.

Operaciones con números complejos

Para sumar (o restar) dos números complejos, se suman (o restan) por separado las partes real e imaginaria de los números.

Adición y sustracción de números complejos

Si $a + bi$ y $c + di$ son dos números complejos escritos en forma estándar, su suma y diferencia están definidas como sigue:

Suma: $(a + bi) + (c + di) = (a + c) + (b + d)i$

Diferencia: $(a + bi) - (c + di) = (a - c) + (b - d)i$

La **identidad aditiva** del sistema de los números complejos es cero (la misma que en el sistema de los números reales). Además, el **inverso aditivo** del número complejo $a + bi$ es

$$-(a + bi) = -a - bi.$$ Inverso aditivo

Entonces, tenemos

$$(a + bi) + (-a - bi) = 0 + 0i = 0.$$

Ejemplo 1 Sumar y restar números complejos

a. $(4 + 7i) + (1 - 6i) = 4 + 7i + 1 - 6i$ Eliminar paréntesis.

$= (4 + 1) + (7i - 6i)$ Agrupar términos semejantes.

$= 5 + i$ Escribir en forma estándar.

b. $(1 + 2i) - (4 + 2i) = 1 + 2i - 4 - 2i$ Eliminar paréntesis.

$= (1 - 4) + (2i - 2i)$ Agrupar términos semejantes.

$= -3 + 0$ Simplificar.

$= -3$ Escribir en forma estándar.

c. $3i - (-2 + 3i) - (2 + 5i) = 3i + 2 - 3i - 2 - 5i$

$= (2 - 2) + (3i - 3i - 5i)$

$= 0 - 5i$

$= -5i$

d. $(3 + 2i) + (4 - i) - (7 + i) = 3 + 2i + 4 - i - 7 - i$

$= (3 + 4 - 7) + (2i - i - i)$

$= 0 + 0i$

$= 0$

PUNTO *de repaso* Ahora trate de hacer el Ejercicio 21.

Observe en los Ejemplos 1(b) y 1(d) que la suma de dos números complejos puede ser un número real.

Muchas de las propiedades de los números reales también son válidas para los números complejos. A continuación veamos algunos ejemplos.

Propiedades asociativas de la adición y la multiplicación

Propiedades conmutativas de la adición y la multiplicación

Propiedad distributiva de la multiplicación sobre la adición

Observe a continuación cómo se usan estas propiedades cuando se multiplican dos números complejos .

$$\begin{aligned}
(a + bi)(c + di) &= a(c + di) + bi(c + di) && \text{Propiedad distributiva}\\
&= ac + (ad)i + (bc)i + (bd)i^2 && \text{Propiedad distributiva}\\
&= ac + (ad)i + (bc)i + (bd)(-1) && i^2 = -1\\
&= ac - bd + (ad)i + (bc)i && \text{Propiedad conmutativa}\\
&= (ac - bd) + (ad + bc)i && \text{Propiedad asociativa}
\end{aligned}$$

Más que tratar de memorizar esta regla de multiplicación, el lector debe simplemente recordar cómo se usa la propiedad distributiva para multiplicar dos números complejos.

Ejemplo 2 Multiplicar números complejos

a. $4(-2 + 3i) = 4(-2) + 4(3i)$ Propiedad distributiva

$= -8 + 12i$ Simplificar.

b. $(2 - i)(4 + 3i) = 2(4 + 3i) - i(4 + 3i)$ Propiedad distributiva

$= 8 + 6i - 4i - 3i^2$ Propiedad distributiva

$= 8 + 6i - 4i - 3(-1)$ $i^2 = -1$

$= (8 + 3) + (6i - 4i)$ Agrupar términos semejantes.

$= 11 + 2i$ Escribir en forma estándar.

c. $(3 + 2i)(3 - 2i) = 3(3 - 2i) + 2i(3 - 2i)$ Propiedad distributiva

$= 9 - 6i + 6i - 4i^2$ Propiedad distributiva

$= 9 - 6i + 6i - 4(-1)$ $i^2 = -1$

$= 9 + 4$ Simplificar.

$= 13$ Escribir en forma estándar.

d. $(3 + 2i)^2 = (3 + 2i)(3 + 2i)$ Cuadrado de un binomio

$= 3(3 + 2i) + 2i(3 + 2i)$ Propiedad distributiva

$= 9 + 6i + 6i + 4i^2$ Propiedad distributiva

$= 9 + 6i + 6i + 4(-1)$ $i^2 = -1$

$= 9 + 12i - 4$ Simplificar.

$= 5 + 12i$ Escribir en forma estándar.

PUNTO *de repaso* Ahora trate de hacer el Ejercicio 31.

Tip de estudio

El procedimiento descrito líneas antes es semejante a multiplicar dos polinomios y combinar términos semejantes, como en el método FOIL que se ve en el Apéndice A.3. Por ejemplo, se puede usar el método FOIL para multiplicar dos números complejos del Ejemplo 2(b).

F O I L

$(2 - i)(4 + 3i) = 8 + 6i - 4i - 3i^2$

Conjugados complejos

Observe en el Ejemplo 2(c) que el producto de dos números complejos puede ser un número real. Esto ocurre con pares de números complejos de la forma $a + bi$ y $a - bi$, llamados **conjugados complejos.**

$$\begin{aligned}(a + bi)(a - bi) &= a^2 - abi + abi - b^2i^2 \\ &= a^2 - b^2(-1) \\ &= a^2 + b^2\end{aligned}$$

Ayuda de álgebra

En el Apéndice A.2 se pueden comparar conjugados complejos con el método para racionalizar denominadores.

Ejemplo 3 Multiplicar conjugados

Multiplique cada número complejo por su conjugado complejo.

a. $1 + i$ **b.** $4 - 3i$

Solución

a. El conjugado complejo de $1 + i$ es $1 - i$.

$$(1 + i)(1 - i) = 1^2 - i^2 = 1 - (-1) = 2$$

b. El conjugado complejo de $4 - 3i$ es $4 + 3i$.

$$(4 - 3i)(4 + 3i) = 4^2 - (3i)^2 = 16 - 9i^2 = 16 - 9(-1) = 25$$

PUNTO *de repaso* Ahora trate de hacer el Ejercicio 41.

Tip de estudio

Observe que cuando se multiplican el numerador y el denominador de un cociente de números complejos por

$$\frac{c - di}{c - di}$$

en realidad se está multiplicando el cociente por una forma de 1. No se está cambiando la expresión original, sino que sólo se crea una expresión equivalente a la original.

Para escribir el cociente de $a + bi$ y $c + di$ en forma estándar, donde c y d no son cero ambas, multiplique el numerador y denominador por el conjugado complejo del *denominador* para obtener

$$\begin{aligned}\frac{a + bi}{c + di} &= \frac{a + bi}{c + di}\left(\frac{c - di}{c - di}\right) \\ &= \frac{(ac + bd) + (bc - ad)i}{c^2 + d^2}.\end{aligned}$$

Forma estándar

Ejemplo 4 Escribir un cociente de números complejos en forma estándar

$$\begin{aligned}\frac{2 + 3i}{4 - 2i} &= \frac{2 + 3i}{4 - 2i}\left(\frac{4 + 2i}{4 + 2i}\right) && \text{Multiplicar numerador y denominador por el conjugado complejo del denominador.} \\ &= \frac{8 + 4i + 12i + 6i^2}{16 - 4i^2} && \text{Expandir.} \\ &= \frac{8 - 6 + 16i}{16 + 4} && i^2 = -1 \\ &= \frac{2 + 16i}{20} && \text{Simplificar.} \\ &= \frac{1}{10} + \frac{4}{5}i && \text{Escribir en forma estándar.}\end{aligned}$$

PUNTO *de repaso* Ahora trate de hacer el Ejercicio 53.

Soluciones complejas de ecuaciones cuadráticas

Cuando se usa la fórmula cuadrática para resolver una ecuación cuadrática, a veces se obtiene un resultado como $\sqrt{-3}$, que sabemos no es un número real. Al factorizar $i = \sqrt{-1}$, se puede escribir este número en forma estándar.

$$\sqrt{-3} = \sqrt{3(-1)} = \sqrt{3}\sqrt{-1} = \sqrt{3}i$$

El número $\sqrt{3}i$ se llama *raíz cuadrada principal* de -3.

Ayuda de álgebra

En el Apéndice A.5 se pueden repasar las técnicas para usar la fórmula cuadrática.

ATENCIÓN

La definición de raíz cuadrada principal usa la regla

$$\sqrt{ab} = \sqrt{a}\sqrt{b}$$

para $a > 0$ y $b < 0$. Esta regla no es válida si *tanto a como b* son negativas. Por ejemplo,

$$\begin{aligned}\sqrt{-5}\sqrt{-5} &= \sqrt{5(-1)}\sqrt{5(-1)}\\ &= \sqrt{5}i\sqrt{5}i\\ &= \sqrt{25}i^2\\ &= 5i^2 = -5\end{aligned}$$

mientras que

$$\sqrt{(-5)(-5)} = \sqrt{25} = 5.$$

Para evitar problemas con raíces cuadradas de números negativos, asegúrese de convertir números complejos a forma estándar *antes* de multiplicar.

Raíz cuadrada principal de un número negativo

Si a es un número positivo, la **raíz cuadrada principal** del número negativo $-a$ está definida como

$$\sqrt{-a} = \sqrt{a}i.$$

Ejemplo 5 Escribir números complejos en forma estándar

a. $\sqrt{-3}\sqrt{-12} = \sqrt{3}i\sqrt{12}i = \sqrt{36}i^2 = 6(-1) = -6$

b. $\sqrt{-48} - \sqrt{-27} = \sqrt{48}i - \sqrt{27}i = 4\sqrt{3}i - 3\sqrt{3}i = \sqrt{3}i$

c. $\begin{aligned}\left(-1 + \sqrt{-3}\right)^2 &= \left(-1 + \sqrt{3}i\right)^2\\ &= (-1)^2 - 2\sqrt{3}i + \left(\sqrt{3}\right)^2(i^2)\\ &= 1 - 2\sqrt{3}i + 3(-1)\\ &= -2 - 2\sqrt{3}i\end{aligned}$

PUNTO *de repaso* Ahora trate de hacer el Ejercicio 63.

Ejemplo 6 Soluciones complejas de una ecuación cuadrática

Resuelva (a) $x^2 + 4 = 0$ y (b) $3x^2 - 2x + 5 = 0$.

Solución

a. $x^2 + 4 = 0$ Escribir la ecuación original.

$x^2 = -4$ Restar 4 de cada lado.

$x = \pm 2i$ Extraer raíces cuadradas.

b. $3x^2 - 2x + 5 = 0$ Escribir ecuación original.

$$x = \frac{-(-2) \pm \sqrt{(-2)^2 - 4(3)(5)}}{2(3)}$$ Fórmula cuadrática.

$$= \frac{2 \pm \sqrt{-56}}{6}$$ Simplificar.

$$= \frac{2 \pm 2\sqrt{14}i}{6}$$ Escribir $\sqrt{-56}$ en forma estándar.

$$= \frac{1}{3} \pm \frac{\sqrt{14}}{3}i$$ Escribir en forma estándar.

PUNTO *de repaso* Ahora trate de hacer el Ejercicio 69.

2.4 EJERCICIOS

En www.CalcChat.com vea las soluciones a los ejercicios impares.

VOCABULARIO

1. Relacione el tipo de número complejo con su definición.

(a) Número real (i) $a + bi, \quad a \neq 0, \quad b \neq 0$

(b) Número imaginario (ii) $a + bi, \quad a = 0, \quad b \neq 0$

(c) Número imaginario puro (iii) $a + bi, \quad b = 0$

En los Ejercicios 2-4, llene los espacios en blanco.

2. La unidad imaginaria i está definida como $i =$ _____, donde $i^2 =$ _____.

3. Si a es un número positivo, la raíz _____ _____ del número negativo $-a$ está definida como $\sqrt{-a} = \sqrt{a}\,i$.

4. Los números $a + bi$ y $a - bi$ se denominan _____ _____, y su producto es un número real $a^2 + b^2$.

HABILIDADES Y APLICACIONES

En los Ejercicios 5-8, encuentre los números reales a y b tales que la ecuación sea verdadera.

5. $a + bi = -12 + 7i$

6. $a + bi = 13 + 4i$

7. $(a - 1) + (b + 3)i = 5 + 8i$

8. $(a + 6) + 2bi = 6 - 5i$

En los Ejercicios 9-20, escriba el número complejo en forma estándar.

9. $8 + \sqrt{-25}$

10. $5 + \sqrt{-36}$

11. $2 - \sqrt{-27}$

12. $1 + \sqrt{-8}$

13. $\sqrt{-80}$

14. $\sqrt{-4}$

15. 14

16. 75

17. $-10i + i^2$

18. $-4i^2 + 2i$

19. $\sqrt{-0.09}$

20. $\sqrt{-0.0049}$

En los Ejercicios 21-30, realice la suma o resta y escriba el resultado en forma estándar.

21. $(7 + i) + (3 - 4i)$

22. $(13 - 2i) + (-5 + 6i)$

23. $(9 - i) - (8 - i)$

24. $(3 + 2i) - (6 + 13i)$

25. $\left(-2 + \sqrt{-8}\right) + \left(5 - \sqrt{-50}\right)$

26. $\left(8 + \sqrt{-18}\right) - \left(4 + 3\sqrt{2}i\right)$

27. $13i - (14 - 7i)$

28. $25 + (-10 + 11i) + 15i$

29. $-\left(\frac{3}{2} + \frac{5}{2}i\right) + \left(\frac{5}{3} + \frac{11}{3}i\right)$

30. $(1.6 + 3.2i) + (-5.8 + 4.3i)$

En los Ejercicios 31-40, realice la operación y escriba el resultado en forma estándar.

31. $(1 + i)(3 - 2i)$

32. $(7 - 2i)(3 - 5i)$

33. $12i(1 - 9i)$

34. $-8i(9 + 4i)$

35. $\left(\sqrt{14} + \sqrt{10}i\right)\left(\sqrt{14} - \sqrt{10}i\right)$

36. $\left(\sqrt{3} + \sqrt{15}i\right)\left(\sqrt{3} - \sqrt{15}i\right)$

37. $(6 + 7i)^2$

38. $(5 - 4i)^2$

39. $(2 + 3i)^2 + (2 - 3i)^2$

40. $(1 - 2i)^2 - (1 + 2i)^2$

En los Ejercicios 41-48, escriba el conjugado complejo del número complejo. A continuación multiplique el número por su conjugado complejo.

41. $9 + 2i$

42. $8 - 10i$

43. $-1 - \sqrt{5}i$

44. $-3 + \sqrt{2}i$

45. $\sqrt{-20}$

46. $\sqrt{-15}$

47. $\sqrt{6}$

48. $1 + \sqrt{8}$

En los Ejercicios 49-58, escriba el cociente en forma estándar.

49. $\dfrac{3}{i}$

50. $-\dfrac{14}{2i}$

51. $\dfrac{2}{4 - 5i}$

52. $\dfrac{13}{1 - i}$

53. $\dfrac{5 + i}{5 - i}$

54. $\dfrac{6 - 7i}{1 - 2i}$

55. $\dfrac{9 - 4i}{i}$

56. $\dfrac{8 + 16i}{2i}$

57. $\dfrac{3i}{(4 - 5i)^2}$

58. $\dfrac{5i}{(2 + 3i)^2}$

En los Ejercicios 59-62, realice la operación y escriba el resultado en forma estándar.

59. $\dfrac{2}{1 + i} - \dfrac{3}{1 - i}$

60. $\dfrac{2i}{2 + i} + \dfrac{5}{2 - i}$

61. $\dfrac{i}{3 - 2i} + \dfrac{2i}{3 + 8i}$

62. $\dfrac{1 + i}{i} - \dfrac{3}{4 - i}$

En los Ejercicios 63-68, escriba el número complejo en forma estándar.

63. $\sqrt{-6} \cdot \sqrt{-2}$ **64.** $\sqrt{-5} \cdot \sqrt{-10}$

65. $\left(\sqrt{-15}\right)^2$ **66.** $\left(\sqrt{-75}\right)^2$

67. $\left(3 + \sqrt{-5}\right)\left(7 - \sqrt{-10}\right)$ **68.** $\left(2 - \sqrt{-6}\right)^2$

En los Ejercicios 69-78, use la fórmula cuadrática para resolver la ecuación cuadrática.

69. $x^2 - 2x + 2 = 0$ **70.** $x^2 + 6x + 10 = 0$

71. $4x^2 + 16x + 17 = 0$ **72.** $9x^2 - 6x + 37 = 0$

73. $4x^2 + 16x + 15 = 0$ **74.** $16t^2 - 4t + 3 = 0$

75. $\frac{3}{2}x^2 - 6x + 9 = 0$ **76.** $\frac{7}{8}x^2 - \frac{3}{4}x + \frac{5}{16} = 0$

77. $1.4x^2 - 2x - 10 = 0$ **78.** $4.5x^2 - 3x + 12 = 0$

En los Ejercicios 79-88, simplifique el número complejo y escríbalo en forma estándar.

79. $-6i^3 + i^2$ **80.** $4i^2 - 2i^3$ **81.** $-14i^5$

82. $(-i)^3$ **83.** $\left(\sqrt{-72}\right)^3$ **84.** $\left(\sqrt{-2}\right)^6$

85. $\frac{1}{i^3}$ **86.** $\frac{1}{(2i)^3}$ **87.** $(3i)^4$ **88.** $(-i)^6$

89. IMPEDANCIA La oposición a la corriente en un circuito eléctrico se llama impedancia. La impedancia z en un circuito paralelo con dos trayectorias satisface la ecuación

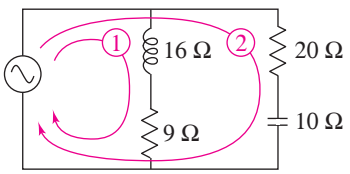
$$\frac{1}{z} = \frac{1}{z_1} + \frac{1}{z_2}$$

donde z_1 es la impedancia (en ohms) de la trayectoria 1 y z_2 es la impedancia de la trayectoria 2.

(a) La impedancia de cada trayectoria en un circuito paralelo se encuentra al sumar las impedancias de todos los componentes en la trayectoria. Use la tabla para hallar z_1 y z_2.

(b) Encuentre la impedancia z.

	Resistor	Inductor	Condensador
Símbolo	$a\Omega$	$b\Omega$	$c\Omega$
Impedancia	a	bi	$-ci$



90. Eleve al cubo cada uno de los números complejos siguientes.

(a) 2 (b) $-1 + \sqrt{3}i$ (c) $-1 - \sqrt{3}i$

91. Eleve a la cuarta potencia cada uno de los números complejos.

(a) 2 (b) -2 (c) $2i$ (d) $-2i$

92. Escriba cada una de las potencias de i como i, $-i$, 1 o -1.

(a) i^{40} (b) i^{25} (c) i^{50} (d) i^{67}

EXPLORACIÓN

¿VERDADERO O FALSO? En los Ejercicios 93-96, determine si la proposición es verdadera o falsa. Justifique su respuesta.

93. No hay número complejo que sea igual a su conjugado complejo.

94. $-i\sqrt{6}$ es una solución de $x^4 - x^2 + 14 = 56$.

95. $i^{44} + i^{150} - i^{74} - i^{109} + i^{61} = -1$

96. La suma de dos números complejos es siempre un número real.

97. RECONOCIMIENTO DE UN PATRÓN Complete lo siguiente.

$i^1 = i$ $i^2 = -1$ $i^3 = -i$ $i^4 = 1$

$i^5 =$ $i^6 =$ $i^7 =$ $i^8 =$

$i^9 =$ $i^{10} =$ $i^{11} =$ $i^{12} =$

¿Qué patrón observa? Escriba una breve descripción de cómo encontraría i elevada a cualquier potencia entera positiva.

98. TOQUE FINAL Considere las funciones

$f(x) = 2(x - 3)^2 - 4$ y $g(x) = -2(x - 3)^2 - 4$.

(a) Sin graficar ninguna función, determine si la gráfica de f y la de g tienen intersecciones con el eje x. Explique su razonamiento.

(b) Resuelve $f(x) = 0$ y $g(x) = 0$.

(c) Explique la forma en que los ceros de f y g están relacionados si sus gráficas tienen intersecciones con el eje x.

(d) Para la función $f(x) = a(x - h)^2 + k$, haga un enunciado general acerca de la forma en que a, h y k afectan si la gráfica de f tiene intersecciones con el eje x, y si los ceros de f son reales o complejos.

99. ANÁLISIS DE ERROR Describa el error.

$$\sqrt{-6}\sqrt{-6} = \sqrt{(-6)(-6)} = \sqrt{36} = 6$$

100. DEMOSTRACIÓN Demuestre que el conjugado complejo del producto de dos números complejos $a_1 + b_1i$ y $a_2 + b_2i$ es el producto de sus conjugados complejos.

101. DEMOSTRACIÓN Demuestre que el conjugado complejo de la suma de dos números complejos $a_1 + b_1i$ y $a_2 + b_2i$ es la suma de sus conjugados complejos.

2.5 Ceros de funciones polinomiales

Lo que debe aprender

- Usar el teorema fundamental del álgebra para determinar el número de ceros de funciones polinomiales.
- Hallar ceros racionales de funciones polinomiales.
- Hallar pares conjugados de ceros complejos.
- Hallar ceros de polinomios por factorización.
- Use la regla de los signos de Descartes y las reglas de límite superior e inferior para hallar ceros de polinomios.

Por qué debe aprenderlo

Hallar ceros de funciones polinomiales es una parte importante de resolver problemas de la vida real. Por ejemplo, en el Ejercicio 120 de la página 179 los ceros de una función polinomial puede ayudarnos a analizar la asistencia a juegos de baloncesto colegial para mujeres.

Teorema fundamental del álgebra

Ya sabemos que un polinomio de grado n puede tener como máximo n ceros reales. En el sistema de números complejos, este enunciado se puede mejorar. Esto es, en el sistema de números complejos toda función polinomial de grado n tiene *precisamente* n ceros. Este importante resultado se deriva del **teorema fundamental del álgebra,** propuesto primeramente por el matemático alemán Carl Friedrich Gauss (1777-1855).

Teorema fundamental del álgebra

Si $f(x)$ es un polinomio de grado n, donde $n > 0$, entonces f tiene al menos un cero en el sistema de números complejos.

Con el uso del teorema fundamental del álgebra y la equivalencia de ceros y factores, se obtiene el **teorema de factorización lineal**.

Teorema de factorización lineal

Si $f(x)$ es un polinomio de grado n, donde $n > 0$, entonces f tiene precisamente n factores lineales

$$f(x) = a_n(x - c_1)(x - c_2) \cdot \cdot \cdot (x - c_n)$$

donde $c_1, c_2, \ldots, c_n$ son números complejos.

Para una demostración del teorema de factorización lineal, vea la página 212.

Observe que el teorema fundamental del álgebra y el teorema de factorización lineal sólo nos dicen que los ceros o factores de un polinomio existen, no cómo hallarlos. Estos teoremas reciben el nombre de *teoremas de existencia.* Recuerde que los n ceros de una función polinomial pueden ser reales o complejos, y pueden estar repetidos.

Ejemplo 1 Ceros de funciones polinomiales

a. El polinomio de primer grado $f(x) = x - 2$ tiene exactamente *un* cero: $x = 2$.

b. Contando multiplicidad, la función polinomial de segundo grado

$$f(x) = x^2 - 6x + 9 = (x - 3)(x - 3)$$

tiene exactamente *dos* ceros: $x = 3$ y $x = 3$. (Esto se llama un *cero repetido*.)

c. La función polinomial de tercer grado

$$f(x) = x^3 + 4x = x(x^2 + 4) = x(x - 2i)(x + 2i)$$

tiene exactamente *tres* ceros: $x = 0$, $x = 2i$ y $x = -2i$.

d. La función polinomial de cuarto grado

$$f(x) = x^4 - 1 = (x - 1)(x + 1)(x - i)(x + i)$$

tiene exactamente cuatro ceros: $x = 1$, $x = -1$, $x = i$ y $x = -i$.

PUNTO *de repaso* Ahora trate de hacer el Ejercicio 9.

Tip de estudio

Recuerde que para hallar los ceros de una función $f(x)$, iguale $f(x)$ a 0 y de la ecuación resultante despeje x. Por ejemplo, la función del Ejemplo 1(a) tiene un cero en $x = 2$ porque

$$x - 2 = 0$$
$$x = 2.$$

Ayuda de álgebra

Los Ejemplos 1(b), 1(c) y 1(d) comprenden factorización de polinomios. En el Apéndice A.3, el lector puede repasar las técnicas para factorizar polinomios.

Prueba del cero racional

La **prueba del cero racional** relaciona los posibles ceros racionales de un polinomio (que tenga coeficientes enteros) con su coeficiente principal y con su término constante.

Prueba del cero racional

Si el polinomio $f(x) = a_n x^n + a_{n-1}x^{n-1} + \cdots + a_2 x^2 + a_1 x + a_0$ tiene coeficientes *enteros*, todo cero racional de f tiene la forma

$$\text{cero racional} = \frac{p}{q}$$

donde p y q no tienen factores comunes que no sea 1, y

p = un factor del término constante a_0

q = un factor del coeficiente principal a_n.

NOTA HISTÓRICA

Fogg Art Museum/Harvard University

Aun cuando no fueron contemporáneos, Jean Le Rond d'Alembert (1717-1783) trabajó independientemente de Carl Gauss para tratar de demostrar el teorema fundamental del álgebra. Su trabajo fue tal que, en Francia, ese teorema frecuentemente se conoce como teorema d'Alembert.

Para usar la prueba del cero racional, primero se debe hacer una lista de todos los números racionales cuyos numeradores sean factores del término constante y cuyos denominadores sean factores del coeficiente principal.

$$\text{Posibles ceros racionales} = \frac{\text{factores del término constante}}{\text{factores del coeficiente principal}}$$

Habiendo formado esta lista de *posibles ceros racionales*, use un método de prueba y error para determinar cuáles, si los hay, son ceros reales del polinomio. Observe que cuando el coeficiente principal es 1, los posibles ceros racionales son simplemente factores del término constante.

Ejemplo 2 Prueba del cero racional con coeficiente principal de 1

Encuentre los ceros racionales de

$$f(x) = x^3 + x + 1.$$

Solución

Como el coeficiente principal es 1, los posibles ceros racionales son ± 1, los factores del término constante. Al probar estos posibles ceros, se puede ver que ninguno funciona.

$$\begin{aligned} f(1) &= (1)^3 + 1 + 1 \\ &= 3 \\ f(-1) &= (-1)^3 + (-1) + 1 \\ &= -1 \end{aligned}$$

Por tanto, se puede concluir que el polinomio dado *no tiene* ceros racionales. Observe de la gráfica de f de la Figura 2.31 que f tiene un cero real entre -1 y 0. No obstante, por la prueba del cero racional, sabemos que este cero real *no es* un número racional.

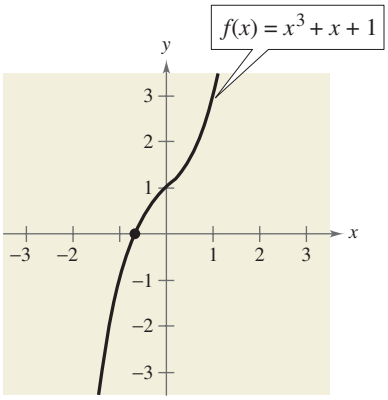


FIGURA 2.31

PUNTO *de repaso* Ahora trate de hacer el Ejercicio 15.

Tip de estudio

Cuando la lista de posibles ceros racionales sea pequeña, como en el Ejemplo 2, puede ser más rápido probar los ceros al evaluar la función. Cuando la lista de posibles ceros racionales sea grande, como en el Ejemplo 3, puede ser más rápido usar un método diferente para probar los ceros; por ejemplo, usar división sintética o trazar la gráfica.

Ayuda de álgebra

En la Sección 2.3 se pueden repasar las técnicas para división sintética.

Ejemplo 3 Prueba del cero racional con coeficiente principal de 1

Encuentre los ceros racionales de $f(x) = x^4 - x^3 + x^2 - 3x - 6$.

Solución

Como el coeficiente principal es 1, los posibles ceros racionales son los factores del término constante.

Posibles ceros racionales $\pm 1, \pm 2, \pm 3, \pm 6$

Al aplicar sucesivamente la división sintética, es posible determinar que $x = -1$ y $x = 2$ son los únicos dos ceros racionales.

$$\begin{array}{r|rrrrr} -1 & 1 & -1 & 1 & -3 & -6 \\ & & -1 & 2 & -3 & 6 \\ \hline & 1 & -2 & 3 & -6 & 0 \end{array} \quad \rightarrow \text{residuo 0, entonces } x = -1 \text{ es un cero.}$$

$$\begin{array}{r|rrrr} 2 & 1 & -2 & 3 & -6 \\ & & 2 & 0 & 6 \\ \hline & 1 & 0 & 3 & 0 \end{array} \quad \rightarrow \text{residuo 0, entonces } x = 2 \text{ es un cero.}$$

Por tanto, $f(x)$ se factoriza como

$$f(x) = (x + 1)(x - 2)(x^2 + 3).$$

Como el factor $(x^2 + 3)$ no produce ceros reales, se puede concluir que $x = -1$ y $x = 2$ son los únicos ceros *reales* de f, lo cual se verifica en la Figura 2.32.

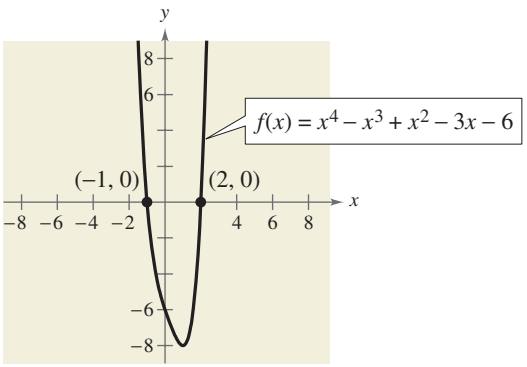


FIGURA 2.32

PUNTO de repaso Ahora trate de hacer el Ejercicio 19.

Si el coeficiente principal de un polinomio no es 1, la lista de posibles ceros racionales puede aumentar considerablemente. En tales casos, la búsqueda se puede acortar de varias formas: (1) usar una calculadora programable para agilizar los cálculos; (2) una gráfica, trazada ya sea manualmente o con una calculadora de gráficas, puede dar una buena estimación de la ubicación de los ceros; (3) el teorema del valor intermedio junto con una tabla generada por una calculadora de gráficas puede dar aproximaciones de ceros; y (4) la división sintética puede usarse para probar los posibles ceros racionales.

Hallar el primer cero es a veces la parte más difícil. Después de eso, la búsqueda se simplifica al trabajar con el polinomio de grado más bajo obtenido mediante la división sintética, como se muestra en el Ejemplo 3.

Ejemplo 4 Uso de la prueba del cero racional

Encuentre los ceros racionales de $f(x) = 2x^3 + 3x^2 - 8x + 3$.

Solución

El coeficiente principal es 2 y el término constante es 3.

$$\textit{Posibles ceros racionales: } \frac{\text{Factores de 3}}{\text{Factores de 2}} = \frac{\pm 1, \pm 3}{\pm 1, \pm 2} = \pm 1, \pm 3, \pm\frac{1}{2}, \pm\frac{3}{2}$$

Por división sintética se puede determinar que $x = 1$ es un cero racional.

$$\begin{array}{r|cccc} 1 & 2 & 3 & -8 & 3 \\ & & 2 & 5 & -3 \\ \hline & 2 & 5 & -3 & 0 \end{array}$$

Por tanto, $f(x)$ se factoriza como

$$\begin{aligned} f(x) &= (x - 1)(2x^2 + 5x - 3) \\ &= (x - 1)(2x - 1)(x + 3) \end{aligned}$$

y se concluye que los ceros racionales de f son $x = 1$, $x = \frac{1}{2}$ y $x = -3$.

PUNTO *de repaso* Ahora trate de hacer el Ejercicio 25.

Tip de estudio

Recuerde que cuando usted trate de hallar los ceros racionales de una función polinomial con numerosos ceros racionales posibles, como en el Ejemplo 4, debe usar prueba y error. No hay un método algebraico rápido para determinar cuál de las posibilidades es un cero real, pero trazar una gráfica puede ser útil.

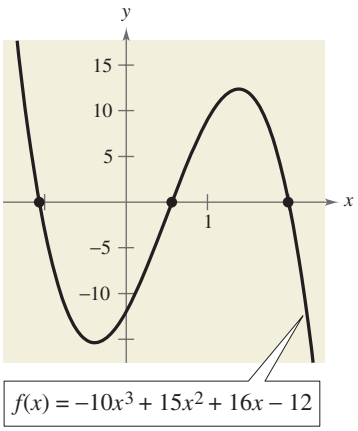


FIGURA 2.33

Recuerde de la Sección 2.2 que si $x = a$ es un cero de la función polinomial f, entonces $x = a$ es una solución de la ecuación con polinomios $f(x) = 0$.

Ejemplo 5 Resolver una ecuación polinomial

Encuentre todas las soluciones reales de $-10x^3 + 15x^2 + 16x - 12 = 0$.

Solución

El coeficiente principal es -10 y el término constante es -12.

$$\textit{Posibles soluciones racionales } \frac{\text{Factores de } -12}{\text{Factores de } -10} = \frac{\pm 1, \pm 2, \pm 3, \pm 4, \pm 6, \pm 12}{\pm 1, \pm 2, \pm 5, \pm 10}$$

Con tantas posibilidades (32, de hecho), merece la pena detenerse y trazar una gráfica. De la Figura 2.33, parece que tres soluciones razonables serían $x = -\frac{6}{5}$, $x = \frac{1}{2}$ y $x = 2$. Probarlas por división sintética demuestra que $x = 2$ es la única solución racional. Por tanto, tenemos

$$(x - 2)(-10x^2 - 5x + 6) = 0.$$

Usando la fórmula cuadrática para el segundo factor, se encuentra que las dos soluciones adicionales son números irracionales.

$$x = \frac{-5 - \sqrt{265}}{20} \approx -1.0639$$

y

$$x = \frac{-5 + \sqrt{265}}{20} \approx 0.5639$$

PUNTO *de repaso* Ahora trate de hacer el Ejercicio 31.

Ayuda de álgebra

En el Apéndice A.5 se pueden repasar las técnicas para usar la fórmula cuadrática.

Pares conjugados

En los Ejemplos 1(c) y 1(d), observe que los pares de ceros complejos son **conjugados**. Esto es, son de la forma $a + bi$ y $a - bi$.

Los ceros complejos se presentan en pares conjugados

Sea $f(x)$ una función polinomial que tiene coeficientes reales. Si $a + bi$, donde $b \neq 0$, es un cero de la función, el conjugado $a - bi$ también es un cero de la función.

Asegúrese de ver que este resultado sea verdadero sólo si la función polinomial tiene coeficientes reales. Por ejemplo, el resultado se aplica a la función dada por $f(x) = x^2 + 1$, pero no a la función dada por $g(x) = x - i$.

Ejemplo 6 Hallar un polinomio con ceros dados

Encuentre una función polinomial de cuarto grado con coeficientes reales que tiene -1, -1 y $3i$ como sus ceros.

Solución

Como $3i$ es un cero y además se indica que el polinomio tiene coeficientes reales, sabemos que el conjugado $-3i$ también debe ser un cero. Por tanto, del teorema de factorización lineal, $f(x)$ se puede escribir como

$$f(x) = a(x + 1)(x + 1)(x - 3i)(x + 3i).$$

Para mayor sencillez, sea $a = 1$ para obtener

$$\begin{aligned} f(x) &= (x^2 + 2x + 1)(x^2 + 9) \\ &= x^4 + 2x^3 + 10x^2 + 18x + 9. \end{aligned}$$

PUNTO *de repaso* Ahora trate de hacer el Ejercicio 45.

Factorización de un polinomio

El teorema de factorización lineal muestra que se puede escribir cualquier polinomio de n-ésimo grado como el producto de n factores lineales.

$$f(x) = a_n(x - c_1)(x - c_2)(x - c_3) \cdot \cdot \cdot (x - c_n)$$

No obstante, este resultado incluye la posibilidad de que algunos de los valores de c_i sean complejos. El siguiente teorema dice que incluso si no deseamos trabajar con "factores complejos," todavía se puede escribir $f(x)$ como el producto de factores lineales y cuadráticos, o ambos. Para una demostración de este teorema, vea Demostraciones en matemáticas en la página 212.

Factores de un polinomio

Todo polinomio de grado $n > 0$ con coeficientes reales se puede escribir como el producto de factores lineales y cuadráticos con coeficientes reales, donde los factores cuadráticos no tienen ceros reales.

Se dice que un factor cuadrático con ceros reales es *primo* o ***irreducible en los reales***. Asegúrese de ver que esto no es igual a ser *irreducible en los racionales*. Por ejemplo, la expresión cuadrática $x^2 + 1 = (x - i)(x + i)$ es irreducible en los reales (y, por consiguiente, en los racionales). Por otra parte, la expresión cuadrática $x^2 - 2 = \left(x - \sqrt{2}\right)\left(x + \sqrt{2}\right)$ es irreducible en los racionales pero reducible en los reales.

Ejemplo 7 Hallar los ceros de una función polinomial

Encuentre todos los ceros de $f(x) = x^4 - 3x^3 + 6x^2 + 2x - 60$ dado que $1 + 3i$ es cero de f.

Solución algebraica

Como los ceros complejos se presentan en pares conjugados, sabemos que $1 - 3i$ también es cero de f. Esto significa que los siguientes

$$[x - (1 + 3i)] \quad \text{y} \quad [x - (1 - 3i)]$$

son factores de f. Al multiplicar estos dos factores resulta:

$$\begin{aligned}[x - (1 + 3i)][x - (1 - 3i)] &= [(x - 1) - 3i][(x - 1) + 3i] \\ &= (x - 1)^2 - 9i^2 \\ &= x^2 - 2x + 10.\end{aligned}$$

Usando división larga se puede dividir $x^2 - 2x + 10$ en f para obtener lo siguiente.

$$\begin{array}{r} x^2 - x - 6 \\ x^2 - 2x + 10 \overline{)\, x^4 - 3x^3 + 6x^2 + 2x - 60} \\ \underline{x^4 - 2x^3 + 10x^2} \\ -x^3 - 4x^2 + 2x \\ \underline{-x^3 + 2x^2 - 10x} \\ -6x^2 + 12x - 60 \\ \underline{-6x^2 + 12x - 60} \\ 0 \end{array}$$

Por tanto, tenemos

$$\begin{aligned}f(x) &= (x^2 - 2x + 10)(x^2 - x - 6) \\ &= (x^2 - 2x + 10)(x - 3)(x + 2)\end{aligned}$$

y podemos concluir que los ceros de f son $x = 1 + 3i$, $x = 1 - 3i$, $x = 3$ y $x = -2$.

PUNTO *de repaso* Ahora trate de hacer el Ejercicio 55.

Solución gráfica

Como los ceros complejos siempre se presentan en pares conjugados, sabemos que $1 - 3i$ también es un cero de f. Como el polinomio es de cuarto grado, sabemos que como máximo hay otros dos ceros de la función. Use una calculadora de gráficas para graficar

$$y = x^4 - 3x^3 + 6x^2 + 2x - 60$$

como se ve en la Figura 2.34.

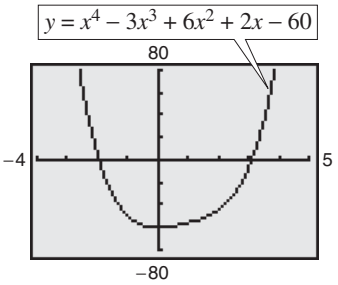


FIGURA 2.34

Se puede ver que -2 y 3 parecen ser ceros de la gráfica de la función. Use el comando *zero* o *root* o los comandos *zoom* y *trace* de la calculadora para confirmar que $x = -2$ y $x = 3$ son ceros de la gráfica. Por tanto, se puede concluir que los ceros de f son $x = 1 + 3i$, $x = 1 - 3i$, $x = 3$ y $x = -2$.

Ayuda de álgebra

En la Sección 2.3 se pueden repasar las técnicas para división larga con polinomios.

En el Ejemplo 7, si no nos dijeran que $1 + 3i$ es un cero de f, aún podríamos hallar todos los ceros de la función mediante división sintética para determinar los ceros reales -2 y 3. Así, podríamos factorizar el polinomio como $(x + 2)(x - 3)(x^2 - 2x + 10)$. Finalmente, con el uso de la fórmula cuadrática, podríamos determinar que los ceros son $x = -2$, $x = 3$, $x = 1 + 3i$ y $x = 1 - 3i$.

Tip de estudio

En el Ejemplo 8, la función polinomial de quinto grado tiene tres ceros reales. En tales casos, se pueden usar los comandos *zoom* y *trace* o el comando *zero* o *root* de una calculadora de gráficas para aproximar los ceros reales. También se pueden usar estos ceros reales para determinar algebraicamente los ceros complejos.

El Ejemplo 8 muestra la forma de hallar todos los ceros de una función polinomial, incluidos los ceros complejos.

Ejemplo 8 Hallar los ceros de una función polinomial

Escriba $f(x) = x^5 + x^3 + 2x^2 - 12x + 8$ como el producto de factores lineales y haga una lista de todos sus ceros.

Solución

Los posibles ceros racionales son $\pm 1, \pm 2, \pm 4$ y ± 8. La división sintética produce lo siguiente.

$$\begin{array}{r|rrrrrr} 1 & 1 & 0 & 1 & 2 & -12 & 8 \\ & & 1 & 1 & 2 & 4 & -8 \\ \hline & 1 & 1 & 2 & 4 & -8 & 0 \end{array} \longrightarrow 1 \text{ es un cero.}$$

$$\begin{array}{r|rrrrr} -2 & 1 & 1 & 2 & 4 & -8 \\ & & -2 & 2 & -8 & 8 \\ \hline & 1 & -1 & 4 & -4 & 0 \end{array} \longrightarrow -2 \text{ es un cero.}$$

Por tanto, tenemos

$$\begin{aligned} f(x) &= x^5 + x^3 + 2x^2 - 12x + 8 \\ &= (x - 1)(x + 2)(x^3 - x^2 + 4x - 4). \end{aligned}$$

Se puede factorizar $x^3 - x^2 + 4x - 4$ como $(x - 1)(x^2 + 4)$, y al factorizar $x^2 + 4$ como

$$\begin{aligned} x^2 - (-4) &= \left(x - \sqrt{-4}\right)\left(x + \sqrt{-4}\right) \\ &= (x - 2i)(x + 2i) \end{aligned}$$

se obtiene

$$f(x) = (x - 1)(x - 1)(x + 2)(x - 2i)(x + 2i)$$

que da los siguientes cinco ceros de f.

$$x = 1, x = 1, x = -2, x = 2i \quad \text{y} \quad x = -2i$$

En la gráfica de f mostrada en la Figura 2.35 se puede ver que los ceros reales son los únicos que aparecen como intersecciones con el eje x. Observe que $x = 1$ es un cero repetido.

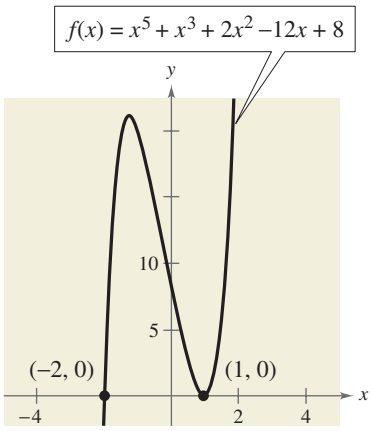


FIGURA 2.35

PUNTO *de repaso* Ahora trate de hacer el Ejercicio 77.

TECNOLOGÍA

Se puede usar el comando *table* de una calculadora de gráficas para ayudar a determinar cuál de los posibles ceros racionales son ceros del polinomio del Ejemplo 8. La tabla debe ponerse en el modo *ask* (pedir). A continuación ingrese cada uno de los posibles ceros racionales en ella. Cuando haga esto, verá que hay dos ceros racionales, -2 y 1, como se ilustra a la derecha.

X	Y1
-8	-33048
-4	-1000
-2	0
-1	20
1	0
2	32
4	1080

X=4

Otras pruebas para los ceros de polinomios

Sabemos que una función polinomial de n-ésimo grado o como se ha puesto, función polinomial de grado n puede tener *a lo sumo* n ceros reales. Desde luego, muchos polinomios de grado n no tienen tantos ceros reales. Por ejemplo $f(x) = x^2 + 1$ no tiene ceros reales, y $f(x) = x^3 + 1$ tiene sólo un cero real. El siguiente teorema, llamado **regla de los signos de Descartes,** arroja más luz sobre el número de ceros reales de un polinomio.

Regla de los signos de Descartes

Sea $f(x) = a_n x^n + a_{n-1}x^{n-1} + \cdots + a_2x^2 + a_1x + a_0$ un polinomio con coeficientes reales y $a_0 \neq 0$.

1. El número de *ceros reales positivos* de f es igual al número de variaciones en signo de $f(x)$ o menor que ese número en un entero par.
2. El número de *ceros reales negativos* de f es igual al número de variaciones en signo de $f(-x)$ o menor que ese número en un entero par.

Una **variación en signo** significa que dos coeficientes consecutivos tienen signos contrarios.

Al usar la regla de Descartes de los signos, un cero de multiplicidad k debe contarse como k ceros. Por ejemplo, el polinomio $x^3 - 3x + 2$ tiene dos variaciones en signo y, por tanto, tiene o dos ceros reales positivos o ningún cero real positivo. Como

$$x^3 - 3x + 2 = (x - 1)(x - 1)(x + 2)$$

se puede ver que los dos ceros reales positivos son $x = 1$ de multiplicidad 2.

Ejemplo 9 Uso de la regla de Descartes de los signos

Describa los ceros reales positivos de

$$f(x) = 3x^3 - 5x^2 + 6x - 4.$$

Solución

El polinomio original tiene *tres* variaciones en signo.

$$f(x) = 3x^3 - 5x^2 + 6x - 4$$

(+ a −, + a −)

El polinomio

$$f(-x) = 3(-x)^3 - 5(-x)^2 + 6(-x) - 4$$
$$= -3x^3 - 5x^2 - 6x - 4$$

no tiene variaciones en signo. En consecuencia, por la regla de Descartes de los signos, el polinomio $f(x) = 3x^3 - 5x^2 + 6x - 4$ tiene tres ceros reales positivos o un cero real positivo, y no tiene ceros reales negativos. En la gráfica de la Figura 2.36 se puede ver que la función tiene sólo un cero real, en $x = 1$.

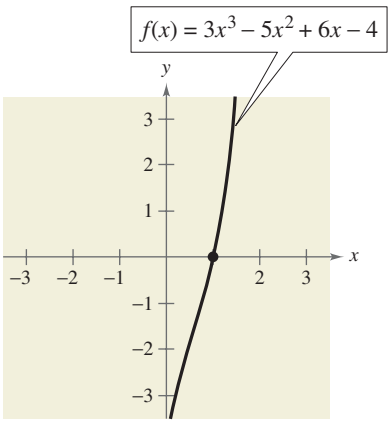


FIGURA 2.36

PUNTO *de repaso* Ahora trate de hacer el Ejercicio 87.

Otra prueba para los ceros de una función polinomial está relacionada con el patrón de signos del último renglón del arreglo de la división sintética. Esta prueba puede darnos una cota superior o inferior de los ceros reales de f. Un número real b es una **cota superior** para los ceros reales de f si no hay ceros mayores a b. Del mismo modo, b es una **cota inferior** si no hay ceros reales de f menores a b.

Reglas de cotas superior e inferior

Sea $f(x)$ un polinomio con coeficientes reales y un coeficiente principal positivo. Suponga que $f(x)$ está dividido entre $x - c$, usando división sintética.

1. Si $c > 0$ y cada número del último renglón es positivo o cero, c es una **cota superior** para los ceros reales de f.
2. Si $c < 0$ y los números del último renglón son alternativamente positivos y negativos (cero entradas cuentan como positivos o negativos), c es una **cota inferior** para los ceros reales de f.

Ejemplo 10 Hallar los ceros de una función polinomial

Encuentre los ceros reales de $f(x) = 6x^3 - 4x^2 + 3x - 2$.

Solución

Los posibles ceros reales son como sigue.

$$\frac{\text{Factores de 2}}{\text{Factores de 6}} = \frac{\pm 1, \pm 2}{\pm 1, \pm 2, \pm 3, \pm 6} = \pm 1, \pm\frac{1}{2}, \pm\frac{1}{3}, \pm\frac{1}{6}, \pm\frac{2}{3}, \pm 2$$

El polinomio original $f(x)$ tiene tres variaciones en signo. El polinomio

$$\begin{aligned} f(-x) &= 6(-x)^3 - 4(-x)^2 + 3(-x) - 2 \\ &= -6x^3 - 4x^2 - 3x - 2 \end{aligned}$$

no tiene variaciones en signo. Como resultado de estos dos hallazgos, se puede aplicar la regla de Descartes de los signos para concluir que hay tres ceros reales positivos o un cero real positivo y ningún cero negativo. Intentar con $x = 1$ produce lo siguiente.

$$\begin{array}{r|cccc} 1 & 6 & -4 & 3 & -2 \\ & & 6 & 2 & 5 \\ \hline & 6 & 2 & 5 & 3 \end{array}$$

En consecuencia, $x = 1$ no es un cero, pero como el último renglón tiene todas sus entradas positivas, sabemos que $x = 1$ es una cota superior para los ceros reales. Por tanto, se puede restringir la búsqueda a ceros entre 0 y 1. Por prueba y error, se puede determinar que $x = \frac{2}{3}$ es un cero. Entonces,

$$f(x) = \left(x - \frac{2}{3}\right)(6x^2 + 3).$$

Como $6x^2 + 3$ no tiene ceros reales, se deduce que $x = \frac{2}{3}$ es el único cero real.

PUNTO *de repaso* Ahora trate de hacer el Ejercicio 95.

Antes de concluir esta sección, a continuación veamos dos sugerencias adicionales que pueden ayudar a hallar los ceros reales de un polinomio.

1. Si los términos de $f(x)$ tienen un monomio factor común, debe ser factorizado antes de aplicar las pruebas expuestas en esta sección. Por ejemplo, al escribir

$$\begin{aligned} f(x) &= x^4 - 5x^3 + 3x^2 + x \\ &= x(x^3 - 5x^2 + 3x + 1) \end{aligned}$$

se puede ver que $x = 0$ es un cero de f y que los ceros restantes se pueden obtener al analizar el factor cúbico.

2. Si el lector puede hallar todos los ceros excepto dos de $f(x)$, siempre podrá usar la fórmula cuadrática en el factor cuadrático restante. Por ejemplo, si puede escribir

$$\begin{aligned} f(x) &= x^4 - 5x^3 + 3x^2 + x \\ &= x(x - 1)(x^2 - 4x - 1) \end{aligned}$$

puede aplicar la fórmula cuadrática a $x^2 - 4x - 1$ para concluir que los dos ceros restantes son $x = 2 + \sqrt{5}$ y $x = 2 - \sqrt{5}$.

Ejemplo 11 Uso de un modelo con polinomios

Supongamos que usted está diseñando conjuntos de piezas para hacer velas. Cada conjunto tiene 25 pulgadas cúbicas de cera para velas y un molde para hacer una vela en forma de pirámide. Usted desea que la altura de la vela sea 2 pulgadas menor a la longitud de cada lado de la base cuadrada de la vela. ¿Cuáles deben ser las dimensiones del molde para velas?

Solución

El volumen de una pirámide es $V = \frac{1}{3}Bh$, donde B es el área de la base y h es la altura. El área de la base es x^2 y la altura es $(x - 2)$. Por tanto, el volumen de la pirámide es $V = \frac{1}{3}x^2(x - 2)$. Sustituyendo 25 por el volumen dará lo siguiente.

$$25 = \frac{1}{3}x^2(x - 2) \qquad \text{Sustituir 25 por } V.$$

$$75 = x^3 - 2x^2 \qquad \text{Multiplicar cada lado por 3.}$$

$$0 = x^3 - 2x^2 - 75 \qquad \text{Escribir en forma general.}$$

Las posibles soluciones racionales son $x = \pm 1, \pm 3, \pm 5, \pm 15, \pm 25, \pm 75$. Use división sintética para probar algunas de las posibles soluciones. Observe que, en este caso, tiene sentido probar sólo valores positivos de x. Usando división sintética, se puede determinar que $x = 5$ es una solución.

5	1	−2	0	−75
		5	15	75
	1	3	15	0

Las otras dos soluciones, que satisfacen $x^2 + 3x + 15 = 0$, son imaginarias y se pueden descartar. Es posible concluir que la base del molde para velas debe medir 5 pulgadas por 5 pulgadas y que la altura del molde debe ser $5 - 2 = 3$ pulgadas.

PUNTO *de repaso* Ahora trate de hacer el Ejercicio 115.

2.5 EJERCICIOS

En www.CalcChat.com vea las soluciones a los ejercicios impares.

VOCABULARIO: Llene los espacios en blanco.

1. El _____ _____ del _____ dice que si $f(x)$ es un polinomio de grado n $(n > 0)$, entonces f tiene al menos un cero en el sistema de los números complejos.
2. El _____ _____ _____ _____ expresa que si $f(x)$ es un polinomio de grado n $(n > 0)$, entonces f tiene precisamente n factores lineales, $f(x) = a_n(x - c_1)(x - c_2) \cdot \cdot \cdot (x - c_n)$, donde $c_1, c_2, \ldots, c_n$ son números complejos.
3. La prueba que da una lista de los posibles ceros racionales de una función polinomial se denomina prueba _____ _____ _____.
4. Si $a + bi$ es un cero complejo de un polinomio con coeficientes reales, entonces así lo es su _____, $a - bi$.
5. Todo polinomio de grado $n > 0$ con coeficientes reales se puede escribir como el producto de _____ y _____factores con coeficientes reales, donde los factores _____ no tienen ceros reales.
6. Se dice que un factor cuadrático que no se puede factorizar más como producto de factores lineales que contienen números reales es _____ en los _____.
7. El teorema que se puede usar para determinar los posibles números de ceros reales positivos y ceros reales negativos de una función se denomina _____ _____ de _____.
8. Un número real b es una cota _____ para ceros reales de f si no hay ceros reales menores a b, y es una cota _____ si no hay ceros reales mayores a b.

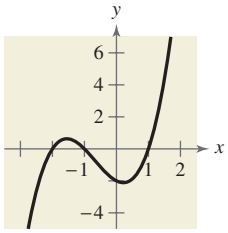
HABILIDADES Y APLICACIONES

En los Ejercicios 9-14, encuentre todos los ceros de la función.

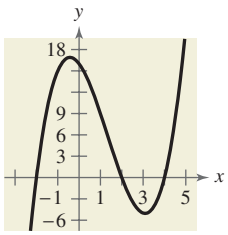
9. $f(x) = x(x - 6)^2$
10. $f(x) = x^2(x + 3)(x^2 - 1)$
11. $g(x) = (x - 2)(x + 4)^3$
12. $f(x) = (x + 5)(x - 8)^2$
13. $f(x) = (x + 6)(x + i)(x - i)$
14. $h(t) = (t - 3)(t - 2)(t - 3i)(t + 3i)$

En los Ejercicios 15-18, use la prueba del cero racional para poner en lista todos los posibles ceros racionales de f. Verifique que los ceros de f mostrados en la gráfica estén contenidos en la lista.

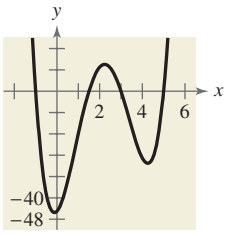
15. $f(x) = x^3 + 2x^2 - x - 2$



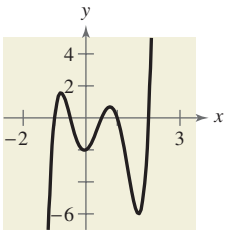
16. $f(x) = x^3 - 4x^2 - 4x + 16$



17. $f(x) = 2x^4 - 17x^3 + 35x^2 + 9x - 45$



18. $f(x) = 4x^5 - 8x^4 - 5x^3 + 10x^2 + x - 2$



En los Ejercicios 19-28, encuentre todos los ceros racionales de la función.

19. $f(x) = x^3 - 6x^2 + 11x - 6$
20. $f(x) = x^3 - 7x - 6$
21. $g(x) = x^3 - 4x^2 - x + 4$
22. $h(x) = x^3 - 9x^2 + 20x - 12$
23. $h(t) = t^3 + 8t^2 + 13t + 6$
24. $p(x) = x^3 - 9x^2 + 27x - 27$
25. $C(x) = 2x^3 + 3x^2 - 1$
26. $f(x) = 3x^3 - 19x^2 + 33x - 9$
27. $f(x) = 9x^4 - 9x^3 - 58x^2 + 4x + 24$
28. $f(x) = 2x^4 - 15x^3 + 23x^2 + 15x - 25$

En los Ejercicios 29-32, encuentre todas las soluciones reales de la ecuación polinomial.

29. $z^4 + z^3 + z^2 + 3z - 6 = 0$

30. $x^4 - 13x^2 - 12x = 0$

31. $2y^4 + 3y^3 - 16y^2 + 15y - 4 = 0$

32. $x^5 - x^4 - 3x^3 + 5x^2 - 2x = 0$

En los Ejercicios 33-36, (a) haga una lista de los posibles ceros racionales de f, (b) trace la gráfica de f de modo que algunos de los posibles ceros del inciso (a) se puedan desatender, y luego (c) determine todos los ceros reales de f.

33. $f(x) = x^3 + x^2 - 4x - 4$

34. $f(x) = -3x^3 + 20x^2 - 36x + 16$

35. $f(x) = -4x^3 + 15x^2 - 8x - 3$

36. $f(x) = 4x^3 - 12x^2 - x + 15$

En los Ejercicios 37-40, (a) haga una lista de los posibles ceros racionales de f, (b) use una calculadora de gráficas para graficar f de modo que algunos de los posibles ceros del inciso (a) se puedan desatender, y luego (c) determine todos los ceros reales de f.

37. $f(x) = -2x^4 + 13x^3 - 21x^2 + 2x + 8$

38. $f(x) = 4x^4 - 17x^2 + 4$

39. $f(x) = 32x^3 - 52x^2 + 17x + 3$

40. $f(x) = 4x^3 + 7x^2 - 11x - 18$

ANÁLISIS GRÁFICO En los Ejercicios 41-44, (a) use el comando *zero* o *root* de una calculadora de gráficas para aproximar los ceros de la función, con una precisión de tres lugares decimales, (b) determine uno de los ceros exactos (use división sintética para verificar su resultado) y (c) factorice completamente el polinomio.

41. $f(x) = x^4 - 3x^2 + 2$ **42.** $P(t) = t^4 - 7t^2 + 12$

43. $h(x) = x^5 - 7x^4 + 10x^3 + 14x^2 - 24x$

44. $g(x) = 6x^4 - 11x^3 - 51x^2 + 99x - 27$

En los Ejercicios 45-50, encuentre una función polinomial con coeficientes reales que tenga los ceros dados. (Hay numerosas respuestas correctas.)

45. $1, 5i$ **46.** $4, -3i$

47. $2, 5 + i$ **48.** $5, 3 - 2i$

49. $\frac{2}{3}, -1, 3 + \sqrt{2}i$ **50.** $-5, -5, 1 + \sqrt{3}i$

En los Ejercicios 51-54, escriba el polinomio (a) como producto de factores que son irreducibles en los *racionales*, (b) como producto de factores lineales y cuadráticos que son irreducibles en los reales y (c) en forma completamente factorizada.

51. $f(x) = x^4 + 6x^2 - 27$

52. $f(x) = x^4 - 2x^3 - 3x^2 + 12x - 18$
(*Pista*: un factor es $x^2 - 6$.)

53. $f(x) = x^4 - 4x^3 + 5x^2 - 2x - 6$
(*Pista:* un factor es $x^2 - 2x - 2$.)

54. $f(x) = x^4 - 3x^3 - x^2 - 12x - 20$
(*Pista:* un factor es $x^2 + 4$.)

En los Ejercicios 55-62, use el cero dado para hallar todos los ceros de la función.

	Función	*Cero*
55.	$f(x) = x^3 - x^2 + 4x - 4$	$2i$
56.	$f(x) = 2x^3 + 3x^2 + 18x + 27$	$3i$
57.	$f(x) = 2x^4 - x^3 + 49x^2 - 25x - 25$	$5i$
58.	$g(x) = x^3 - 7x^2 - x + 87$	$5 + 2i$
59.	$g(x) = 4x^3 + 23x^2 + 34x - 10$	$-3 + i$
60.	$h(x) = 3x^3 - 4x^2 + 8x + 8$	$1 - \sqrt{3}i$
61.	$f(x) = x^4 + 3x^3 - 5x^2 - 21x + 22$	$-3 + \sqrt{2}i$
62.	$f(x) = x^3 + 4x^2 + 14x + 20$	$-1 - 3i$

En los Ejercicios 63-80, encuentre todos los ceros de la función y escriba el polinomio como producto de factores lineales.

63. $f(x) = x^2 + 36$ **64.** $f(x) = x^2 - x + 56$

65. $h(x) = x^2 - 2x + 17$ **66.** $g(x) = x^2 + 10x + 17$

67. $f(x) = x^4 - 16$ **68.** $f(y) = y^4 - 256$

69. $f(z) = z^2 - 2z + 2$

70. $h(x) = x^3 - 3x^2 + 4x - 2$

71. $g(x) = x^3 - 3x^2 + x + 5$

72. $f(x) = x^3 - x^2 + x + 39$

73. $h(x) = x^3 - x + 6$

74. $h(x) = x^3 + 9x^2 + 27x + 35$

75. $f(x) = 5x^3 - 9x^2 + 28x + 6$

76. $g(x) = 2x^3 - x^2 + 8x + 21$

77. $g(x) = x^4 - 4x^3 + 8x^2 - 16x + 16$

78. $h(x) = x^4 + 6x^3 + 10x^2 + 6x + 9$

79. $f(x) = x^4 + 10x^2 + 9$

80. $f(x) = x^4 + 29x^2 + 100$

En los Ejercicios 81-86, encuentre todos los ceros de la función. Cuando haya una lista amplia de posibles ceros racionales, use una calculadora de gráficas para graficar la función para descartar cualesquiera ceros racionales que obviamente no sean ceros de la función.

81. $f(x) = x^3 + 24x^2 + 214x + 740$

82. $f(s) = 2s^3 - 5s^2 + 12s - 5$

83. $f(x) = 16x^3 - 20x^2 - 4x + 15$

84. $f(x) = 9x^3 - 15x^2 + 11x - 5$

85. $f(x) = 2x^4 + 5x^3 + 4x^2 + 5x + 2$

86. $g(x) = x^5 - 8x^4 + 28x^3 - 56x^2 + 64x - 32$

En los Ejercicios 87-94, use la regla de Descartes de los signos para determinar el posible número de ceros positivos y negativos de la función.

87. $g(x) = 2x^3 - 3x^2 - 3$ **88.** $h(x) = 4x^2 - 8x + 3$

89. $h(x) = 2x^3 + 3x^2 + 1$ **90.** $h(x) = 2x^4 - 3x + 2$

91. $g(x) = 5x^5 - 10x$

92. $f(x) = 4x^3 - 3x^2 + 2x - 1$

93. $f(x) = -5x^3 + x^2 - x + 5$

94. $f(x) = 3x^3 + 2x^2 + x + 3$

En los Ejercicios 95-98, use división sintética para verificar las cotas superior e inferior de los ceros reales de f.

95. $f(x) = x^3 + 3x^2 - 2x + 1$

(a) Superior: $x = 1$ (b) Inferior: $x = -4$

96. $f(x) = x^3 - 4x^2 + 1$

(a) Superior: $x = 4$ (b) Inferior: $x = -1$

97. $f(x) = x^4 - 4x^3 + 16x - 16$

(a) Superior: $x = 5$ (b) Inferior: $x = -3$

98. $f(x) = 2x^4 - 8x + 3$

(a) Superior: $x = 3$ (b) Inferior: $x = -4$

En los Ejercicios 99-102, encuentre todos los ceros reales de la función.

99. $f(x) = 4x^3 - 3x - 1$

100. $f(z) = 12z^3 - 4z^2 - 27z + 9$

101. $f(y) = 4y^3 + 3y^2 + 8y + 6$

102. $g(x) = 3x^3 - 2x^2 + 15x - 10$

En los Ejercicios 103-106, encuentre todos los ceros racionales de la función polinomial.

103. $P(x) = x^4 - \frac{25}{4}x^2 + 9 = \frac{1}{4}(4x^4 - 25x^2 + 36)$

104. $f(x) = x^3 - \frac{3}{2}x^2 - \frac{23}{2}x + 6 = \frac{1}{2}(2x^3 - 3x^2 - 23x + 12)$

105. $f(x) = x^3 - \frac{1}{4}x^2 - x + \frac{1}{4} = \frac{1}{4}(4x^3 - x^2 - 4x + 1)$

106. $f(z) = z^3 + \frac{11}{6}z^2 - \frac{1}{2}z - \frac{1}{3} = \frac{1}{6}(6z^3 + 11z^2 - 3z - 2)$

En los Ejercicios 107-110, relacione la función cúbica con los números de ceros racionales e irracionales.

(a) Ceros racionales: 0; ceros irracionales: 1

(b) Ceros racionales: 3; ceros irracionales: 0

(c) Ceros racionales: 1; ceros irracionales: 2

(d) Ceros racionales: 1; ceros irracionales: 0

107. $f(x) = x^3 - 1$ **108.** $f(x) = x^3 - 2$

109. $f(x) = x^3 - x$ **110.** $f(x) = x^3 - 2x$

111. GEOMETRÍA Se ha de construir una caja abierta a partir de una pieza rectangular de material, de 15 centímetros por 9 centímetros, cortando para ello cuadrados iguales de las esquinas y volteando hacia arriba los lados.

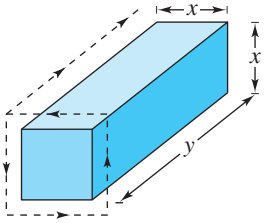
(a) Represente con x la longitud de los lados de los cuadrados removidos. Trace un diagrama que muestre los cuadrados removidos de la pieza original de material y las dimensiones resultantes de la caja abierta.

(b) Use el diagrama para escribir el volumen V de la caja como función de x. Determine el dominio de la función.

(c) Trace la gráfica de la función y aproxime las dimensiones de la caja que darán un volumen máximo.

(d) Encuentre valores de x tales que $V = 56$. ¿Cuál de estos valores es una imposibilidad física en la construcción de la caja? Explique.

112. GEOMETRÍA Un paquete rectangular que ha de enviarse en un servicio de entregas (vea figura) puede tener una longitud y contorno (perímetro de una sección transversal), combinados, de 120 pulgadas.



(a) Escriba una función $V(x)$ que represente el volumen del paquete.

(b) Use una calculadora de gráficas para graficar la función y aproximar las dimensiones del paquete que dará un volumen máximo.

(c) Encuentre valores de x tales que $V = 13\,500$. ¿Cuál de estos valores es una imposibilidad física en la construcción del paquete? Explique.

113. COSTO DE PUBLICIDAD Una compañía que produce reproductores de archivos MP3 estima que la utilidad P (en dólares) por vender un modelo particular está dada por

$$P = -76x^3 + 4830x^2 - 320\,000, \quad 0 \le x \le 60$$

donde x es el gasto en publicidad (en decenas de miles de dólares). Usando este modelo, encuentre la menor de las dos cantidades en publicidad que dará una utilidad de \$2 500 000.

114. COSTO DE PUBLICIDAD Una compañía que manufactura bicicletas estima que la utilidad P (en dólares) por vender un modelo particular está dada por

$$P = -45x^3 + 2500x^2 - 275\,000, \quad 0 \le x \le 50$$

donde x es el gasto en publicidad (en decenas de miles de dólares). Con el uso de este modelo, encuentre la menor de dos cantidades en publicidad que dará una utilidad de \$800 000.

115. GEOMETRÍA Una tolva para almacenamiento de alimentos a granel, con dimensiones de 2 pies por 3 pies por 4 pies, necesita aumentarse en tamaño para contener cinco veces la cantidad de alimento que la tolva actual. (Suponga que cada una de las dimensiones se aumenta en la misma cantidad.)

(a) Escriba una función que represente el volumen V de la nueva tolva.

(b) Encuentre las dimensiones de la nueva tolva.

116. GEOMETRÍA Un fabricante desea agrandar un taller ya existente para manufacturas, de modo que el área total de piso sea 1.5 veces la del taller actual. El área de piso del taller actual es rectangular y mide 250 pies por 160 pies. El fabricante desea aumentar cada una de estas dimensiones en la misma cantidad.

(a) Escriba una función que represente la nueva área A de piso.

(b) Encuentre las dimensiones del nuevo piso.

(c) Otra alternativa es aumentar la longitud del piso actual en una cantidad que sea el doble del aumento en el ancho del piso. El área total de piso es 1.5 veces el del taller actual. Repita los incisos (a) y (b) usando estos criterios.

117. COSTO El costo C (en miles de dólares) de ordenar y transportar componentes empleados en manufacturar un producto está dado por

$$C = 100\left(\frac{200}{x^2} + \frac{x}{x + 30}\right), \quad x \geq 1$$

donde x es el tamaño del pedido (en cientos). En cálculo, se puede demostrar que el costo es mínimo cuando

$$3x^3 - 40x^2 - 2400x - 36\,000 = 0.$$

Use una calculadora para aproximar el tamaño óptimo del pedido a la centena de unidades más cercana.

118. ALTURA DE UNA PELOTA DE BÉISBOL Una pelota de béisbol es lanzada hacia arriba desde una altura de 6 pies, con una rapidez inicial de 48 pies por segundo, y su altura h (en pies) es

$$h(t) = -16t^2 + 48t + 6, \quad 0 \leq t \leq 3$$

donde t es el tiempo (en segundos). Nos indican que la pelota alcanza una altura de 64 pies. ¿Es esto posible?

119. UTILIDADES La ecuación de demanda para cierto producto es $p = 140 - 0.0001x$, donde p es el precio unitario (en dólares) del producto y x es el número de unidades producidas y vendidas. La ecuación de costo para el producto es $C = 80x + 150\,000$, donde C es el costo total (en dólares) y x es el número de unidades producidas. La utilidad total obtenida por producir y vender x unidades es $P = R - C = xp - C$. Usted está trabajando en el departamento de *marketing* de la compañía que produce este producto, y se le pide que determine un precio p que dará una utilidad de 9 millones de dólares. ¿Es esto posible? Explique.

120. ATLETISMO La asistencia A (en millones) a juegos de baloncesto colegial femenil de la NCAA, para los años 2000 a 2007, se muestra en la tabla siguiente. (Fuente: National Collegiate Athletic Association, Indianapolis, IN)

Año	Asistencia, A
2000	8.7
2001	8.8
2002	9.5
2003	10.2
2004	10.0
2005	9.9
2006	9.9
2007	10.9

(a) Use una calculadora de gráficas para crear una gráfica de dispersión de los datos. Con t represente el año, con $t = 0$ correspondiente a 2000.

(b) Use el comando *regression* de la calculadora de gráficas para hallar un modelo cuártico para los datos.

(c) Grafique el modelo y la gráfica de dispersión en la misma pantalla. ¿Qué tan bien se ajusta el modelo a los datos?

(d) De acuerdo con el modelo de el inciso (b), ¿en cuál(es) año(s) la asistencia fue al menos de 10 millones?

(e) De acuerdo con el modelo, ¿la asistencia continuará en aumento? Explique.

EXPLORACIÓN

¿VERDADERO O FALSO? En los Ejercicios 121 y 122, determine si la proposición es verdadera o falsa. Justifique su respuesta.

121. Es posible que una función polinomial de tercer grado, con coeficientes enteros, no tenga ceros reales.

122. Si $x = -i$ es un cero de la función dada por

$$f(x) = x^3 + ix^2 + ix - 1$$

entonces $x = i$ también debe ser un cero de f.

PIÉNSELO En los Ejercicios 123-128, determine (si es posible) los ceros de la función g si la función f tiene ceros en $x = r_1$, $x = r_2$ y $x = r_3$.

123. $g(x) = -f(x)$

124. $g(x) = 3f(x)$

125. $g(x) = f(x - 5)$

126. $g(x) = f(2x)$

127. $g(x) = 3 + f(x)$

128. $g(x) = f(-x)$

129. PIÉNSELO Una función f polinomial de tercer grado tiene ceros reales -2, $\frac{1}{2}$ y 3, y su coeficiente principal es negativo. Escriba una ecuación de f. Trace la gráfica de f. ¿Cuántas funciones polinomiales son posibles para f?

130. TOQUE FINAL Use una calculadora de gráficas para graficar la función dada por $f(x) = x^4 - 4x^2 + k$ para diferentes valores de k. Encuentre valores de k tales que los ceros de f satisfagan las características especificadas. (Algunos incisos no tienen respuestas únicas.)

(a) Cuatro ceros reales

(b) Dos ceros reales, cada uno de multiplicidad 2

(c) Dos ceros reales y dos ceros complejos

(d) Cuatro ceros complejos

(e) ¿Las respuestas de la (a) a la (d) cambiarán para la función g, donde $g(x) = f(x - 2)$?

(f) ¿Las respuestas de la (a) a la (d) cambiarán para la función g, donde $g(x) = f(2x)$?

131. PIÉNSELO Trace la gráfica de una función polinomial de quinto grado cuyo coeficiente principal sea positivo y que tenga un cero en $x = 3$ de multiplicidad 2.

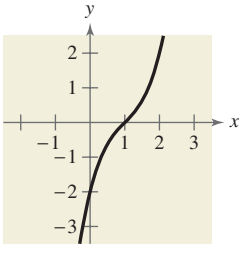
132. ESCRITURA Compile una lista de todas las diversas técnicas para factorizar un polinomio que hemos estudiado hasta aquí en el texto. Dé un ejemplo que ilustre cada una de ellas y escriba un párrafo que explique cuándo es apropiado el uso de cada técnica.

133. PIÉNSELO Sea $y = f(x)$ un polinomio cuártico con coeficiente principal $a = 1$ and $f(i) = f(2i) = 0$. Escriba una ecuación para f.

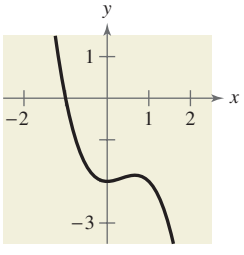
134. PIÉNSELO Sea $y = f(x)$ un polinomio cúbico con coeficiente principal $a = -1$ y $f(2) = f(i) = 0$. Escriba una ecuación para f.

En los Ejercicios 135 y 136, se ilustra la gráfica de una función polinomial cúbica $y = f(x)$. Se sabe que uno de los ceros es $1 + i$. Escriba una ecuación para f.

135.



136.



137. Use la siguiente información de la tabla para contestar cada una de las preguntas.

Intervalo	Valor de $f(x)$
$(-\infty, -2)$	Positivo
$(-2, 1)$	Negativo
$(1, 4)$	Negativo
$(4, \infty)$	Positivo

(a) ¿Cuáles son los tres ceros reales de la función polinomial f?

(b) ¿Qué se puede decir del comportamiento de la gráfica de f en $x = 1$?

(c) ¿Cuál es el grado mínimo posible de f? Explique. ¿El grado de f puede ser siempre impar? Explique.

(d) ¿El coeficiente principal de f es positivo o negativo? Explique.

(e) Escriba una ecuación para f. (Hay numerosas respuestas correctas.)

(f) Trace una gráfica de la ecuación que usted escribió en el inciso (e).

138. (a) Encuentre una función cuadrática f (con coeficientes enteros) que tenga $\pm\sqrt{b}i$ como ceros. Suponga que b es un entero positivo.

(b) Encuentre una función cuadrática f (con coeficientes enteros) que tenga $a \pm bi$ como ceros. Suponga que b es un entero positivo.

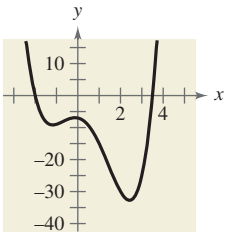
139. RAZONAMIENTO GRÁFICO La gráfica de una de las siguientes funciones se muestra a continuación. Identifique la función mostrada en ella. Explique por qué cada una de las otras no es la función correcta. Use una calculadora de gráficas para verificar su resultado.

(a) $f(x) = x^2(x + 2)(x - 3.5)$

(b) $g(x) = (x + 2)(x - 3.5)$

(c) $h(x) = (x + 2)(x - 3.5)(x^2 + 1)$

(d) $k(x) = (x + 1)(x + 2)(x - 3.5)$



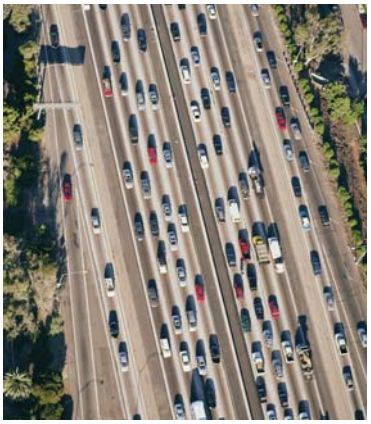
2.6 Funciones racionales

Lo que debe aprender

- Hallar los dominios de funciones racionales.
- Hallar las asíntotas verticales y horizontales de gráficas de funciones racionales.
- Analizar y trazar gráficas de funciones racionales.
- Trazar gráficas de funciones racionales que tengan asíntotas diagonales.
- Usar funciones racionales para modelar y resolver problemas de la vida real.

Por qué debe aprenderlo

Se pueden usar funciones racionales para modelar y resolver problemas de la vida real relacionados con negocios. Por ejemplo, en el Ejercicio 83 de la página 183 se utiliza una función racional para modelar la rapidez media en una distancia.



Mike Powell/Getty Images

Introducción

Una **función racional** es un cociente de funciones polinomiales. Se puede escribir en la forma

$$f(x) = \frac{N(x)}{D(x)}$$

donde $N(x)$ y $D(x)$ son polinomios y $D(x)$ no es el polinomio cero.

En general, el *dominio* de una función racional de x incluye todos los números reales excepto valores de x que hagan que el denominador sea cero. Buena parte de la exposición de funciones racionales se centrará en su comportamiento gráfico cerca de valores de x excluidos del dominio.

Ejemplo 1 Hallar el dominio de una función racional

Encuentre el dominio de la función recíproca $f(x) = \frac{1}{x}$ y discuta el comportamiento de f cerca de cualesquier valores de x excluidos.

Solución

Como el denominador es cero cuando $x = 0$, el dominio de f es todos los números reales excepto $x = 0$. Para determinar el comportamiento de f cerca de este valor excluido, evalúe $f(x)$ a la izquierda y a la derecha de $x = 0$, como se indica en las tablas siguientes.

x	-1	-0.5	-0.1	-0.01	-0.001	$\longrightarrow 0$
$f(x)$	-1	-2	-10	-100	-1000	$\longrightarrow -\infty$

x	$0 \longleftarrow$	0.001	0.01	0.1	0.5	1
$f(x)$	$\infty \longleftarrow$	1000	100	10	2	1

Observe que cuando x se aproxima a 0 *por la izquierda*, $f(x)$ disminuye sin límite. En contraste, cuando x se aproxima a 0 *por la derecha*, $f(x)$ aumenta sin límite. La gráfica de f se muestra en la Figura 2.37.

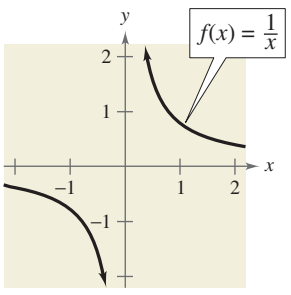


FIGURA 2.37

PUNTO *de repaso* Ahora trate de hacer el Ejercicio 5.

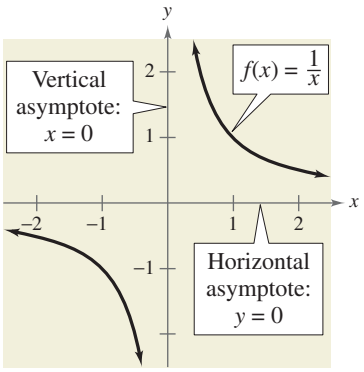


FIGURA 2.38

Asíntotas verticales y horizontales

En el Ejemplo 1, el comportamiento de f cerca de $x = 0$ se denota como sigue.

$$\underbrace{f(x) \longrightarrow -\infty \text{ cuando } x \longrightarrow 0^-}_{\substack{f(x) \text{ disminuye sin límite cuando} \\ x \text{ se aproxima a 0 por la izquierda.}}} \qquad \underbrace{f(x) \longrightarrow \infty \text{ cuando } x \longrightarrow 0^+}_{\substack{f(x) \text{ aumenta sin límite cuando} \\ x \text{ se aproxima a 0 por la derecha.}}}$$

La recta $x = 0$ es una **asíntota vertical** de la gráfica de f, como se ve en la Figura 2.38. En esta figura se puede ver que la gráfica de f también tiene una **asíntota horizontal**, la recta $y = 0$. Esto significa que los valores de $f(x) = \dfrac{1}{x}$ se aproximan a cero cuando x aumenta o disminuye sin límite.

$$\underbrace{f(x) \longrightarrow 0 \text{ cuando } x \longrightarrow -\infty}_{\substack{f(x) \text{ se aproxima a 0 cuando } x \\ \text{disminuye sin límite.}}} \qquad \underbrace{f(x) \longrightarrow 0 \text{ cuando } x \longrightarrow \infty}_{\substack{f(x) \text{ se aproxima a 0 cuando } x \\ \text{aumenta sin límite.}}}$$

Definiciones de asíntotas verticales y horizontales

1. La recta $x = a$ es una **asíntota vertical** de la gráfica de f si

$$f(x) \longrightarrow \infty \quad \text{o} \quad f(x) \longrightarrow -\infty$$

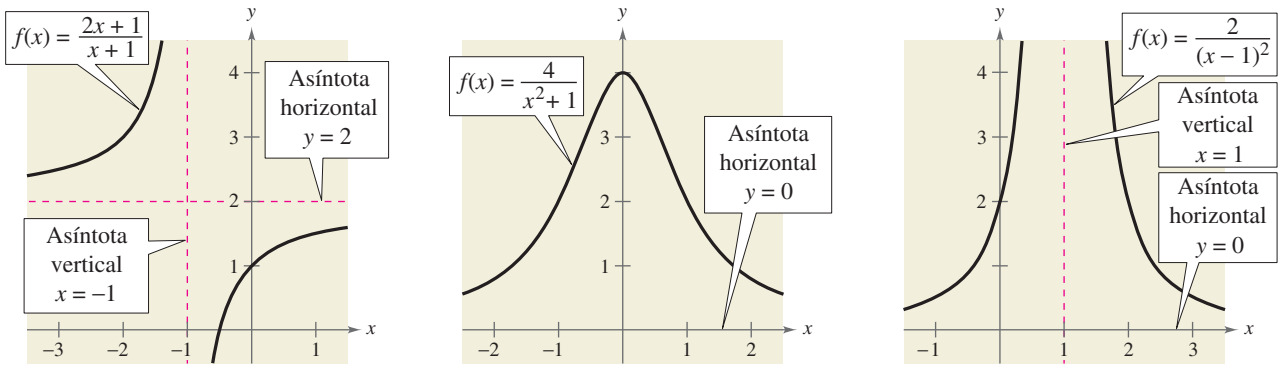
cuando $x \longrightarrow a$, ya sea por la derecha o por la izquierda.

2. La recta $y = b$ es una **asíntota horizontal** de la gráfica de f si

$$f(x) \longrightarrow b$$

cuando $x \longrightarrow \infty$ o $x \longrightarrow -\infty$.

Eventualmente (cuando $x \longrightarrow \infty$ o $x \longrightarrow -\infty$), la distancia entre la asíntota horizontal y los puntos en la gráfica debe aproximarse a cero. La Figura 2.39 muestra las asíntotas vertical y horizontal de las gráficas de tres funciones racionales.



(a) (b) (c)

FIGURA 2.39

Las gráficas de $f(x) = \dfrac{1}{x}$ en la Figura 2.38 y $f(x) = \dfrac{2x + 1}{x + 1}$ en la Figura 2.39(a) son **hipérbolas**. Estudiaremos hipérbolas en la Sección 10.4.

Asíntotas verticales y horizontales de una función racional

Sea f la función racional dada por

$$f(x) = \frac{N(x)}{D(x)} = \frac{a_n x^n + a_{n-1}x^{n-1} + \cdots + a_1 x + a_0}{b_m x^m + b_{m-1}x^{m-1} + \cdots + b_1 x + b_0}$$

donde $N(x)$ y $D(x)$ no tienen factores comunes.

1. La gráfica de f tiene asíntotas *verticales* en los ceros de $D(x)$.
2. La gráfica de f tiene una asíntota *horizontal*, o ninguna, determinada al comparar los grados de $N(x)$ y $D(x)$.
   - **a.** Si $n < m$, la gráfica de f tiene la recta $y = 0$ (el eje x) como asíntota horizontal.
   - **b.** Si $n = m$, la gráfica de f tiene la recta $y = \frac{a_n}{b_m}$ (razón entre los coeficientes principales) como asíntota horizontal.
   - **c.** Si $n > m$, la gráfica de f no tiene asíntota horizontal.

Ejemplo 2 Hallar asíntotas verticales y horizontales

Encuentre todas las asíntotas verticales y horizontales de la gráfica de cada función racional.

a. $f(x) = \frac{2x^2}{x^2 - 1}$ **b.** $f(x) = \frac{x^2 + x - 2}{x^2 - x - 6}$

Solución

a. Para esta función racional, el grado del numerador es *igual* al del denominador. El coeficiente principal del numerador es 2 y el del denominador es 1, por lo cual la gráfica tiene la recta $y = 2$ como asíntota horizontal. Para hallar cualesquiera asíntotas verticales, iguale a 0 el denominador y despeje x de la ecuación resultante.

$$x^2 - 1 = 0 \qquad \text{Igualar a 0 el denominador.}$$
$$(x + 1)(x - 1) = 0 \qquad \text{Factorizar.}$$
$$x + 1 = 0 \Rightarrow x = -1 \qquad \text{Igualar a 0 el primer factor.}$$
$$x - 1 = 0 \Rightarrow x = 1 \qquad \text{Igualar a 0 el segundo factor.}$$

Esta ecuación tiene dos soluciones reales, $x = -1$ y $x = 1$, de modo que la gráfica tiene las rectas $x = -1$ y $x = 1$ como asíntotas verticales. La gráfica de la función se muestra en la Figura 2.40.

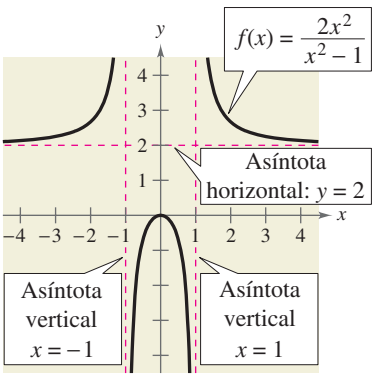


FIGURA 2.40

b. Para esta función racional, el grado del numerador es *igual* al del denominador. El coeficiente principal tanto del numerador como del denominador es 1, por lo que la gráfica tiene la recta $y = 1$ como asíntota horizontal. Para hallar cualesquiera asíntotas verticales, primero factorice el numerador y el denominador como sigue.

$$f(x) = \frac{x^2 + x - 2}{x^2 - x - 6} = \frac{(x - 1)\cancel{(x + 2)}}{\cancel{(x + 2)}(x - 3)} = \frac{x - 1}{x - 3}, \quad x \neq -2$$

Al igualar a cero el denominador $x - 3$ (de la función simplificada), se puede determinar que la gráfica tiene la recta $x = 3$ como asíntota vertical.

PUNTO de repaso Ahora trate de hacer el Ejercicio 13.

Ayuda de álgebra

En el Apéndice A.3 se pueden repasar técnicas para factorizar.

Analizar gráficas de funciones racionales

Para trazar la gráfica de una función racional, use la siguiente guía.

Tip de estudio

El lector puede probar la simetría al graficar funciones racionales, en especial para funciones racionales simples. Recuerde de la Sección 1.6 que la gráfica de la función recíproca

$$f(x) = \frac{1}{x}$$

es simétrica respecto al origen.

Guía para analizar gráficas de funciones racionales

Sea $f(x) = \dfrac{N(x)}{D(x)}$, donde $N(x)$ y $D(x)$ son polinomios.

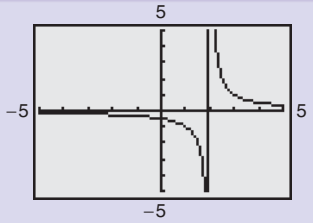
1. Simplifique f, si es posible.
2. Encuentre y determine la intersección con el eje y (si la hay) al evaluar $f(0)$.
3. Encuentre los ceros del numerador (si los hay) al resolver la ecuación $N(x) = 0$. A continuación determine las intersecciones correspondientes con el eje x.
4. Encuentre los ceros del denominador (si los hay) al resolver la ecuación $D(x) = 0$. A continuación trace las asíntotas verticales correspondientes.
5. Encuentre y trace la asíntota horizontal (si la hay) usando la regla para hallar la asíntota horizontal de una función racional.
6. Determine cuando menos un punto *entre* y un punto *más allá* de cada intersección con el eje x y la asíntota vertical.
7. Use curvas lisas para completar la gráfica entre y más allá de las asíntotas verticales.

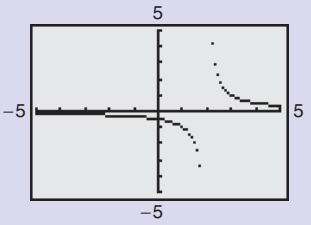
TECNOLOGÍA

Algunas calculadoras de gráficas tienen dificultades para graficar funciones racionales que tienen asíntotas verticales. A veces, la calculadora enlaza partes de la gráfica que se supone no deben unirse. Por ejemplo, la pantalla superior de la derecha muestra la gráfica de

$$f(x) = \frac{1}{x - 2}.$$

Observe que la gráfica debe estar formada de dos partes no enlazadas, una a la izquierda de $x = 2$ y la otra a la derecha de $x = 2$. Para eliminar este problema, se puede intentar cambiar el modo *dot* de la calculadora. El problema con esto es que la gráfica queda entonces representada como un conjunto de puntos (como se ve en la pantalla inferior de la derecha) y no como una curva lisa.





El concepto de *intervalos de prueba* de la Sección 2.2 se puede ampliar para graficar funciones racionales. Para hacer esto, use el hecho de que una función racional puede cambiar de signos sólo en sus ceros y sus valores no definidos (los valores de x para los que su denominador es cero). Entre dos ceros consecutivos del numerador y el denominador, una función racional debe ser enteramente positiva o enteramente negativa. Esto significa que cuando los ceros del numerador y el denominador de una función racional se ponen en orden, dividen la recta numérica real en intervalos de prueba en los que la función no tiene cambios de signo. Se escoge un valor representativo de x para determinar si el valor de la función racional es positivo (la gráfica se encuentra arriba del eje x) o negativo (la gráfica se encuentra abajo del eje x).

Tip de estudio

Se pueden usar transformaciones para ayudar a trazar gráficas de funciones racionales. Por ejemplo, la gráfica de g del Ejemplo 3 es un estiramiento vertical y un desplazamiento hacia la derecha de la gráfica de $f(x) = 1/x$ porque

$$g(x) = \frac{3}{x-2} = 3\left(\frac{1}{x-2}\right) = 3f(x-2).$$

Ejemplo 3 Trazar la gráfica de una función racional

Trace la gráfica de $g(x) = \dfrac{3}{x-2}$ y exprese su dominio.

Solución

Intersección con el eje y: $\left(0, -\frac{3}{2}\right)$, porque $g(0) = -\frac{3}{2}$

Intersección con el eje x: Ninguna, porque $3 \neq 0$

Asíntota vertical: $x = 2$, cero de denominador

Asíntota horizontal: $y = 0$, porque el grado de $N(x)$ < grado de $D(x)$

Puntos adicionales:

Intervalo de prueba	Valor representativo de x	Valor de g	Signo	Punto en la gráfica
$(-\infty, 2)$	-4	$g(-4) = -0.5$	Negativo	$(-4, -0.5)$
$(2, \infty)$	3	$g(3) = 3$	Positivo	$(3, 3)$

Al localizar las intersecciones con los ejes, asíntotas y unos cuantos puntos adicionales se puede obtener la gráfica que se ilustra en la Figura 2.41. El dominio de f es el de todos los números reales excepto $x = 2$.

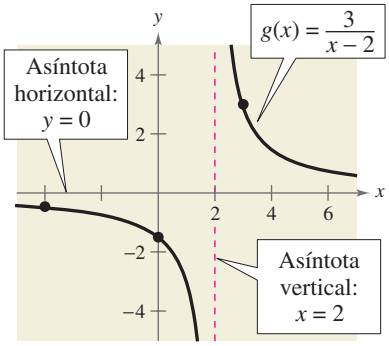


FIGURA 2.41

PUNTO *de repaso* Ahora trate de hacer el Ejercicio 31.

Ejemplo 4 Trazar la gráfica de una función racional

Trace la gráfica de

$$f(x) = \frac{2x-1}{x}$$

y exprese su dominio.

Solución

Intersección con el eje y: Ninguna, porque $x = 0$ no está en el dominio

Intersección con el eje x: $\left(\frac{1}{2}, 0\right)$, porque $2x - 1 = 0$

Asíntota vertical: $x = 0$, cero de denominador

Asíntota horizontal: $y = 2$, porque el grado de $N(x)$ = grado de $D(x)$

Puntos adicionales:

Intervalo de prueba	Valor representativo de x	Valor de f	Signo	Punto en la gráfica
$(-\infty, 0)$	-1	$f(-1) = 3$	Positivo	$(-1, 3)$
$\left(0, \frac{1}{2}\right)$	$\frac{1}{4}$	$f\left(\frac{1}{4}\right) = -2$	Negativo	$\left(\frac{1}{4}, -2\right)$
$\left(\frac{1}{2}, \infty\right)$	4	$f(4) = 1.75$	Positivo	$(4, 1.75)$

Al localizar las intersecciones, con los ejes, asíntotas y unos cuantos puntos adicionales se puede obtener la gráfica que se ilustra en la Figura 2.42. El dominio de f es el de todos los números reales, excepto $x = 0$.

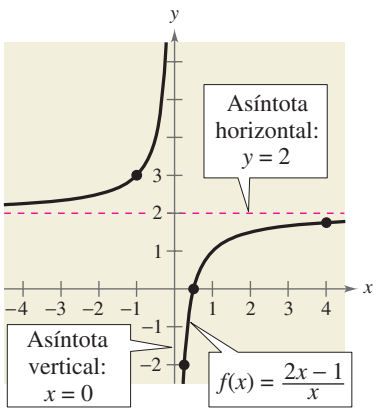


FIGURA 2.42

PUNTO *de repaso* Ahora trate de hacer el Ejercicio 35.

Ejemplo 5 Trazar la gráfica de una función racional

Trace la gráfica de $f(x) = x/(x^2 - x - 2)$.

Solución

Factorizando el denominador, tenemos $f(x) = \dfrac{x}{(x + 1)(x - 2)}$.

Intersección con el eje y: $(0, 0)$, porque $f(0) = 0$

Intersección con el eje x: $(0, 0)$

Asíntotas verticales: $x = -1$, $x = 2$, ceros de denominador

Asíntota horizontal: $y = 0$, porque el grado de $N(x)$ < grado de $D(x)$

Puntos adicionales:

Intervalo de prueba	Valor representativo de x	Valor de f	Signo	Punto en la gráfica
$(-\infty, -1)$	-3	$f(-3) = -0.3$	Negativo	$(-3, -0.3)$
$(-1, 0)$	-0.5	$f(-0.5) = 0.4$	Positivo	$(-0.5, 0.4)$
$(0, 2)$	1	$f(1) = -0.5$	Negativo	$(1, -0.5)$
$(2, \infty)$	3	$f(3) = 0.75$	Positivo	$(3, 0.75)$

La gráfica se muestra en la Figura 2.43.

PUNTO *de repaso* Ahora trate de hacer el Ejercicio 39.

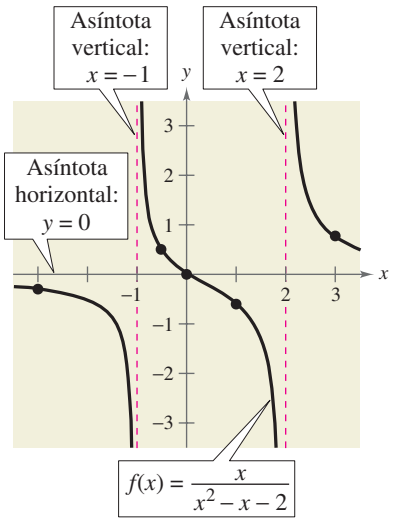


FIGURA 2.43

ATENCIÓN

Si no está seguro de la forma de una parte de la gráfica de una función racional, añada algunos puntos más. También observe que cuando el numerador y el denominador de la función tienen un factor común, la gráfica respectiva tiene un *hueco* en el cero de dicho factor.

Ejemplo 6 Función racional con factores comunes

Trace la gráfica de $f(x) = (x^2 - 9)/(x^2 - 2x - 3)$.

Solución

Al factorizar el numerador y el denominador se obtiene

$$f(x) = \frac{x^2 - 9}{x^2 - 2x - 3} = \frac{(x - 3)(x + 3)}{(x - 3)(x + 1)} = \frac{x + 3}{x + 1}, \quad x \neq 3.$$

Intersección con el eje y: $(0, 3)$, porque $f(0) = 3$

Intersección con el eje x: $(-3, 0)$, porque $f(-3) = 0$

Asíntota vertical: $x = -1$, cero de denominador (simplificado)

Asíntota horizontal: $y = 1$, porque el grado de $N(x)$ = grado de $D(x)$

Puntos adicionales:

Intervalo de prueba	Valor representativo de x	Valor de f	Signo	Punto en la gráfica
$(-\infty, -3)$	-4	$f(-4) = 0.33$	Positivo	$(-4, 0.33)$
$(-3, -1)$	-2	$f(-2) = -1$	Negativo	$(-2, -1)$
$(-1, \infty)$	2	$f(2) = 1.67$	Positivo	$(2, 1.67)$

La gráfica se muestra en la Figura 2.44. Observe que hay un hueco en ella en $x = 3$, porque la función no está definida en ese punto.

PUNTO *de repaso* Ahora trate de hacer el Ejercicio 45.

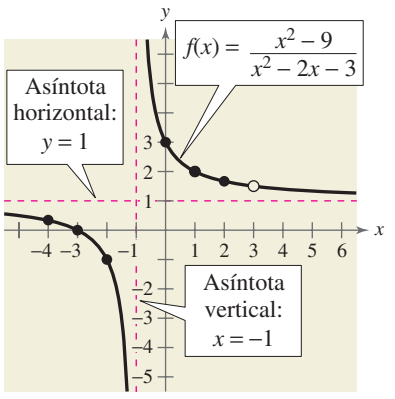


FIGURA 2.44 Hole at $x = 3$

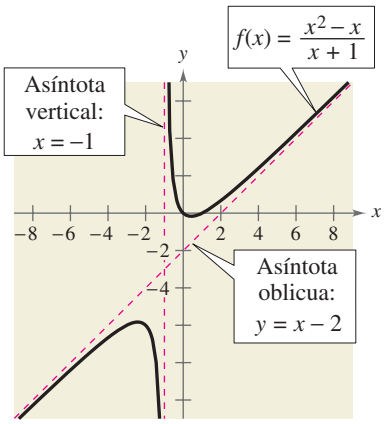


FIGURA 2.45

Asíntotas oblicuas

Considere una función racional cuyo denominador es de grado 1 o mayor. Si el grado del numerador es exactamente *uno más* que el del denominador, la gráfica de la función tiene una **asíntota oblicua**. Por ejemplo, la gráfica de

$$f(x) = \frac{x^2 - x}{x + 1}$$

tiene una asíntota oblicua, como se ilustra en la Figura 2.45. Para hallar la ecuación de una asíntota oblicua, use división larga. Por ejemplo, al dividir $x^2 - x$ entre $x + 1$, obtenemos

$$f(x) = \frac{x^2 - x}{x + 1} = \underbrace{x - 2}_{\text{Asíntota oblicua } (y = x - 2)} + \frac{2}{x + 1}.$$

Cuando x aumenta o disminuye sin límite, el término residuo $2/(x + 1)$ se aproxima a 0, de modo que la gráfica de f se aproxima a la recta $y = x - 2$, como se muestra en la Figura 2.45.

Ejemplo 7 Función racional con una asíntota oblicua

Trace la gráfica de $f(x) = \dfrac{x^2 - x - 2}{x - 1}$.

Solución

Factorizando el numerador como $(x - 2)(x + 1)$ permite reconocer las intersecciones con el eje x. Usando división larga

$$f(x) = \frac{x^2 - x - 2}{x - 1} = x - \frac{2}{x - 1}$$

permite reconocer que la recta $y = x$ es una asíntota oblicua de la gráfica.

Intersección con el eje y: $(0, 2)$, porque $f(0) = 2$

Intersección con el eje x: $(-1, 0)$ y $(2, 0)$

Asíntota vertical: $x = 1$, cero de denominador

Asíntota oblicua: $y = x$

Puntos adicionales:

Intervalo de prueba	Valor representativo de x	Valor de f	Signo	Punto en la gráfica
$(-\infty, -1)$	-2	$f(-2) = -1.33$	Negativo	$(-2, -1.33)$
$(-1, 1)$	0.5	$f(0.5) = 4.5$	Positivo	$(0.5, 4.5)$
$(1, 2)$	1.5	$f(1.5) = -2.5$	Negativo	$(1.5, -2.5)$
$(2, \infty)$	3	$f(3) = 2$	Positivo	$(3, 2)$

La gráfica se muestra en la Figura 2.46.

PUNTO *de repaso* Ahora trate de hacer el Ejercicio 65.

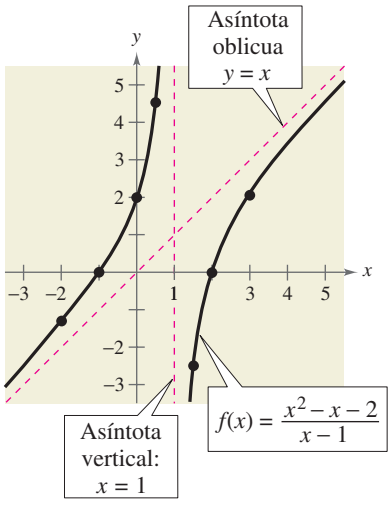


FIGURA 2.46

Aplicaciones

Hay numerosos casos de comportamiento asintótico en la vida real. Por ejemplo, el Ejemplo 8 muestra la forma en que una asíntota vertical se puede usar para analizar el costo de eliminar contaminantes de emisiones de chimeneas.

Ejemplo 8 Modelo de costo-beneficio

Una empresa generadora de energía eléctrica quema carbón para generar electricidad. El costo C (en dólares) de eliminar $p\%$ de contaminantes de la chimenea está dado por

$$C = \frac{80\,000p}{100 - p}$$

para $0 \le p < 100$. Usted es miembro de una legislatura estatal que considera una ley que requeriría que la empresa eliminara 90% de los contaminantes de sus emisiones en chimeneas. La ley actual requiere la remoción de 85%. ¿Cuánto costo adicional tendría la compañía como resultado de la nueva ley?

Solución algebraica

Como la ley actual requiere la remoción de 85%, el costo será

$$C = \frac{80\,000(85)}{100 - 85} \approx \$453\,333.$$ Evaluar C cuando $p = 85$.

Si la nueva ley aumenta el porcentaje de eliminación a 90%, el costo será

$$C = \frac{80\,000(90)}{100 - 90} = \$720\,000.$$ Evaluar C cuando $p = 90$.

Por tanto, la nueva ley requeriría que la compañía gastara adicionalmente

$$720\,000 - 453\,333 = \$266\,667.$$ Restar 85% de costo de remoción del costo de remover 90%.

Solución gráfica

Use una calculadora de gráficas para graficar la función

$$y_1 = \frac{80\,000}{100 - x}$$

usando una pantalla similar a la mostrada en la Figura 2.47. Observe que la gráfica tiene una asíntota vertical en $x = 100$. A continuación use el comando *trace* o *value* para calcular los valores de y_1 cuando $x = 85$ y $x = 90$. Debe obtener los valores siguientes.

Cuando $x = 85$, $y_1 \approx 453\,333$.

Cuando $x = 90$, $y_1 = 720\,000$.

En consecuencia, la nueva ley requeriría que la compañía gastara adicionalmente

$$720\,000 - 453\,333 = \$266\,667.$$

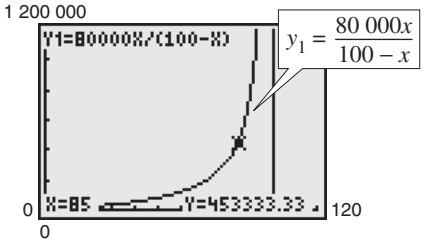


FIGURA 2.47

PUNTO *de repaso* Ahora trate de hacer el Ejercicio 77.

Ejemplo 9 Hallar un área mínima

Una página rectangular está diseñada para contener 48 pulgadas cuadradas de material impreso. Los márgenes a cada lado son de $1\frac{1}{2}$ pulgadas de ancho. ¿Cuáles deben ser las dimensiones de la página para que se use la cantidad mínima de papel?

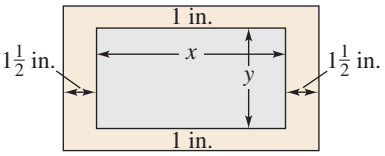


FIGURA 2.48

Solución gráfica

Sea A el área que ha de ser minimizada. De la Figura 2.48, podemos escribir

$$A = (x + 3)(y + 2).$$

El área impresa dentro de los márgenes está modelada por $48 = xy$ o $y = 48/x$. Para hallar el área mínima, reescriba la ecuación para A en términos de sólo una variable al sustituir $48/x$ por y.

$$A = (x + 3)\left(\frac{48}{x} + 2\right)$$

$$= \frac{(x + 3)(48 + 2x)}{x}, \quad x > 0$$

La gráfica de esta función racional se muestra en la Figura 2.49. Como x representa el ancho del área impresa, es necesario considerar sólo la parte de la gráfica para la cual x es positiva. Usando una calculadora de gráficas, se puede aproximar el valor mínimo de A para que ocurra cuando $x \approx 8.5$ pulgadas. El valor correspondiente de y es $48/8.5 \approx 5.6$ pulgadas. Por tanto, las dimensiones deben ser

$$x + 3 \approx 11.5 \text{ pulgadas} \quad \text{por} \quad y + 2 \approx 7.6 \text{ pulgadas}$$

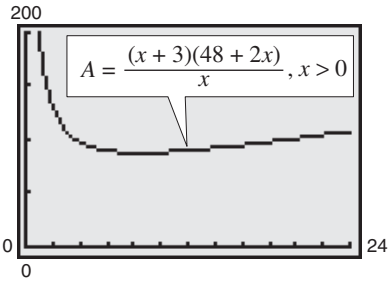


FIGURA 2.49

PUNTO *de repaso* Ahora trate de hacer el Ejercicio 81.

Solución numérica

Sea A el área que ha de ser minimizada. De la Figura 2.48, podemos escribir

$$A = (x + 3)(y + 2).$$

El área impresa dentro de los márgenes está modelada por $48 = xy$ o $y = 48/x$. Para hallar el área mínima, reescriba la ecuación para A en términos de sólo una variable al sustituir $48/x$ por y.

$$A = (x + 3)\left(\frac{48}{x} + 2\right)$$

$$= \frac{(x + 3)(48 + 2x)}{x}, \quad x > 0$$

Use el comando *table* de una calculadora de gráficas para crear una tabla de valores para la función

$$y_1 = \frac{(x + 3)(48 + 2x)}{x}$$

comenzando en $x = 1$. En la tabla se puede ver que el valor mínimo de y_1 se presenta cuando x está entre 8 y 9, como se ve en la Figura 2.50. Para aproximar el valor mínimo de y_1 a un lugar decimal, cambie la tabla para que empiece en $x = 8$ y aumente en 0.1. El valor mínimo de y_1 ocurre cuando $x \approx 8.5$, como se muestra en la Figura 2.51. El valor correspondiente de y es $48/8.5 \approx 5.6$ pulgadas. Por tanto, las dimensiones deben ser $x + 3 \approx 11.5$ pulgadas por $y + 2 \approx 7.6$ pulgadas.

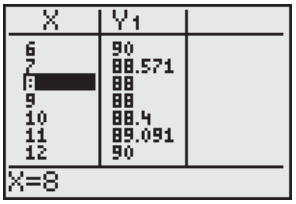


FIGURA 2.50

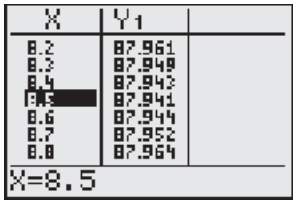


FIGURA 2.51

Si el lector continúa sus estudios para un curso de cálculo, aprenderá una técnica analítica para hallar el valor exacto de x que produce un área mínima. En este caso, ese valor es $x = 6\sqrt{2} \approx 8.485$.

2.6 EJERCICIOS

En www.CalcChat.com vea las soluciones a los ejercicios impares.

VOCABULARIO: Llene los espacios en blanco.

1. Las funciones de la forma $f(x) = N(x)/D(x)$, donde $N(x)$ y $D(x)$ son funciones polinomiales y $D(x)$ no es el polinomio cero, se denominan _____ _____.
2. Si $f(x) \to \pm\infty$ cuando $x \to a$ por la izquierda o la derecha, entonces $x = a$ es una _____ _____ de la gráfica de f.
3. Si $f(x) \to b$ cuando $x \to \pm\infty$, entonces $y = b$ es una _____ _____ de la gráfica de f.
4. Para la función racional dada por $f(x) = N(x)/D(x)$, si el grado de $N(x)$ es exactamente uno más que el grado de $D(x)$, entonces la gráfica de f tiene una _____ _____.

HABILIDADES Y APLICACIONES

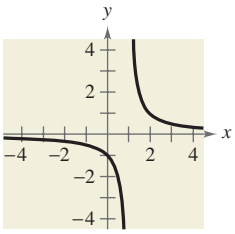
En los Ejercicios 5-8, (a) complete cada tabla para la función, (b) determine las asíntotas verticales y horizontales de la gráfica de la función y (c) encuentre el dominio de la función.

x	$f(x)$
0.5	
0.9	
0.99	
0.999	

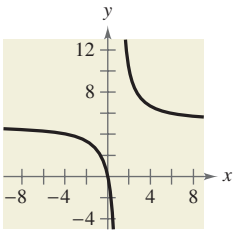
x	$f(x)$
1.5	
1.1	
1.01	
1.001	

x	$f(x)$
5	
10	
100	
1000	

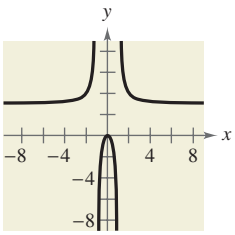
5. $f(x) = \dfrac{1}{x - 1}$



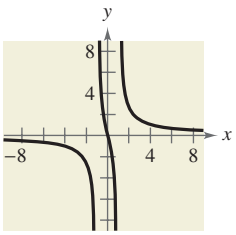
6. $f(x) = \dfrac{5x}{x - 1}$



7. $f(x) = \dfrac{3x^2}{x^2 - 1}$



8. $f(x) = \dfrac{4x}{x^2 - 1}$



En los Ejercicios 9-16, encuentre el dominio de la función e identifique cualesquiera asíntotas verticales y horizontales.

9. $f(x) = \dfrac{4}{x^2}$

10. $f(x) = \dfrac{4}{(x - 2)^3}$

11. $f(x) = \dfrac{5 + x}{5 - x}$

12. $f(x) = \dfrac{3 - 7x}{3 + 2x}$

13. $f(x) = \dfrac{x^3}{x^2 - 1}$

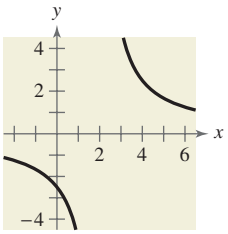
14. $f(x) = \dfrac{4x^2}{x + 2}$

15. $f(x) = \dfrac{3x^2 + 1}{x^2 + x + 9}$

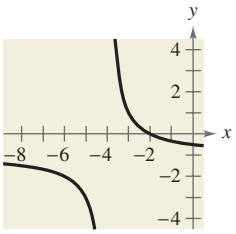
16. $f(x) = \dfrac{3x^2 + x - 5}{x^2 + 1}$

En los Ejercicios 17-20, relacione la función racional con su gráfica. [Las gráficas están marcadas (a),(b),(c) y (d).]

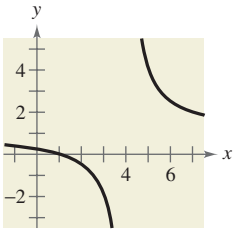
(a)



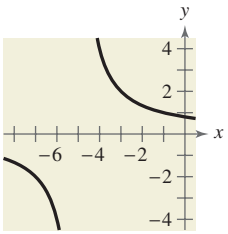
(b)



(c)



(d)



17. $f(x) = \dfrac{4}{x + 5}$

18. $f(x) = \dfrac{5}{x - 2}$

19. $f(x) = \dfrac{x - 1}{x - 4}$

20. $f(x) = -\dfrac{x + 2}{x + 4}$

En los Ejercicios 21-24, encuentre los ceros (si los hay) de la función racional.

21. $g(x) = \dfrac{x^2 - 9}{x + 3}$

22. $h(x) = 4 + \dfrac{10}{x^2 + 5}$

23. $f(x) = 1 - \dfrac{2}{x - 7}$

24. $g(x) = \dfrac{x^3 - 8}{x^2 + 1}$

En los Ejercicios 25-30, encuentre el dominio de la función e identifique cualesquiera asíntotas verticales y horizontales.

25. $f(x) = \dfrac{x-4}{x^2-16}$

26. $f(x) = \dfrac{x+1}{x^2-1}$

27. $f(x) = \dfrac{x^2-25}{x^2-4x-5}$

28. $f(x) = \dfrac{x^2-4}{x^2-3x+2}$

29. $f(x) = \dfrac{x^2-3x-4}{2x^2+x-1}$

30. $f(x) = \dfrac{6x^2-11x+3}{6x^2-7x-3}$

En los Ejercicios 31-50, (a) exprese el dominio de la función, (b) identifique todas las intersecciones con los ejes coordenados, (c) encuentre cualesquiera asíntotas verticales y horizontales y (d) localice puntos adicionales de solución, según sea necesario, para trazar la gráfica de la función racional.

31. $f(x) = \dfrac{1}{x+2}$

32. $f(x) = \dfrac{1}{x-3}$

33. $h(x) = \dfrac{-1}{x+4}$

34. $g(x) = \dfrac{1}{6-x}$

35. $C(x) = \dfrac{7+2x}{2+x}$

36. $P(x) = \dfrac{1-3x}{1-x}$

37. $f(x) = \dfrac{x^2}{x^2+9}$

38. $f(t) = \dfrac{1-2t}{t}$

39. $g(s) = \dfrac{4s}{s^2+4}$

40. $f(x) = -\dfrac{1}{(x-2)^2}$

41. $h(x) = \dfrac{x^2-5x+4}{x^2-4}$

42. $g(x) = \dfrac{x^2-2x-8}{x^2-9}$

43. $f(x) = \dfrac{2x^2-5x-3}{x^3-2x^2-x+2}$

44. $f(x) = \dfrac{x^2-x-2}{x^3-2x^2-5x+6}$

45. $f(x) = \dfrac{x^2+3x}{x^2+x-6}$

46. $f(x) = \dfrac{5(x+4)}{x^2+x-12}$

47. $f(x) = \dfrac{2x^2-5x+2}{2x^2-x-6}$

48. $f(x) = \dfrac{3x^2-8x+4}{2x^2-3x-2}$

49. $f(t) = \dfrac{t^2-1}{t-1}$

50. $f(x) = \dfrac{x^2-36}{x+6}$

ESTUDIO ANALÍTICO, NUMÉRICO Y GRÁFICO En los Ejercicios 51-54, haga lo siguiente.

(a) Determine los dominios de f y g.

(b) Simplifique f y encuentre cualesquiera asíntotas verticales de la gráfica de f.

(c) Compare las funciones al completar la tabla.

(d) Use una calculadora de gráficas para graficar f y g en la misma pantalla.

(e) Explique por qué la calculadora de gráficas puede no mostrar la diferencia en los dominios de f y g.

51. $f(x) = \dfrac{x^2-1}{x+1}, \quad g(x) = x-1$

x	-3	-2	-1.5	-1	-0.5	0	1
$f(x)$							
$g(x)$							

52. $f(x) = \dfrac{x^2(x-2)}{x^2-2x}, \quad g(x) = x$

x	-1	0	1	1.5	2	2.5	3
$f(x)$							
$g(x)$							

53. $f(x) = \dfrac{x-2}{x^2-2x}, \quad g(x) = \dfrac{1}{x}$

x	-0.5	0	0.5	1	1.5	2	3
$f(x)$							
$g(x)$							

54. $f(x) = \dfrac{2x-6}{x^2-7x+12}, \quad g(x) = \dfrac{2}{x-4}$

x	0	1	2	3	4	5	6
$f(x)$							
$g(x)$							

En los Ejercicios 55-68, (a) exprese el dominio de la función, (b) identifique todas las intersecciones con los ejes coordenados, (c) identifique cualesquiera asíntotas verticales y oblicuas y (d) localice puntos adicionales de solución, según sea necesario, para trazar la gráfica de la función racional.

55. $h(x) = \dfrac{x^2-9}{x}$

56. $g(x) = \dfrac{x^2+5}{x}$

57. $f(x) = \dfrac{2x^2+1}{x}$

58. $f(x) = \dfrac{1-x^2}{x}$

59. $g(x) = \dfrac{x^2+1}{x}$

60. $h(x) = \dfrac{x^2}{x-1}$

61. $f(t) = -\dfrac{t^2+1}{t+5}$

62. $f(x) = \dfrac{x^2}{3x+1}$

63. $f(x) = \dfrac{x^3}{x^2-4}$

64. $g(x) = \dfrac{x^3}{2x^2-8}$

65. $f(x) = \dfrac{x^2-x+1}{x-1}$

66. $f(x) = \dfrac{2x^2-5x+5}{x-2}$

67. $f(x) = \dfrac{2x^3-x^2-2x+1}{x^2+3x+2}$

68. $f(x) = \dfrac{2x^3+x^2-8x-4}{x^2-3x+2}$

En los Ejercicios 69-72, use una calculadora de gráficas para graficar la función racional. Dé el dominio de la función e identifique cualesquiera asíntotas. A continuación utilice el zoom lo suficientemente lejos como para que la gráfica aparezca como recta. Identifique la recta.

69. $f(x) = \dfrac{x^2 + 5x + 8}{x + 3}$

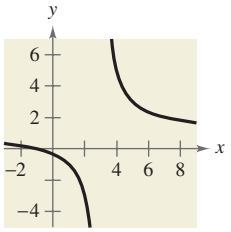
70. $f(x) = \dfrac{2x^2 + x}{x + 1}$

71. $g(x) = \dfrac{1 + 3x^2 - x^3}{x^2}$

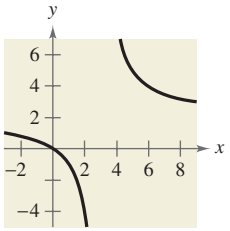
72. $h(x) = \dfrac{12 - 2x - x^2}{2(4 + x)}$

RAZONAMIENTO GRÁFICO **En los Ejercicios 73-76, (a) utilice la gráfica para determinar cualesquiera intersecciones con el eje *x* de la gráfica de la función racional y (b) haga *y* = 0 y resuelva la ecuación resultante para confirmar su resultado en el inciso (a).**

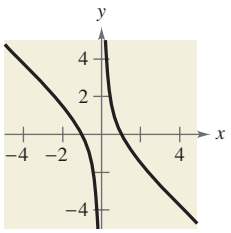
73. $y = \dfrac{x + 1}{x - 3}$



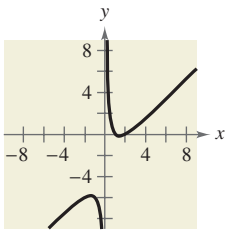
74. $y = \dfrac{2x}{x - 3}$



75. $y = \dfrac{1}{x} - x$



76. $y = x - 3 + \dfrac{2}{x}$



77. CONTAMINACIÓN El costo C (en millones de dólares) de eliminar $p\%$ de contaminantes industriales y municipales, descargados en un río, está dado por

$$C = \frac{255p}{100 - p}, \quad 0 \le p < 100.$$

(a) Use una calculadora de gráficas para graficar la función de costo.

(b) Encuentre los costos de eliminar 10%, 40% y 75% de los contaminantes.

(c) De acuerdo con este modelo, ¿sería posible eliminar 100% de los contaminantes? Explique.

78. RECICLAR En un proyecto piloto, una municipalidad rural recibe contenedores de reciclaje para separar y almacenar productos reciclables. El costo C (en dólares) de suministrar contenedores a $p\%$ de la población está dado por

$$C = \frac{25\,000p}{100 - p}, \quad 0 \le p < 100.$$

(a) Use una calculadora de gráficas para graficar la función de costo.

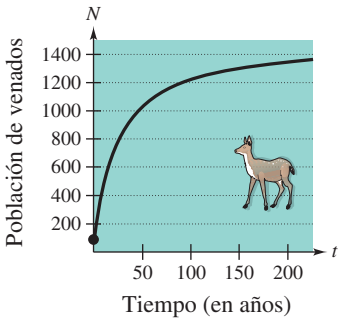
(b) Encuentre los costos de eliminar 15%, 50% y 90% de los contaminantes.

(c) De acuerdo con este modelo, ¿sería posible suministrar contenedores a 100% de los residentes? Explique.

79. CRECIMIENTO POBLACIONAL La comisión de caza introduce 100 venados en terrenos estatales de cacería recién adquiridos. La población N del rebaño está modelada por

$$N = \frac{20(5 + 3t)}{1 + 0.04t}, \quad t \ge 0$$

donde t es el tiempo en años (vea figura).



(a) Encuentre las poblaciones cuando $t = 5$, $t = 10$ y $t = 25$.

(b) ¿Cuál es el tamaño limitante del rebaño a medida que aumente el tiempo?

80. CONCENTRACIÓN DE UNA MEZCLA Un tanque de 1000 litros contiene 50 litros de una solución de salmuera al 25%. Se agregan x litros de una solución de salmuera al 75% al tanque.

(a) Demuestre que la concentración C, la proporción entre salmuera y la solución total, en la mezcla final es

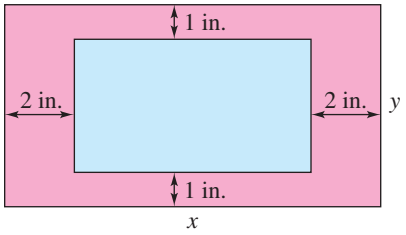
$$C = \frac{3x + 50}{4(x + 50)}.$$

(b) Determine el dominio de la función basado en las restricciones físicas del problema.

(c) Trace una gráfica de la función de la concentración.

(d) A medida que el tanque se llena, ¿qué ocurre con la proporción a la que está aumentando la concentración de salmuera? ¿A qué porcentaje parece aproximarse la concentración de salmuera?

81. DISEÑO DE PÁGINA Una página que mide x pulgadas de ancho y y pulgadas de alto contiene 30 pulgadas cuadradas de material impreso. Los márgenes superior e inferior son de 1 pulgada de profundidad y los márgenes de cada lado son de 2 pulgadas de ancho (vea figura).



(a) Escriba una función para el área total A de la página en términos de x.

(b) Determine el dominio de la función con base en las restricciones físicas del problema.

(c) Use una calculadora de gráficas para graficar la función de área y aproxime las dimensiones de la página para las que se use la mínima cantidad de papel. Verifique numéricamente su respuesta usando el comando *table* de la calculadora.

82. DISEÑO DE PÁGINA Una página rectangular está diseñada para contener 64 pulgadas cuadradas de material impreso. Los márgenes superior e inferior de la página miden 1 pulgada de profundidad cada uno; los márgenes de cada lado miden $1\frac{1}{2}$ pulgadas de ancho. ¿Cuáles deben ser las dimensiones de la página para que se use la cantidad mínima de papel?

83. PROMEDIO DE RAPIDEZ Un automovilista promedió 50 millas por hora en un viaje redondo entre Akron, Ohio, y Columbus, Ohio, que están a 100 millas entre sí. El promedio de magnitudes de rapidez de ida y vuelta fueron x y y millas por hora, respectivamente.

(a) Demuestre que $y = \dfrac{25x}{x - 25}$.

(b) Determine las asíntotas verticales y horizontales de la gráfica de la función.

(c) Use una calculadora de gráficas para graficar la función.

(d) Complete la tabla siguiente.

x	30	35	40	45	50	55	60
y							

(e) ¿Los resultados de la tabla son los que usted esperaba?

(f) ¿Es posible promediar 20 millas por hora en una dirección y todavía promediar 50 millas por hora en el viaje redondo? Explique.

EXPLORACIÓN

84. ESCRITURA ¿Toda función racional es una función polinomial? ¿Toda función polinomial es una función racional? Explique.

¿VERDADERO O FALSO? En los Ejercicios 85-87, determine si la proposición es verdadera o falsa. Justifique su respuesta.

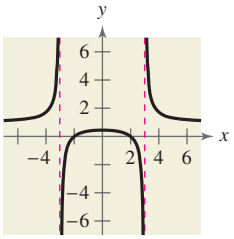
85. Un polinomio puede tener un número infinito de asíntotas verticales.

86. La gráfica de una función racional nunca puede cortar una de sus asíntotas.

87. La gráfica de una función puede tener una asíntota vertical, una horizontal y una oblicua.

BIBLIOTECA DE FUNCIONES GENERATRICES En los Ejercicios 88 y 89, identifique la función racional representada por la gráfica.

88.



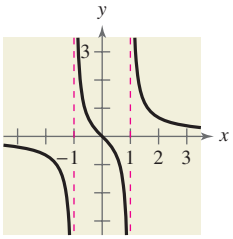
(a) $f(x) = \dfrac{x^2 - 9}{x^2 - 4}$

(b) $f(x) = \dfrac{x^2 - 4}{x^2 - 9}$

(c) $f(x) = \dfrac{x - 4}{x^2 - 9}$

(d) $f(x) = \dfrac{x - 9}{x^2 - 4}$

89.



(a) $f(x) = \dfrac{x^2 - 1}{x^2 + 1}$

(b) $f(x) = \dfrac{x^2 + 1}{x^2 - 1}$

(c) $f(x) = \dfrac{x}{x^2 - 1}$

(d) $f(x) = \dfrac{x}{x^2 + 1}$

90. TOQUE FINAL Escriba una función racional f que tenga las características especificadas. (Hay numerosas respuestas correctas.)

(a) Asíntota vertical: $x = 2$
Asíntota horizontal: $y = 0$
Cero: $x = 1$

(b) Asíntota vertical: $x = -1$
Asíntota horizontal: $y = 0$
Cero: $x = 2$

(c) Asíntotas verticales: $x = -2, x = 1$
Asíntota horizontal: $y = 2$
Ceros: $x = 3, x = -3$,

(d) Asíntota vertical: $x = -1, x = 2$
Asíntota horizontal: $y = -2$
Ceros: $x = -2, x = 3$

PROYECTO: DEPARTAMENTO DE DEFENSA Para resolver una aplicación extendida que analice el número total del personal del Departamento de Defensa de 1980 a 2007, visite el sitio web de este texto en *academic.cengage.com.* (Fuente: U.S. Department of Defense))

2.7 Desigualdades no lineales

Lo que debe aprender

- Resolver desigualdades polinomiales.
- Resolver desigualdades racionales.
- Usar desigualdades para modelar y resolver problemas de la vida real.

Por qué debe aprenderlo

Se pueden usar desigualdades para modelar y resolver problemas de la vida real. Por ejemplo, en el Ejercicio 77 en la página 202 se usa una desigualdad polinomial para modelar la inscripción escolar en Estados Unidos.

Ellen Senisi/The Image Works

Desigualdades polinomiales

Para resolver una desigualdad polinomial, por ejemplo $x^2 - 2x - 3 < 0$, se puede usar el hecho de que un polinomio puede cambiar signos sólo en sus ceros (los valores de x que igualen a cero el polinomio). Entre dos ceros consecutivos, un polinomio debe ser enteramente positivo o enteramente negativo. Esto significa que cuando los ceros reales de un polinomio se ponen en orden, dividen la recta numérica real en intervalos en los que el polinomio no tiene cambios de signo. Estos ceros son los **números de referencia** de la desigualdad, y los intervalos resultantes son los **intervalos de prueba** para la desigualdad. Por ejemplo, el polinomio citado líneas antes se factoriza como

$$x^2 - 2x - 3 = (x + 1)(x - 3)$$

y tiene dos ceros, $x = -1$ y $x = 3$. Estos ceros dividen la recta numérica real en tres intervalos de prueba:

$$(-\infty, -1), \quad (-1, 3) \quad \text{y} \quad (3, \infty). \qquad \text{(Vea Figura 2.52.)}$$

Por tanto, para resolver la desigualdad $x^2 - 2x - 3 < 0$ sólo es necesario probar un valor de cada uno de estos intervalos de prueba para determinar si satisface la desigualdad original. Si es así, se concluye que el intervalo es una solución de la desigualdad.

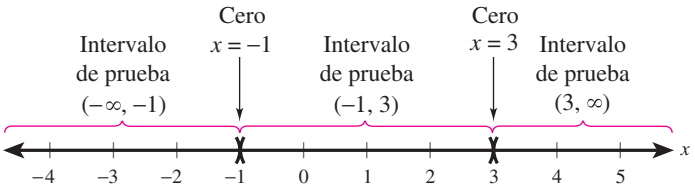


FIGURA 2.52 Tres intervalos de prueba para $x^2 - 2x - 3$

Se puede usar el mismo método básico para determinar los intervalos de prueba para cualquier polinomio.

Hallar intervalos de prueba para un polinomio

Para determinar los intervalos en los que los valores de un polinomio son enteramente negativos o enteramente positivos, siga estos pasos.

1. Halle todos los ceros reales del polinomio y acomódelos los ceros en orden creciente (de menor a mayor). Estos ceros son los números de referencia del polinomio.
2. Use los números de referencia del polinomio para determinar sus intervalos de prueba.
3. Escoja un valor representativo de x en cada intervalo de prueba y evalúe el polinomio en ese valor. Si el valor del polinomio es negativo, el polinomio tendrá valores negativos para todo valor de x del intervalo; si el valor del polinomio es positivo, el polinomio tendrá valores positivos para todo valor de x en el intervalo.

Ayuda de álgebra

En el Apéndice A.3 se pueden repasar técnicas para factorizar polinomios.

Ejemplo 1 Resolver una desigualdad polinomial

Resuelva $x^2 - x - 6 < 0$.

Solución

Si factorizamos el polinomio como

$$x^2 - x - 6 = (x + 2)(x - 3)$$

se verá que los números de referencia son $x = -2$ y $x = 3$. Por tanto, los intervalos de prueba del polinomio son

$$(-\infty, -2), \quad (-2, 3) \quad \text{y} \quad (3, \infty).$$ Intervalos de prueba

En cada intervalo de prueba, escoja un valor representativo de x y evalúe el polinomio.

Intervalo de prueba	*Valor de x*	*Valor del polinomio*	*Conclusión*
$(-\infty, -2)$	$x = -3$	$(-3)^2 - (-3) - 6 = 6$	Positivo
$(-2, 3)$	$x = 0$	$(0)^2 - (0) - 6 = -6$	Negativo
$(3, \infty)$	$x = 4$	$(4)^2 - (4) - 6 = 6$	Positivo

A partir de lo anterior se concluye que la desigualdad se satisface para todos los valores de x en $(-2, 3)$. Esto implica que la solución de la desigualdad $x^2 - x - 6 < 0$ es el intervalo $(-2, 3)$, como se muestra en la Figura 2.53. Observe que la desigualdad original contiene un símbolo "menor que". Esto significa que el conjunto solución no contiene los puntos extremos del intervalo de prueba $(-2, 3)$.

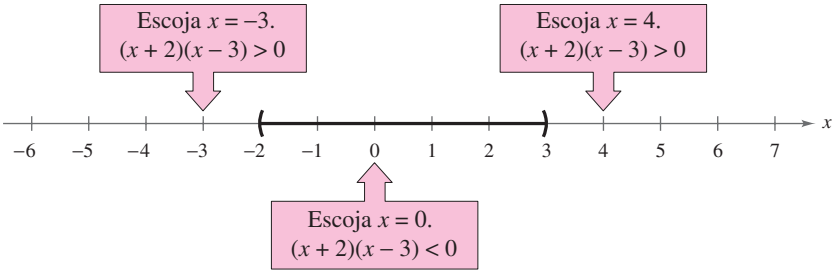


FIGURA 2.53

PUNTO *de repaso* Ahora trate de hacer el Ejercicio 21.

Lo mismo que con desigualdades lineales, se puede verificar lo razonable de una solución si sustituimos valores de x en la desigualdad original. Por ejemplo, para verificar la solución encontrada en el Ejemplo 1, trate de sustituir varios valores de x del intervalo $(-2, 3)$ en la desigualdad

$$x^2 - x - 6 < 0.$$

Cualesquiera que sean los valores de x que escoja, la desigualdad debe satisfacerse.

También se puede usar una gráfica para verificar el resultado del Ejemplo 1. Trace la gráfica de $y = x^2 - x - 6$, como se muestra en la Figura 2.54. Observe que la gráfica está abajo del eje x en el intervalo $(-2, 3)$.

En el Ejemplo 1, la desigualdad polinomial está dada en forma general (con el polinomio en un lado y cero en el otro). Siempre que éste no sea el caso, se debe iniciar el proceso de solución escribiendo la desigualdad en forma general.

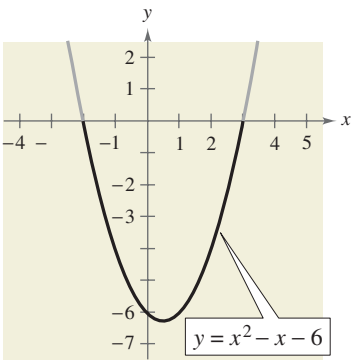


FIGURA 2.54

Ejemplo 2 Resolver una desigualdad polinomial

Resuelva $2x^3 - 3x^2 - 32x > -48$.

Solución

$$2x^3 - 3x^2 - 32x + 48 > 0 \qquad \text{Escribir en forma general}$$
$$(x - 4)(x + 4)(2x - 3) > 0 \qquad \text{Factorizar.}$$

Los números de referencia son $x = -4$, $x = \frac{3}{2}$ y $x = 4$, y los intervalos de prueba son $(-\infty, -4)$, $\left(-4, \frac{3}{2}\right)$, $\left(\frac{3}{2}, 4\right)$ y $(4, \infty)$.

Intervalo de prueba	*Valor de x*	*Valor del polinomio*	*Conclusión*
$(-\infty, -4)$	$x = -5$	$2(-5)^3 - 3(-5)^2 - 32(-5) + 48$	Negativo
$\left(-4, \frac{3}{2}\right)$	$x = 0$	$2(0)^3 - 3(0)^2 - 32(0) + 48$	Positivo
$\left(\frac{3}{2}, 4\right)$	$x = 2$	$2(2)^3 - 3(2)^2 - 32(2) + 48$	Negativo
$(4, \infty)$	$x = 5$	$2(5)^3 - 3(5)^2 - 32(5) + 48$	Positivo

A partir de esto se puede concluir que la desigualdad se satisface en los intervalos abiertos $\left(-4, \frac{3}{2}\right)$ y $(4, \infty)$. Por tanto, el conjunto solución es $\left(-4, \frac{3}{2}\right) \cup (4, \infty)$, como se ve en la Figura 2.55.

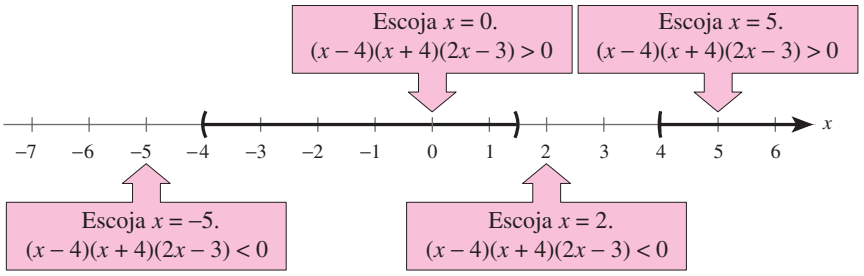


FIGURA 2.55

PUNTO *de repaso* Ahora trate de hacer el Ejercicio 27.

Ejemplo 3 Resolver una desigualdad polinomial

Resuelva $4x^2 - 5x > 6$.

Solución algebraica

$$4x^2 - 5x - 6 > 0 \qquad \text{Escribir en forma general.}$$
$$(x - 2)(4x + 3) > 0 \qquad \text{Factorizar.}$$

Números de referencia: $x = -\frac{3}{4}$, $x = 2$

Intervalos de prueba: $\left(-\infty, -\frac{3}{4}\right)$, $\left(-\frac{3}{4}, 2\right)$, $(2, \infty)$

Prueba: ¿Es $(x - 2)(4x + 3) > 0$?

Después de probar estos intervalos, se puede ver que el polinomio $4x^2 - 5x - 6$ es positivo en los intervalos abiertos $\left(-\infty, -\frac{3}{4}\right)$ y $(2, \infty)$. En consecuencia, el conjunto solución de la desigualdad es $\left(-\infty, -\frac{3}{4}\right) \cup (2, \infty)$.

PUNTO *de repaso* Ahora trate de hacer el Ejercicio 23.

Solución gráfica

Antes que nada escriba la desigualdad polinomial $4x^2 - 5x > 6$ como $4x^2 - 5x - 6 > 0$. A continuación use una calculadora de gráficas para graficar $y = 4x^2 - 5x - 6$. En la Figura 2.56, se puede ver que la gráfica está arriba del eje x cuando x es menor que $-\frac{3}{4}$ o cuando x es mayor a 2. Por tanto, gráficamente se puede aproximar que el conjunto solución es $\left(-\infty, -\frac{3}{4}\right) \cup (2, \infty)$.

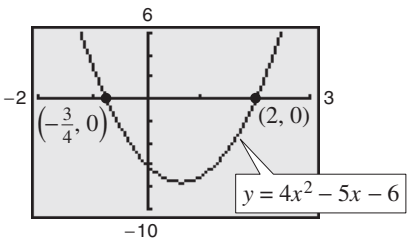


FIGURA 2.56

Tip de estudio

Es posible que el estudiante encuentre más fácil determinar el signo de un polinomio a partir de su forma *factorizada*. Por citar un caso, en el Ejemplo 3, si el valor de prueba $x = 1$ se sustituye en la forma factorizada

$$(x - 2)(4x + 3)$$

se puede ver que el patrón de signos de los factores es

$$(\ -\ )(\ +\ )$$

lo cual da un resultado negativo. Trate de usar las formas factorizadas de los polinomios para determinar los signos de éstos en los intervalos de prueba de los otros ejemplos de esta sección.

Cuando resuelva una desigualdad polinomial, asegúrese de haber considerado el tipo particular de símbolo de desigualdad dado en ésta. Por citar un caso, en el Ejemplo 3, observe que la desigualdad original contenía un símbolo "mayor que" y la solución estuvo formada por dos intervalos abiertos. Si la desigualdad original hubiera sido

$$4x^2 - 5x \geq 6$$

la solución hubiera estado formada por los intervalos $\left(-\infty, -\frac{3}{4}\right]$ y $[2, \infty)$.

Cada una de las desigualdades polinomiales de los Ejemplos 1, 2 y 3 tiene un conjunto de solución formado por un solo intervalo o por la unión de dos intervalos. Cuando resuelva los ejercicios para esta sección, busque conjuntos solución poco comunes, como se ilustra en el Ejemplo 4.

Ejemplo 4 Conjuntos de solución poco comunes

a. El conjunto solución de la siguiente desigualdad está formado por todo el conjunto de los números reales, $(-\infty, \infty)$. En otras palabras, el valor de la expresión cuadrática $x^2 + 2x + 4$ es positivo para todo valor real de x.

$$x^2 + 2x + 4 > 0$$

b. El conjunto solución de la siguiente desigualdad está formado por el número real $\{-1\}$, porque la expresión cuadrática $x^2 + 2x + 1$ tiene sólo un número de referencia, $x = -1$, y es el único valor que satisface la desigualdad.

$$x^2 + 2x + 1 \leq 0$$

c. El conjunto solución de la siguiente desigualdad es vacío. En otras palabras, la expresión cuadrática $x^2 + 3x + 5$ no es menor a cero para ningún valor de x.

$$x^2 + 3x + 5 < 0$$

d. El conjunto solución de la siguiente desigualdad está formado por todos los números reales excepto $x = 2$. En notación de intervalos, este conjunto solución se puede escribir como $(-\infty, 2) \cup (2, \infty)$.

$$x^2 - 4x + 4 > 0$$

PUNTO *de repaso* Ahora trate de hacer el Ejercicio 29.

Desigualdades racionales

Los conceptos de números de referencia e intervalos de prueba se pueden ampliar a las desigualdades racionales. Para hacer esto, use el hecho de que el valor de una expresión racional puede cambiar de signo sólo en sus *ceros* (los valores de x para los cuales su numerador es cero) y sus *valores indefinidos* (los valores de x para los cuales su denominador es cero). Estos dos tipos de números forman los *números de referencia* de una desigualdad racional. Cuando resuelva una desigualdad racional, empiece por escribirla en forma general con la expresión racional a la izquierda y cero a la derecha.

Tip de estudio

En el Ejemplo 5, si usted escribe 3 como $\frac{3}{1}$, debe ver que el mínimo común denominador es $(x - 5)(1) = x - 5$. Por tanto, puede reescribir la forma general como

$$\frac{2x - 7}{x - 5} - \frac{3(x - 5)}{x - 5} \leq 0,$$

que se simplifica como se muestra.

Ejemplo 5 Resolver una desigualdad racional

Resuelva $\dfrac{2x - 7}{x - 5} \leq 3$.

Solución

$$\frac{2x - 7}{x - 5} \leq 3$$ Escribir la desigualdad original.

$$\frac{2x - 7}{x - 5} - 3 \leq 0$$ Escribir en forma general.

$$\frac{2x - 7 - 3x + 15}{x - 5} \leq 0$$ Encontrar el mínimo común denominador y reste fracciones.

$$\frac{-x + 8}{x - 5} \leq 0$$ Simplificar.

Números de referencia: $x = 5, x = 8$ Ceros y valores indefinidos de la expresión racional.

Intervalos de prueba: $(-\infty, 5), (5, 8), (8, \infty)$

Prueba: ¿Es… $\dfrac{-x + 8}{x - 5} \leq 0$?

Después de probar estos intervalos, como se muestra en la Figura 2.57, se puede ver que la desigualdad se satisface en los intervalos abiertos $(-\infty, 5)$ y $(8, \infty)$. Además, como $\dfrac{-x + 8}{x - 5} = 0$, cuando $x = 8$, se puede concluir que el conjunto solución está formado por todos los números reales en los intervalos $(-\infty, 5) \cup [8, \infty)$. (Asegúrese de usar un intervalo cerrado para indicar que x puede ser igual a 8.)

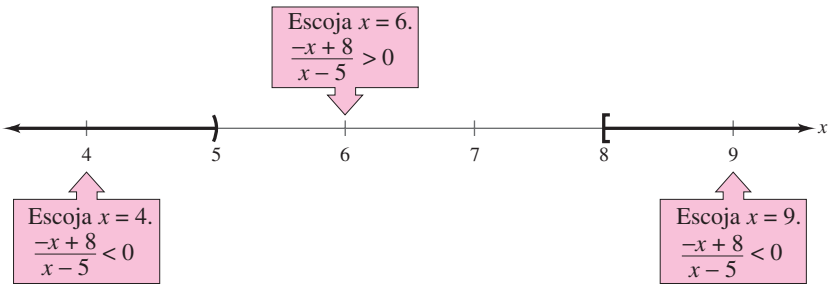


FIGURA 2.57

PUNTO *de repaso* Ahora trate de hacer el Ejercicio 45.

Aplicaciones

Una aplicación común de las desigualdades proviene de finanzas y se relaciona con utilidades, ingresos y costos. La fórmula que relaciona estas tres cantidades es

$$\text{Utilidad} = \text{Ingreso} - \text{Costo}$$
$$U = I - C.$$

Ejemplo 6 Aumentar la utilidad para un producto

El departamento de mercadotecnia de un fabricante de calculadoras ha determinado que la demanda de un nuevo modelo es

$$p = 100 - 0.00001x, \quad 0 \le x \le 10\,000\,000$$ Ecuación de la demanda

donde p es el precio por calculadora (en dólares) y x representa el número de calculadoras vendidas. (Si este modelo es preciso, nadie estaría dispuesto a pagar \$100 por la calculadora. En el otro extremo, la compañía no podría vender más de 10 millones de calculadoras.) El ingreso por vender x calculadoras es

$$I = xp = x(100 - 0.00001x)$$ Ecuación del ingreso

como se ve en la Figura 2.58. El costo total de producir x calculadoras es \$10 por cada aparato, más el costo de desarrollo de \$2 500 000. Por tanto, el costo total es

$$C = 10x + 2\,500\,000.$$ Ecuación del costo

¿Qué precio debe cobrar la compañía por calculadora para obtener una utilidad de al menos \$190 000 000?

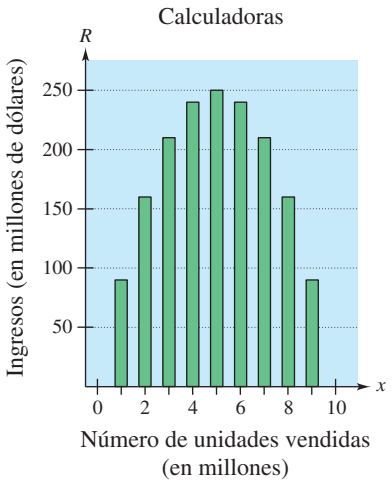


FIGURA 2.58

Solución

Modelo verbal: $\text{Utilidad} = \text{Ingreso} - \text{Costo}$

Ecuación:
$$U = I - C$$
$$U = 100x - 0.00001x^2 - (10x + 2\,500\,000)$$
$$U = -0.00001x^2 + 90x - 2\,500\,000$$

Para contestar la pregunta, resuelva la desigualdad

$$P \ge 190\,000\,000$$
$$-0.00001x^2 + 90x - 2\,500\,000 \ge 190\,000\,000.$$

Cuando escriba la desigualdad en forma general, encuentre los números de referencia y los intervalos de prueba y luego verifique un valor en cada intervalo de prueba, y puede hallar que la solución es

$$3\,500\,000 \le x \le 5\,500\,000$$

como se ve en la Figura 2.59. Sustituir los valores de x en la ecuación original del precio muestra que los precios de

$$\$45.00 \le p \le \$65.00$$

Dará una utilidad de al menos \$190 000 000.

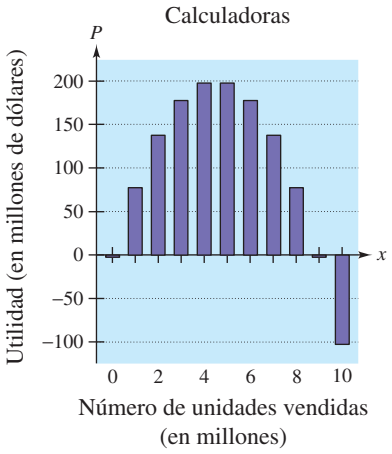


FIGURA 2.59

PUNTO de repaso Ahora trate de hacer el Ejercicio 75.

Otra aplicación común de las desigualdades es hallar el dominio de una expresión que contenga una raíz cuadrada, como se ve en el Ejemplo 7.

Ejemplo 7 Hallar el dominio de una expresión

Encuentre el dominio de $\sqrt{64 - 4x^2}$.

Solución algebraica

Recuerde que el dominio de una expresión es el conjunto de todos los valores de x para los cuales la expresión está definida. Como $\sqrt{64 - 4x^2}$ está definida (tiene valores reales) sólo si $64 - 4x^2$ es no negativa, el dominio está dado por $64 - 4x^2 \geq 0$.

$$64 - 4x^2 \geq 0 \qquad \text{Escribir en forma general.}$$

$$16 - x^2 \geq 0 \qquad \text{Dividir cada lado entre 4.}$$

$$(4 - x)(4 + x) \geq 0 \qquad \text{Escribir en forma factorizada.}$$

Por tanto, la desigualdad tiene dos números de referencia: $x = -4$ y $x = 4$. Puede usar ambos para probar la desigualdad como sigue.

Números de referencia: $x = -4, x = 4$

Intervalos de prueba: $(-\infty, -4), (-4, 4), (4, \infty)$

Prueba: ¿Para qué valores de x es $\sqrt{64 - 4x^2} \geq 0$?

Una prueba muestra que la desigualdad se satisface en el *intervalo cerrado* $[-4, 4]$. Por tanto, el dominio de la expresión $\sqrt{64 - 4x^2}$ es el intervalo $[-4, 4]$.

PUNTO *de repaso* Ahora trate de hacer el Ejercicio 59.

Solución gráfica

Empiece por trazar la gráfica de la ecuación $y = \sqrt{64 - 4x^2}$, como se muestra en la Figura 2.60. De la gráfica, se puede determinar que los valores de x se extienden de -4 a 4 (incluidos -4 y 4). En consecuencia, el dominio de la expresión $\sqrt{64 - 4x^2}$ es el intervalo $[-4, 4]$.

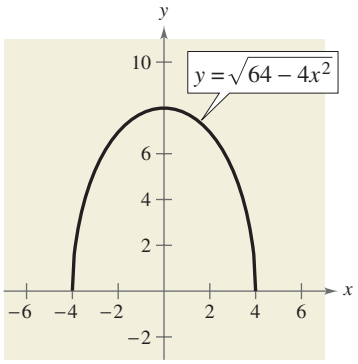


FIGURA 2.60

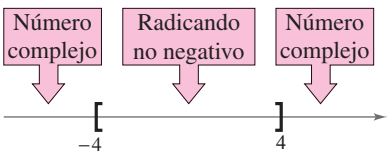


FIGURA 2.61

Para analizar un intervalo de prueba, escoja un valor representativo de x en el intervalo y evalúe la expresión en ese valor. Por citar un caso, en el Ejemplo 7, si sustituimos cualquier número del intervalo $[-4, 4]$ en la expresión $\sqrt{64 - 4x^2}$, obtendremos un número no negativo bajo el símbolo radical que se simplifica a un número real. Si sustituimos cualquier número de los intervalos $(-\infty, -4)$ y $(4, \infty)$, obtendremos un número complejo. Podría ser útil trazar una representación visual de los intervalos, como se muestra en la Figura 2.61.

Discusión en clase

Análisis de utilidad Considere la relación

$$P = I - C$$

descrita en la página 199. Escriba un párrafo que discuta por qué podría ser benéfico resolver $P < 0$ si el negocio fuera suyo. Use la situación descrita en el Ejemplo 6 para ilustrar su razonamiento.

2.7 EJERCICIOS

En www.CalcChat.com vea las soluciones a los ejercicios impares.

VOCABULARIO: Llene los espacios en blanco.

1. Entre dos ceros consecutivos, un polinomio debe ser enteramente _____ o enteramente _____.
2. Para resolver una desigualdad polinomial, encuentre los números _____ _____ del polinomio y úselos para crear _____ _____ _____ para la desigualdad.
3. Los números de referencia de una expresión racional son su _____ y su _____.
4. La fórmula que relaciona costo, ingresos y utilidades es _____.

HABILIDADES Y APLICACIONES

En los Ejercicios 5-8, determine si cada valor de x es una solución de la desigualdad.

Desigualdad	*Valores*	
5. $x^2 - 3 < 0$	(a) $x = 3$	(b) $x = 0$
	(c) $x = \frac{3}{2}$	(d) $x = -5$
6. $x^2 - x - 12 \geq 0$	(a) $x = 5$	(b) $x = 0$
	(c) $x = -4$	(d) $x = -3$
7. $\dfrac{x+2}{x-4} \geq 3$	(a) $x = 5$	(b) $x = 4$
	(c) $x = -\frac{9}{2}$	(d) $x = \frac{9}{2}$
8. $\dfrac{3x^2}{x^2+4} < 1$	(a) $x = -2$	(b) $x = -1$
	(c) $x = 0$	(d) $x = 3$

En los Ejercicios 9-12, encuentre los números de referencia de la expresión.

9. $3x^2 - x - 2$

10. $9x^3 - 25x^2$

11. $\dfrac{1}{x-5} + 1$

12. $\dfrac{x}{x+2} - \dfrac{2}{x-1}$

En los Ejercicios 13-30, resuelva la desigualdad y grafique la solución en la recta numérica real.

13. $x^2 < 9$

14. $x^2 \leq 16$

15. $(x+2)^2 \leq 25$

16. $(x-3)^2 \geq 1$

17. $x^2 + 4x + 4 \geq 9$

18. $x^2 - 6x + 9 < 16$

19. $x^2 + x < 6$

20. $x^2 + 2x > 3$

21. $x^2 + 2x - 3 < 0$

22. $x^2 > 2x + 8$

23. $3x^2 - 11x > 20$

24. $-2x^2 + 6x + 15 \leq 0$

25. $x^2 - 3x - 18 > 0$

26. $x^3 + 2x^2 - 4x - 8 \leq 0$

27. $x^3 - 3x^2 - x > -3$

28. $2x^3 + 13x^2 - 8x - 46 \geq 6$

29. $4x^2 - 4x + 1 \leq 0$

30. $x^2 + 3x + 8 > 0$

En los Ejercicios 31-36, resuelva la desigualdad y escriba el conjunto de solución en notación de intervalos.

31. $4x^3 - 6x^2 < 0$

32. $4x^3 - 12x^2 > 0$

33. $x^3 - 4x \geq 0$

34. $2x^3 - x^4 \leq 0$

35. $(x-1)^2(x+2)^3 \geq 0$

36. $x^4(x-3) \leq 0$

ANÁLISIS GRÁFICO En los Ejercicios 37-40, use una calculadora de gráficas para graficar la ecuación. Use la gráfica para aproximar los valores de x que satisfagan cada una de las desigualdades.

Ecuación	*Desigualdades*	
37. $y = -x^2 + 2x + 3$	(a) $y \leq 0$	(b) $y \geq 3$
38. $y = \frac{1}{2}x^2 - 2x + 1$	(a) $y \leq 0$	(b) $y \geq 7$
39. $y = \frac{1}{8}x^3 - \frac{1}{2}x$	(a) $y \geq 0$	(b) $y \leq 6$
40. $y = x^3 - x^2 - 16x + 16$	(a) $y \leq 0$	(b) $y \geq 36$

En los Ejercicios 41-54, resuelva la desigualdad y grafique la solución en la recta numérica real.

41. $\dfrac{4x-1}{x} > 0$

42. $\dfrac{x^2-1}{x} < 0$

43. $\dfrac{3x-5}{x-5} \geq 0$

44. $\dfrac{5+7x}{1+2x} \leq 4$

45. $\dfrac{x+6}{x+1} - 2 < 0$

46. $\dfrac{x+12}{x+2} - 3 \geq 0$

47. $\dfrac{2}{x+5} > \dfrac{1}{x-3}$

48. $\dfrac{5}{x-6} > \dfrac{3}{x+2}$

49. $\dfrac{1}{x-3} \leq \dfrac{9}{4x+3}$

50. $\dfrac{1}{x} \geq \dfrac{1}{x+3}$

51. $\dfrac{x^2+2x}{x^2-9} \leq 0$

52. $\dfrac{x^2+x-6}{x} \geq 0$

53. $\dfrac{3}{x-1} + \dfrac{2x}{x+1} > -1$

54. $\dfrac{3x}{x-1} \leq \dfrac{x}{x+4} + 3$

ANÁLISIS GRÁFICO En los Ejercicios 55-58, use una calculadora de gráficas para graficar la ecuación. Use la gráfica para aproximar los valores de x que satisfagan cada desigualdad.

	Ecuación	*Desigualdades*	
55.	$y = \dfrac{3x}{x - 2}$	(a) $y \le 0$	(b) $y \ge 6$
56.	$y = \dfrac{2(x - 2)}{x + 1}$	(a) $y \le 0$	(b) $y \ge 8$
57.	$y = \dfrac{2x^2}{x^2 + 4}$	(a) $y \ge 1$	(b) $y \le 2$
58.	$y = \dfrac{5x}{x^2 + 4}$	(a) $y \ge 1$	(b) $y \le 0$

En los Ejercicios 59-64, encuentre el dominio de x en la expresión. Use una calculadora de gráficas para verificar su resultado.

59. $\sqrt{4 - x^2}$ **60.** $\sqrt{x^2 - 4}$

61. $\sqrt{x^2 - 9x + 20}$ **62.** $\sqrt{81 - 4x^2}$

63. $\sqrt{\dfrac{x}{x^2 - 2x - 35}}$ **64.** $\sqrt{\dfrac{x}{x^2 - 9}}$

En los Ejercicios 65-70, resuelva la desigualdad. (Redondee sus respuestas a dos lugares decimales.)

65. $0.4x^2 + 5.26 < 10.2$

66. $-1.3x^2 + 3.78 > 2.12$

67. $-0.5x^2 + 12.5x + 1.6 > 0$

68. $1.2x^2 + 4.8x + 3.1 < 5.3$

69. $\dfrac{1}{2.3x - 5.2} > 3.4$ **70.** $\dfrac{2}{3.1x - 3.7} > 5.8$

ALTURA DE UN PROYECTIL En los Ejercicios 71-72, use la ecuación de posición $s = -16t^2 + v_0t + s_0$, donde s representa la altura de un objeto (en pies), v_0 la rapidez inicial del objeto (en pies por segundo), s_0 la altura inicial del objeto (en pies) y t el tiempo (en segundos).

71. Un proyectil es disparado directamente hacia arriba desde el nivel del suelo ($s_0 = 0$) con una rapidez inicial de 160 pies por segundo.

(a) ¿En qué instante regresará al nivel del suelo?

(b) ¿Cuándo excederá de 384 pies de altura?

72. Un proyectil es disparado directamente hacia arriba desde el nivel del suelo ($s_0 = 0$) con una rapidez inicial de 128 pies por segundo.

(a) ¿En qué instante regresará al nivel del suelo?

(b) ¿Cuándo excederá de 128 pies de altura?

73. GEOMETRÍA Un campo deportivo rectangular con perímetro de 100 metros ha de tener un área de al menos 500 metros cuadrados. ¿Dentro de qué límites debe estar la longitud del rectángulo?

74. GEOMETRÍA Un estacionamiento rectangular con perímetro de 440 pies ha de tener un área de al menos 8000 pies cuadrados. ¿Dentro de qué límites debe estar la longitud del rectángulo?

75. COSTO, INGRESO Y UTILIDAD Las ecuaciones de ingreso y costo para un producto son $R = x(75 - 0.0005x)$ y $C = 30x + 250\,000$, donde R y C se miden en dólares y x representa el número de unidades vendidas. ¿Cuántas unidades deben ser vendidas para obtener una utilidad de al menos \$750 000? ¿Cuál es el precio por unidad?

76. COSTO, INGRESO Y UTILIDAD Las ecuaciones de ingreso y costo para un producto son

$$R = x(50 - 0.0002x) \quad \text{y} \quad C = 12x + 150\,000$$

donde R y C se miden en dólares y x representa el número de unidades vendidas. ¿Cuántas unidades deben ser vendidas para obtener una utilidad de al menos \$1 650 000? ¿Cuál es el precio por unidad?

77. INSCRIPCIONES ESCOLARES Los números N (en millones) de estudiantes inscritos en escuelas en Estados Unidos de 1995 a 2006 se muestran en la tabla. (Fuente: U.S. Census Bureau)

Año	Número, N
1995	69.8
1996	70.3
1997	72.0
1998	72.1
1999	72.4
2000	72.2
2001	73.1
2002	74.0
2003	74.9
2004	75.5
2005	75.8
2006	75.2

(a) Use una calculadora de gráficas para crear una gráfica de dispersión de los datos. Con t represente el año, con $t = 5$ correspondiente a 1995.

(b) Use el comando *regression* de una calculadora de gráficas para hallar un modelo cuártico para los datos.

(c) Grafique el modelo y la gráfica de dispersión en la misma pantalla. ¿Qué tan bien se ajusta el modelo a los datos?

(d) De acuerdo con el modelo, ¿durante cuáles años excederá de 74 millones el número de estudiantes inscritos en escuelas?

(e) ¿Es válido el modelo para predicciones de largo plazo de inscripción de estudiantes en escuelas? Explique.

78. CARGA SEGURA La máxima carga segura uniformemente distribuida en una sección de un pie, de una viga de madera de dos pulgadas de ancho, está aproximada por el modelo Carga $= 168.5d^2 - 472.1$, donde d es la profundidad de la viga.

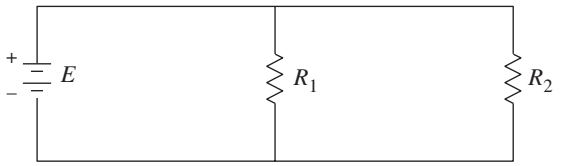
(a) Evalúe el modelo para $d = 4$, $d = 6$, $d = 8$, $d = 10$ y $d = 12$. Use los resultados para crear una gráfica de barras.

(b) Determine la profundidad mínima de la viga que soportará con seguridad una carga de 2000 libras.

79. RESISTORES Cuando dos resistores de resistencias R_1 y R_2 están conectados en paralelo (vea figura), la resistencia total R satisface la ecuación

$$\frac{1}{R} = \frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2}.$$

Encuentre R_1 para un circuito paralelo en el que $R_2 = 2$ ohms y R debe ser al menos de 1 ohm.



80. SALARIOS DE MAESTROS Los salarios medios S (en miles de dólares) de profesores en Estados Unidos, de 2000 a 2007, se muestran en la tabla siguiente.

Año	Salario, S
2000	42.2
2001	43.7
2002	43.8
2003	45.0
2004	45.6
2005	45.9
2006	48.2
2007	49.3

Un modelo que aproxima estos datos está dado por

$$S = \frac{42.6 - 1.95t}{1 - 0.06t}$$

donde t representa el año, con $t = 0$ correspondiente a 2000. (Fuente: Educational Research Service, Arlington, VA)

(a) Use una calculadora de gráficas para crear una gráfica de dispersión de los datos. A continuación grafique el modelo en la misma pantalla.

(b) ¿Qué tan bien se ajusta el modelo a los datos? Explique.

(c) De acuerdo con el modelo, en qué año pasará de \$60 000 el salario para profesores?

(d) ¿El modelo es válido para predicciones de largo plazo de salarios de profesores? Explique.

EXPLORACIÓN

¿VERDADERO O FALSO? En los Ejercicios 81 y 82, determine si la proposición es verdadera o falsa. Justifique su respuesta.

81. Los ceros del polinomio $x^3 - 2x^2 - 11x + 12 \geq 0$ dividen la recta numérica real en cuatro intervalos de prueba.

82. El conjunto solución de $\frac{3}{2}x^2 + 3x + 6 \geq 0$ es todo el conjunto de los números reales.

En los Ejercicios 83-86, (a) encuentre el(los) intervalo(s) para b tal que la ecuación tenga al menos una solución real y (b) escriba una conjetura acerca del(los) intervalo(s) basado en los valores de los coeficientes.

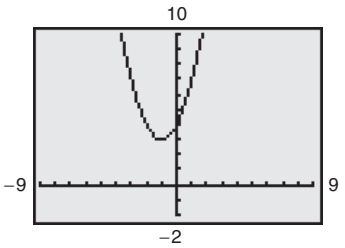
83. $x^2 + bx + 4 = 0$

84. $x^2 + bx - 4 = 0$

85. $3x^2 + bx + 10 = 0$

86. $2x^2 + bx + 5 = 0$

87. ANÁLISIS GRÁFICO El estudiante puede usar calculadora de gráficas para verificar los resultados del Ejemplo 4. Por ejemplo, la gráfica de $y = x^2 + 2x + 4$ se muestra a continuación. Observe que los valores de y son mayores que 0 para todos los valores de x, como se indica en el Ejemplo 4(a). Use una calculadora de gráficas para graficar $y = x^2 + 2x + 1$, $y = x^2 + 3x + 5$ y $y = x^2 - 4x + 4$. Explique cómo se pueden usar las gráficas para verificar los resultados de los incisos (b), (c) y (d) del Ejemplo 4.



88. TOQUE FINAL Considere el polinomio

$$(x - a)(x - b)$$

y la recta numérica real que se muestra enseguida.

(a) Identifique los puntos sobre la recta en los que el polinomio es cero.

(b) En cada uno de los tres subintervalos de la recta, escriba el signo de cada factor y el signo del producto.

(c) ¿En qué valores de x cambia de signos el polinomio?

2 Resumen del capítulo

	¿Qué aprendió?	Explicación/Ejemplos	Ejercicios de repaso
Sección 2.1	Analizar gráficas de funciones cuadráticas *(p. 126)*.	Sean a, b y c números reales con $a \neq 0$. La función dada por $f(x) = ax^2 + bx + c$ se denomina función cuadrática. Su gráfica es una curva en forma de U llamada parábola.	1, 2
	Escribir funciones cuadráticas en forma estándar y usar los resultados para trazar gráficas de funciones *(p. 129)*.	La función cuadrática $f(x) = a(x - h)^2 + k$, $a \neq 0$, está en forma estándar. La gráfica de f es una parábola cuyo eje es la recta vertical $x = h$ y cuyo vértice es (h, k). Si $a > 0$, la parábola se abre hacia arriba; si $a < 0$, la parábola se abre hacia abajo.	3–20
	Encontrar valores mínimo y máximo de funciones cuadráticas en aplicaciones de la vida real *(p. 131)*.	Considere $f(x) = ax^2 + bx + c$ con vértice $\left(-\frac{b}{2a}, f\left(\frac{b}{2a}\right)\right)$. Si $a > 0$, f tiene un *mínimo* en $x = -b/(2a)$. Si $a < 0$, f tiene un *máximo* en $x = -b/(2a)$.	21–24
Sección 2.2	Usar transformaciones para trazar gráficas de funciones polinomiales *(p. 136)*.	La gráfica de una función polinomial es continua (sin interrupciones, huecos ni intervalos) y sólo tiene cambios de dirección suaves y redondeados.	25–30
	Usar la prueba del coeficiente principal para determinar el comportamiento final de gráficas de funciones polinomiales *(p. 138)*.	Considere la gráfica de $f(x) = a_n x^n + \cdots + a_1 x + a_0$. **Cuando *n* es impar:** si $a_n > 0$, la gráfica baja por la izquierda y sube por la derecha; si $a_n < 0$, la gráfica sube por la izquierda y baja por la derecha. **Cuando *n* es par:** si $a_n > 0$, la gráfica sube por la izquierda y por la derecha; si $a_n < 0$, la gráfica baja por la izquierda y por la derecha.	31–34
	Hallar y usar ceros de funciones polinomiales como ayudas para el trazado *(p. 139)*.	Si f es una función polinomial y a es un número real, lo que sigue es equivalente: (1) $x = a$ es un *cero* de f; (2) $x = a$ es una *solución* de la ecuación $f(x) = 0$; (3) $(x - a)$ es un *factor* de $f(x)$, y (4) $(a, 0)$ es una intersección de la gráfica de f con el eje x.	35–44
	Usar el teorema de valor intermedio para ayudar a localizar ceros de funciones polinomiales *(p. 143)*.	Sean a y b números reales tales que $a < b$. Si f es una función polinomial tal que $f(a) \neq f(b)$, entonces, en $[a, b]$ f toma todo valor entre $f(a)$ y $f(b)$.	45–48
Sección 2.3	Usar división larga para dividir polinomios entre otros polinomios *(p. 150)*.	Dividendo, Cociente, Residuo: $\dfrac{x^2 + 3x + 5}{x + 1} = x + 2 + \dfrac{3}{x + 1}$ Divisor, Divisor	49–54
	Usar división sintética para dividir polinomios entre polinomios de la forma $(x - k)$ *(p. 153)*.	Divisor: $x + 3$; Dividendo: $x^4 - 10x^2 - 2x + 4$ $-3 \mid 1 \quad 0 \quad -10 \quad -2 \quad 4$ $\quad\quad -3 \quad 9 \quad 3 \quad -3$ $\quad 1 \quad -3 \quad -1 \quad 1 \quad 1$ ← Residuo: 1 Dividendo: $x^3 - 3x^2 - x + 1$	55–60
	Usar el teorema del residuo y el teorema del factor *(p. 154)*.	**El teorema del residuo:** si un polinomio $f(x)$ se divide entre $x - k$, el residuo es $r = f(k)$. **El teorema del factor:** un polinomio $f(x)$ tiene un factor $(x - k)$ si y sólo si $f(k) = 0$.	61–66
Sección 2.4	Usar la unidad imaginaria i para escribir números complejos *(p. 159)*.	Si a y b son números reales, $a + bi$ es un número complejo. Dos números complejos $a + bi$ y $c + di$, escritos en forma estándar, son iguales entre sí si y sólo si $a = c$ y $b = d$.	67–70

	¿Qué aprendió?	Explicación/Ejemplos	Ejercicios de repaso
Sección 2.4	Sumar, restar y multiplicar números complejos *(p. 160)*.	**Suma:** $(a + bi) + (c + di) = (a + c) + (b + d)i$ **Diferencia:** $(a + bi) - (c + di) = (a - c) + (b - d)i$	71–78
	Usar conjugados complejos para escribir el cociente de dos números complejos en forma estándar *(p. 162)*.	Los números $a + bi$ y $a - bi$ son conjugados complejos. Para escribir $(a + bi)/(c + di)$ en forma estándar, multiplique el numerador y el denominador por $c - di$.	79–82
	Hallar soluciones complejas de ecuaciones cuadráticas *(p. 163)*.	Si a es un número positivo, la raíz cuadrada principal del número negativo $-a$ está definida como $\sqrt{-a} = \sqrt{a}i$.	83–86
Sección 2.5	Usar el teorema fundamental del álgebra para hallar el número de ceros de funciones polinomiales *(p. 166)*.	**El teorema fundamental del álgebra** Si $f(x)$ es un polinomio de grado n, donde $n > 0$, entonces f tiene al menos un cero en el sistema de los números complejos.	87–92
	Hallar ceros racionales de funciones polinomiales *(p.167)*, y pares conjugados de ceros complejos *(p. 170)*.	La prueba del cero racional relaciona los posibles ceros racionales de un polinomio con el coeficiente principal y con el término constante del polinomio. Sea $f(x)$ una función polinomial que tiene coeficientes reales. Si $a + bi$ $(b \neq 0)$ es un cero de la función, el conjugado $a - bi$ también es un cero de la función.	93–102
	Hallar ceros de polinomios por factorización *(p. 170)*.	Todo polinomio de grado $n > 0$ con coeficientes reales puede escribirse como producto de factores lineales y cuadráticos con coeficientes reales, donde los factores cuadráticos no tienen ceros reales.	103–110
	Usar la regla de Descartes de los signos *(p.173)* y las reglas de cota superior e inferior *(p. 174)* para hallar ceros de polinomios.	**Regla de Descartes de los signos** Sea $f(x) = a_n x^n + a_{n-1}x^{n-1} + \cdots + a_2x^2 + a_1x + a_0$ un polinomio con coeficientes reales y $a_0 \neq 0$. **1.** El número de *ceros reales positivos* de f es ya sea igual al número de variaciones en signo de $f(x)$ o menor que ese número por un entero par. **2.** El número de *ceros reales negativos* de f es ya sea igual al número de variaciones en signo de $f(-x)$ o menor que ese número por un entero par.	111–114
Sección 2.6	Hallar los dominios *(p.181)* y las asíntotas verticales y horizontales *(p.182)* de funciones racionales.	El dominio de una función racional de x incluye todos los números reales excepto valores de x que hagan que el denominador sea igual a cero. La recta $x = a$ es una asíntota vertical de la gráfica de f si $f(x) \to \infty$ o $f(x) \to -\infty$ cuando $x \to a$, ya sea por la derecha o la izquierda. La rectas $y = b$ es una asíntota horizontal de la gráfica de f si $f(x) \to b$ cuando $x \to \infty$ o $x \to -\infty$.	115–122
	Analizar y trazar gráficas de funciones racionales *(p.184)* incluidas funciones con asíntotas oblicuas *(p. 187)*.	Considere una función racional cuyo denominador es de grado 1 o mayor. Si el grado del numerador es exactamente uno más que el del denominador, la gráfica de la función tiene una asíntota oblicua.	123–138
	Usar funciones racionales para modelar y resolver problemas de la vida real *(p. 188)*.	Una función racional se puede usar para modelar el costo de eliminar un determinado porcentaje de contaminantes de chimenea, en una compañía generadora de electricidad que quema carbón. (Vea Ejemplo 8.)	139–142
Sección 2.7	Resolver polinomios *(p.194)* y resolver problemas reales *(p. 198)*.	Use los conceptos de números de referencia e intervalos de prueba para resolver desigualdades tanto racionales como polinomiales.	143–150
	Usar desigualdades para modelar y resolver problemas de la vida real *(p. 199)*.	Una aplicación común de las desigualdades relaciona la utilidad P, el ingreso R y el costo C. (Vea el Ejemplo 6.)	151, 152

2 EJERCICIOS DE REPASO

En www.CalcChat.com vea las soluciones a los ejercicios de números impares

2.1 En los Ejercicios 1 y 2, grafique cada función. Compare la gráfica de cada función con la de $y = x^2$.

1. (a) $f(x) = 2x^2$
(b) $g(x) = -2x^2$
(c) $h(x) = x^2 + 2$
(d) $k(x) = (x + 2)^2$

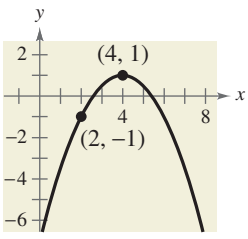
2. (a) $f(x) = x^2 - 4$
(b) $g(x) = 4 - x^2$
(c) $h(x) = (x - 3)^2$
(d) $k(x) = \frac{1}{2}x^2 - 1$

En los Ejercicios 3-14, escriba la función cuadrática en forma estándar y trace su gráfica. Identifique el vértice, eje de simetría e intersección(es) con el eje x.

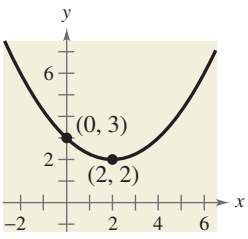
3. $g(x) = x^2 - 2x$
4. $f(x) = 6x - x^2$
5. $f(x) = x^2 + 8x + 10$
6. $h(x) = 3 + 4x - x^2$
7. $f(t) = -2t^2 + 4t + 1$
8. $f(x) = x^2 - 8x + 12$
9. $h(x) = 4x^2 + 4x + 13$
10. $f(x) = x^2 - 6x + 1$
11. $h(x) = x^2 + 5x - 4$
12. $f(x) = 4x^2 + 4x + 5$
13. $f(x) = \frac{1}{3}(x^2 + 5x - 4)$
14. $f(x) = \frac{1}{2}(6x^2 - 24x + 22)$

En los Ejercicios 15-20, escriba la forma estándar de la ecuación de la parábola que tiene el vértice indicado y cuya gráfica pasa por el punto dado.

15.



16.



17. Vértice: $(1, -4)$; punto: $(2, -3)$
18. Vértice: $(2, 3)$; punto: $(-1, 6)$
19. Vértice: $\left(-\frac{3}{2}, 0\right)$; punto: $\left(-\frac{9}{2}, -\frac{11}{4}\right)$
20. Vértice: $(3, 3)$; punto: $\left(\frac{1}{4}, \frac{4}{5}\right)$

21. GEOMETRÍA El perímetro de un rectángulo es de 1000 metros.
(a) Trace un diagrama que dé una representación visual del problema. Marque la longitud y el ancho como x y y, respectivamente.
(b) Escriba y como función de x. Use el resultado para escribir el área como función de x.
(c) De todos los rectángulos posibles con perímetros de 1000 metros, encuentre las dimensiones de uno con el área máxima

22. INGRESO MÁXIMO El ingreso total R ganado (en dólares) por producir una caja de regalo de caramelos, está dado por

$$R(p) = -10p^2 + 800p$$

donde p es el precio por unidad (en dólares).
(a) Encuentre los ingresos cuando los precios por caja sean \$20, \$25 y \$30.
(b) Encuentre el precio unitario que dé un ingreso máximo. ¿Cuál es el ingreso máximo? Explique sus resultados.

23. COSTO MÍNIMO Un fabricante de gaseosas tiene costos diarios de producción de

$$C = 70\,000 - 120x + 0.055x^2$$

donde C es el costo total (en dólares) y x es el número de unidades producidas. ¿Cuántas unidades deben producirse cada día para dar un costo mínimo?

24. SOCIOLOGÍA El promedio de edad del novio en un primer matrimonio, para una edad determinada de la novia, puede calcularse con el modelo

$$y = -0.107x^2 + 5.68x - 48.5, \quad 20 \le x \le 25$$

donde y es la edad del novio y x la de la novia. Trace una gráfica del modelo. ¿Para qué edad de la novia es 26 el promedio de edad del novio? (Fuente: U.S. Census Bureau)

2.2 En los Ejercicios 25-30, trace las gráficas de $y = x^n$ y la transformación.

25. $y = x^3$, $f(x) = -(x - 2)^3$
26. $y = x^3$, $f(x) = -4x^3$
27. $y = x^4$, $f(x) = 6 - x^4$
28. $y = x^4$, $f(x) = 2(x - 8)^4$
29. $y = x^5$, $f(x) = (x - 5)^5$
30. $y = x^5$, $f(x) = \frac{1}{2}x^5 + 3$

En los Ejercicios 31-34, describa el comportamiento a la derecha y a la izquierda de la gráfica de la función polinomial.

31. $f(x) = -2x^2 - 5x + 12$

32. $f(x) = \frac{1}{2}x^3 + 2x$

33. $g(x) = \frac{3}{4}(x^4 + 3x^2 + 2)$

34. $h(x) = -x^7 + 8x^2 - 8x$

En los Ejercicios 35-40, encuentre todos los ceros reales de la función polinomial. Determine la multiplicidad de cada cero y el número de puntos extremos de la gráfica de la función. Use una calculadora de gráficas para verificar sus respuestas.

35. $f(x) = 3x^2 + 20x - 32$

36. $f(x) = x(x + 3)^2$

37. $f(t) = t^3 - 3t$

38. $f(x) = x^3 - 8x^2$

39. $f(x) = -18x^3 + 12x^2$

40. $g(x) = x^4 + x^3 - 12x^2$

En los Ejercicios 41-44, trace la gráfica de la función al (a) aplicar la prueba del coeficiente principal, (b) hallar los ceros del polinomio, (c) determinar suficientes puntos de solución y (d) trazar una curva continua que pase por los puntos.

41. $f(x) = -x^3 + x^2 - 2$

42. $g(x) = 2x^3 + 4x^2$

43. $f(x) = x(x^3 + x^2 - 5x + 3)$

44. $h(x) = 3x^2 - x^4$

En los Ejercicios 45-48, (a) use el teorema de valor intermedio y el comando *table* de una calculadora de gráficas, para hallar intervalos de una unidad de largo, en los que se garantiza que la función polinomial tiene un cero. (b) Ajuste la tabla para aproximar los ceros de la función. Use el comando *zero* o *root* de la calculadora de gráficas para verificar sus resultados.

45. $f(x) = 3x^3 - x^2 + 3$

46. $f(x) = 0.25x^3 - 3.65x + 6.12$

47. $f(x) = x^4 - 5x - 1$

48. $f(x) = 7x^4 + 3x^3 - 8x^2 + 2$

2.3 En los Ejercicios 49-54, use división larga para dividir.

49. $\dfrac{30x^2 - 3x + 8}{5x - 3}$

50. $\dfrac{4x + 7}{3x - 2}$

51. $\dfrac{5x^3 - 21x^2 - 25x - 4}{x^2 - 5x - 1}$

52. $\dfrac{3x^4}{x^2 - 1}$

53. $\dfrac{x^4 - 3x^3 + 4x^2 - 6x + 3}{x^2 + 2}$

54. $\dfrac{6x^4 + 10x^3 + 13x^2 - 5x + 2}{2x^2 - 1}$

En los Ejercicios 55-58, use división sintética para dividir.

55. $\dfrac{6x^4 - 4x^3 - 27x^2 + 18x}{x - 2}$

56. $\dfrac{0.1x^3 + 0.3x^2 - 0.5}{x - 5}$

57. $\dfrac{2x^3 - 25x^2 + 66x + 48}{x - 8}$

58. $\dfrac{5x^3 + 33x^2 + 50x - 8}{x + 4}$

En los Ejercicios 59 y 60, use división sintética para determinar si los valores dados de x son ceros de la función.

59. $f(x) = 20x^4 + 9x^3 - 14x^2 - 3x$

(a) $x = -1$ (b) $x = \frac{3}{4}$ (c) $x = 0$ (d) $x = 1$

60. $f(x) = 3x^3 - 8x^2 - 20x + 16$

(a) $x = 4$ (b) $x = -4$ (c) $x = \frac{2}{3}$ (d) $x = -1$

En los Ejercicios 61 y 62, use el teorema del residuo y división sintética para hallar cada valor de la función.

61. $f(x) = x^4 + 10x^3 - 24x^2 + 20x + 44$

(a) $f(-3)$ (b) $f(-1)$

62. $g(t) = 2t^5 - 5t^4 - 8t + 20$

(a) $g(-4)$ (b) $g\left(\sqrt{2}\right)$

En los Ejercicios 63-66, (a) verifique el(los) factor(es) dado(s) de la función f, (b) encuentre los factores restantes de f, (c) use sus resultados para escribir la factorización completa de f, (d) haga una lista de todos los ceros reales de f y (e) confirme sus resultados con una calculadora de gráficas para graficar la función.

	Función	*Factor(es)*
63.	$f(x) = x^3 + 4x^2 - 25x - 28$	$(x - 4)$
64.	$f(x) = 2x^3 + 11x^2 - 21x - 90$	$(x + 6)$
65.	$f(x) = x^4 - 4x^3 - 7x^2 + 22x + 24$	$(x + 2)(x - 3)$
66.	$f(x) = x^4 - 11x^3 + 41x^2 - 61x + 30$	$(x - 2)(x - 5)$

2.4 En los Ejercicios 67-60, escriba el número complejo en forma estándar.

67. $8 + \sqrt{-100}$

68. $5 - \sqrt{-49}$

69. $i^2 + 3i$

70. $-5i + i^2$

En los Ejercicios 71-78, realice la operación y escriba el resultado en forma estándar.

71. $(7 + 5i) + (-4 + 2i)$

72. $\left(\dfrac{\sqrt{2}}{2} - \dfrac{\sqrt{2}}{2}i\right) - \left(\dfrac{\sqrt{2}}{2} + \dfrac{\sqrt{2}}{2}i\right)$

73. $7i(11 - 9i)$

74. $(1 + 6i)(5 - 2i)$

75. $(10 - 8i)(2 - 3i)$

76. $i(6 + i)(3 - 2i)$

77. $(8 - 5i)^2$

78. $(4 + 7i)^2 + (4 - 7i)^2$

En los Ejercicios 79 y 80, escriba el cociente en forma estándar.

79. $\dfrac{6 + i}{4 - i}$

80. $\dfrac{8 - 5i}{i}$

En los Ejercicios 81 y 82, realice la operación y escriba el resultado en forma estándar.

81. $\dfrac{4}{2-3i}+\dfrac{2}{1+i}$ **82.** $\dfrac{1}{2+i}-\dfrac{5}{1+4i}$

En los Ejercicios 83-86, encuentre todas las soluciones de la ecuación.

83. $5x^2+2=0$ **84.** $2+8x^2=0$

85. $x^2-2x+10=0$ **86.** $6x^2+3x+27=0$

2.5 En los Ejercicios 87-92, encuentre todos los ceros de la función.

87. $f(x)=4x(x-3)^2$ **88.** $f(x)=(x-4)(x+9)^2$

89. $f(x)=x^2-11x+18$ **90.** $f(x)=x^3+10x$

91. $f(x)=(x+4)(x-6)(x-2i)(x+2i)$

92. $f(x)=(x-8)(x-5)^2(x-3+i)(x-3-i)$

En los Ejercicios 93 y 94, use la prueba del cero racional para hacer una lista de todos los posibles ceros racionales de f.

93. $f(x)=-4x^3+8x^2-3x+15$

94. $f(x)=3x^4+4x^3-5x^2-8$

En los Ejercicios 95-100, encuentre todos los ceros racionales de la función.

95. $f(x)=x^3+3x^2-28x-60$

96. $f(x)=4x^3-27x^2+11x+42$

97. $f(x)=x^3-10x^2+17x-8$

98. $f(x)=x^3+9x^2+24x+20$

99. $f(x)=x^4+x^3-11x^2+x-12$

100. $f(x)=25x^4+25x^3-154x^2-4x+24$

En los Ejercicios 101 y 102, encuentre una función polinomial con coeficientes reales que tenga los ceros dados. (Hay numerosas respuestas correctas.)

101. $\frac{2}{3}, 4, \sqrt{3}\,i$ **102.** $2, -3, 1-2i$

En los Ejercicios 103-106, use el cero dado para hallar todos los ceros de la función.

	Función	*Cero*
103.	$f(x)=x^3-4x^2+x-4$	i
104.	$h(x)=-x^3+2x^2-16x+32$	$-4i$
105.	$g(x)=2x^4-3x^3-13x^2+37x-15$	$2+i$
106.	$f(x)=4x^4-11x^3+14x^2-6x$	$1-i$

En los Ejercicios 107-110, encuentre todos los ceros de la función y escriba el polinomio como producto de factores lineales.

107. $f(x)=x^3+4x^2-5x$

108. $g(x)=x^3-7x^2+36$

109. $g(x)=x^4+4x^3-3x^2+40x+208$

110. $f(x)=x^4+8x^3+8x^2-72x-153$

En los Ejercicios 111 y 112, use la regla de Descartes de los signos para determinar el posible número de ceros positivos y negativos de la función.

111. $g(x)=5x^3+3x^2-6x+9$

112. $h(x)=-2x^5+4x^3-2x^2+5$

En los Ejercicios 113 y 114, use división sintética para verificar las cotas superior e inferior de los ceros reales de f.

113. $f(x)=4x^3-3x^2+4x-3$

(a) Superior: $x=1$ (b) Inferior: $x=-\frac{1}{4}$

114. $f(x)=2x^3-5x^2-14x+8$

(a) Superior: $x=8$ (b) Inferior: $x=-4$

2.6 En los Ejercicios 115-118, encuentre el dominio de la función racional.

115. $f(x)=\dfrac{3x}{x+10}$ **116.** $f(x)=\dfrac{4x^3}{2+5x}$

117. $f(x)=\dfrac{8}{x^2-10x+24}$ **118.** $f(x)=\dfrac{x^2+x-2}{x^2+4}$

En los Ejercicios 119-122, identifique cualesquiera asíntotas verticales u horizontales.

119. $f(x)=\dfrac{4}{x+3}$ **120.** $f(x)=\dfrac{2x^2+5x-3}{x^2+2}$

121. $h(x)=\dfrac{5x+20}{x^2-2x-24}$ **122.** $h(x)=\dfrac{x^3-4x^2}{x^2+3x+2}$

En los Ejercicios 123-134, (a) exprese el dominio de la función, (b) identifique todas las intersecciones con los ejes coordenados, (c) encuentre cualesquiera asíntotas verticales y horizontales y (d) localice puntos de solución adicionales según sea necesario para trazar la gráfica de la función racional.

123. $f(x)=\dfrac{-3}{2x^2}$ **124.** $f(x)=\dfrac{4}{x}$

125. $g(x)=\dfrac{2+x}{1-x}$ **126.** $h(x)=\dfrac{x-4}{x-7}$

127. $p(x)=\dfrac{5x^2}{4x^2+1}$ **128.** $f(x)=\dfrac{2x}{x^2+4}$

129. $f(x)=\dfrac{x}{x^2+1}$ **130.** $h(x)=\dfrac{9}{(x-3)^2}$

131. $f(x)=\dfrac{-6x^2}{x^2+1}$ **132.** $f(x)=\dfrac{2x^2}{x^2-4}$

133. $f(x)=\dfrac{6x^2-11x+3}{3x^2-x}$ **134.** $f(x)=\dfrac{6x^2-7x+2}{4x^2-1}$

En los Ejercicios 135-138, (a) exprese el dominio de la función, (b) identifique todas las intersecciones con los ejes coordenados, (c) identifique cualesquiera asíntotas verticales y diagonales y (d) determine puntos de solución adicionales según sea necesario para trazar la gráfica de la función racional.

135. $f(x) = \dfrac{2x^3}{x^2 + 1}$

136. $f(x) = \dfrac{x^2 + 1}{x + 1}$

137. $f(x) = \dfrac{3x^3 - 2x^2 - 3x + 2}{3x^2 - x - 4}$

138. $f(x) = \dfrac{3x^3 - 4x^2 - 12x + 16}{3x^2 + 5x - 2}$

139. COSTO PROMEDIO Un negocio tiene un costo de producción $C = 0.5x + 500$ por producir x unidades de un producto. El costo promedio por unidad, $\overline{C}$, está dado por

$$\overline{C} = \frac{C}{x} = \frac{0.5x + 500}{x}, \quad x > 0.$$

Determine el costo promedio por unidad cuando x aumente sin límite. (Encuentre la asíntota horizontal.)

140. CAPTURA DE DROGAS ILEGALES El costo C (en millones de dólares) para el gobierno federal, para capturar $p\%$ de una droga ilegal cuando entra al país, está dado por

$$C = \frac{528p}{100 - p}, \quad 0 \le p < 100.$$

(a) Use una calculadora de gráficas para graficar la función de costo.

(b) Encuentre los costos de capturar 25%, 50% y 75% de la droga.

(c) De acuerdo con este modelo, ¿sería posible capturar 100% de la droga?

141. DISEÑO DE PÁGINA Una página que mide x pulgadas de ancho y y pulgadas de alto contiene 30 pulgadas cuadradas de material impreso. Los márgenes superior e inferior miden 2 pulgadas de profundidad y los márgenes de cada lado son de 2 pulgadas de ancho.

(a) Trace un diagrama que dé una representación visual del problema.

(b) Escriba una función para el área total A de la página en términos de x.

(c) Determine el dominio de la función con base en las restricciones físicas del problema.

(d) Use una calculadora de gráficas para graficar la función de área y aproxime las dimensiones de la página, para las cuales se usará la cantidad mínima de papel. Verifique numéricamente sus respuestas usando el comando *table* de la calculadora de gráficas.

142. FOTOSÍNTESIS La cantidad y de absorción de CO_2 (en miligramos por decímetro cuadrado por hora), a temperaturas óptimas y con abastecimiento natural de CO_2 se calcula con el modelo

$$y = \frac{18.47x - 2.96}{0.23x + 1}, \quad x > 0$$

donde x es la intensidad de luz (en watts por metro cuadrado). Use una calculadora de gráficas para graficar la función y determinar la cantidad limitante de absorción de CO_2.

2.7 En los Ejercicios 143-150, resuelva la desigualdad.

143. $12x^2 + 5x < 2$

144. $3x^2 + x \ge 24$

145. $x^3 - 16x \ge 0$

146. $12x^3 - 20x^2 < 0$

147. $\dfrac{2}{x + 1} \le \dfrac{3}{x - 1}$

148. $\dfrac{x - 5}{3 - x} < 0$

149. $\dfrac{x^2 - 9x + 20}{x} \le 0$

150. $\dfrac{1}{x - 2} > \dfrac{1}{x}$

151. INVERSIÓN P dólares invertidos a una tasa de interés r compuesto anualmente aumenta a una cantidad

$$A = P(1 + r)^2$$

en 2 años. Una inversión de \$5000 ha de aumentar una cantidad mayor a \$5500 en 2 años. ¿La tasa de interés debe ser mayor a qué porcentaje?

152. POBLACIÓN DE UNA ESPECIE Un biólogo introduce 200 mariquitas en un sembradío. La población P de mariquitas se calcula con el modelo

$$P = \frac{1000(1 + 3t)}{5 + t}$$

donde t es el tiempo en días. Encuentre el tiempo necesario para que la población aumente a al menos 2000 mariquitas.

EXPLORACIÓN

¿VERDADERO O FALSO? **En los Ejercicios 153 y 154, determine si la proposición es verdadera o falsa. Justifique su respuesta.**

153. Un polinomio de cuarto grado con coeficientes reales puede tener -5, $-8i$, $4i$ y 5 como sus ceros.

154. El dominio de una función racional nunca puede ser el conjunto de todos los números reales.

155. ESCRITURA Explique cómo determinar el valor máximo o mínimo de una función cuadrática.

156. ESCRITURA Explique las conexiones entre factores de un polinomio, ceros de una función polinomial, y soluciones de una ecuación polinomial.

157. ESCRITURA Describa qué significa la asíntota de una gráfica.

2 EXAMEN DEL CAPÍTULO

En www.CalcChat.com vea las soluciones a los ejercicios impares.

Tome este examen como lo haría en clase. Cuando termine, verifique su trabajo contra las respuestas dadas al final del libro.

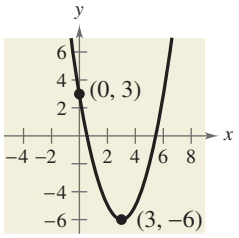


FIGURA PARA EL EJERCICIO 2

1. Describa cómo difiere la gráfica de g respecto de la de $f(x) = x^2$.

(a) $g(x) = 2 - x^2$ (b) $g(x) = \left(x - \frac{3}{2}\right)^2$

2. Encuentre una ecuación de la parábola mostrada en la figura de la izquierda.

3. La trayectoria de una pelota está dada por $y = -\frac{1}{20}x^2 + 3x + 5$, donde y es la altura (en pies) de la pelota y x es la distancia horizontal (en pies) desde donde la pelota fue lanzada.

(a) Encuentre la máxima altura de la pelota.

(b) ¿Cuál número determina la altura a la que fue lanzada la pelota? ¿El cambio de este valor cambia las coordenadas de la máxima altura de la pelota? Explique.

4. Determine el comportamiento a la derecha e izquierda de la gráfica de la función $h(t) = -\frac{3}{4}t^5 + 2t^2$. A continuación trace su gráfica.

5. Divida usando división larga.

$$\frac{3x^3 + 4x - 1}{x^2 + 1}$$

6. Divida usando división sintética.

$$\frac{2x^4 - 5x^2 - 3}{x - 2}$$

7. Use división sintética para demostrar que $x = \frac{5}{2}$ es un cero de la función dada por

$$f(x) = 2x^3 - 5x^2 - 6x + 15.$$

Use el resultado para factorizar completamente la función polinomial y haga una lista de todos los ceros reales de la función.

8. Realice cada una de las operaciones siguientes y escriba el resultado en forma estándar.

(a) $10i - \left(3 + \sqrt{-25}\right)$ (b) $\left(2 + \sqrt{3}i\right)\left(2 - \sqrt{3}i\right)$

9. Escriba el cociente en forma estándar: $\dfrac{5}{2 + i}$.

En los Ejercicios 10 y 11, encuentre una función polinomial con coeficientes reales que tenga los ceros dados. (Hay numerosas respuestas correctas.)

10. $0, 3, 2 + i$

11. $1 - \sqrt{3}i, 2, 2$

En los Ejercicios 12 y 13, halle todos los ceros de la función.

12. $f(x) = 3x^3 + 14x^2 - 7x - 10$

13. $f(x) = x^4 - 9x^2 - 22x - 24$

En los Ejercicios 14-16, identifique cualesquiera intersecciones con los ejes coordenados y las asíntotas de la gráfica de la función. A continuación trace una gráfica de ésta.

14. $h(x) = \dfrac{4}{x^2} - 1$

15. $f(x) = \dfrac{2x^2 - 5x - 12}{x^2 - 16}$

16. $g(x) = \dfrac{x^2 + 2}{x - 1}$

En los Ejercicios 17 y 18, resuelva la desigualdad. Trace el conjunto solución sobre la recta numérica real.

17. $2x^2 + 5x > 12$

18. $\dfrac{2}{x} \leq \dfrac{1}{x + 6}$

DEMOSTRACIONES EN MATEMÁTICAS

Estas dos páginas contienen demostraciones de cuatro teoremas acerca de funciones polinomiales. Los primeros dos teoremas son de la Sección 2.3 y los segundos de la 2.5.

Teorema del residuo *(p. 154)*

Si un polinomio $f(x)$ está dividido por $x - k$, el residuo es

$$r = f(k).$$

Demostración

Del algoritmo de la división, tenemos

$$f(x) = (x - k)q(x) + r(x)$$

y debido a que ya sea $r(x) = 0$ o que el grado de $r(x)$ sea menor que el grado de $x - k$, sabemos que $r(x)$ debe ser una constante. Esto es, $r(x) = r$. Ahora, al evaluar $f(x)$ en $x = k$, tenemos

$$\begin{aligned} f(k) &= (k - k)q(k) + r \\ &= (0)q(k) + r = r. \end{aligned}$$

Para tener éxito en álgebra, es importante entender la conexión entre *factores* de un polinomio, ceros de una función polinomial y *soluciones* o *raíces* de una ecuación con polinomios. El teorema del factor es la base para esta conexión.

Teorema del factor *(p. 154)*

Un polinomio $f(x)$ tiene un factor $(x - k)$ si y sólo si $f(k) = 0$.

Demostración

Usando el algoritmo de la división con el factor $(x - k)$, tenemos

$$f(x) = (x - k)q(x) + r(x).$$

Por el teorema del residuo, $r(x) = r = f(k)$, y tenemos

$$f(x) = (x - k)q(x) + f(k)$$

donde $q(x)$ es un polinomio de menor grado que $f(x)$. Si $f(k) = 0$, entonces

$$f(x) = (x - k)q(x)$$

y vemos que $(x - k)$ es un factor de $f(x)$. Recíprocamente, si $(x - k)$ es un factor de $f(x)$, la división de $f(x)$ entre $(x - k)$ da un residuo de 0. En consecuencia, por el teorema del factor tenemos que $f(k) = 0$.

Teorema de factorización lineal *(p. 166)*

Si $f(x)$ es un polinomio de grado n, donde $n > 0$, entonces f tiene precisamente n factores lineales

$$f(x) = a_n(x - c_1)(x - c_2) \cdot \cdot \cdot (x - c_n)$$

donde $c_1, c_2, \ldots, c_n$ son números complejos.

Demostración

Usando el teorema fundamental del álgebra, sabemos que f debe tener al menos un cero, c_1. En consecuencia, $(x - c_1)$ es un factor de $f(x)$, y tendremos

$$f(x) = (x - c_1)f_1(x).$$

Si el grado de $f_1(x)$ es mayor a cero, de nuevo aplicamos el teorema fundamental del álgebra para concluir que f_1 debe tener un cero c_2, lo cual implica que

$$f(x) = (x - c_1)(x - c_2)f_2(x).$$

Es evidente que el grado de $f_1(x)$ es $n - 1$, que el grado de $f_2(x)$ es $n - 2$, y que se puede aplicar repetidamente el teorema fundamental n veces hasta obtener

$$f(x) = a_n(x - c_1)(x - c_2) \cdot \cdot \cdot (x - c_n)$$

donde a_n es el coeficiente principal del polinomio $f(x)$.

Factores de un polinomio *(p. 170)*

Todo polinomio de grado $n > 0$ con coeficientes reales puede escribirse como el producto de factores lineales y cuadráticos con coeficientes reales, donde los cuadráticos no tienen ceros reales.

Demostración

Para empezar, se usa el teorema de factorización lineal para concluir que $f(x)$ puede factorizarse *completamente* en la forma

$$f(x) = d(x - c_1)(x - c_2)(x - c_3) \cdot \cdot \cdot (x - c_n).$$

Si cada c_i es real, no hay nada más que demostrar. En cambio, si cualquier c_i es complejo ($c_i = a + bi, b \neq 0$), entonces, como los coeficientes de $f(x)$ son reales, sabemos que el conjugado $c_j = a - bi$ también es cero. Al multiplicar los factores correspondientes, obtenemos

$$\begin{aligned}(x - c_i)(x - c_j) &= [x - (a + bi)][x - (a - bi)] \\ &= x^2 - 2ax + (a^2 + b^2)\end{aligned}$$

donde cada uno de los coeficientes es real.

Teorema fundamental del álgebra

El teorema de factorización lineal está estrechamente relacionado con el teorema fundamental del álgebra. El teorema fundamental del álgebra tiene una larga e interesante historia. En los primeros trabajos con ecuaciones polinomiales, se pensaba que el teorema fundamental del álgebra no era verdadero, porque no se consideraban soluciones imaginarias. De hecho, en los primeros trabajos de matemáticos como Abu Al Juarizmi (hacia 800 d.C.) tampoco se consideraban soluciones negativas.

Una vez que se aceptaron los números imaginarios, varios matemáticos trataron de dar una demostración general del teorema fundamental del álgebra. Entre ellos estaba Gottfried von Leibniz (1702), Jean d'Alembert (1746), Leonhard Euler (1749), Joseph Louis Lagrange (1772) y Pierre Simon Laplace (1795). El matemático por lo general acreditado por la primera demostración correcta del teorema fundamental del álgebra es Carl Friedrich Gauss, quien la publicó en su tesis de doctorado en 1799.

RESOLUCIÓN DE PROBLEMAS

Este conjunto de ejercicios, difíciles y que invitan a meditar, amplía y explora más a fondo los conceptos aprendidos en este capítulo.

1. Demuestre que si $f(x) = ax^3 + bx^2 + cx + d$, entonces $f(k) = r$, donde $r = ak^3 + bk^2 + ck + d$, usando división larga. En otras palabras, verifique el teorema del residuo para una función polinomial de tercer grado.

2. En el año 2000 a.C., los babilonios resolvieron ecuaciones polinomiales consultando para ello unas tablas de valores. Una de esas tablas dio los valores de $y^3 + y^2$. Para usar esta tabla, los babilonios a veces tenían que manipular la ecuación, como se ve a continuación.

$$ax^3 + bx^2 = c \qquad \text{Ecuación original}$$

$$\frac{a^3x^3}{b^3} + \frac{a^2x^2}{b^2} = \frac{a^2c}{b^3} \qquad \text{Multiplicar cada lado por } \frac{a^2}{b^3}.$$

$$\left(\frac{ax}{b}\right)^3 + \left(\frac{ax}{b}\right)^2 = \frac{a^2c}{b^3} \qquad \text{Reescribir.}$$

Entonces encontrarían $(a^2c)/b^3$ en la columna $y^3 + y^2$ de la tabla. Como sabían que el correspondiente valor de y era igual a $(ax)/b$, pudieron concluir que $x = (by)/a$.

(a) Calcule $y^3 + y^2$ para $y = 1, 2, 3, \ldots, 10$. Registre los valores en una tabla.

Use la tabla del inciso (a) y el método citado líneas antes para resolver cada ecuación.

(b) $x^3 + x^2 = 252$

(c) $x^3 + 2x^2 = 288$

(d) $3x^3 + x^2 = 90$

(e) $2x^3 + 5x^2 = 2500$

(f) $7x^3 + 6x^2 = 1728$

(g) $10x^3 + 3x^2 = 297$

Usando los métodos de este capítulo, verifique su solución a cada ecuación.

3. En una fábrica de artículos de vidrio, se vierte vidrio de cobalto fundido en moldes para hacer pisapapeles. Cada molde es un prisma rectangular cuya altura es 3 pulgadas mayor que la longitud de cada lado de la base cuadrada. Una máquina vierte 20 pulgadas cúbicas de vidrio líquido en cada molde. ¿Cuáles son las dimensiones del molde?

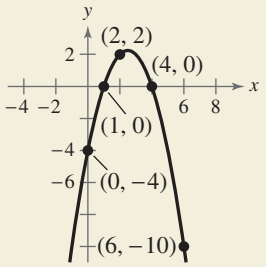
4. Determine si la proposición es verdadera o falsa. Si es falsa, dé una o más razones del porqué.

Sea $f(x) = ax^3 + bx^2 + cx + d$, $a \neq 0$, y sea $f(2) = -1$. Entonces

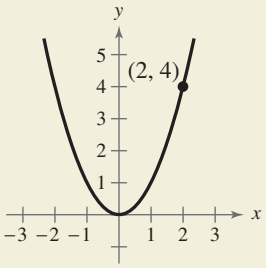
$$\frac{f(x)}{x+1} = q(x) + \frac{2}{x+1}$$

donde $q(x)$ es un polinomio de segundo grado.

5. La parábola que se muestra en la figura tiene una ecuación de la forma $y = ax^2 + bx + c$. Halle la ecuación de esta parábola con los siguientes métodos. (a) Encuentre la ecuación analíticamente. (b) Use el comando *regression* de una calculadora de gráficas para hallar la solución.



6. Uno de los temas fundamentales del cálculo es hallar la pendiente de la recta tangente a una curva en un punto. Para ver cómo se hace esto, considere el punto (2, 4) en la gráfica de la función cuadrática $f(x) = x^2$, que se muestra en la figura.



(a) Encuentre la pendiente m_1 de la recta que enlaza (2, 4) y (3, 9). ¿La pendiente de la recta tangente en (2, 4) es mayor o menor que la pendiente de la recta que pasa por (2, 4) y (3, 9)?

(b) Encuentre la pendiente m_2 de la recta que enlaza (2, 4) y (1, 1). ¿La pendiente de la recta tangente en (2, 4) es mayor o menor que la pendiente de la recta que pasa por (2, 4) y (1, 1)?

(c) Encuentre la pendiente m_3 de la recta que enlaza (2, 4) y (2.1, 4.41). ¿La pendiente de la recta tangente en (2, 4) es mayor o menor que la pendiente que pasa por (2, 4) y (2.1, 4.41)?

(d) Encuentre la pendiente m_h de la recta que enlaza (2, 4) y $(2 + h, f(2 + h))$ en términos del número h diferente de cero.

(e) Evalúe la fórmula de la pendiente de el inciso (d) para $h = -1$, 1 y 0.1. Compare estos valores con los de los incisos (a)-(c).

(f) ¿Qué se puede concluir que es la pendiente $m_{\tan}$ de la recta tangente en (2, 4)? Explique su respuesta.

7. Use la forma $f(x) = (x - k)q(x) + r$ para crear una función cúbica que (a) pase por el punto (2, 5) y suba a la derecha y (b) pase por el punto $(-3, 1)$ y baje a la derecha. (Hay numerosas respuestas correctas.)

8. El inverso multiplicativo de z es un número complejo z_m tal que $z \cdot z_m = 1$. Encuentre el inverso multiplicativo de cada número complejo.

(a) $z = 1 + i$ (b) $z = 3 - i$ (c) $z = -2 + 8i$

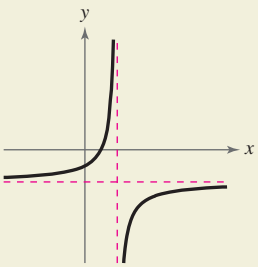
9. Demuestre que el producto de un número complejo $a + bi$ y su conjugado complejo es un número real.

10. Relacione la gráfica de la función racional dada por

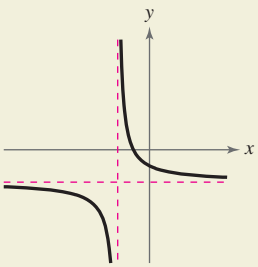
$$f(x) = \frac{ax + b}{cx + d}$$

con las condiciones dadas.

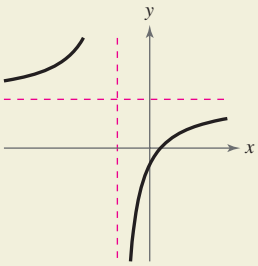
(a)



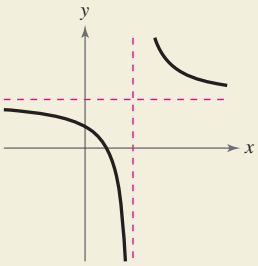
(b)



(c)



(d)



(i) $a > 0$, $b < 0$, $c > 0$, $d < 0$

(ii) $a > 0$, $b > 0$, $c < 0$, $d < 0$

(iii) $a < 0$, $b > 0$, $c > 0$, $d < 0$

(iv) $a > 0$, $b < 0$, $c > 0$, $d > 0$

11. Considere la función dada por

$$f(x) = \frac{ax}{(x - b)^2}$$

(a) Determine el efecto en la gráfica de f si $b \neq 0$ y a se hace variar. Considere casos en los que a sea positiva y a sea negativa.

(b) Determine el efecto en la gráfica de f si $a \neq 0$ y b se hace variar.

12. Los puntos extremos del intervalo en el cual una visión clara es posible se llaman *punto cercano* y *punto lejano* de la vista (vea figura). Con el aumento de edad, estos puntos normalmente cambian. La tabla muestra los puntos cercanos aproximados y (en pulgadas) para varias edades x (en años)

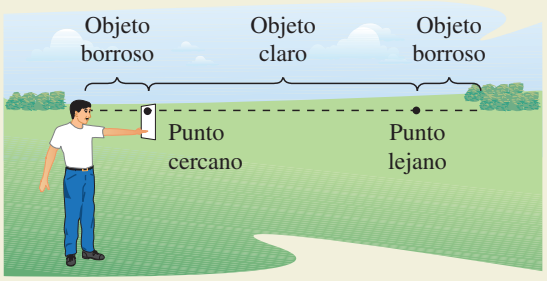


FIGURA PARA EL EJERCICIO 12

Edad, x	Punto cercano, y
16	3.0
32	4.7
44	9.8
50	19.7
60	39.4

(a) Use el comando *regression* de una calculadora de gráficas para hallar un modelo cuadrático y_1 para los datos. Use la calculadora para determinar los datos y graficar el modelo en la misma pantalla.

(b) Encuentre un modelo racional y_2 para los datos. Tome los recíprocos de los puntos cercanos para generar los puntos $(x, 1/y)$. Use el comando *regression* de una calculadora de gráficas para hallar un modelo lineal para los datos. La recta resultante tiene la forma

$$\frac{1}{y} = ax + b.$$

Despeje y. Use una calculadora de gráficas para determinar los datos y graficar el modelo en la misma pantalla.

(c) Use el comando *table* de una calculadora de gráficas para crear una tabla que muestre el punto cercano pronosticado con base en cada modelo para cada una de las edades de la tabla original. ¿Qué tan bien se ajustan los modelos a los datos originales?

(d) Use ambos modelos para calcular el punto cercano para una persona de 25 años de edad. ¿Cuál modelo es un mejor ajuste?

(e) ¿Piensa usted que cualquiera de los modelos se puede usar para predecir el punto cercano para una persona de 70 años de edad? Explique.

Funciones exponenciales y logarítmicas

3

3.1 Funciones exponenciales y sus gráficas
3.2 Funciones logarítmicas y sus gráficas
3.3 Propiedades de los logarítmos
3.4 Ecuaciones exponenciales y logarítmicas
3.5 Modelos exponenciales y logarítmicos

En matemáticas

Las funciones exponenciales comprenden una base constante y un exponente variable. La inversa de la función exponencial es la función logarítmica.

En la vida real

Las funciones exponenciales y logarítmicas tienen uso generalizado para describir fenómenos económicos y físicos, como en el caso del interés compuesto, el crecimiento poblacional, la retención de memoria y la desintegración de material radiactivo. Por ejemplo, una función logarítmica se puede usar para relacionar el peso de un animal y su rapidez más baja al galopar. (Vea el Ejercicio 95, página 242.)

Juniors Bildarchiv / Alamy

EN CARRERAS

Hay numerosas carreras que usan funciones exponenciales y logarítmicas. A continuación se indican varias de ellas.

- Astrónomo, Ejemplo 7, página 240
- Psicólogo, Ejercicio 136, página 253
- Arqueólogo, Ejemplo 3, página 258
- Científico forense, Ejercicio 75, página 266

3.1 Funciones exponenciales y sus gráficas

Lo que debe aprender

- Reconocer y evaluar funciones exponenciales con base a.
- Graficar funciones exponenciales y usar la propiedad biunívoca.
- Reconocer, evaluar y graficar funciones exponenciales con base e.
- Usar funciones exponenciales para modelar y resolver problemas de la vida real.

Por qué debe aprenderlo

Se pueden usar funciones exponenciales para modelar y resolver problemas de la vida real. Por ejemplo, en el Ejercicio 76 de la página 226 se usa una función exponencial para modelar la concentración de un medicamento en el torrente sanguíneo.

Monkey Business Images Ltd/Stockbroker/PhotoLibrary

Funciones exponenciales

Hasta aquí, este texto ha trabajado principalmente con **funciones algebraicas**, que incluyen *funciones polinomiales* y *funciones racionales*. En este capítulo estudiaremos dos tipos de funciones no algebraicas: las exponenciales y las logarítmicas. Estas funciones son ejemplos de **funciones trascendentales**.

Definición de función exponencial

La **función exponencial f con base a** se denota por

$$f(x) = a^x$$

donde $a > 0$, $a \neq 1$ y x es cualquier número real.

La base $a = 1$ está excluida porque da $f(x) = 1^x = 1$. Ésta es una función constante, no una función exponencial.

Ya hemos evaluado a^x para valores enteros y racionales de x. Por ejemplo, sabemos que $4^3 = 64$ y $4^{1/2} = 2$. No obstante, para evaluar 4^x para cualquier número real x, es necesario interpretar formas con exponentes *irracionales*. Para fines de este texto, es suficiente considerar a la expresión

$$a^{\sqrt{2}} \quad (\text{donde } \sqrt{2} \approx 1.41421356)$$

como el número que tiene las aproximaciones sucesivamente más cercanas

$$a^{1.4},\ a^{1.41},\ a^{1.414},\ a^{1.4142},\ a^{1.41421},\ \ldots$$

Ejemplo 1 Evaluar funciones exponenciales

Use una calculadora para evaluar cada función en el valor indicado de x.

	Función	*Valor*
a.	$f(x) = 2^x$	$x = -3.1$
b.	$f(x) = 2^{-x}$	$x = \pi$
c.	$f(x) = 0.6^x$	$x = \frac{3}{2}$

Solución

Valor de la función	*Tecleo en calculadora de gráficas*	*Pantalla*
a. $f(-3.1) = 2^{-3.1}$	2 ^ (−) 3.1 ENTER	0.1166291
b. $f(\pi) = 2^{-\pi}$	2 ^ (−) π ENTER	0.1133147
c. $f(\frac{3}{2}) = (0.6)^{3/2}$	.6 ^ (3 ÷ 2) ENTER	0.4647580

PUNTO *de repaso* Ahora trate de hacer el Ejercicio 7.

Cuando evalúe funciones exponenciales con calculadora, recuerde encerrar en paréntesis los exponentes fraccionarios. Como la calculadora sigue el orden de las operaciones, los paréntesis son cruciales para obtener el resultado correcto.

Gráficas de funciones exponenciales

Las gráficas de todas las funciones exponenciales tienen características semejantes, como se ilustra en los Ejemplos 2, 3 y 5.

Ejemplo 2 Gráficas de $y = a^x$

En el mismo plano de coordenadas, trace la gráfica de cada función.

a. $f(x) = 2^x$ **b.** $g(x) = 4^x$

Ayuda de álgebra

En la Sección 1.2 puede repasar las técnicas para trazar la gráfica de una ecuación.

Solución

La tabla siguiente es una lista de algunos valores para cada función, y la Figura 3.1 muestra las gráficas de las dos funciones. Observe que ambas gráficas son crecientes. Además, la gráfica de $g(x) = 4^x$ crece con más rapidez que la de $f(x) = 2^x$.

x	-3	-2	-1	0	1	2
2^x	$\frac{1}{8}$	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{2}$	1	2	4
4^x	$\frac{1}{64}$	$\frac{1}{16}$	$\frac{1}{4}$	1	4	16

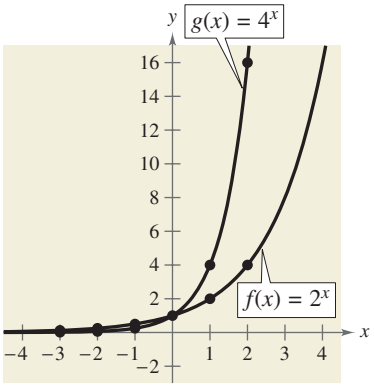


FIGURA 3.1

PUNTO de repaso Ahora trate de hacer el Ejercicio 17.

La tabla del Ejemplo 2 fue evaluada manualmente. Se podría, desde luego, usar una calculadora de gráficas para construir tablas incluso con más valores.

Ejemplo 3 Gráficas de $y = a^{-x}$

En el mismo plano de coordenadas, trace la gráfica de cada función.

a. $F(x) = 2^{-x}$ **b.** $G(x) = 4^{-x}$

Solución

La tabla siguiente es una lista de algunos valores para cada función, y la Figura 3.2 muestra las gráficas de las dos funciones. Observe que ambas gráficas son decrecientes. Además, la gráfica de $G(x) = 4^{-x}$ decrece con más rapidez que la de $F(x) = 2^{-x}$.

x	-2	-1	0	1	2	3
2^{-x}	4	2	1	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{8}$
4^{-x}	16	4	1	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{16}$	$\frac{1}{64}$

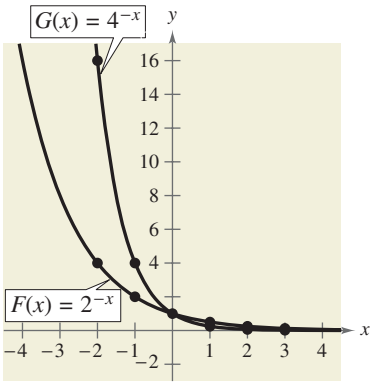


FIGURA 3.2

PUNTO de repaso Ahora trate de hacer el Ejercicio 19.

En el Ejemplo 3, observe que al usar una de las propiedades de los exponentes, las funciones $F(x) = 2^{-x}$ and $G(x) = 4^{-x}$ se pueden reescribir con exponentes positivos.

$$F(x) = 2^{-x} = \frac{1}{2^x} = \left(\frac{1}{2}\right)^x \quad \text{y} \quad G(x) = 4^{-x} = \frac{1}{4^x} = \left(\frac{1}{4}\right)^x$$

Si se comparan las funciones de los Ejemplos 2 y 3, observe que

$$F(x) = 2^{-x} = f(-x) \qquad \text{y} \qquad G(x) = 4^{-x} = g(-x).$$

En consecuencia, la gráfica de F es una reflexión (en el eje y) de la gráfica de f. Las gráficas de G y g tienen la misma relación. Las gráficas de las Figura 3.1 y 3.2 son típicas de las funciones exponenciales $y = a^x$ y $y = a^{-x}$. Tienen una intersección con el eje y y una asíntota horizontal (el eje x), y son continuas. Las características básicas de estas funciones exponenciales se resumen en las Figuras 3.3 y 3.4.

Tip de estudio

Observe que el rango de una función exponencial es $(0, \infty)$, lo cual significa que $a^x > 0$ para todos los valores de x.

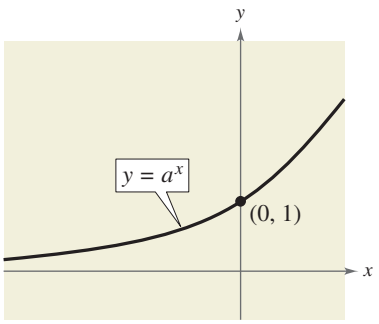


FIGURA 3.3

- *Gráfica de* $y = a^x$, $a > 1$
- Dominio: $(-\infty, \infty)$
- Rango: $(0, \infty)$
- Intersección con el eje y: $(0, 1)$
- Creciente
- El eje x es una asíntota horizontal $(a^x \to 0$ cuando $x \to -\infty)$.
- Continua

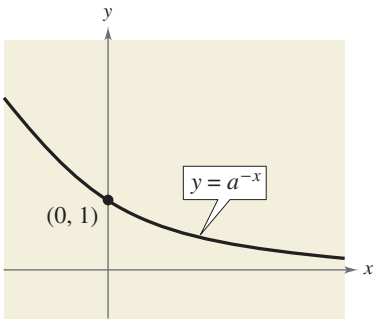


FIGURA 3.4

Gráfica de $y = a^{-x}$, $a > 1$

- Dominio: $(-\infty, \infty)$
- Rango: $(0, \infty)$
- Intersección con el eje y: $(0, 1)$
- Decreciente
- El eje x es una asíntota horizontal $(a^{-x} \to 0$ cuando $x \to \infty)$.
- Continua

De las Figuras 3.3 y 3.4 se puede ver que la gráfica de una función exponencial es siempre creciente o siempre decreciente. En consecuencia, las gráficas pasan la prueba de la recta horizontal y, por tanto, las funciones son uno a uno biunívocas. Se puede usar la siguiente **propiedad biunívoca** para resolver ecuaciones exponenciales sencillas.

Para $a > 0$ y $a \neq 1$, $a^x = a^y$ si y sólo si $x = y$. Propiedad biunívoca

Ejemplo 4 Usar la propiedad biunívoca

a. $9 = 3^{x+1}$ Ecuación original

$3^2 = 3^{x+1}$ $9 = 3^2$

$2 = x + 1$ Propiedad biunívoca

$1 = x$ Despeje x.

b. $\left(\frac{1}{2}\right)^x = 8 \Rightarrow 2^{-x} = 2^3 \Rightarrow x = -3$

PUNTO *de repaso* Ahora trate de hacer el Ejercicio 51.

En el siguiente ejemplo, observe cómo se puede usar la gráfica de $y = a^x$ para trazar las gráficas de funciones de la forma $f(x) = b \pm a^{x+c}$.

Ayuda de álgebra

En la Sección 1.7 puede repasar las técnicas para transformar la gráfica de una función.

Ejemplo 5 Transformaciones de gráficas de funciones exponenciales

Cada una de las gráficas siguientes es una transformación de la gráfica de $f(x) = 3^x$.

a. Como $g(x) = 3^{x+1} = f(x + 1)$, la gráfica de g se puede obtener al desplazar la gráfica de f una unidad a la *izquierda*, como se muestra en la Figura 3.5.

b. Como $h(x) = 3^x - 2 = f(x) - 2$, la gráfica de h se puede obtener al desplazar la gráfica de f dos unidades *hacia abajo*, como se muestra en la Figura 3.6.

c. Como $k(x) = -3^x = -f(x)$, la gráfica de f se puede obtener al *reflejar* la gráfica de f en el eje x, como se ve en la Figura 3.7.

d. Debido a que $j(x) = 3^{-x} = f(-x)$, la gráfica de j se puede obtener al reflejar la gráfica de f en el eje y, como se ve en la Figura 3.8.

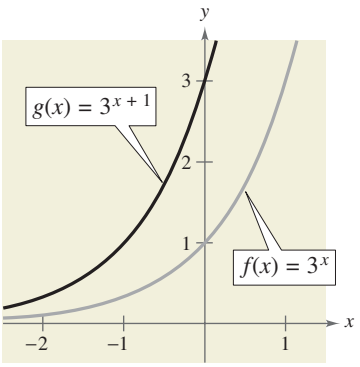


FIGURA 3.5 Desplazamiento horizontal

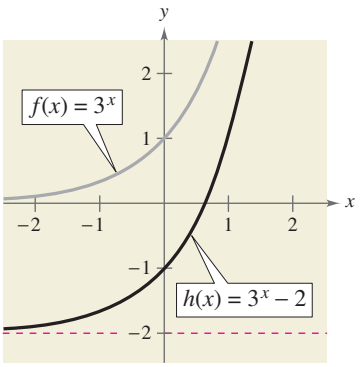


FIGURA 3.6 Desplazamiento vertical

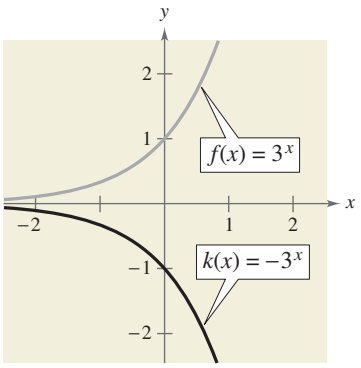


FIGURA 3.7 Reflexión en el eje x

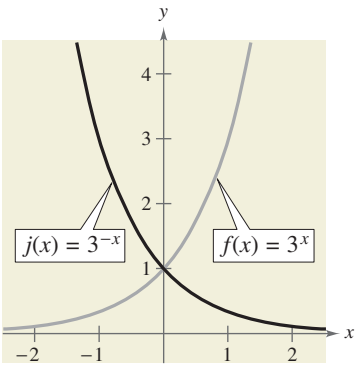


FIGURA 3.8 Reflexión en el eje y

PUNTO de repaso Ahora trate de hacer el Ejercicio 23.

Observe que las transformaciones en las Figuras 3.5, 3.7 y 3.8 conservan el eje x como una asíntota horizontal, pero la transformación de la Figura 3.6 da una nueva asíntota horizontal de $y = -2$. También, asegúrese de observar la forma en que la intersección con el eje y es afectada por cada transformación.

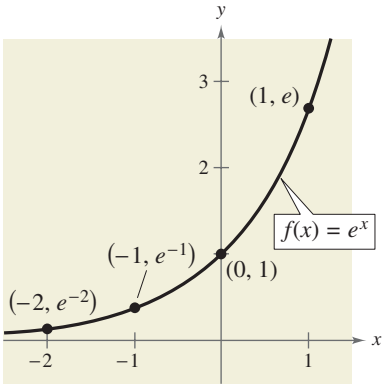


FIGURA 3.9

Base natural *e*

En numerosas aplicaciones, la opción más adecuada para una base es el número irracional

$$e \approx 2.718281828 \ldots$$

Este número se denomina **base natural**. La función dada por $f(x) = e^x$ recibe el nombre de **función exponencial natural**. Su gráfica se ilustra en la Figura 3.9. Asegúrese de ver que para la función exponencial $f(x) = e^x$, e sea la constante $2.718281828 \ldots$, mientras x sea la variable.

Ejemplo 6 Evaluar la función exponencial natural

Use calculadora para evaluar la función dada por $f(x) = e^x$ en cada valor indicado de x.

a. $x = -2$
b. $x = -1$
c. $x = 0.25$
d. $x = -0.3$

Solución

Valor de la función	*Tecleo en calculadora de gráficas*	*Pantalla*
a. $f(-2) = e^{-2}$	e^x (−) 2 ENTER	0.1353353
b. $f(-1) = e^{-1}$	e^x (−) 1 ENTER	0.3678794
c. $f(0.25) = e^{0.25}$	e^x 0.25 ENTER	1.2840254
d. $f(-0.3) = e^{-0.3}$	e^x (−) 0.3 ENTER	0.7408182

PUNTO *de repaso* Ahora trate de hacer el Ejercicio 33.

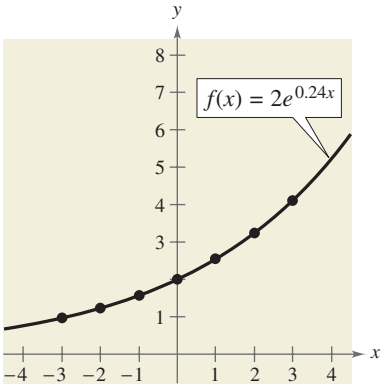


FIGURA 3.10

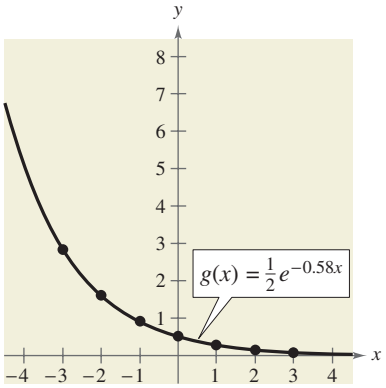


FIGURA 3.11

Ejemplo 7 Graficar funciones exponenciales naturales

Trace la gráfica de cada una de las funciones exponenciales naturales.

a. $f(x) = 2e^{0.24x}$
b. $g(x) = \frac{1}{2}e^{-0.58x}$

Solución

Para trazar estas dos gráficas se puede usar una calculadora de gráficas para construir una tabla de valores, como se muestra a continuación. Después de construir la tabla, determine los puntos y enlácelos con curvas lisas como se ve en las Figuras 3.10 y 3.11. Observe que la gráfica en la Figura 3.10 es creciente, mientras que la gráfica de la Figura 3.11 es decreciente.

x	−3	−2	−1	0	1	2	3
$f(x)$	0.974	1.238	1.573	2.000	2.542	3.232	4.109
$g(x)$	2.849	1.595	0.893	0.500	0.280	0.157	0.088

PUNTO *de repaso* Ahora trate de hacer el Ejercicio 41.

Aplicaciones

Uno de los ejemplos más conocidos de crecimiento exponencial es una inversión que gana *interés capitalizado continuamente*. Con el uso de funciones exponenciales se puede *desarrollar* una fórmula para interés compuesto n veces por año y demostrar la forma en que lleva a capitalización continua.

Suponga que un capital inicial P se invierte a una tasa de interés anual r, capitalizado una vez al año. Si el interés se suma al capital inicial al término del año, el nuevo saldo P_1 es

$$\begin{aligned} P_1 &= P + Pr \\ &= P(1 + r). \end{aligned}$$

Esta forma de multiplicar el capital inicial previo por $1 + r$ se repite entonces cada año sucesivo, como se muestra a continuación.

Año	*Saldo después de cada capitalización*
0	$P = P$
1	$P_1 = P(1 + r)$
2	$P_2 = P_1(1 + r) = P(1 + r)(1 + r) = P(1 + r)^2$
3	$P_3 = P_2(1 + r) = P(1 + r)^2(1 + r) = P(1 + r)^3$
⋮	⋮
t	$P_t = P(1 + r)^t$

Para acomodar una capitalización más frecuente (trimestral, mensual o diaria) del interés, sea n el número de capitalizaciones por año y sea t el número de años. Entonces la tasa por capitalización es r/n y el saldo de la cuenta después de t años es

$$A = P\left(1 + \frac{r}{n}\right)^{nt}. \qquad \text{Cantidad (saldo) con } n \text{ capitalizaciones por año}$$

Si se hace que el número n de capitalizaciones aumente sin límite, el proceso se aproxima a lo que se llama **capitalización continua**. En la fórmula para n capitalizaciones por año, sea $m = n/r$. Esto produce

$$\begin{aligned} A &= P\left(1 + \frac{r}{n}\right)^{nt} && \text{Cantidad con } n \text{ capitalizaciones por año} \\ &= P\left(1 + \frac{r}{mr}\right)^{mrt} && \text{Sustituir } mr \text{ por } n. \\ &= P\left(1 + \frac{1}{m}\right)^{mrt} && \text{Simplificar.} \\ &= P\left[\left(1 + \frac{1}{m}\right)^{m}\right]^{rt}. && \text{Propiedad de los exponentes} \end{aligned}$$

Cuando m aumenta sin límite, la tabla de la izquierda muestra que $[1 + (1/m)]^m \to e$ cuando $m \to \infty$. De esto se puede concluir que la fórmula para capitalización continua es

$$A = Pe^{rt}. \qquad \text{Sustituir } e \text{ por } (1 + 1/m)^m.$$

m	$\left(1 + \frac{1}{m}\right)^m$
1	2
10	2.59374246
100	2.704813829
1000	2.716923932
10 000	2.718145927
100 000	2.718268237
1 000 000	2.718280469
10 000 000	2.718281693
↓	↓
∞	e

ATENCIÓN

Asegúrese de ver que la tasa de interés anual debe escribirse en forma decimal. Por ejemplo, 6% debe escribirse como 0.06.

Fórmulas para interés compuesto

Después de t años, el saldo A en una cuenta con capital inicial P y tasa anual de interés r (en forma decimal) está dado por las fórmulas siguientes.

1. Para n capitalizaciones por año: $A = P\left(1 + \frac{r}{n}\right)^{nt}$

2. Para capitalización continua: $A = Pe^{rt}$

Ejemplo 8 Interés compuesto

Se invierte un total de \$12 000 a una tasa anual de interés de 9%. Encuentre el saldo después de 5 años si se capitaliza

a. Trimestralmente.

b. Mensualmente.

c. Continuamente

Solución

a. Para capitalización trimestral, tenemos $n = 4$. Por tanto, en 5 años a 9% el saldo es

$$A = P\left(1 + \frac{r}{n}\right)^{nt}$$ Fórmula para interés compuesto

$$= 12\,000\left(1 + \frac{0.09}{4}\right)^{4(5)}$$ Sustituir P, r, n y t.

$$\approx \$18\,726.11.$$ Usar calculadora.

b. Para capitalización mensual, tenemos $n = 12$. Por tanto, en 5 años a 9%, el saldo es

$$A = P\left(1 + \frac{r}{n}\right)^{nt}$$ Fórmula para interés compuesto

$$= 12\,000\left(1 + \frac{0.09}{12}\right)^{12(5)}$$ Sustituir P, r, n y t.

$$\approx \$18\,788.17.$$ Usar calculadora.

c. Para capitalización continua el saldo es

$$A = Pe^{rt}$$ Fórmula para capitalización continua

$$= 12\,000e^{0.09(5)}$$ Sustituya P, r y t.

$$\approx \$18\,819.75.$$ Use calculadora.

PUNTO *de repaso* Ahora trate de hacer el Ejercicio 59.

En el Ejemplo 8, observe que la capitalización continua da más que la trimestral o la mensual. Esto es típico de los dos tipos de capitalización, es decir, para un principal, tasa de interés y tiempo determinados, la capitalización continua siempre dará un saldo más grande que capitalizar n veces por año.

Ejemplo 9 Desintegración radiactiva

La *vida media* del radio (^{226}Ra) es de unos 1599 años. Esto es, para una cantidad determinada de radio, habrá *la mitad* de la cantidad original después de 1599 años. Después de otros 1599 años quedará un cuarto de la cantidad original y así sucesivamente. Con y represente la masa, en gramos, de una cantidad de radio. La cantidad presente después de t años, entonces, es $y = 25\left(\frac{1}{2}\right)^{t/1599}$.

a. ¿Cuál es la masa inicial (cuando $t = 0$)?

b. ¿Cuánta de la masa inicial está presente después de 2500 años?

Solución algebraica

a. $y = 25\left(\frac{1}{2}\right)^{t/1599}$ Escribir la ecuación original.

$= 25\left(\frac{1}{2}\right)^{0/1599}$ Sustituir 0 por t.

$= 25$ Simplificar.

Así, la masa inicial es de 25 gramos.

b. $y = 25\left(\frac{1}{2}\right)^{t/1599}$ Escribir la ecuación original.

$= 25\left(\frac{1}{2}\right)^{2500/1599}$ Sustituir 2500 por t.

$\approx 25\left(\frac{1}{2}\right)^{1.563}$ Simplificar.

≈ 8.46 Usar calculadora.

Por tanto, habrá unos 8.46 gramos después de 2500 años.

PUNTO *de repaso* Ahora trate de hacer el Ejercicio 73.

Solución gráfica

Use una calculadora de gráficas para graficar $y = 25\left(\frac{1}{2}\right)^{t/1599}$.

a. Use el comando *value* o los comandos *zoom* y *trace* de la calculadora de gráficas para determinar que cuando $x = 0$, el valor de y es 25, como se ve en la Figura 3.12. En consecuencia, la masa inicial es 25 gramos.

b. Use el comando *value* o los comandos *zoom* y *trace* de la calculadora de gráficas para determinar que cuando $x = 2500$, el valor de y es 8.46, como se ve en la Figura 3.13. En consecuencia, habrá unos 8.46 gramos después de 2500 años.

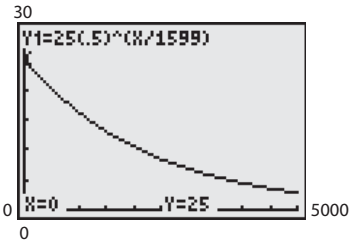


FIGURA 3.12

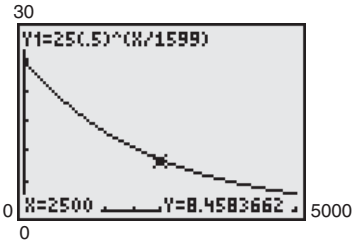


FIGURA 3.13

Discusión en clase

Identificación de funciones exponenciales ¿Cuál de las siguientes funciones generó las dos tablas mostradas a continuación? Discuta cómo determinarlo. ¿Qué tienen en común estas funciones? ¿Algunas de ellas son iguales? Si es así, explique por qué.

a. $f_1(x) = 2^{(x+3)}$ b. $f_2(x) = 8\left(\frac{1}{2}\right)^x$ c. $f_3(x) = \left(\frac{1}{2}\right)^{(x-3)}$

d. $f_4(x) = \left(\frac{1}{2}\right)^x + 7$ e. $f_5(x) = 7 + 2^x$ f. $f_6(x) = 8(2^x)$

x	-1	0	1	2	3
$g(x)$	7.5	8	9	11	15

x	-2	-1	0	1	2
$h(x)$	32	16	8	4	2

Genere dos funciones exponenciales diferentes de las formas $y = a(b)^x$ y $y = c^x + d$ con intersecciones con el eje y en $(0, -3)$.

3.1 EJERCICIOS

En www.CalcChat.com vea las soluciones a los ejercicios impares.

VOCABULARIO: Llene los espacios en blanco.

1. Las funciones con polinomios y racionales son ejemplos de funciones _____.
2. Las funciones exponenciales y logarítmicas son ejemplos de funciones no algebraicas, también llamadas funciones _____.
3. Usted puede usar la propiedad _____ para resolver ecuaciones exponenciales sencillas.
4. La función exponencial dada por $f(x) = e^x$ se denomina función _____ _____, y la base e recibe el nombre de base _____.
5. Para hallar la cantidad A en una cuenta después de t años con capital P y una tasa r anual de interés capitalizada n veces por año se puede usar la fórmula _____.
6. Para hallar la cantidad A en una cuenta después de t años con capital P y una tasa r anual de interés capitalizada continuamente se puede usar la fórmula _____.

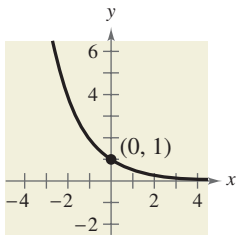
HABILIDADES Y APLICACIONES

En los Ejercicios 7-12, evalúe la función al valor indicado de x. Redondee su resultado a tres lugares decimales.

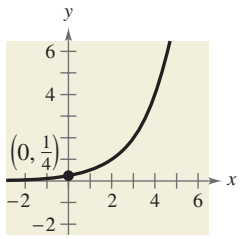
	Función	*Valor*
7.	$f(x) = 0.9^x$	$x = 1.4$
8.	$f(x) = 2.3^x$	$x = \frac{3}{2}$
9.	$f(x) = 5^x$	$x = -\pi$
10.	$f(x) = \left(\frac{2}{3}\right)^{5x}$	$x = \frac{3}{10}$
11.	$g(x) = 5000(2^x)$	$x = -1.5$
12.	$f(x) = 200(1.2)^{12x}$	$x = 24$

En los Ejercicios 13-16, relacione la función exponencial con su gráfica. [Las gráficas están marcadas (a),(b),(c) y (d).]

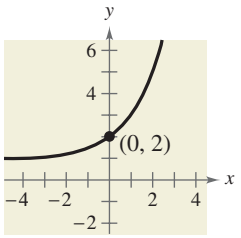
(a)



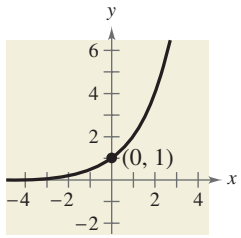
(b)



(c)



(d)



13. $f(x) = 2^x$
14. $f(x) = 2^x + 1$
15. $f(x) = 2^{-x}$
16. $f(x) = 2^{x-2}$

En los Ejercicios 17-22, use una calculadora de gráficas para construir una tabla de valores para la función. A continuación trace la gráfica de ésta.

17. $f(x) = \left(\frac{1}{2}\right)^x$
18. $f(x) = \left(\frac{1}{2}\right)^{-x}$
19. $f(x) = 6^{-x}$
20. $f(x) = 6^x$
21. $f(x) = 2^{x-1}$
22. $f(x) = 4^{x-3} + 3$

En los Ejercicios 23-28, use la gráfica de f para describir la transformación que dé la gráfica de g.

23. $f(x) = 3^x, \quad g(x) = 3^x + 1$
24. $f(x) = 4^x, \quad g(x) = 4^{x-3}$
25. $f(x) = 2^x, \quad g(x) = 3 - 2^x$
26. $f(x) = 10^x, \quad g(x) = 10^{-x+3}$
27. $f(x) = \left(\frac{7}{2}\right)^x, \quad g(x) = -\left(\frac{7}{2}\right)^{-x}$
28. $f(x) = 0.3^x, \quad g(x) = -0.3^x + 5$

En los Ejercicios 29-32, use una calculadora de gráficas para graficar la función exponencial.

29. $y = 2^{-x^2}$
30. $y = 3^{-|x|}$
31. $y = 3^{x-2} + 1$
32. $y = 4^{x+1} - 2$

En los Ejercicios 33-38, evalúe la función en el valor indicado de x. Redondee su resultado a tres lugares decimales.

	Función	*Valor*
33.	$h(x) = e^{-x}$	$x = \frac{3}{4}$
34.	$f(x) = e^x$	$x = 3.2$
35.	$f(x) = 2e^{-5x}$	$x = 10$
36.	$f(x) = 1.5e^{x/2}$	$x = 240$
37.	$f(x) = 5000e^{0.06x}$	$x = 6$
38.	$f(x) = 250e^{0.05x}$	$x = 20$

En los Ejercicios 39-44, use una calculadora de gráficas para construir una tabla de valores para la función. A continuación trace la gráfica de la función.

39. $f(x) = e^x$
40. $f(x) = e^{-x}$
41. $f(x) = 3e^{x+4}$
42. $f(x) = 2e^{-0.5x}$
43. $f(x) = 2e^{x-2} + 4$
44. $f(x) = 2 + e^{x-5}$

En los Ejercicios 45-50, use una calculadora de gráficas para graficar la función exponencial.

45. $y = 1.08^{-5x}$
46. $y = 1.08^{5x}$
47. $s(t) = 2e^{0.12t}$
48. $s(t) = 3e^{-0.2t}$
49. $g(x) = 1 + e^{-x}$
50. $h(x) = e^{x-2}$

En los Ejercicios 51-58, use la propiedad biunívoca para despejar x de la ecuación.

51. $3^{x+1} = 27$
52. $2^{x-3} = 16$
53. $\left(\frac{1}{2}\right)^x = 32$
54. $5^{x-2} = \frac{1}{125}$
55. $e^{3x+2} = e^3$
56. $e^{2x-1} = e^4$
57. $e^{x^2-3} = e^{2x}$
58. $e^{x^2+6} = e^{5x}$

INTERÉS COMPUESTO En los Ejercicios 59-62, complete la tabla para determinar el saldo A de P dólares invertidos a una tasa r durante t años y capitalizado n veces por año.

n	1	2	4	12	365	Continua
A						

59. $P = \$1500$, $r = 2\%$, $t = 10$ años
60. $P = \$2500$, $r = 3.5\%$, $t = 10$ años
61. $P = \$2500$, $r = 4\%$, $t = 20$ años
62. $P = \$1000$, $r = 6\%$, $t = 40$ años

INTERÉS COMPUESTO En los Ejercicios 63-66, complete la tabla para determinar el saldo A de \$12 000 invertidos a una tasa r durante t años, capitalizados continuamente.

t	10	20	30	40	50
A					

63. $r = 4\%$
64. $r = 6\%$
65. $r = 6.5\%$
66. $r = 3.5\%$

67. FONDOS EN FIDEICOMISO El día en que nace un niño se hace un depósito de \$30 000 en un fondo en fideicomiso que paga 5% de interés, capitalizado continuamente. Determine el saldo en esta cuenta el día que el niño cumple 25 años.

68. FONDOS EN FIDEICOMISO Se hace un depósito de \$5000 en un fondo en fideicomiso que paga 7.5% de interés capitalizado continuamente. Se especifica que el saldo se dará a la universidad de la cual es egresado el donador, después que el dinero haya ganado interés durante 50 años. ¿Cuánto recibirá la universidad?

69. INFLACIÓN Si la tasa anual de inflación promedia 4% en los siguientes 10 años, los costos C aproximados de artículos o servicios durante cualquier año en esa década estarán modelados por $C(t) = P(1.04)^t$, donde t es el tiempo en años y P es el costo presente. El precio de un cambio de aceite para un auto es actualmente de \$23.95. Calcule el precio que tendrá dentro de 10 años.

70. VIRUS DE COMPUTADORA El número V de computadoras infectadas por un virus aumenta de acuerdo con el modelo $V(t) = 100e^{4.6052t}$, donde t es el tiempo en horas. Encuentre el número de computadoras infectadas después de (a) 1 hora, (b) 1.5 horas, y (c) 2 horas.

71. CRECIMIENTO POBLACIONAL Las poblaciones de California proyectadas para los años 2015 a 2030 se pueden modelar con $P = 34.696e^{0.0098t}$, donde P es la población (en millones) y t es el tiempo (en años), con $t = 15$ correspondiente a 2015. (Fuente: U.S. Census Bureau)

(a) Use una calculadora de gráficas para graficar la función para los años 2015 a 2030.

(b) Use el comando *table* de una calculadora de gráficas para crear una tabla de valores para el mismo periodo que el del inciso (a).

(c) De acuerdo con el modelo, ¿cuándo pasará de 50 millones la población de California?

72. POBLACIÓN La población P (en millones) de Italia de 1990 a 2008 se puede aproximar con el modelo $P = 56.8e^{0.0015t}$, donde t representa el año, con $t = 0$ correspondiente a 1990. (Fuente: U.S. Census Bureau, International Data Base)

(a) De acuerdo con el modelo, ¿la población de Italia es creciente o decreciente? Explique.

(b) Encuentre la población de Italia en 2000 y 2008.

(c) Use el modelo para predecir la población de Italia en 2015 y 2020.

73. DESINTEGRACIÓN RADIACTIVA Con Q represente una masa de plutonio radiactivo (^{239}Pu) (en gramos), cuya vida media es de 24 100 años. La cantidad de plutonio presente después de t años es $Q = 16\left(\frac{1}{2}\right)^{t/24\,100}$.

(a) Determine la cantidad inicial (cuando $t = 0$).

(b) Determine la cantidad presente después de 75 000 años.

(c) Use una calculadora de gráficas para graficar la función en el intervalo $t = 0$ a $t = 150\,000$.

74. DESINTEGRACIÓN RADIACTIVA Con Q represente una masa de carbono 14 (^{14}C) (en gramos), cuya vida

media es 5715 años. La cantidad de carbono 14 presente después de t años es $Q = 10\left(\frac{1}{2}\right)^{t/5715}$.

(a) Determine la cantidad inicial (cuando $t = 0$).

(b) Determine la cantidad presente después de 2000 años.

(c) Trace la gráfica de esta función en el intervalo $t = 0$ a $t = 10\,000$.

75. DEPRECIACIÓN Después de t años, el valor de una camioneta de conversión con silla de ruedas que originalmente costó \$30 500 se deprecia de modo que cada año vale $\frac{7}{8}$ de su valor del año previo.

(a) Encuentre un modelo para $V(t)$, el valor de la camioneta después de t años.

(b) Determine el valor de la camioneta 4 años después de su compra.

76. CONCENTRACIÓN DE MEDICAMENTO Inmediatamente después de una inyección, la concentración de un medicamento en el torrente sanguíneo es de 300 miligramos por mililitro. Después de t horas, la concentración es 75% del nivel de la hora previa.

(a) Encuentre un modelo para $C(t)$, la concentración del medicamento después de t horas.

(b) Determine la concentración del medicamento después de 8 horas.

EXPLORACION

¿VERDADERO O FALSO? En los Ejercicios 77 y 78, determine si la proposición es verdadera o falsa. Justifique su respuesta.

77. La recta $y = -2$ es una asíntota para la gráfica de $f(x) = 10^x - 2$.

78. $e = \dfrac{271\,801}{99\,990}$

PIÉNSELO En los Ejercicios 79-82, use propiedades de los exponentes para determinar cuáles funciones (si las hay) son iguales.

79. $f(x) = 3^{x-2}$
$g(x) = 3^x - 9$
$h(x) = \frac{1}{9}(3^x)$

80. $f(x) = 4^x + 12$
$g(x) = 2^{2x+6}$
$h(x) = 64(4^x)$

81. $f(x) = 16(4^{-x})$
$g(x) = \left(\frac{1}{4}\right)^{x-2}$
$h(x) = 16(2^{-2x})$

82. $f(x) = e^{-x} + 3$
$g(x) = e^{3-x}$
$h(x) = -e^{x-3}$

83. Grafique las funciones dadas por $y = 3^x$ y $y = 4^x$ y use las gráficas para resolver cada desigualdad.

(a) $4^x < 3^x$ (b) $4^x > 3^x$

84. Use una calculadora de gráficas para graficar cada función. Use la gráfica para hallar dónde la función es creciente y decreciente, y aproxime cualesquier valores relativos máximos o mínimos.

(a) $f(x) = x^2e^{-x}$ (b) $g(x) = x^{2^{3-x}}$

85. ANÁLISIS GRÁFICO Use una calculadora de gráficas para graficar $y_1 = (1 + 1/x)^x$ y $y_2 = e$ en la misma pantalla. Usando el comando *trace*, explique qué ocurre a la gráfica de y_1 cuando x aumenta.

86. ANÁLISIS GRÁFICO Use una calculadora de gráficas para graficar

$$f(x) = \left(1 + \frac{0.5}{x}\right)^x \quad \text{y} \quad g(x) = e^{0.5}$$

en la misma pantalla. ¿Cuál es la relación entre f y g cuando x aumenta o disminuye sin límite?

87. ANÁLISIS GRÁFICO Use una calculadora de gráficas para graficar cada par de funciones en la misma pantalla. Describa cualesquiera similitudes y diferencias en las gráficas.

(a) $y_1 = 2^x, y_2 = x^2$ (b) $y_1 = 3^x, y_2 = x^3$

88. PIÉNSELO ¿Cuáles funciones son exponenciales?

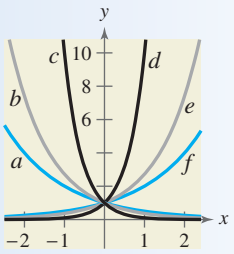
(a) $3x$ (b) $3x^2$ (c) 3^x (d) 2^{-x}

89. INTERÉS COMPUESTO Use la fórmula

$$A = P\left(1 + \frac{r}{n}\right)^{nt}$$

para calcular el saldo de una cuenta cuando $P = \$3000$, $r = 6\%$ y $t = 10$ años, y la capitalización se hace (a) diaria, (b) por hora, (c) por minuto, y (d) por segundo. ¿Aumentar el número de capitalizaciones por año resulta en un crecimiento ilimitado del saldo de la cuenta? Explique.

90. TOQUE FINAL La figura siguiente muestra las gráficas de $y = 2^x$, $y = e^x$, $y = 10^x$, $y = 2^{-x}$, $y = e^{-x}$ y $y = 10^{-x}$. Relacione cada función con su gráfica. [Las gráficas están marcadas de la (a) a la (f).] Explique su razonamiento.



PROYECTO: POBLACIÓN POR MILLA CUADRADA Para trabajar una aplicación extendida que analiza la población por milla cuadrada de un país, visite el sitio web del texto en *academic.cengage.com.* (Fuente de Datos: U.S. Census Bureau)

3.2 Funciones logarítmicas y sus gráficas

Lo que debe aprender

- Reconocer y evaluar funciones logarítmicas con base a.
- Graficar funciones logarítmicas.
- Reconocer, evaluar y graficar funciones logarítmicas naturales.
- Usar funciones logarítmicas para modelar y resolver problemas de la vida real.

Por qué debe aprenderlo

Con frecuencia se usan funciones logarítmicas para modelar observaciones científicas. Por ejemplo, en el Ejercicio 97 de la página 236 se utilizó una función logarítmica para modelar la memoria humana.

© Ariel Skelley/Corbis

Funciones logarítmicas

En la Sección 1.9 usted estudió el concepto de función inversa. Ahí, aprendió que si una función es biunívoca, esto es, si la función tiene la propiedad de que ninguna recta horizontal interseca su gráfica más de una vez, la función debe tener una inversa. Si observa de nuevo las gráficas de las funciones exponenciales introducidas en la Sección 3.1, verá que toda función de la forma $f(x) = a^x$ pasa la prueba de la recta horizontal y por tanto debe tener una inversa. Esta función inversa se denomina **función logarítmica con base a**.

Definición de función logarítmica con base a

Para $x > 0$, $a > 0$ y $a \neq 1$,

$$y = \log_a x \text{ si y sólo si } x = a^y.$$

La función dada por

$$f(x) = \log_a x$$ léase como "logaritmo base a de x".

se llama **la función logarítmica con base a.**

Las ecuaciones

$$y = \log_a x \quad \text{y} \quad x = a^y$$

son equivalentes. La primera ecuación está en forma logarítmica y la segunda en forma exponencial. Por ejemplo, la ecuación logarítmica $2 = \log_3 9$ se puede reescribir en forma exponencial como $9 = 3^2$. La ecuación exponencial $5^3 = 125$ se puede reescribir en forma logarítmica como $\log_5 125 = 3$.

Al evaluar logaritmos, recuerde que *un logaritmo es un exponente*. Esto significa que $\log_a x$ es el exponente al que a debe elevarse para obtener x. Por ejemplo, $\log_2 8 = 3$ porque 2 debe elevarse a la tercera potencia para dar 8.

Ejemplo 1 Evaluar logaritmos

Use la definición de función logarítmica para evaluar cada uno de los siguientes logaritmos al valor indicado de x.

a. $f(x) = \log_2 x, \quad x = 32$ **b.** $f(x) = \log_3 x, \quad x = 1$

c. $f(x) = \log_4 x, \quad x = 2$ **d.** $f(x) = \log_{10} x, \quad x = \frac{1}{100}$

Solución

a. $f(32) = \log_2 32 = 5$ porque $2^5 = 32$.

b. $f(1) = \log_3 1 = 0$ porque $3^0 = 1$.

c. $f(2) = \log_4 2 = \frac{1}{2}$ porque $4^{1/2} = \sqrt{4} = 2$.

d. $f\left(\frac{1}{100}\right) = \log_{10} \frac{1}{100} = -2$ porque $10^{-2} = \frac{1}{10^2} = \frac{1}{100}$.

PUNTO *de repaso* Ahora trate de hacer el Ejercicio 23.

La función logarítmica con base 10 se llama **función logarítmica común.** Está denotada por $\log_{10}$ o simplemente por log. En casi todas las calculadoras esta función está denotada por LOG. El Ejemplo 2 muestra cómo usar una calculadora para evaluar funciones logarítmicas comunes. En la siguiente sección, aprenderá a usar una calculadora para resolver logaritmos a cualquier base.

Ejemplo 2 Evaluar logaritmos comunes en una calculadora

Use calculadora para evaluar la función dada por $f(x) = \log x$ en cada valor de x.

a. $x = 10$ **b.** $x = \frac{1}{3}$ **c.** $x = 2.5$ **d.** $x = -2$

Solución

Valor de la función	*Tecleo en calculadora de gráficas*	*Pantalla*
a. $f(10) = \log 10$	LOG 10 ENTER	1
b. $f\left(\frac{1}{3}\right) = \log \frac{1}{3}$	LOG (1 ÷ 3) ENTER	−0.4771213
c. $f(2.5) = \log 2.5$	LOG 2.5 ENTER	0.3979400
d. $f(-2) = \log(-2)$	LOG (−) 2 ENTER	ERROR

Observe que la calculadora exhibe un mensaje de error (o un número complejo) cuando el usuario trata de evaluar $\log(-2)$. La razón de esto es que no hay una potencia de número real a la cual 10 se pueda elevar para obtener -2.

PUNTO *de repaso* Ahora trate de hacer el Ejercicio 29.

Las siguientes propiedades se obtienen directamente de la definición de la función logarítmica con base a

Propiedades de los logaritmos.

1. $\log_a 1 = 0$ porque $a^0 = 1$.

2. $\log_a a = 1$ porque $a^1 = a$.

3. $\log_a a^x = x$ y $a^{\log_a x} = x$ Propiedades inversas

4. Si $\log_a x = \log_a y$, entonces $x = y$. Propiedad biunívoca

Ejemplo 3 Usar las propiedades de los logaritmos

a. Simplificar: $\log_4 1$ **b.** Simplificar: $\log_{\sqrt{7}} \sqrt{7}$ **c.** Simplificar: $6^{\log_6 20}$

Solución

a. Usando la propiedad 1, se deduce que $\log_4 1 = 0$.

b. Usando la propiedad 2, se puede concluir que $\log_{\sqrt{7}} \sqrt{7} = 1$.

c. Usando la propiedad inversa (propiedad 3), se deduce que $6^{\log_6 20} = 20$.

PUNTO *de repaso* Ahora trate de hacer el Ejercicio 33.

Es posible usar la propiedad biunívoca (propiedad 4) para resolver ecuaciones logarítmicas sencillas, como se muestra en el Ejemplo 4.

Ejemplo 4 Usar la propiedad biunívoca

a. $\log_3 x = \log_3 12$ Ecuación original

$x = 12$ Propiedad biunívoca

b. $\log(2x + 1) = \log 3x \implies 2x + 1 = 3x \implies 1 = x$

c. $\log_4(x^2 - 6) = \log_4 10 \implies x^2 - 6 = 10 \implies x^2 = 16 \implies x = \pm 4$

PUNTO *de repaso* Ahora trate de hacer el Ejercicio 85.

Gráficas de funciones logarítmicas

Para trazar la gráfica de $y = \log_a x$, se puede usar el hecho de que las gráficas de funciones inversas son reflexiones una de la otra en la recta $y = x$.

Ejemplo 5 Gráficas de funciones exponenciales y logarítmicas

En el mismo plano de coordenadas, trace la gráfica de cada función.

a. $f(x) = 2^x$ **b.** $g(x) = \log_2 x$

Solución

a. Para $f(x) = 2^x$, construya una tabla de valores. Al determinar estos puntos y enlazarlos con una curva lisa, se obtiene la gráfica que se muestra en la Figura 3.14.

x	-2	-1	0	1	2	3
$f(x) = 2^x$	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{2}$	1	2	4	8

b. Como $g(x) = \log_2 x$ es la función inversa de $f(x) = 2^x$, la gráfica de g se obtiene al localizar los puntos $(f(x), x)$ y enlazarlos con una curva lisa. La gráfica de g es una reflexión de la gráfica de f en la recta $y = x$, como se ve en la Figura 3.14.

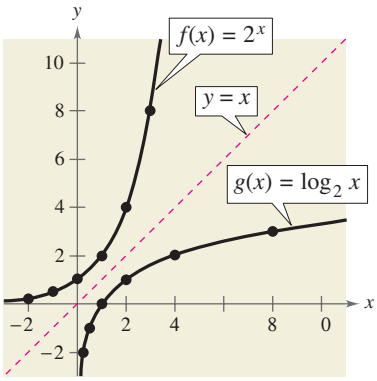


FIGURA 3.14

PUNTO *de repaso* Ahora trate de hacer el Ejercicio 37.

Ejemplo 6 Trazar la gráfica de una función logarítmica

Trace la gráfica de la función logarítmica común $f(x) = \log x$. Identifique la asíntota vertical.

Solución

Empiece por construir una tabla de valores. Observe que algunos de ellos se pueden obtener sin calculadora si se usa la propiedad inversa de los logaritmos. Otros requieren calculadora. A continuación, determine los puntos y enlácelos con una curva lisa, como se ve en la Figura 3.15. La asíntota vertical es $x = 0$ (eje y).

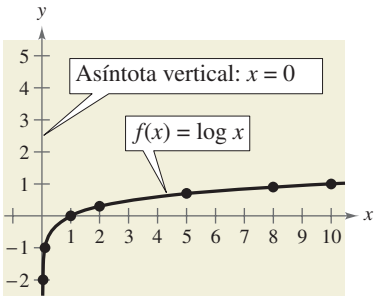


FIGURA 3.15

	Sin calculadora				Con calculadora		
x	$\frac{1}{100}$	$\frac{1}{10}$	1	10	2	5	8
$f(x) = \log x$	-2	-1	0	1	0.301	0.699	0.903

PUNTO *de repaso* Ahora trate de hacer el Ejercicio 43

La naturaleza de la gráfica de la Figura 3.15 es típica de funciones de la forma $f(x) = \log_a x$, $a > 1$. Tienen una intersección con el eje x y una asíntota vertical. Observe la lentitud con la que la gráfica sube para $x > 1$. Las características básicas de las gráficas logarítmicas se resumen en la Figura 3.16.

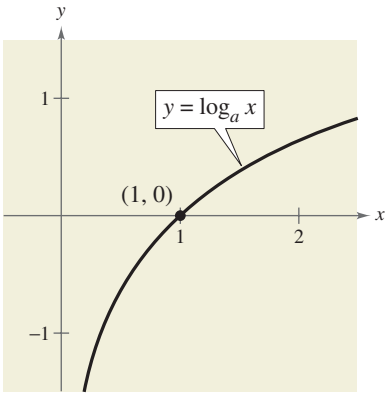


FIGURA 3.16

Gráfica de $y = \log_a x$, $a > 1$

- Dominio: $(0, \infty)$
- Rango: $(-\infty, \infty)$
- Intersección con el eje x: $(1, 0)$
- Creciente
- Biunívoca; por tanto, tiene una función inversa
- El eje y es una asíntota vertical ($\log_a x \to -\infty$ cuando $x \to 0^+$).
- Continua
- Reflexión de la gráfica de $y = a^x$ alrededor de la recta $y = x$

Las características básicas de la gráfica de $f(x) = a^x$ se muestran a continuación para ilustrar la relación inversa entre $f(x) = a^x$ y $g(x) = \log_a x$.

- Dominio: $(-\infty, \infty)$
- Rango: $(0, \infty)$
- Intersección con el eje y: $(0, 1)$
- Eje x es una asíntota horizontal ($a^x \to 0$ cuando $x \to -\infty$).

En el siguiente ejemplo, la gráfica de $y = \log_a x$ se usa para trazar las gráficas de funciones de la forma $f(x) = b \pm \log_a(x + c)$. Nótese la forma en que el desplazamiento horizontal de la gráfica resulta en un desplazamiento horizontal de la asíntota vertical.

Tip de estudio

Usted puede usar sus conocimientos de transformaciones para identificar asíntotas verticales de funciones logarítmicas. Por ejemplo, en el Ejemplo 7(a), la gráfica de $g(x) = f(x - 1)$ desplaza la gráfica de $f(x)$ una unidad a la derecha. Por tanto, la asíntota vertical de $g(x)$ es $x = 1$, una unidad a la derecha de la asíntota vertical de la gráfica de $f(x)$.

Ayuda de álgebra

En la Sección 1.7 puede repasar las técnicas de desplazamiento, reflexión y alargamiento de gráficas.

Ejemplo 7 Desplazamiento de gráficas de funciones logarítmicas

La gráfica de cada una de las funciones es similar a la gráfica de $f(x) = \log x$.

a. Como $g(x) = \log(x - 1) = f(x - 1)$, la gráfica de g se puede obtener al desplazar la gráfica de f una unidad a la derecha, como se ilustra en la Figura 3.17.

b. Como $h(x) = 2 + \log x = 2 + f(x)$, la gráfica de h se puede obtener al desplazar la gráfica de f dos unidades hacia arriba, como se ilustra en la Figura 3.18.

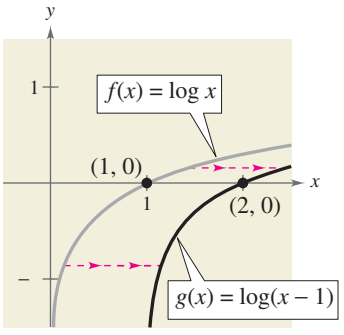


FIGURA 3.17

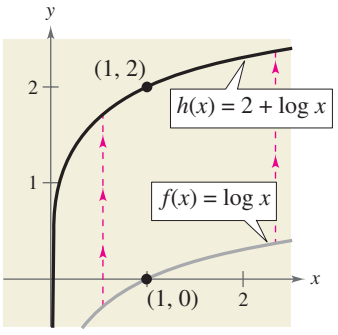


FIGURA 3.18

PUNTO *de repaso* Ahora trate de hacer el Ejercicio 45

Función logaritmo natural

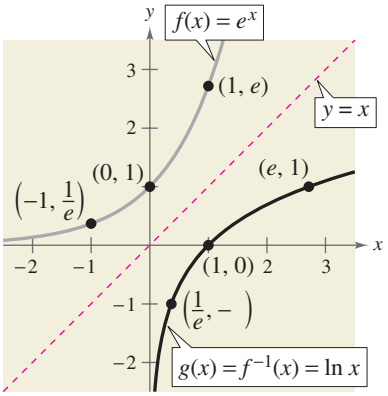
Si vemos de nuevo la gráfica de la función exponencial natural introducida en la página 230, en la Sección 3.1, veremos que $f(x) = e^x$ es biunívoca y, por tanto, tiene una función inversa. Esta función inversa se denomina **función logaritmo natural** y está denotada por el símbolo especial $\ln x$, que se lee como "el log natural de x" o "ele ene de x." Observe que el logaritmo natural se escribe sin base; se entiende que la base es e.

Función logaritmo natural

La función definida por

$$f(x) = \log_e x = \ln x, \quad x > 0$$

se llama **función logaritmo natural.**



Reflexión de la gráfica de $f(x) = e^x$ alrededor de la recta $y = x$

FIGURA 3.19

La definición citada líneas antes implica que la función logaritmo natural y la función exponencial natural son inversas una de la otra. Por tanto, toda ecuación logarítmica se puede escribir en una forma exponencial equivalente, y toda ecuación exponencial se puede escribir en forma logarítmica. Esto es, $f(x) = e^x$ y $g(x) = \ln x$ son ecuaciones equivalentes.

Como las funciones dadas por $f(x) = e^x$ y $g(x) = \ln x$ son funciones inversas una de la otra, sus gráficas son reflexiones una de la otra en la recta $y = x$. Esta propiedad reflexiva está ilustrada en la Figura 3.19.

En casi todas las calculadoras, el logaritmo natural está denotado por LN, como se ilustra en el Ejemplo 8.

Ejemplo 8 Evaluar la función logaritmo natural

Use una calculadora para evaluar la función dada por $f(x) = \ln x$ para cada valor de x.

a. $x = 2$
b. $x = 0.3$
c. $x = -1$
d. $x = 1 + \sqrt{2}$

Solución

	Valor de la función	*Tecleo en calculadora de gráficas*	*Pantalla*
a.	$f(2) = \ln 2$	LN 2 ENTER	0.6931472
b.	$f(0.3) = \ln 0.3$	LN .3 ENTER	–1.2039728
c.	$f(-1) = \ln(-1)$	LN (−) 1 ENTER	ERROR
d.	$f(1 + \sqrt{2}) = \ln(1 + \sqrt{2})$	LN (1 + √ 2) ENTER	0.8813736

PUNTO *de repaso* Ahora trate de hacer el Ejercicio 67.

En el Ejemplo 8, asegúrese de ver que $\ln(-1)$ da un mensaje de error en casi todas las calculadoras. (Algunas pueden exhibir un número complejo.) Esto ocurre porque el dominio de $\ln x$ es el conjunto de los números reales positivos (vea Figura 3.19). Por tanto, $\ln(-1)$ no está definido.

Las cuatro propiedades de los logaritmos citadas en la página 228 también son válidas para logaritmos naturales.

ATENCIÓN

Observe que como cada función logarítmica, el dominio de la función logaritmo natural es el conjunto de los números reales positivos; asegúrese de ver que $\ln x$ no está definido para cero o para números negativos.

Propiedades de los logaritmos naturales

1. $\ln 1 = 0$ porque $e^0 = 1$.

2. $\ln e = 1$ porque $e^1 = e$.

3. $\ln e^x = x$ si $e^{\ln x} = x$ Propiedades inversas

4. Si $\ln x = \ln y$, entonces $x = y$. Propiedad biunívoca

Ejemplo 9 Usar las propiedades de los logaritmos naturales

Use las propiedades de los logaritmos naturales para simplificar cada expresión.

a. $\ln \dfrac{1}{e}$ **b.** $e^{\ln 5}$ **c.** $\dfrac{\ln 1}{3}$ **d.** $2 \ln e$

Solución

a. $\ln \dfrac{1}{e} = \ln e^{-1} = -1$ Propiedad inversa

b. $e^{\ln 5} = 5$ Propiedad inversa

c. $\dfrac{\ln 1}{3} = \dfrac{0}{3} = 0$ Propiedad 1

d. $2 \ln e = 2(1) = 2$ Propiedad 2

PUNTO *de repaso* Ahora trate de hacer el Ejercicio 71.

Ejemplo 10 Hallar el dominio de funciones logarítmicas

Halle el dominio de cada función.

a. $f(x) = \ln(x - 2)$ **b.** $g(x) = \ln(2 - x)$ **c.** $h(x) = \ln x^2$

Solución

a. Como $\ln(x - 2)$ está definido sólo si $x - 2 > 0$, se deduce que el dominio de f es $(2, \infty)$. La gráfica de f se muestra en la Figura 3.20.

b. Como $\ln(2 - x)$ está definido sólo si $2 - x > 0$, se deduce que el dominio de g es $(-\infty, 2)$. La gráfica de g se muestra en la Figura 3.21

c. Como $\ln x^2$ está definido sólo si $x^2 > 0$, se deduce que el dominio de h es todos los números reales excepto $x = 0$. La gráfica de h se muestra en la Figura 3.22.

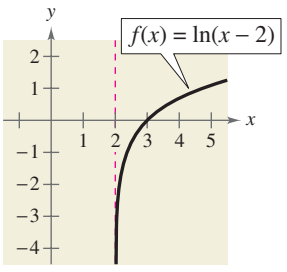


FIGURA 3.20

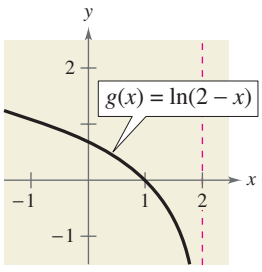


FIGURA 3.21

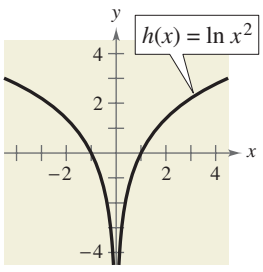


FIGURA 3.22

PUNTO *de repaso* Ahora trate de hacer el Ejercicio 75.

Aplicación

Ejemplo 11 Modelo de la memoria humana

Los estudiantes que participan en un experimento de sicología asistieron a varias conferencias sobre un tema y se les dio un examen. Cada mes, durante un año después del examen, los estudiantes fueron sometidos al examen nuevamente para ver cuánto recordaban del material. El promedio de calificaciones para el grupo está dado por el modelo de memoria humana $f(t) = 75 - 6\ln(t + 1)$, $0 \le t \le 12$, donde t es el tiempo en meses.

a. ¿Cuál fue el promedio de calificaciones en el examen original ($t = 0$)?

b. ¿Cuál fue el promedio de calificaciones al término de $t = 2$ meses?

c. ¿Cuál fue el promedio de calificaciones al término de $t = 6$ meses?

Solución algebraica

a. El promedio de calificaciones original fue

$$\begin{aligned} f(0) &= 75 - 6\ln(0 + 1) && \text{Sustituir 0 por } t. \\ &= 75 - 6\ln 1 && \text{Simplificar.} \\ &= 75 - 6(0) && \text{Propiedad de logaritmos naturales} \\ &= 75. && \text{Solución} \end{aligned}$$

b. Después de 2 meses el promedio fue

$$\begin{aligned} f(2) &= 75 - 6\ln(2 + 1) && \text{Sustituir 2 por } t. \\ &= 75 - 6\ln 3 && \text{Simplificar.} \\ &\approx 75 - 6(1.0986) && \text{Usar calculadora.} \\ &\approx 68.4. && \text{Solución} \end{aligned}$$

c. Tras 6 meses el promedio fue

$$\begin{aligned} f(6) &= 75 - 6\ln(6 + 1) && \text{Sustituir 6 por } t. \\ &= 75 - 6\ln 7 && \text{Simplificar.} \\ &\approx 75 - 6(1.9459) && \text{Usar calculadora.} \\ &\approx 63.3. && \text{Solución} \end{aligned}$$

PUNTO *de repaso* Ahora trate de hacer el Ejercicio 97.

Solución gráfica

Use una calculadora de gráficas para graficar el modelo $y = 75 - 6\ln(x + 1)$. A continuación use el comando *value* o *trace* para aproximar lo siguiente.

a. Cuando $x = 0$, $y = 75$ (vea Figura 3.23). Por tanto, el promedio de calificaciones original fue 75.

b. Cuando $x = 2$, $y \approx 68.4$ (vea Figura 3.24). Por tanto, el promedio de calificaciones después de 2 meses fue de unos 68.4, aproximadamente.

c. Cuando $x = 6$, $y \approx 63.3$ (vea Figura 3.25). Por tanto, el promedio de calificaciones después de 6 meses fue de alrededor de 63.3.

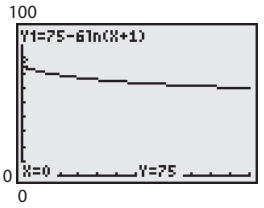


FIGURA 3.23

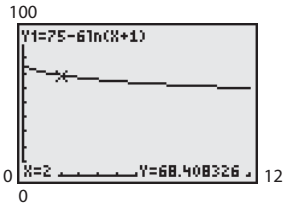


FIGURA 3.24

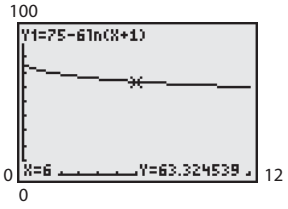


FIGURA 3.25

Discusión en clase

Análisis de un modelo de memoria humana Use una calculadora de gráficas para determinar el tiempo en meses cuando el promedio de calificaciones del Ejemplo 11 fue 60. Explique su método para resolver el problema. Describa otra forma en que se pueda usar una calculadora de gráficas para determinar la respuesta.

3.2 EJERCICIOS

En www.CalcChat.com vea las soluciones a los ejercicios impares.

VOCABULARIO: Llene los espacios en blanco.

1. La función inversa de la función exponencial dada por $f(x) = a^x$ se llama función _____ con base a.
2. La función logarítmica común tiene base _____.
3. La función logarítmica dada por $f(x) = \ln x$ se denomina función logarítmica _____ y tiene base _____.
4. Las propiedades inversas de los logaritmos y exponenciales expresan que $\log_a a^x = x$ y _____.
5. La propiedad biunívoca de los logaritmos naturales expresa que si $\ln x = \ln y$, entonces _____.
6. El dominio de la función logaritmo natural es el conjunto de los _____ _____ _____.

HABILIDADES Y APLICACIONES

En los Ejercicios 7-14, escriba la ecuación logarítmica en forma exponencial. Por ejemplo, la forma exponencial de $\log_5 25 = 2$ es $5^2 = 25$.

7. $\log_4 16 = 2$
8. $\log_7 343 = 3$
9. $\log_9 \frac{1}{81} = -2$
10. $\log \frac{1}{1000} = -3$
11. $\log_{32} 4 = \frac{2}{5}$
12. $\log_{16} 8 = \frac{3}{4}$
13. $\log_{64} 8 = \frac{1}{2}$
14. $\log_8 4 = \frac{2}{3}$

En los Ejercicios 15-22, escriba la ecuación exponencial en forma logarítmica. Por ejemplo, la forma logarítmica de $2^3 = 8$ es $\log_2 8 = 3$.

15. $5^3 = 125$
16. $13^2 = 169$
17. $81^{1/4} = 3$
18. $9^{3/2} = 27$
19. $6^{-2} = \frac{1}{36}$
20. $4^{-3} = \frac{1}{64}$
21. $24^0 = 1$
22. $10^{-3} = 0.001$

En los Ejercicios 23-28, evalúe la función en el valor indicado de x sin usar calculadora.

Función	*Valor*
23. $f(x) = \log_2 x$	$x = 64$
24. $f(x) = \log_{25} x$	$x = 5$
25. $f(x) = \log_8 x$	$x = 1$
26. $f(x) = \log x$	$x = 10$
27. $g(x) = \log_a x$	$x = a^2$
28. $g(x) = \log_b x$	$x = b^{-3}$

En los Ejercicios 29-32, use una calculadora para evaluar $f(x) = \log x$ en el valor de x indicado. Redondee el resultado a tres lugares decimales.

29. $x = \frac{7}{8}$
30. $x = \frac{1}{500}$
31. $x = 12.5$
32. $x = 96.75$

En los Ejercicios 33-36, use las propiedades de los logaritmos para simplificar la expresión.

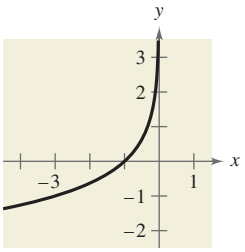
33. $\log_{11} 11^7$
34. $\log_{3.2} 1$
35. $\log_\pi \pi$
36. $9^{\log_9 15}$

En los Ejercicios 37-44, encuentre el dominio, la intersección con el eje x y la asíntota vertical de la función logarítmica y trace su gráfica.

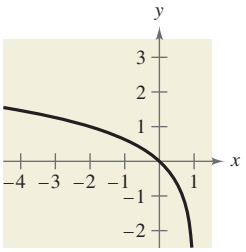
37. $f(x) = \log_4 x$
38. $g(x) = \log_6 x$
39. $y = -\log_3 x + 2$
40. $h(x) = \log_4(x - 3)$
41. $f(x) = -\log_6(x + 2)$
42. $y = \log_5(x - 1) + 4$
43. $y = \log\left(\frac{x}{7}\right)$
44. $y = \log(-x)$

En los Ejercicios 45-50, use la gráfica de $g(x) = \log_3 x$ para relacionar la función dada con su gráfica. A continuación describa la relación entre las gráficas de f y g. [Las gráficas están marcadas (a),(b),(c),(d),(e) y (f).].

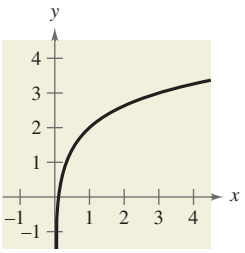
(a)



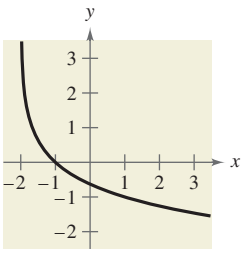
(b)



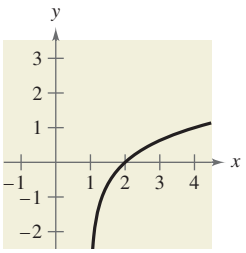
(c)



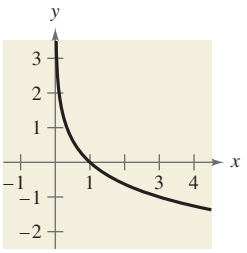
(d)



(e)



(f)



45. $f(x) = \log_3 x + 2$ **46.** $f(x) = -\log_3 x$

47. $f(x) = -\log_3(x + 2)$ **48.** $f(x) = \log_3(x - 1)$

49. $f(x) = \log_3(1 - x)$ **50.** $f(x) = -\log_3(-x)$

En los Ejercicios 51-58, escriba la ecuación logarítmica en forma exponencial.

51. $\ln \frac{1}{2} = -0.693 \ldots$ **52.** $\ln \frac{2}{5} = -0.916 \ldots$

53. $\ln 7 = 1.945 \ldots$ **54.** $\ln 10 = 2.302 \ldots$

55. $\ln 250 = 5.521 \ldots$ **56.** $\ln 1084 = 6.988 \ldots$

57. $\ln 1 = 0$ **58.** $\ln e = 1$

En los Ejercicios 59-66, escriba la ecuación exponencial en forma logarítmica.

59. $e^4 = 54.598 \ldots$ **60.** $e^2 = 7.3890 \ldots$

61. $e^{1/2} = 1.6487 \ldots$ **62.** $e^{1/3} = 1.3956 \ldots$

63. $e^{-0.9} = 0.406 \ldots$ **64.** $e^{-4.1} = 0.0165 \ldots$

65. $e^x = 4$ **66.** $e^{2x} = 3$

En los Ejercicios 67-70, use una calculadora para evaluar la función en el valor de x indicado. Redondee el resultado a tres lugares decimales.

Función	*Valor*
67. $f(x) = \ln x$	$x = 18.42$
68. $f(x) = 3 \ln x$	$x = 0.74$
69. $g(x) = 8 \ln x$	$x = 0.05$
70. $g(x) = -\ln x$	$x = \frac{1}{2}$

En los Ejercicios 71-74, evalúe $g(x) = \ln x$ en el valor de x indicado sin usar calculadora.

71. $x = e^5$ **72.** $x = e^{-4}$

73. $x = e^{-5/6}$ **74.** $x = e^{-5/2}$

En los Ejercicios 75-78, encuentre el dominio, la intersección con el eje x y la asíntota vertical de la función logarítmica y trace su gráfica.

75. $f(x) = \ln(x - 4)$ **76.** $h(x) = \ln(x + 5)$

77. $g(x) = \ln(-x)$ **78.** $f(x) = \ln(3 - x)$

En los Ejercicios 79-84, use una calculadora de gráficas para graficar la función. Asegúrese de usar una pantalla apropiada.

79. $f(x) = \log(x + 9)$ **80.** $f(x) = \log(x - 6)$

81. $f(x) = \ln(x - 1)$ **82.** $f(x) = \ln(x + 2)$

83. $f(x) = \ln x + 8$ **84.** $f(x) = 3 \ln x - 1$

En los Ejercicios 85-92, use la propiedad biunívoca para despejar x de la ecuación.

85. $\log_5(x + 1) = \log_5 6$ **86.** $\log_2(x - 3) = \log_2 9$

87. $\log(2x + 1) = \log 15$ **88.** $\log(5x + 3) = \log 12$

89. $\ln(x + 4) = \ln 12$ **90.** $\ln(x - 7) = \ln 7$

91. $\ln(x^2 - 2) = \ln 23$ **92.** $\ln(x^2 - x) = \ln 6$

93. PAGO MENSUAL El modelo

$$t = 16.625 \ln\left(\frac{x}{x - 750}\right), \quad x > 750$$

aproxima la duración de una hipoteca para viviendas de \$150 000 a 6% en términos de pago mensual. En el modelo, t es la duración de la hipoteca en años y x el pago mensual en dólares.

(a) Use el modelo para aproximar las duraciones de una hipoteca de \$150 000 a 6% cuando el pago mensual es de \$897.72 y cuando es de \$1659.24.

(b) Aproxime las cantidades totales pagadas en el plazo de la hipoteca con un pago mensual de \$897.72 y con uno de \$1659.24.

(c) Aproxime los cargos totales por intereses para un pago mensual de \$897.72 y para uno de \$1659.24.

(d) ¿Cuál es la asíntota vertical para el modelo? Interprete su significado en el contexto del problema.

94. INTERÉS COMPUESTO Un capital inicial P, invertido al $5\frac{1}{2}\%$ y capitalizado continuamente aumenta a una cantidad K veces el capital inicial original después de t años, donde t está dado por $t = (\ln K)/0.055$.

(a) Complete la tabla e interprete sus resultados.

K	1	2	4	6	8	10	12
t							

(b) Trace una gráfica de la función.

95. TELEVISIÓN POR CABLE El número de sistemas C de televisión por cable (en miles) en cierto país, de 2001 a 2006, puede aproximarse con el modelo

$$C = 10.355 - 0.298t \ln t, \quad 1 \le t \le 6$$

donde t representa el año, con $t = 1$ correspondiente a 2001. (Fuente: Warren Communication News)

(a) Complete la tabla.

t	1	2	3	4	5	6
C						

(b) Use una calculadora de gráficas para graficar la función.

(c) ¿El modelo puede usarse para predecir los números de sistemas de televisión por cable después de 2006? Explique.

96. POBLACIÓN El tiempo t en años para que la población mundial se duplique, si es creciente a un ritmo r continuo, está dado por $t = (\ln 2)/r$.

(a) Complete la tabla e interprete sus resultados.

r	0.005	0.010	0.015	0.020	0.025	0.030
t						

(b) Use una calculadora de gráficas para graficar la función.

97. MODELO DE MEMORIA HUMANA A unos estudiantes de matemáticas se les aplicó un examen y, a continuación, cada mes se les aplicó otro examen equivalente. El promedio de calificaciones para el grupo está dado por el modelo de memoria humana $f(t) = 80 - 17\log(t + 1)$, $0 \le t \le 12$, donde t es el tiempo en meses.

(a) Use una calculadora de gráficas para graficar el modelo en el dominio especificado.

(b) ¿Cuál fue el promedio de calificaciones en el examen original ($t = 0$)?

(c) ¿Cuál fue el promedio de calificaciones después de 4 meses?

(d) ¿Cuál fue el promedio de calificaciones después de 10 meses?

98. INTENSIDAD DEL SONIDO La relación entre el número de decibeles β y la intensidad I de un sonido, en watts por metro cuadrado, es

$$\beta = 10\log\left(\frac{I}{10^{-12}}\right).$$

(a) Determine el número de decibeles de un sonido con una intensidad de 1 watt por metro cuadrado.

(b) Determine el número de decibeles de un sonido con una intensidad de 10^{-2} watts por metro cuadrado.

(c) La intensidad del sonido en el inciso (a) es 100 veces más que el del inciso (b). ¿El número de decibeles es 100 veces mayor? Explique.

EXPLORACIÓN

¿VERDADERO O FALSO? En los Ejercicios 99 y 100, determine si la proposición es verdadera o falsa. Justifique su respuesta.

99. Puede determinar la gráfica de $f(x) = \log_6 x$ al graficar $g(x) = 6^x$ y reflejarla alrededor del eje x.

100. La gráfica de $f(x) = \log_3 x$ contiene el punto $(27, 3)$.

En los Ejercicios 101-104, trace las gráficas de f y g y describa la relación entre ellas. ¿Cuál es la relación entre las funciones f y g?

101. $f(x) = 3^x, \quad g(x) = \log_3 x$

102. $f(x) = 5^x, \quad g(x) = \log_5 x$

103. $f(x) = e^x, \quad g(x) = \ln x$

104. $f(x) = 8^x, \quad g(x) = \log_8 x$

105. PIÉNSELO Complete la tabla para $f(x) = 10^x$.

x	-2	-1	0	1	2
$f(x)$					

Complete la tabla para $f(x) = \log x$.

x	$\frac{1}{100}$	$\frac{1}{10}$	1	10	100
$f(x)$					

Compare las dos tablas. ¿Cuál es la relación entre $f(x) = 10^x$ y $f(x) = \log x$?

106. ANÁLISIS GRÁFICO Use una calculadora de gráficas para graficar f y g en la misma pantalla y determine cuál crece a un ritmo mayor cuando x se aproxima a $+\infty$. ¿Qué puede concluir acerca del ritmo de crecimiento de la función logarítmica natural?

(a) $f(x) = \ln x, \quad g(x) = \sqrt{x}$

(b) $f(x) = \ln x, \quad g(x) = \sqrt[4]{x}$

107. (a) Complete la tabla para la función dada por $f(x) = (\ln x)/x$.

x	1	5	10	10^2	10^4	10^6
$f(x)$						

(b) Use la tabla del inciso (a) para determinar qué valor de $f(x)$ se aproxima cuando x aumenta sin límite.

(c) Use una calculadora de gráficas para confirmar el resultado del inciso (b).

108. TOQUE FINAL La tabla de valores se obtuvo al evaluar una función. Determine cuál de los enunciados puede ser verdadero y cuál debe ser falso.

x	y
1	0
2	1
8	3

(a) y es una función exponencial de x.

(b) y es una función logarítmica de x.

(c) x es una función exponencial de y.

(d) y es una función lineal de x.

109. ESCRITURA Explique por qué $\log_a x$ está definido sólo para $0 < a < 1$ y $a > 1$.

En los Ejercicios 110 y 111, (a) use una calculadora de gráficas para graficar la función, (b) use la gráfica para determinar los intervalos en los que la función es creciente y decreciente y (c) aproxime cualesquier valores relativos máximo o mínimo de la función.

110. $f(x) = |\ln x|$

111. $h(x) = \ln(x^2 + 1)$

3.3 Propiedades de los logaritmos

Lo que debe aprender

- Usar la fórmula de cambio de base para reescribir y evaluar expresiones logarítmicas.
- Usar propiedades de los logaritmos para evaluar o reescribir expresiones logarítmicas.
- Usar propiedades de los logaritmos para expandir o condensar expresiones logarítmicas.
- Usar funciones logarítmicas para modelar y resolver problemas de la vida real.

Por qué debe aprenderlo

Se pueden usar funciones logarítmicas para modelar y resolver problemas de la vida real. Por ejemplo, en los Ejercicios 87-90 en la página 242 se usa una función logarítmica para modelar la relación entre el número de decibeles y la intensidad de un sonido.

Dynamic Graphics/ Jupiter Images

Cambio de base

Casi todas las calculadoras tienen sólo dos tipos de teclas de logaritmos, una para logaritmos comunes (base 10) y una para logaritmos naturales (base e). Aun cuando los logaritmos comunes y los naturales son los que se usan con más frecuencia, ocasionalmente es necesario evaluar logaritmos con otras bases. Para hacer esto se puede usar la siguiente **fórmula de cambio de base.**

Fórmula de cambio de base

Sean a, b y x números reales positivos tales que $a \neq 1$ y $b \neq 1$. Entonces $\log_a x$ se puede convertir a una base diferente como sigue.

Base b

$$\log_a x = \frac{\log_b x}{\log_b a}$$

Base 10

$$\log_a x = \frac{\log x}{\log a}$$

Base e

$$\log_a x = \frac{\ln x}{\ln a}$$

Una forma de ver la fórmula de cambio de base es que los logaritmos de base a son simplemente *múltiplos constantes* de logaritmos con base b. El multiplicador constante es $1/(\log_b a)$.

Ejemplo 1 Cambiar bases usando logaritmos comunes

a. $\log_4 25 = \dfrac{\log 25}{\log 4}$ $\log_a x = \dfrac{\log x}{\log a}$

$\approx \dfrac{1.39794}{0.60206}$ Usar calculadora.

≈ 2.3219 Simplificar.

b. $\log_2 12 = \dfrac{\log 12}{\log 2} \approx \dfrac{1.07918}{0.30103} \approx 3.5850$

PUNTO *de repaso* Ahora trate de hacer el Ejercicio 7(a).

Ejemplo 2 Cambiar bases usando logaritmos naturales

a. $\log_4 25 = \dfrac{\ln 25}{\ln 4}$ $\log_a x = \dfrac{\ln x}{\ln a}$

$\approx \dfrac{3.21888}{1.38629}$ Usar calculadora.

≈ 2.3219 Simplificar.

b. $\log_2 12 = \dfrac{\ln 12}{\ln 2} \approx \dfrac{2.48491}{0.69315} \approx 3.5850$

PUNTO *de repaso* Ahora trate de hacer el Ejercicio 7(b).

Propiedades de los logaritmos

De la sección anterior, usted ya sabe que la función logarítmica con base a es la *función inversa* de la función exponencial con base a. En consecuencia, tiene sentido que las propiedades de los exponentes deben tener propiedades correspondientes que comprendan los logaritmos. Por ejemplo, la propiedad exponencial $a^0 = 1$ tiene la correspondiente propiedad logarítmica $\log_a 1 = 0$.

ATENCIÓN

No hay una propiedad general que se pueda usar para reescribir $\log_a(u \pm v)$. Específicamente, $\log_a(u + v)$ no es igual a $\log_a u + \log_a v$.

Propiedades de los logaritmos

Sea a un número positivo tal que $a \neq 1$, y sea n un número real. Si u y v son números reales positivos, las siguientes propiedades son verdaderas.

	Logaritmo con base a	*Logaritmo natural*
1. Propiedad del producto:	$\log_a(uv) = \log_a u + \log_a v$	$\ln(uv) = \ln u + \ln v$
2. Propiedad del cociente:	$\log_a \frac{u}{v} = \log_a u - \log_a v$	$\ln \frac{u}{v} = \ln u - \ln v$
3. Propiedad de la potencia:	$\log_a u^n = n \log_a u$	$\ln u^n = n \ln u$

Para demostraciones de las propiedades citadas líneas antes, vea la página 276.

Ejemplo 3 Usar propiedades de los logaritmos

Escriba cada logaritmo en términos de ln 2 y ln 3.

a. $\ln 6$ **b.** $\ln \frac{2}{27}$

Solución

a. $\ln 6 = \ln(2 \cdot 3)$ Reescribir 6 como $2 \cdot 3$.

$= \ln 2 + \ln 3$ Propiedad del producto

b. $\ln \frac{2}{27} = \ln 2 - \ln 27$ Propiedad del cociente

$= \ln 2 - \ln 3^3$ Reescribir 27 como 3^3.

$= \ln 2 - 3 \ln 3$ Propiedad de la potencia

PUNTO *de repaso* Ahora trate de hacer el Ejercicio 27.

NOTA HISTÓRICA

The Granger Collection

John Napier, matemático escocés, inventó los logaritmos como medio para simplificar algunos de los tediosos cálculos de su tiempo. Empezando en 1594, Napier trabajó durante 20 años en la invención de logaritmos. Napier tuvo éxito sólo parcial en su búsqueda por simplificar tediosos cálculos, pero el invento de los logaritmos fue un paso adelante y recibió inmediato reconocimiento.

Ejemplo 4 Uso de propiedades de los logaritmos

Encuentre el valor exacto de cada expresión sin usar calculadora.

a. $\log_5 \sqrt[3]{5}$ **b.** $\ln e^6 - \ln e^2$

Solución

a. $\log_5 \sqrt[3]{5} = \log_5 5^{1/3} = \frac{1}{3} \log_5 5 = \frac{1}{3}(1) = \frac{1}{3}$

b. $\ln e^6 - \ln e^2 = \ln \frac{e^6}{e^2} = \ln e^4 = 4 \ln e = 4(1) = 4$

PUNTO *de repaso* Ahora trate de hacer el Ejercicio 29.

Reescritura de expresiones logarítmicas

Las propiedades de los logaritmos son útiles para reescribir expresiones logarítmicas en formas que simplifican las operaciones de álgebra. Esto es cierto porque estas propiedades convierten formas complicadas de productos, cocientes y exponenciales en más sencillas sumas, diferencias y productos, respectivamente.

Ejemplo 5 Expandir expresiones logarítmicas

Expanda cada expresión logarítmica.

a. $\log_4 5x^3y$ **b.** $\ln \dfrac{\sqrt{3x-5}}{7}$

Solución

a. $\log_4 5x^3y = \log_4 5 + \log_4 x^3 + \log_4 y$ Propiedad del producto

$= \log_4 5 + 3\log_4 x + \log_4 y$ Propiedad de la potencia

b. $\ln \dfrac{\sqrt{3x-5}}{7} = \ln \dfrac{(3x-5)^{1/2}}{7}$ Reescribir usando exponente racional.

$= \ln(3x-5)^{1/2} - \ln 7$ Propiedad del cociente

$= \dfrac{1}{2}\ln(3x-5) - \ln 7$ Propiedad de la potencia

PUNTO *de repaso* Ahora trate de hacer el Ejercicio 53.

En el Ejemplo 5, las propiedades de los logaritmos se usaron para *expandir* expresiones logarítmicas. En el Ejemplo 6, este procedimiento se invierte y las propiedades de los logaritmos se usan para *condensar* expresiones logarítmicas.

Ejemplo 6 Condensar expresiones logarítmicas

Condense cada expresión logarítmica.

a. $\frac{1}{2}\log x + 3\log(x+1)$ **b.** $2\ln(x+2) - \ln x$

c. $\frac{1}{3}[\log_2 x + \log_2(x+1)]$

Solución

a. $\frac{1}{2}\log x + 3\log(x+1) = \log x^{1/2} + \log(x+1)^3$ Propiedad de la potencia

$= \log\left[\sqrt{x}(x+1)^3\right]$ Propiedad del producto

b. $2\ln(x+2) - \ln x = \ln(x+2)^2 - \ln x$ Propiedad de la potencia

$= \ln \dfrac{(x+2)^2}{x}$ Propiedad del cociente

c. $\frac{1}{3}[\log_2 x + \log_2(x+1)] = \frac{1}{3}\{\log_2[x(x+1)]\}$ Propiedad del producto

$= \log_2[x(x+1)]^{1/3}$ Propiedad de la potencia

$= \log_2 \sqrt[3]{x(x+1)}$ Reescribir con un radical.

PUNTO *de repaso* Ahora trate de hacer el Ejercicio75.

Ayuda de álgebra

En el Apéndice A.2 puede repasar la escritura de radicales y exponentes racionales.

Aplicación

Un método para determinar la forma en que los valores de x y y para un conjunto de datos no lineales están relacionados es tomar el logaritmo natural de cada uno de esos valores. Si los puntos se grafican y caen sobre una recta, entonces se puede determinar que los valores de x y y están relacionados por la ecuación

$$\ln y = m \ln x$$

donde m es la pendiente de la recta.

Ejemplo 7 Hallar un modelo matemático

La tabla siguiente muestra la distancia media del Sol x y el periodo y (el tiempo que tarda un planeta en girar en órbita alrededor de ese astro) por cada uno de los seis planetas más cercanos al Sol. En la tabla, la distancia media está dada en términos de unidades astronómicas (donde la distancia media de la Tierra está definida como 1.0) y el periodo está dado en años. Encuentre una ecuación que relacione y y x

Planeta	Distancia media, x	Período, y
Mercurio	0.387	0.241
Venus	0.723	0.615
Tierra	1.000	1.000
Marte	1.524	1.881
Júpiter	5.203	11.860
Saturno	9.537	29.460

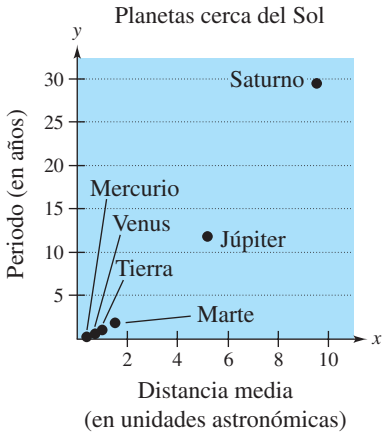


FIGURA 3.26

Solución

Los puntos de la tabla superior están graficados en la Figura 3.26. De esta figura no es claro cómo hallar una ecuación que relacione y y x. Para resolver este problema, tome el logaritmo natural de cada uno de los valores de x y y de la tabla. Esto produce los siguientes resultados

Planeta	Mercurio	Venus	Tierra	Marte	Júpiter	Saturno
$\ln x$	-0.949	-0.324	0.000	0.421	1.649	2.255
$\ln y$	-1.423	-0.486	0.000	0.632	2.473	3.383

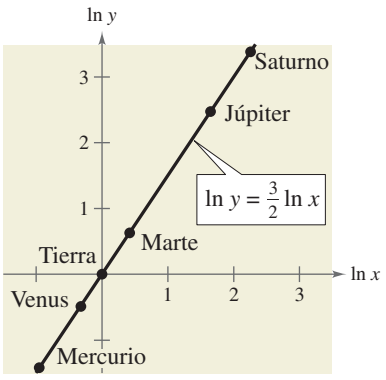


FIGURA 3.27

Ahora, al graficar los puntos en la segunda tabla se puede ver que los seis parecen estar en una recta (vea Figura 3.27). Escoja dos puntos cualesquiera para determinar la pendiente de la recta. Usando los puntos (0.421, 0.632) y (0, 0) se puede determinar que la pendiente de la recta es

$$m = \frac{0.632 - 0}{0.421 - 0} \approx 1.5 = \frac{3}{2}.$$

Por la forma punto-pendiente, la ecuación de la recta es $Y = \frac{3}{2}X$, donde $Y = \ln y$ y $X = \ln x$. Por tanto, se puede concluir que $\ln y = \frac{3}{2} \ln x$.

PUNTO *de repaso* Ahora trate de hacer el Ejercicio 91.

3.3 EJERCICIOS

En www.CalcChat.com vea las soluciones a los ejercicios impares.

VOCABULARIO

En los Ejercicios 1-3, llene los espacios en blanco.

1. Para evaluar un logaritmo de cualquier base, se puede usar la fórmula _____.
2. La fórmula del cambio de base para la base e está dada por $\log_a x =$ _____.
3. Se puede considerar $\log_a x$ como un múltiplo constante de $\log_b x$; el multiplicador constante es _____.

En los Ejercicios 4-6, relacione la propiedad de los logaritmos con su nombre.

4. $\log_a(uv) = \log_a u + \log_a v$
5. $\ln u^n = n \ln u$
6. $\log_a \frac{u}{v} = \log_a u - \log_a v$

(a) Propiedad de la potencia
(b) Propiedad del cociente
(c) Propiedad del producto

HABILIDADES Y APLICACIONES

En los Ejercicios 7-14, reescriba el logaritmo como una razón entre (a) logaritmos comunes y (b) logaritmos naturales.

7. $\log_5 16$
8. $\log_3 47$
9. $\log_{1/5} x$
10. $\log_{1/3} x$
11. $\log_x \frac{3}{10}$
12. $\log_x \frac{3}{4}$
13. $\log_{2.6} x$
14. $\log_{7.1} x$

En los Ejercicios 15-22, evalúe el logaritmo usando la fórmula del cambio de base. Redondee el resultado a tres lugares decimales.

15. $\log_3 7$
16. $\log_7 4$
17. $\log_{1/2} 4$
18. $\log_{1/4} 5$
19. $\log_9 0.1$
20. $\log_{20} 0.25$
21. $\log_{15} 1250$
22. $\log_3 0.015$

En los Ejercicios 23-28, use las propiedades de los logaritmos para reescribir y simplificar la expresión logarítmica.

23. $\log_4 8$
24. $\log_2(4^2 \cdot 3^4)$
25. $\log_5 \frac{1}{250}$
26. $\log \frac{9}{300}$
27. $\ln(5e^6)$
28. $\ln \frac{6}{e^2}$

En los Ejercicios 29-44, encuentre el valor exacto de la expresión logarítmica sin usar calculadora. (Si esto no es posible, exprese la razón.)

29. $\log_3 9$
30. $\log_5 \frac{1}{125}$
31. $\log_2 \sqrt[4]{8}$
32. $\log_6 \sqrt[3]{6}$
33. $\log_4 16^2$
34. $\log_3 81^{-3}$
35. $\log_2(-2)$
36. $\log_3(-27)$
37. $\ln e^{4.5}$
38. $3 \ln e^4$
39. $\ln \frac{1}{\sqrt{e}}$
40. $\ln \sqrt[4]{e^3}$
41. $\ln e^2 + \ln e^5$
42. $2 \ln e^6 - \ln e^5$
43. $\log_5 75 - \log_5 3$
44. $\log_4 2 + \log_4 32$

En los Ejercicios 45-66, use las propiedades de los logaritmos para expandir la expresión a una suma, diferencia o múltiplo constante de logaritmos. (Suponga que todas las variables son positivas.)

45. $\ln 4x$
46. $\log_3 10z$
47. $\log_8 x^4$
48. $\log_{10} \frac{y}{2}$
49. $\log_5 \frac{5}{x}$
50. $\log_6 \frac{1}{z^3}$
51. $\ln \sqrt{z}$
52. $\ln \sqrt[3]{t}$
53. $\ln xyz^2$
54. $\log 4x^2y$
55. $\ln z(z-1)^2,\ z > 1$
56. $\ln\left(\frac{x^2-1}{x^3}\right),\ x > 1$
57. $\log_2 \frac{\sqrt{a-1}}{9},\ a > 1$
58. $\ln \frac{6}{\sqrt{x^2+1}}$
59. $\ln \sqrt[3]{\frac{x}{y}}$
60. $\ln \sqrt{\frac{x^2}{y^3}}$
61. $\ln x^2 \sqrt{\frac{y}{z}}$
62. $\log_2 x^4 \sqrt{\frac{y}{z^3}}$
63. $\log_5 \frac{x^2}{y^2z^3}$
64. $\log_{10} \frac{xy^4}{z^5}$
65. $\ln \sqrt[4]{x^3(x^2+3)}$
66. $\ln \sqrt{x^2(x+2)}$

En los Ejercicios 67-84, condense la expresión al logaritmo de una sola cantidad.

67. $\ln 2 + \ln x$

68. $\ln y + \ln t$

69. $\log_4 z - \log_4 y$

70. $\log_5 8 - \log_5 t$

71. $2 \log_2 x + 4 \log_2 y$

72. $\frac{2}{3} \log_7(z - 2)$

73. $\frac{1}{4} \log_3 5x$

74. $-4 \log_6 2x$

75. $\log x - 2 \log(x + 1)$

76. $2 \ln 8 + 5 \ln(z - 4)$

77. $\log x - 2 \log y + 3 \log z$

78. $3 \log_3 x + 4 \log_3 y - 4 \log_3 z$

79. $\ln x - [\ln(x + 1) + \ln(x - 1)]$

80. $4[\ln z + \ln(z + 5)] - 2 \ln(z - 5)$

81. $\frac{1}{3}[2 \ln(x + 3) + \ln x - \ln(x^2 - 1)]$

82. $2[3 \ln x - \ln(x + 1) - \ln(x - 1)]$

83. $\frac{1}{3}[\log_8 y + 2 \log_8(y + 4)] - \log_8(y - 1)$

84. $\frac{1}{2}[\log_4(x + 1) + 2 \log_4(x - 1)] + 6 \log_4 x$

En los Ejercicios 85 y 86, compare las cantidades logarítmicas. Si dos son iguales, explique por qué.

85. $\dfrac{\log_2 32}{\log_2 4}$, $\log_2 \dfrac{32}{4}$, $\log_2 32 - \log_2 4$

86. $\log_7 \sqrt{70}$, $\log_7 35$, $\frac{1}{2} + \log_7 \sqrt{10}$

INTENSIDAD DEL SONIDO En los Ejercicios 87-90, use la siguiente información. La relación entre el número de decibeles β y la intensidad I de un sonido, en watts por metro cuadrado, está dada por

$$\beta = 10 \log\left(\frac{I}{10^{-12}}\right).$$

87. Use las propiedades de los logaritmos para escribir la fórmula en forma más sencilla, y determine el número de decibeles de un sonido con una intensidad de 10^{-6} watts por metro cuadrado.

88. Encuentre la diferencia en intensidad sonora entre una oficina promedio, con intensidad de 1.26×10^{-7} watts por metro cuadrado, y un estudio de radiodifusión con intensidad de 3.16×10^{-10} watts por metro cuadrado.

89. Encuentre la diferencia en intensidad sonora entre una aspiradora, con intensidad de 10^{-4} watts por metro cuadrado, y la caída de hojas de árboles con intensidad de 10^{-11} watts por metro cuadrado.

90. Usted y su compañero de cuarto están escuchando sus aparatos de estéreo al mismo tiempo y a la misma intensidad. ¿Cuánto más fuerte es la música cuando ambos estéreos están funcionando, si se comparan con que sólo uno de ellos funcione?

AJUSTE DE CURVAS En los Ejercicios 91-94, encuentre una ecuación logarítmica que relacione y y x. Explique los pasos seguidos para hallar la ecuación.

91.

x	1	2	3	4	5	6
y	1	1.189	1.316	1.414	1.495	1.565

92.

x	1	2	3	4	5	6
y	1	1.587	2.080	2.520	2.924	3.302

93.

x	1	2	3	4	5	6
y	2.5	2.102	1.9	1.768	1.672	1.597

94.

x	1	2	3	4	5	6
y	0.5	2.828	7.794	16	27.951	44.091

95. RAPIDEZ DE GALOPE DE ANIMALES Los animales de cuatro patas corren con dos tipos de movimiento: trote y galope. Un animal que trota siempre tiene al menos una pata en el suelo, en tanto que el que galopa tiene sus cuatro patas sin tocar el suelo en algún punto de su zancada o tranco. El número de zancadas por minuto en el que un animal pasa de trotar a galopar depende de su peso. Use la tabla siguiente para hallar una ecuación logarítmica que relacione el peso x del animal (en libras) y su rapidez y más baja de galope (en zancadas por minuto).

Peso, x	Rapidez de galope, y
25	191.5
35	182.7
50	173.8
75	164.2
500	125.9
1000	114.2

96. LARGO DE UÑAS La longitud y diámetro aproximados (en pulgadas) de uñas comunes se muestran en la tabla siguiente. Encuentre una ecuación logarítmica que relacione el diámetro y de una uña común con su longitud x

Longitud, x	Diámetro, y
1	0.072
2	0.120
3	0.148

Longitud, x	Diámetro, y
4	0.203
5	0.238
6	0.284

97. COMPARAR MODELOS Un vaso de agua a una temperatura inicial de 78° C se coloca en un cuarto a una temperatura de 21° C. La temperatura del agua se mide cada 5 minutos durante un periodo de media hora. Los resultados se registran como pares ordenados de la forma (t, T), donde t es el tiempo (en minutos) y T es la temperatura (en grados Celsius).

$(0, 78.0°), (5, 66.0°), (10, 57.5°), (15, 51.2°),$
$(20, 46.3°), (25, 42.4°), (30, 39.6°)$

(a) La gráfica del modelo para los datos debe ser asintótica con la gráfica de la temperatura del cuarto. Reste la temperatura del cuarto de cada una de las temperaturas de los pares ordenados. Use una calculadora de gráficas para determinar los puntos de datos (t, T) y $(t, T - 21)$

(b) Un modelo exponencial para los datos $(t, T - 21)$ está dado por $T - 21 = 54.4(0.964)^t$. Despeje T y grafique el modelo. Compare el resultado con la gráfica de los datos originales.

(c) Tome los logaritmos naturales de las temperaturas revisadas. Use una calculadora de gráficas para determinar los puntos $(t, \ln(T - 21))$ y observe que los puntos parecen ser lineales. Use el comando *regression* de la calculadora para ajustar una recta a estos datos. Esta recta resultante tiene la forma $\ln(T - 21) = at + b$. Despeje T y verifique que el resultado es equivalente al modelo del inciso (b).

(d) Ajuste un modelo racional a los datos. Tome los recíprocos de las coordenadas y de los puntos de datos revisados para generar los puntos

$$\left(t, \frac{1}{T - 21}\right).$$

Use una calculadora de gráficas para graficar estos puntos y observar que parecen lineales. Use el comando *regression* de una calculadora de gráficas para ajustar una recta a estos datos. La recta resultante tiene la forma

$$\frac{1}{T - 21} = at + b.$$

Despeje T y use una calculadora de gráficas para graficar la función racional y los puntos de datos originales.

(e) ¿Por qué tomar los logaritmos de las temperaturas llevó a una gráfica de dispersión lineal? ¿Por qué tomar los recíprocos de las temperaturas llevó a una gráfica de dispersión lineal?

EXPLORACIÓN

98. DEMOSTRACIÓN Demuestre que

$$\log_b \frac{u}{v} = \log_b u - \log_b v.$$

99. DEMOSTRACIÓN Demuestre que $\log_b u^n = n \log_b u$.

100. TOQUE FINAL Un compañero de clase dice que lo siguiente es verdadero.

(a) $\ln(u + v) = \ln u + \ln v = \ln(uv)$

(b) $\ln(u - v) = \ln u - \ln v = \ln \dfrac{u}{v}$

(c) $(\ln u)^n = n(\ln u) = \ln u^n$

Discuta en qué forma demostraría que esto no es cierto.

¿VERDADERO O FALSO? En los Ejercicios 101-106, determine si la proposición es verdadera o falsa dado que $f(x) = \ln x$. Justifique su respuesta.

101. $f(0) = 0$

102. $f(ax) = f(a) + f(x), \quad a > 0, x > 0$

103. $f(x - 2) = f(x) - f(2), \quad x > 2$

104. $\sqrt{f(x)} = \frac{1}{2} f(x)$

105. Si $f(u) = 2f(v)$, entonces $v = u^2$.

106. Si $f(x) < 0$, entonces $0 < x < 1$.

En los Ejercicios 107-112, use la fórmula del cambio de base para reescribir el logaritmo como una razón entre logaritmos. A continuación use una calculadora de gráficas para graficar la razón.

107. $f(x) = \log_2 x$

108. $f(x) = \log_4 x$

109. $f(x) = \log_{1/2} x$

110. $f(x) = \log_{1/4} x$

111. $f(x) = \log_{11.8} x$

112. $f(x) = \log_{12.4} x$

113. PIÉNSELO Considere las funciones siguientes.

$$f(x) = \ln \frac{x}{2}, \quad g(x) = \frac{\ln x}{\ln 2}, \quad h(x) = \ln x - \ln 2$$

¿Cuáles dos funciones deben tener gráficas idénticas? Verifique su respuesta trazando las gráficas de las tres funciones en el mismo conjunto de ejes de coordenadas.

114. ANÁLISIS GRÁFICO Use una calculadora de gráficas para graficar $y_1 = \ln x - \ln(x - 3)$ y $y_2 = \ln \dfrac{x}{x - 3}$ en la misma pantalla. ¿La calculadora de gráficas muestra las funciones con el mismo dominio? Si es así, ¿debe serlo? Explique su razonamiento.

115. PIÉNSELO ¿Para cuántos enteros entre 1 y 20 se pueden aproximar los logaritmos naturales, dados los valores $\ln 2 \approx 0.6931$, $\ln 3 \approx 1.0986$ y $\ln 5 \approx 1.6094$? Aproxime estos logaritmos (no use calculadora).

3.4 Ecuaciones exponenciales y logarítmicas

Lo que debe aprender

- Resolver ecuaciones exponenciales y logarítmicas sencillas.
- Resolver ecuaciones exponenciales más complicadas.
- Resolver ecuaciones logarítmicas más complicadas.
- Usar ecuaciones exponenciales y logarítmicas para modelar y resolver problemas de la vida real.

Por qué debe aprenderlo

Se usan ecuaciones exponenciales y logarítmicas para modelar y resolver aplicaciones de las ciencias de la vida. Por ejemplo, en el Ejercicio 132 de la página 253 se usa una función exponencial para modelar el número de árboles por acre dado el diámetro promedio de los árboles.

© James Marshall/Corbis

Introducción

Hasta aquí en este capítulo, hemos estudiado las definiciones, gráficas y propiedades de las funciones exponenciales y logarítmicas. En esta sección, estudiaremos procedimientos para *resolver ecuaciones* que contengan estas funciones exponenciales y logarítmicas.

Hay dos estrategias básicas para resolver ecuaciones exponenciales o logarítmicas. La primera está basada en las propiedades biunívocas y se usó para resolver ecuaciones exponenciales y logarítmicas sencillas en las Secciones 3.1 y 3.2. La segunda está basada en las propiedades inversas. Para $a > 0$ y $a \neq 1$, las siguientes propiedades son verdaderas para toda x y toda y para las cuales están definidos $\log_a x$ y $\log_a y$.

Propiedades biunívocas

$a^x = a^y$ si y sólo si $x = y$.

$\log_a x = \log_a y$ si y sólo si $x = y$.

Propiedades inversas

$a^{\log_a x} = x$

$\log_a a^x = x$

Ejemplo 1 Resolver ecuaciones sencillas

Ecuación original	*Ecuación reescrita*	*Solución*	*Propiedad*
a. $2^x = 32$	$2^x = 2^5$	$x = 5$	Biunívoca
b. $\ln x - \ln 3 = 0$	$\ln x = \ln 3$	$x = 3$	Biunívoca
c. $\left(\frac{1}{3}\right)^x = 9$	$3^{-x} = 3^2$	$x = -2$	Biunívoca
d. $e^x = 7$	$\ln e^x = \ln 7$	$x = \ln 7$	Inversa
e. $\ln x = -3$	$e^{\ln x} = e^{-3}$	$x = e^{-3}$	Inversa
f. $\log x = -1$	$10^{\log x} = 10^{-1}$	$x = 10^{-1} = \frac{1}{10}$	Inversa
g. $\log_3 x = 4$	$3^{\log_3 x} = 3^4$	$x = 81$	Inversa

PUNTO *de repaso* Ahora trate de hacer el Ejercicio 17.

Las estrategias empleadas en el Ejemplo 1 se resumen como sigue:

Estrategias para resolver ecuaciones exponenciales y logarítmicas

1. Reescriba la ecuación original en una forma que permita usar las propiedades biunívocas de funciones exponenciales o logarítmicas.
2. Reescriba una ecuación *exponencial* en forma logarítmica y aplique la propiedad inversa de las funciones logarítmicas.
3. Reescriba una ecuación *logarítmica* en forma exponencial y aplique la propiedad inversa de las funciones exponenciales.

Resolver ecuaciones exponenciales

Ejemplo 2 Resolver ecuaciones exponenciales

Resuelva cada ecuación y aproxime el resultado a tres lugares decimales, si es necesario.

a. $e^{-x^2} = e^{-3x-4}$

b. $3(2^x) = 42$

Solución

a.

$$e^{-x^2} = e^{-3x-4}$$ Escribir ecuación original.

$$-x^2 = -3x - 4$$ Propiedad biunívoca

$$x^2 - 3x - 4 = 0$$ Escribir en forma general.

$$(x + 1)(x - 4) = 0$$ Factorizar.

$$(x + 1) = 0 \Rightarrow x = -1$$ Igualar a 0 el primer factor.

$$(x - 4) = 0 \Rightarrow x = 4$$ Igualar a 0 el segundo factor.

Las soluciones son $x = -1$ y $x = 4$. Verifíquelas en la ecuación original.

b.

$$3(2^x) = 42$$ Escribir la ecuación original.

$$2^x = 14$$ Dividir cada lado entre 3.

$$\log_2 2^x = \log_2 14$$ Obtener el logaritmo de cada lado (base 2).

$$x = \log_2 14$$ Propiedad inversa

$$x = \frac{\ln 14}{\ln 2} \approx 3.807$$ Fórmula de cambio de base

La solución es $x = \log_2 14 \approx 3.807$. Verifíquelo en la ecuación original.

PUNTO *de repaso* Ahora trate de hacer el Ejercicio 29.

En el Ejemplo 2(b), la solución exacta es $x = \log_2 14$ y la solución aproximada es $x \approx 3.807$. Se prefiere una respuesta exacta cuando la solución es un paso intermedio en un problema más grande. Para una respuesta final, una solución aproximada es más fácil de entender.

Tip de estudio

Otra forma de resolver el Ejemplo 2(b) es obtener el logaritmo natural de cada lado y luego aplicar la propiedad de la potencia, como sigue.

$$3(2^x) = 42$$

$$2^x = 14$$

$$\ln 2^x = \ln 14$$

$$x \ln 2 = \ln 14$$

$$x = \frac{\ln 14}{\ln 2} \approx 3.807$$

Como se ve, se obtiene el mismo resultado que en el Ejemplo 2(b).

Ejemplo 3 Resolver una ecuación exponencial

Resuelva $e^x + 5 = 60$ y aproxime el resultado a tres lugares decimales.

Solución

$$e^x + 5 = 60$$ Escribir la ecuación original.

$$e^x = 55$$ Restar 5 de cada lado.

$$\ln e^x = \ln 55$$ Obtener el logaritmo natural de cada lado.

$$x = \ln 55 \approx 4.007$$ Propiedad inversa

La solución es $x = \ln 55 \approx 4.007$. Compruébelo en la ecuación original.

PUNTO *de repaso* Ahora trate de hacer el Ejercicio 55.

Tip de estudio

Recuerde que la función logarítmica natural tiene una base e.

Ejemplo 4 Resolver una ecuación exponencial

Resuelva $2(3^{2t-5}) - 4 = 11$ y aproxime el resultado a tres lugares decimales.

Solución

$$2(3^{2t-5}) - 4 = 11$$ Escribir la ecuación original.

$$2(3^{2t-5}) = 15$$ Sumar 4 a cada lado.

$$3^{2t-5} = \frac{15}{2}$$ Dividir cada lado entre 2.

$$\log_3 3^{2t-5} = \log_3 \frac{15}{2}$$ Obtener el logaritmo (base 3) de cada lado.

$$2t - 5 = \log_3 \frac{15}{2}$$ Propiedad inversa

$$2t = 5 + \log_3 7.5$$ Sumar 5 a cada lado.

$$t = \frac{5}{2} + \frac{1}{2}\log_3 7.5$$ Dividir cada lado entre 2.

$$t \approx 3.417$$ Usar calculadora.

La solución es $t = \frac{5}{2} + \frac{1}{2}\log_3 7.5 \approx 3.417$. Verifíquelo en la ecuación original.

PUNTO *de repaso* Ahora trate de hacer el Ejercicio 57.

Tip de estudio

Recuerde que para evaluar un logaritmo, por ejemplo $\log_3 7.5$, es necesario usar la fórmula de cambio de base.

$$\log_3 7.5 = \frac{\ln 7.5}{\ln 3} \approx 1.834$$

Cuando una ecuación contenga dos o más expresiones exponenciales, todavía se puede usar un procedimiento similar al demostrado en los Ejemplos 2, 3 y 4, pero el álgebra es un tanto más complicada.

Ejemplo 5 Resolver una ecuación exponencial de tipo cuadrático

Resuelva $e^{2x} - 3e^x + 2 = 0$.

Solución algebraica

$$e^{2x} - 3e^x + 2 = 0$$ Escribir la ecuación original.

$$(e^x)^2 - 3e^x + 2 = 0$$ Escribir en forma cuadrática.

$$(e^x - 2)(e^x - 1) = 0$$ Factorizar.

$$e^x - 2 = 0$$ Igualar a 0 el primer factor.

$$x = \ln 2$$ Solución

$$e^x - 1 = 0$$ Igualar a 0 el segundo factor.

$$x = 0$$ Solución

Las soluciones son $x = \ln 2 \approx 0.693$ y $x = 0$. Verifíquelas en la ecuación original.

PUNTO *de repaso* Ahora trate de hacer el Ejercicio 59.

Solución gráfica

Use una calculadora de gráficas para graficar $y = e^{2x} - 3e^x + 2$. Use el comando *zero* o *root* o los comandos *zoom* y *trace* de la calculadora para aproximar los valores de x para los cuales $y = 0$. En la Figura 3.28 se puede ver que los ceros se presentan en $x = 0$ y en $x \approx 0.693$. Por tanto, las soluciones son $x = 0$ y $x \approx 0.693$.

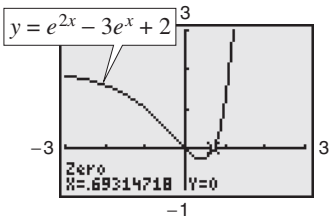


FIGURA 3.28

Resolver ecuaciones logarítmicas

Para resolver una ecuación logarítmica puede escribirla en forma exponencial.

$$\ln x = 3 \qquad \text{Forma logarítmica}$$
$$e^{\ln x} = e^3 \qquad \text{Elevar cada lado a exponente.}$$
$$x = e^3 \qquad \text{Forma exponencial}$$

Este procedimiento se denomina *exponenciación* de cada lado (miembro) de una ecuación.

Ejemplo 6 Resolver ecuaciones logarítmicas

a. $\ln x = 2$ Ecuación original

$e^{\ln x} = e^2$ Elevar a exponentes cada lado.

$x = e^2$ Propiedad inversa

b. $\log_3(5x - 1) = \log_3(x + 7)$ Ecuación original

$5x - 1 = x + 7$ Propiedad biunívoca

$4x = 8$ Sumar $-x$ y 1 a cada lado.

$x = 2$ Dividir cada lado entre 4.

c. $\log_6(3x + 14) - \log_6 5 = \log_6 2x$ Ecuación original

$$\log_6\left(\frac{3x + 14}{5}\right) = \log_6 2x \qquad \text{Propiedad del cociente de los logaritmos}$$

$$\frac{3x + 14}{5} = 2x \qquad \text{Propiedad biunívoca}$$

$3x + 14 = 10x$ Multiplicar en cruz.

$-7x = -14$ Aislar x.

$x = 2$ Dividir cada lado entre -7.

ATENCIÓN

Recuerde comprobar sus soluciones en la ecuación original cuando resuelva ecuaciones, para verificar que la respuesta es correcta y asegurarse que está en el dominio de la ecuación original.

PUNTO *de repaso* Ahora trate de hacer el Ejercicio 83.

Ejemplo 7 Resolver una ecuación logarítmica

Resuelva $5 + 2 \ln x = 4$ y aproxime el resultado a tres lugares decimales.

Solución algebraica

$5 + 2 \ln x = 4$ Escribir la ecuación original.

$2 \ln x = -1$ Restar 5 de cada lado.

$\ln x = -\frac{1}{2}$ Dividir cada lado entre 2.

$e^{\ln x} = e^{-1/2}$ Elevar a exponentes cada lado.

$x = e^{-1/2}$ Propiedad inversa

$x \approx 0.607$ Usar calculadora.

PUNTO *de repaso* Ahora trate de hacer el Ejercicio 93.

Solución gráfica

Use una calculadora de gráficas para graficar $y_1 = 5 + 2 \ln x$ y $y_2 = 4$ en la misma pantalla. Use el comando *intersect* o los comandos *zoom* y *trace* para aproximar el punto de intersección, como se muestra en la Figura 3.29. Por tanto, la solución es $x \approx 0.607$.

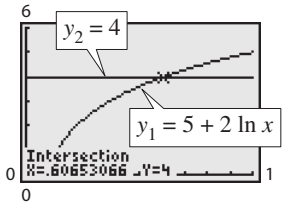


FIGURA 3.29

Ejemplo 8 Resolver una ecuación logarítmica

Resuelva $2 \log_5 3x = 4$.

Solución

$$2 \log_5 3x = 4$$ Escribir la ecuación original.

$$\log_5 3x = 2$$ Dividir cada lado entre 2.

$$5^{\log_5 3x} = 5^2$$ Elevar a exponentes cada lado (base 5).

$$3x = 25$$ Propiedad inversa

$$x = \frac{25}{3}$$ Dividir cada lado entre 3.

La solución es $x = \frac{25}{3}$. Compruébelo en la ecuación original.

PUNTO *de repaso* Ahora trate de hacer el Ejercicio 97.

Tip de estudio

Nótese en el Ejemplo 9 que la parte logarítmica de la ecuación se condensa en un solo logaritmo antes de elevar a exponentes cada lado de la ecuación.

Como el dominio de una función logarítmica por lo general no incluye todos los números reales, debe asegurarse de buscar soluciones extrañas de ecuaciones logarítmicas.

Ejemplo 9 Verificación en busca de soluciones extrañas

Resuelva $\log 5x + \log(x - 1) = 2$.

Solución algebraica

$$\log 5x + \log(x - 1) = 2$$ Escribir la ecuación original.

$$\log[5x(x - 1)] = 2$$ Propiedad del producto de los logaritmos

$$10^{\log(5x^2 - 5x)} = 10^2$$ Elevar a exponentes cada lado (base 10).

$$5x^2 - 5x = 100$$ Propiedad inversa

$$x^2 - x - 20 = 0$$ Escribir en forma general.

$$(x - 5)(x + 4) = 0$$ Factorizar.

$$x - 5 = 0$$ Igualar a 0 el primer factor.

$$x = 5$$ Solución

$$x + 4 = 0$$ Igualar a 0 el segundo factor.

$$x = -4$$ Solución

Las soluciones parecen ser $x = 5$ y $x = -4$. No obstante, al verificarlas en la ecuación original se puede ver que $x = 5$ es la única solución.

PUNTO *de repaso* Ahora trate de hacer el Ejercicio 109.

Solución gráfica

Use una calculadora de gráficas para graficar $y_1 = \log 5x + \log(x - 1)$ y $y_2 = 2$ en la misma pantalla. De la gráfica mostrada en la Figura 3.30, parece que las gráficas se intersecan en un punto. Use el comando *intersect* o los comandos *zoom* y *trace* para determinar que las gráficas se cortan en aproximadamente (5, 2). Por tanto, la solución es $x = 5$. Verifique algebraicamente que 5 sea una solución exacta.

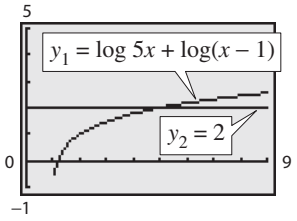


FIGURA 3.30

En el Ejemplo 9, el dominio de $\log 5x$ es $x > 0$ y el dominio de $\log(x - 1)$ es $x > 1$, de modo que el dominio de la ecuación original es $x > 1$. Como el dominio es todos los números reales mayores a 1, la solución $x = -4$ es extraña. Con la gráfica de la Figura 3.30 se comprueba esta conclusión.

Aplicaciones

Ejemplo 10 Duplicar una inversión

Usted ha depositado $500 en una cuenta que paga 6.75% de interés, capitalizado continuamente. ¿Cuánto tardará su dinero en duplicarse?

Solución

Usando la fórmula para capitalización continua se puede hallar que el saldo de la cuenta es

$$A = Pe^{rt}$$

$$A = 500e^{0.0675t}$$

Para hallar el tiempo necesario para que el saldo se duplique, sea $A = 1000$ y despeje t de la ecuación resultante.

$$500e^{0.0675t} = 1000 \qquad \text{Sea } A = 1000.$$

$$e^{0.0675t} = 2 \qquad \text{Dividir cada lado entre 500.}$$

$$\ln e^{0.0675t} = \ln 2 \qquad \text{Obtener el logaritmo natural de cada lado.}$$

$$0.0675t = \ln 2 \qquad \text{Propiedad inversa}$$

$$t = \frac{\ln 2}{0.0675} \qquad \text{Dividir cada lado entre 0.0675.}$$

$$t \approx 10.27 \qquad \text{Usar calculadora.}$$

El saldo de la cuenta se duplicará después de alrededor de 10.27 años. Este resultado se demuestra gráficamente en la Figura 3.31.

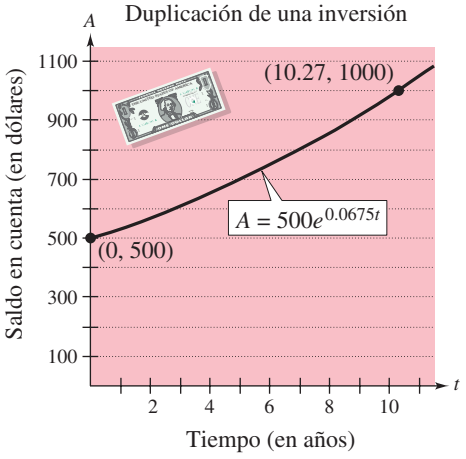


FIGURA 3.31

PUNTO *de repaso* Ahora trate de hacer el Ejercicio 117.

En el Ejemplo 10 se da una respuesta aproximada de 10.27 años. Dentro del contexto del problema, la solución exacta, $(\ln 2)/0.0675$ años, no tiene sentido como respuesta.

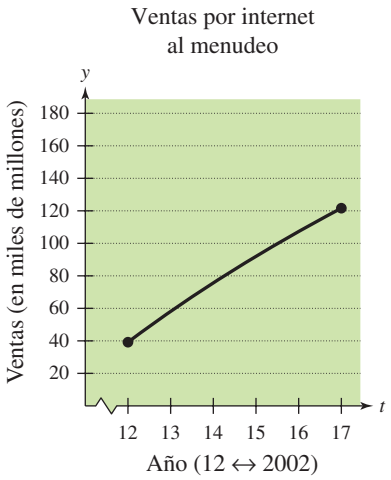


FIGURA 3.32

Ejemplo 11 Ventas al menudeo

Las ventas y al menudeo (en miles de millones) de compañías de ventas por internet en Estados Unidos, de 2002 a 2007, se pueden modelar con

$$y = -549 + 236.7 \ln t, \quad 12 \le t \le 17$$

donde t representa el año, con $t = 12$ correspondiente a 2002 (vea Figura 3.32). ¿Durante qué año las ventas alcanzaron \$108 mil millones de dólares? (Fuente: U.S. Census Bureau)

Solución

$$-549 + 236.7 \ln t = y$$ Escribir la ecuación original.

$$-549 + 236.7 \ln t = 108$$ Sustituir 108 por y.

$$236.7 \ln t = 657$$ Sumar 549 a cada lado.

$$\ln t = \frac{657}{236.7}$$ Dividir cada lado entre 236.7.

$$e^{\ln t} = e^{657/236.7}$$ Elevar a exponentes cada lado.

$$t = e^{657/236.7}$$ Propiedad inversa

$$t \approx 16$$ Usar calculadora.

La solución es $t \approx 16$. Como $t = 12$ representa el año 2002, se deduce que las ventas alcanzaron los \$108 mil millones en 2006.

PUNTO *de repaso* Ahora trate de hacer el Ejercicio 133.

Discusión en clase

Analizar relaciones numéricamente Use una calculadora para llenar renglón por renglón la tabla siguiente. Comente el patrón resultante. ¿Qué se puede concluir? Encuentre dos ecuaciones que resuman las relaciones que haya encontrado.

x	$\frac{1}{2}$	1	2	10	25	50
e^x						
$\ln(e^x)$						
$\ln x$						
$e^{\ln x}$						

3.4 EJERCICIOS

En www.CalcChat.com vea las soluciones a los ejercicios impares.

VOCABULARIO: Llene los espacios en blanco.

1. _____ una ecuación en x significa hallar todos los valores de x para los cuales la ecuación es verdadera.
2. Para resolver ecuaciones exponenciales y logarítmicas se pueden usar las siguientes propiedades biunívocas e inversas.
   (a) $a^x = a^y$ si y sólo si _____. (b) $\log_a x = \log_a y$ si y sólo si _____.
   (c) $a^{\log_a x} =$ _____ (d) $\log_a a^x =$ _____
3. Para resolver ecuaciones exponenciales y logarítmicas se pueden usar las siguientes estrategias.
   (a) Reescribir la ecuación original en una forma que permita el uso de las propiedades _____ de las funciones exponenciales o logarítmicas.
   (b) Reescribir una ecuación exponencial en forma _____ y aplicar la propiedad inversa de las funciones _____.
   (c) Reescribir una ecuación logarítmica en forma _____ y aplicar la propiedad inversa de las funciones _____.
4. Una solución _____ no satisface la ecuación original.

HABILIDADES Y APLICACIONES

En los Ejercicios 5-12, determine si cada valor de x es una solución (o una solución aproximada) de la ecuación.

5. $4^{2x-7} = 64$
(a) $x = 5$
(b) $x = 2$

6. $2^{3x+1} = 32$
(a) $x = -1$
(b) $x = 2$

7. $3e^{x+2} = 75$
(a) $x = -2 + e^{25}$
(b) $x = -2 + \ln 25$
(c) $x \approx 1.219$

8. $4e^{x-1} = 60$
(a) $x = 1 + \ln 15$
(b) $x \approx 3.7081$
(c) $x = \ln 16$

9. $\log_4(3x) = 3$
(a) $x \approx 21.333$
(b) $x = -4$
(c) $x = \frac{64}{3}$

10. $\log_2(x + 3) = 10$
(a) $x = 1021$
(b) $x = 17$
(c) $x = 10^2 - 3$

11. $\ln(2x + 3) = 5.8$
(a) $x = \frac{1}{2}(-3 + \ln 5.8)$
(b) $x = \frac{1}{2}(-3 + e^{5.8})$
(c) $x \approx 163.650$

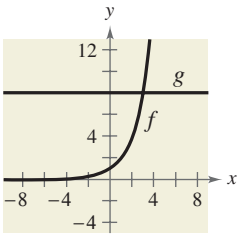
12. $\ln(x - 1) = 3.8$
(a) $x = 1 + e^{3.8}$
(b) $x \approx 45.701$
(c) $x = 1 + \ln 3.8$

En los Ejercicios 13-24, despeje x.

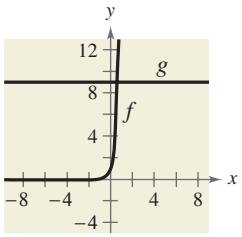
13. $4^x = 16$
14. $3^x = 243$
15. $\left(\frac{1}{2}\right)^x = 32$
16. $\left(\frac{1}{4}\right)^x = 64$
17. $\ln x - \ln 2 = 0$
18. $\ln x - \ln 5 = 0$
19. $e^x = 2$
20. $e^x = 4$
21. $\ln x = -1$
22. $\log x = -2$
23. $\log_4 x = 3$
24. $\log_5 x = \frac{1}{2}$

En los Ejercicios 25-28, aproxime el punto de intersección de las gráficas de f y g. A continuación resuelva algebraicamente la ecuación $f(x) = g(x)$ para verificar su aproximación.

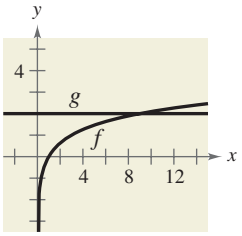
25. $f(x) = 2^x$
$g(x) = 8$



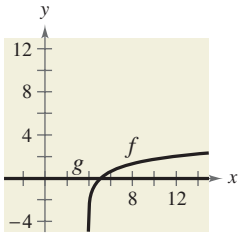
26. $f(x) = 27^x$
$g(x) = 9$



27. $f(x) = \log_3 x$
$g(x) = 2$



28. $f(x) = \ln(x - 4)$
$g(x) = 0$



En los Ejercicios 29-70, resuelva algebraicamente la ecuación exponencial. Aproxime el resultado a tres lugares decimales.

29. $e^x = e^{x^2-2}$
30. $e^{2x} = e^{x^2-8}$
31. $e^{x^2-3} = e^{x-2}$
32. $e^{-x^2} = e^{x^2-2x}$
33. $4(3^x) = 20$
34. $2(5^x) = 32$
35. $2e^x = 10$
36. $4e^x = 91$
37. $e^x - 9 = 19$
38. $6^x + 10 = 47$
39. $3^{2x} = 80$
40. $6^{5x} = 3000$
41. $5^{-t/2} = 0.20$
42. $4^{-3t} = 0.10$
43. $3^{x-1} = 27$
44. $2^{x-3} = 32$
45. $2^{3-x} = 565$
46. $8^{-2-x} = 431$

47. $8(10^{3x}) = 12$
48. $5(10^{x-6}) = 7$
49. $3(5^{x-1}) = 21$
50. $8(3^{6-x}) = 40$
51. $e^{3x} = 12$
52. $e^{2x} = 50$
53. $500e^{-x} = 300$
54. $1000e^{-4x} = 75$
55. $7 - 2e^{x} = 5$
56. $-14 + 3e^{x} = 11$
57. $6(2^{3x-1}) - 7 = 9$
58. $8(4^{6-2x}) + 13 = 41$
59. $e^{2x} - 4e^{x} - 5 = 0$
60. $e^{2x} - 5e^{x} + 6 = 0$
61. $e^{2x} - 3e^{x} - 4 = 0$
62. $e^{2x} + 9e^{x} + 36 = 0$
63. $\dfrac{500}{100 - e^{x/2}} = 20$
64. $\dfrac{400}{1 + e^{-x}} = 350$
65. $\dfrac{3000}{2 + e^{2x}} = 2$
66. $\dfrac{119}{e^{6x} - 14} = 7$
67. $\left(1 + \dfrac{0.065}{365}\right)^{365t} = 4$
68. $\left(4 - \dfrac{2.471}{40}\right)^{9t} = 21$
69. $\left(1 + \dfrac{0.10}{12}\right)^{12t} = 2$
70. $\left(16 - \dfrac{0.878}{26}\right)^{3t} = 30$

En los Ejercicios 71-80, use una calculadora de gráficas para graficar y resolver la ecuación. Aproxime el resultado a tres lugares decimales. Verifique algebraicamente su resultado.

71. $7 = 2^{x}$
72. $5^{x} = 212$
73. $6e^{1-x} = 25$
74. $-4e^{-x-1} + 15 = 0$
75. $3e^{3x/2} = 962$
76. $8e^{-2x/3} = 11$
77. $e^{0.09t} = 3$
78. $-e^{1.8x} + 7 = 0$
79. $e^{0.125t} - 8 = 0$
80. $e^{2.724x} = 29$

En los Ejercicios 81-112, resuelva algebraicamente la ecuación logarítmica. Aproxime el resultado a tres lugares decimales.

81. $\ln x = -3$
82. $\ln x = 1.6$
83. $\ln x - 7 = 0$
84. $\ln x + 1 = 0$
85. $\ln 2x = 2.4$
86. $2.1 = \ln 6x$
87. $\log x = 6$
88. $\log 3z = 2$
89. $3\ln 5x = 10$
90. $2\ln x = 7$
91. $\ln\sqrt{x + 2} = 1$
92. $\ln\sqrt{x - 8} = 5$
93. $7 + 3\ln x = 5$
94. $2 - 6\ln x = 10$
95. $-2 + 2\ln 3x = 17$
96. $2 + 3\ln x = 12$
97. $6\log_3(0.5x) = 11$
98. $4\log(x - 6) = 11$
99. $\ln x - \ln(x + 1) = 2$
100. $\ln x + \ln(x + 1) = 1$
101. $\ln x + \ln(x - 2) = 1$
102. $\ln x + \ln(x + 3) = 1$
103. $\ln(x + 5) = \ln(x - 1) - \ln(x + 1)$
104. $\ln(x + 1) - \ln(x - 2) = \ln x$
105. $\log_2(2x - 3) = \log_2(x + 4)$
106. $\log(3x + 4) = \log(x - 10)$
107. $\log(x + 4) - \log x = \log(x + 2)$
108. $\log_2 x + \log_2(x + 2) = \log_2(x + 6)$
109. $\log_4 x - \log_4(x - 1) = \frac{1}{2}$
110. $\log_3 x + \log_3(x - 8) = 2$
111. $\log 8x - \log\left(1 + \sqrt{x}\right) = 2$
112. $\log 4x - \log\left(12 + \sqrt{x}\right) = 2$

En los Ejercicios 113-116, use una calculadora de gráficas para graficar y resolver la ecuación. Aproxime el resultado a tres lugares decimales. Verifique algebraicamente su resultado.

113. $3 - \ln x = 0$
114. $10 - 4\ln(x - 2) = 0$
115. $2\ln(x + 3) = 3$
116. $\ln(x + 1) = 2 - \ln x$

INTERÉS COMPUESTO En los Ejercicios 117-120, se invierten $2500 en una cuenta a una tasa de interés r, capitalizado continuamente. Encuentre el tiempo necesario para que la cantidad (a) se duplique y (b) se triplique.

117. $r = 0.05$
118. $r = 0.045$
119. $r = 0.025$
120. $r = 0.0375$

En los Ejercicios 121-128, resuelva algebraicamente la ecuación. Redondee el resultado a tres lugares decimales. Verifique su respuesta usando una calculadora de gráficas.

121. $2x^2e^{2x} + 2xe^{2x} = 0$
122. $-x^2e^{-x} + 2xe^{-x} = 0$
123. $-xe^{-x} + e^{-x} = 0$
124. $e^{-2x} - 2xe^{-2x} = 0$
125. $2x\ln x + x = 0$
126. $\dfrac{1 - \ln x}{x^2} = 0$
127. $\dfrac{1 + \ln x}{2} = 0$
128. $2x\ln\left(\dfrac{1}{x}\right) - x = 0$

129. DEMANDA La ecuación de la demanda para un conjunto de monedas de edición limitada es

$$p = 1000\left(1 - \frac{5}{5 + e^{-0.001x}}\right).$$

Encuentre la demanda x para un precio de (a) $p = \$139.50$ y (b) $p = \$99.99$.

130. DEMANDA La ecuación de la demanda para un organizador electrónico portátil es

$$p = 5000\left(1 - \frac{4}{4 + e^{-0.002x}}\right).$$

Encuentre la demanda x para un precio de (a) $p = \$600$ and (b) $p = \$400$.

131. PRODUCCIÓN DE BOSQUES La producción V (en millones de pies cúbicos por acre) de un bosque de edad t años está dada por $V = 6.7e^{-48.1/t}$.

(a) Use una calculadora de gráficas para graficar la función.

(b) Determine la asíntota horizontal de la función. Interprete su significado en el contexto del problema.

(c) Encuentre el tiempo necesario para obtener una producción de 1.3 millones de pies cúbicos.

132. ÁRBOLES POR ACRE El número N de árboles de una especie dada, por acre, está aproximado por el modelo $N = 68(10^{-0.04x})$, $5 \le x \le 40$, donde x es el diámetro promedio de los árboles (en pulgadas) a 3 pies arriba del suelo. Use el modelo para aproximar el diámetro promedio de los árboles en una gráfica de prueba cuando $N = 21$.

133. MONEDA DE ESTADOS UNIDOS Los valores y (en miles de millones de dólares) de moneda de Estados Unidos en circulación, en los años 2000 a 2007, puede modelarse con $y = -451 + 444 \ln t$, $10 \le t \le 17$, donde t representa el año, con $t = 10$ correspondiente a 2000. ¿Durante qué año el valor de la moneda de Estados Unidos en circulación pasó de \$690 mil millones? (Fuente: Board of Governors of the Federal Reserve System)

134. MEDICINA Los números y de centros independientes de cirugía de atención ambulante en cierto país, de 2000 a 2007, puede modelarse con

$$y = 2875 + \frac{2635.11}{1 + 14.215e^{-0.8038t}}, \quad 0 \le t \le 7$$

donde t representa el año, con $t = 0$ correspondiente a 2000. (Fuente: Verispan)

(a) Use una calculadora de gráficas para graficar el modelo.

(b) Use el comando *trace* de la calculadora para estimar el año en el que el número de centros de cirugía pasó de 3600.

135. ESTATURAS PROMEDIO El porcentaje m de norteamericanos, hombres de entre 18 y 24 años de edad, que no miden más de x pulgadas de estatura, está dado por

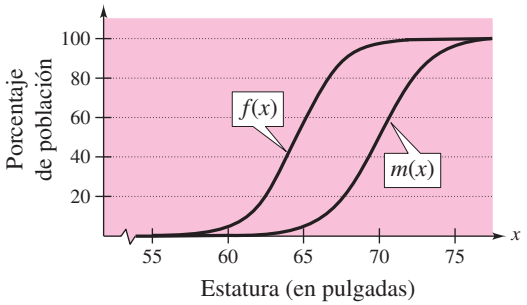
$$m(x) = \frac{100}{1 + e^{-0.6114(x - 69.71)}}$$

y el porcentaje f de mujeres norteamericanas, entre 18 y 24 años de edad que no miden más de x pulgadas de estatura, está modelado por

$$f(x) = \frac{100}{1 + e^{-0.66607(x - 64.51)}}.$$

(Fuente: U.S. National Center for Health Statistics)

(a) Use la gráfica para determinar cualesquiera asíntotas horizontales de las gráficas de las funciones. Interprete su significado en el contexto del problema.



(b) ¿Cuál es la estatura promedio de cada sexo?

136. CURVA DE APRENDIZAJE En un proyecto de grupo en teoría del aprendizaje, se encontró que un modelo matemático para la proporción P de respuestas correctas después de n intentos es $P = 0.83/(1 + e^{-0.2n})$.

(a) Use una calculadora de gráficas para graficar la función.

(b) Use la gráfica para determinar cualesquiera asíntotas horizontales de la gráfica de la función. Interprete el significado de la asíntota superior en el contexto de este problema.

(c) ¿Después de cuántos intentos será correcto 60% de las respuestas?

137. AUTOMÓVILES Los automóviles están diseñados con zonas que se comprimen ayudando a proteger a sus ocupantes en choques. Las zonas que se comprimen permiten que los ocupantes se muevan distancias cortas cuando los automóviles se detienen de manera repentina. Cuanto mayor es la distancia que se muevan, menos factores g experimentarán las víctimas de un choque. (Una g es igual a la aceleración debida a la atracción de la gravedad. En tiempos muy cortos, los seres humanos han resistido 40 g.) En pruebas de choques con vehículos que se mueven a 90 km/h, unos analistas midieron los números de las g experimentadas durante la desaceleración por maniquíes a los que se les permitió moverse x metros durante el impacto. Los datos se muestran en la tabla. Un modelo para los datos está dado por $y = -3.00 + 11.88 \ln x + (36.94/x)$, donde y es el número de las g.

x	g
0.2	158
0.4	80
0.6	53
0.8	40
1.0	32

(a) Complete la tabla usando el modelo.

x	0.2	0.4	0.6	0.8	1.0
y					

(b) Use una calculadora de gráficas para graficar los puntos de datos y el modelo en la misma pantalla. ¿Cómo se comparan?

(c) Use el modelo para estimar la distancia recorrida durante un impacto, si la desaceleración del pasajero no debe pasar de 30 g.

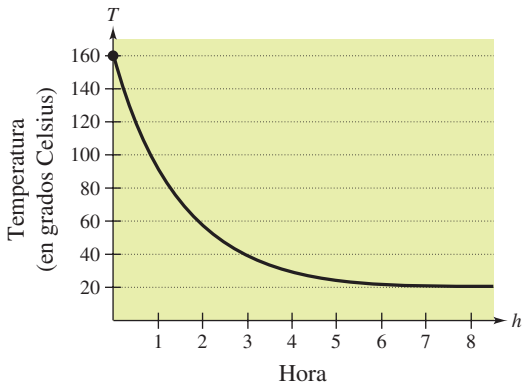
(d) ¿Piensa usted que es práctico bajar el número de las g, experimentadas durante impactos, a menos de 23? Explique su razonamiento.

138. ANÁLISIS DE DATOS Un objeto a una temperatura de 160° C se saca de un horno y se coloca en un cuarto a 20° C. La temperatura T del objeto se midió cada hora h y se registró en la tabla. Un modelo para los datos está dado por $T = 20[1 + 7(2^{-h})]$. La gráfica de este modelo se muestra en la figura.

Hora, h	Temperatura, T
0	160°
1	90°
2	56°
3	38°
4	29°
5	24°

(a) Use la gráfica para identificar la asíntota horizontal del modelo e interprete su significado en el contexto del problema.

(b) Use el modelo para aproximar el tiempo cuando la temperatura del objeto era de100° C.



EXPLORACIÓN

¿VERDADERO O FALSO? En los Ejercicios 139-142, reescriba cada enunciado verbal como ecuación. A continuación determine si la proposición es verdadera o falsa. Justifique su respuesta.

139. El logaritmo del producto de dos números es igual a la suma de los logaritmos de los números.

140. El logaritmo de la suma de dos números es igual al producto de los logaritmos de los números.

141. El logaritmo de la diferencia de dos números es igual a la diferencia de los logaritmos de los números.

142. El logaritmo del cociente entre dos números es igual a la diferencia de los logaritmos de los números.

143. PIÉNSELO ¿Es posible que una ecuación logarítmica tenga más de una solución extraña? Explique.

144. FINANZAS Una persona invierte P dólares a una tasa de interés anual de r, capitalizado continuamente, durante t años. ¿Qué de lo siguiente resultaría en el valor más alto de la inversión? Explique su razonamiento.

(a) Duplicar la cantidad invertida.

(b) Duplicar la tasa de interés.

(c) Duplicar el número de años.

145. PIÉNSELO ¿Es necesario que los tiempo requeridos para las inversiones de los Ejercicios 117-120 se cuadrupliquen dos veces, mientras que los tiempos para ellas se duplican? Dé una razón para su respuesta y verifíquela algebraicamente.

146. El *rendimiento efectivo* de un plan de ahorros es el porcentaje de aumento en el saldo después de 1 año. Encuentre el rendimiento efectivo para cada plan de ahorros, cuando se depositan $1000 en una cuenta de ahorros. ¿Cuál plan de ahorros tiene el máximo rendimiento efectivo? ¿Cuál plan de ahorros dará el saldo más alto después de 5 años?

(a) 7% de tasa de interés anual, capitalizado anualmente

(b) 7% de tasa de interés anual, capitalizado continuamente

(c) 7% de tasa de interés anual, capitalizado trimestralmente

(d) 7.25% de tasa de interés anual, capitalizado trimestralmente

147. ANÁLISIS GRÁFICO Sea $f(x) = \log_a x$ y $g(x) = a^x$, donde $a > 1$.

(a) Sea $a = 1.2$ y use una calculadora de gráficas para graficar las dos funciones en la misma pantalla. ¿Qué observa? Aproxime cualesquier puntos de intersección de las dos gráficas.

(b) Determine el valor (o valores) de a para el cual las dos gráficas tienen un punto de intersección.

(c) Determine el valor (o valores) de a para el cual las dos gráficas tienen dos puntos de intersección.

148. TOQUE FINAL Escriba dos o tres oraciones que expresen las guías generales que usted sigue cuando resuelve (a) ecuaciones exponenciales y (b) ecuaciones logarítmicas.

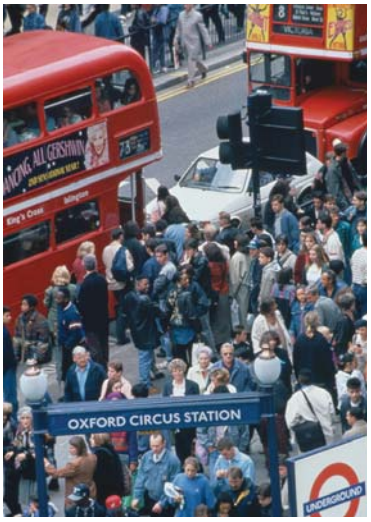
3.5 Modelos exponenciales y logarítmicos

Lo que debe aprender

- Reconocer los cinco tipos más comunes de modelos que contienen funciones exponenciales y logarítmicas.
- Usar funciones exponenciales de crecimiento y desintegración para modelar y resolver problemas de la vida real.
- Usar funciones de Gauss para modelar y resolver problemas de la vida real.
- Usar funciones logísticas de crecimiento para modelar y resolver problemas de la vida real.
- Usar funciones logarítmicas para modelar y resolver problemas de la vida real.

Por qué debe aprenderlo

Con frecuencia se usan modelos exponenciales de crecimiento y desintegración para modelar las poblaciones de países. Por ejemplo, en el Ejercicio 44 de la página 263 usaremos modelos de crecimiento y desintegración exponenciales para comparar las poblaciones de varios países.



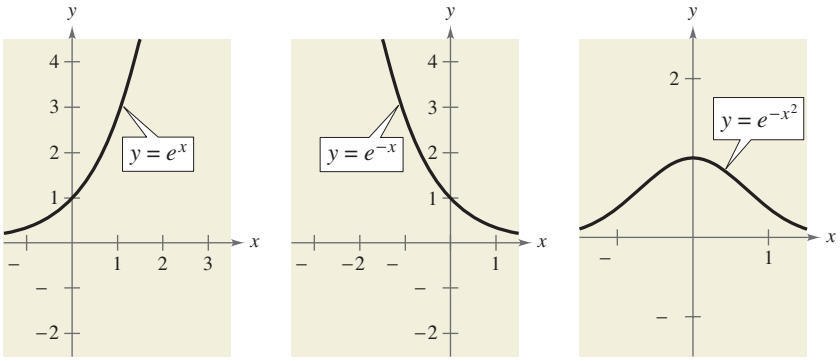
Alan Becker/Stone/Getty Images

Introducción

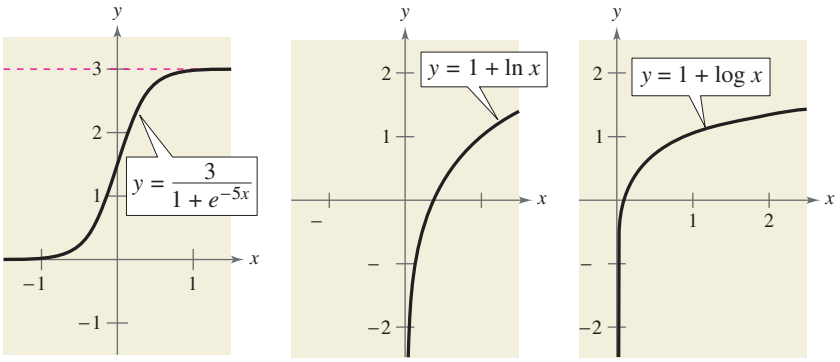
Los cinco tipos más comunes de modelos matemáticos que contienen funciones exponenciales y logarítmicas son como sigue:

1. **Modelo de crecimiento exponencial:** $y = ae^{bx}, \quad b > 0$
2. **Modelo de desintegración exponencial:** $y = ae^{-bx}, \quad b > 0$
3. **Modelo de Gauss:** $y = ae^{-(x-b)^2/c}$
4. **Modelo de crecimiento logístico:** $y = \dfrac{a}{1 + be^{-rx}}$
5. **Modelos logarítmicos:** $y = a + b \ln x, \quad y = a + b \log x$

Las formas básicas de las gráficas de estas funciones se muestran en la Figura 3.33.



Modelo de crecimiento exponencial | Modelo de desintegración exponencial | Modelo de Gauss



Modelo logístico de crecimiento | Modelo logarítmico natural | Modelo logarítmico común

FIGURA 3.33

Con frecuencia se pueden adquirir conocimientos de una situación modelada por una función exponencial o logarítmica si se identifican e interpretan las asíntotas de la función. Use las gráficas de la Figura 3.33 para identificar las asíntotas de la gráfica de cada función.

Crecimiento y desintegración exponenciales

Ejemplo 1 Publicidad en línea

Las estimaciones de las cantidades (en miles de millones de dólares) de gastos de publicidad en línea en cierto país, de 2007 a 2011, se muestran en la tabla siguiente. Una gráfica de dispersión de los datos se muestra en la Figura 3.34. (Fuente: eMarketer)

Año	Gasto en publicidad
2007	21.1
2008	23.6
2009	25.7
2010	28.5
2011	32.0

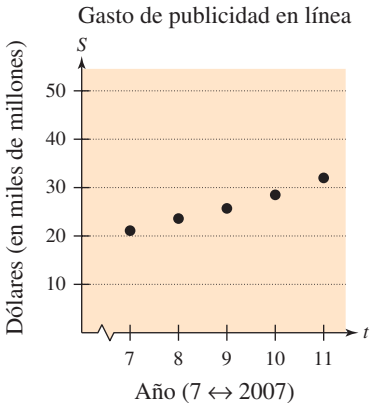


FIGURA 3.34

Un modelo de crecimiento exponencial que aproxima estos datos está dado por $S = 10.33e^{0.1022t}$, $7 \le t \le 11$, donde S es la cantidad de gasto (en miles de millones) y $t = 7$ representa 2007. Compare los valores dados por el modelo con las estimaciones que se muestran en la tabla. De acuerdo con este modelo, ¿cuándo llegará a \$40 mil millones la cantidad de gasto en publicidad en línea en este país?

Solución algebraica

La tabla siguiente compara los dos conjuntos de cifras de gasto en publicidad.

Año	2007	2008	2009	2010	2011
Gasto en publicidad	21.1	23.6	25.7	28.5	32.0
Modelo	21.1	23.4	25.9	28.7	31.8

Para hallar el año en que la cantidad de gasto en publicidad en línea en el país llegará a \$40 mil millones, sea $S = 40$ en el modelo y despeje t.

$10.33e^{0.1022t} = S$ Escribir el modelo original.

$10.33e^{0.1022t} = 40$ Sustituir 40 por S.

$e^{0.1022t} \approx 3.8722$ Dividir cada lado entre 10.33.

$\ln e^{0.1022t} \approx \ln 3.8722$ Obtener el logaritmo natural de cada lado.

$0.1022t \approx 1.3538$ Propiedad inversa.

$t \approx 13.2$ Dividir cada lado entre 0.1022.

De acuerdo con el modelo, la cantidad de gasto en publicidad en línea en el país llegará a \$40 mil millones en 2013.

PUNTO *de repaso* Ahora trate de hacer el Ejercicio 43.

Solución gráfica

Use una calculadora de gráficas para graficar el modelo $y = 10.33e^{0.1022x}$ y los datos en la misma pantalla. Se puede ver en la Figura 3.35 que el modelo parece ajustarse cercanamente a los datos.

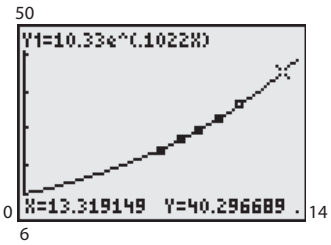


FIGURA 3.35

Use los comandos *zoom* y *trace* de la calculadora de gráficas para hallar el valor aproximado de x para $y = 40$ y $x \approx 13.2$. En consecuencia, según el modelo, la cantidad de gasto en publicidad en línea en el país llegará a \$40 mil millones en 2013.

TECNOLOGÍA

Algunas calculadoras de gráficas tienen un comando de *regresión exponencial* que se puede usar para hallar modelos exponenciales que representan datos. Si el lector tiene acceso a una de estas calculadoras, trate de usarla para hallar un modelo exponencial para los datos dados en el Ejemplo 1. ¿Cómo se compara su modelo con el del Ejemplo 1?

En el Ejemplo 1 nos dieron el modelo de crecimiento exponencial. Pero supongamos que no nos den este modelo; ¿cómo haríamos para hallarlo? En el Ejemplo 2 está demostrada una técnica para ello.

Ejemplo 2 Modelar el crecimiento poblacional

En un experimento de investigación, una población de moscas de la fruta está creciendo de acuerdo con la ley de crecimiento exponencial. Después de 2 días hay 100 moscas, y después de 4 días hay 300 moscas. ¿Cuántas moscas habrá después de 5 días?

Solución

Sea y el número de moscas en el tiempo t. De la información dada, sabemos que $y = 100$ cuando $t = 2$ y $y = 300$ cuando $t = 4$. La sustitución de esta información en el modelo $y = ae^{bt}$ dará:

$$100 = ae^{2b} \quad \text{y} \quad 300 = ae^{4b}.$$

Para despejar b, resolvamos para a en la primera ecuación.

$$100 = ae^{2b} \Rightarrow a = \frac{100}{e^{2b}}$$ Despejar a de la primera ecuación.

A continuación sustituya el resultado en la segunda ecuación.

$$300 = ae^{4b}$$ Escribir la segunda ecuación.

$$300 = \left(\frac{100}{e^{2b}}\right)e^{4b}$$ Sustituir $\frac{100}{e^{2b}}$ por a.

$$\frac{300}{100} = e^{2b}$$ Dividir cada lado entre 100.

$$\ln 3 = 2b$$ Obtener el logaritmo natural de cada lado.

$$\frac{1}{2}\ln 3 = b$$ Despejar b.

Usando $b = \frac{1}{2}\ln 3$ y la ecuación encontrada para a, se puede determinar que

$$a = \frac{100}{e^{2[(1/2)\ln 3]}}$$ Sustituir $\frac{1}{2}\ln 3$ por b.

$$= \frac{100}{e^{\ln 3}}$$ Simplificar.

$$= \frac{100}{3}$$ Propiedad inversa.

$$\approx 33.33.$$ Simplificar.

En consecuencia, con $a \approx 33.33$ y $b = \frac{1}{2}\ln 3 \approx 0.5493$, el modelo de crecimiento exponencial es $y = 33.33e^{0.5493t}$, como se muestra en la Figura 3.36. Esto implica que, después de 5 días, la población será $y = 33.33e^{0.5493(5)} \approx 520$ moscas.

PUNTO *de repaso* Ahora trate de hacer el Ejercicio 49.

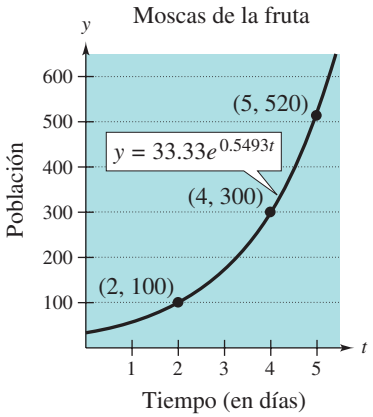


FIGURA 3.36

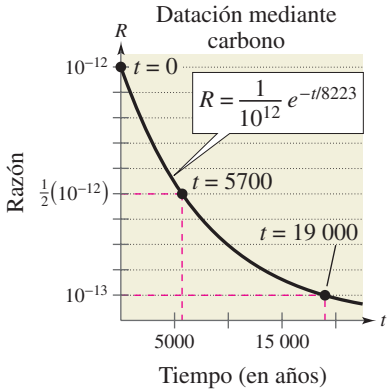


FIGURA 3.37

En material orgánico vivo, la razón entre el número de isótopos de carbono radiactivo (carbono 14) y el número de isótopos de carbono no radiactivo (carbono 12) es alrededor de 1 a 10^{12}. Cuando muere un material orgánico, su contenido de carbono 12 permanece fijo, en tanto que su carbono radiactivo 14 empieza a desintegrarse con una vida media de aproximadamente 5700 años. Para estimar la edad de material orgánico muerto, los científicos usan la siguiente fórmula, que denota la razón entre carbono 14 y carbono 12 presentes en cualquier tiempo t (en años).

$$R = \frac{1}{10^{12}} e^{-t/8223} \qquad \text{Modelo de datación de carbono}$$

La gráfica de R se muestra en la Figura 3.37. Observe que R disminuye cuando t aumenta.

Ejemplo 3 Datar mediante carbono

Estime la edad de un fósil recién descubierto en el que la razón entre carbono 14 y carbono 12 es

$$R = 1/10^{13}.$$

Solución algebraica

En el modelo de datación mediante carbono, sustituya el valor dado de R para obtener lo siguiente.

$$\frac{1}{10^{12}} e^{-t/8223} = R \qquad \text{Escribir el modelo original.}$$

$$\frac{e^{-t/8223}}{10^{12}} = \frac{1}{10^{13}} \qquad \text{Sea } R = \frac{1}{10^{13}}.$$

$$e^{-t/8223} = \frac{1}{10} \qquad \text{Multiplicar cada lado por } 10^{12}.$$

$$\ln e^{-t/8223} = \ln \frac{1}{10} \qquad \text{Obtener el logaritmo natural de cada lado.}$$

$$-\frac{t}{8223} \approx -2.3026 \qquad \text{Propiedad inversa.}$$

$$t \approx 18\,934 \qquad \text{Multiplicar cada lado por } -8223.$$

En consecuencia, a los mil años más cercanos, la edad del fósil es de unos 19 000 años.

Solución gráfica

Use una calculadora de gráficas para graficar la fórmula para la razón entre carbono 14 y carbono 12 en cualquier tiempo t como

$$y_1 = \frac{1}{10^{12}} e^{-x/8223}.$$

En la misma pantalla, grafique $y_2 = 1/(10^{13})$. Use el comando *intersect* o los comandos *zoom* y *trace* de la calculadora de gráficas para estimar que $x \approx 18\,934$ cuando $y = 1/(10^{13})$, como se ve en la Figura 3.38.

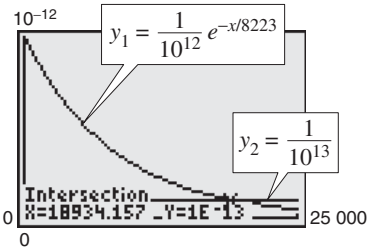


FIGURA 3.38

Por tanto, a los mil años más cercanos, la edad del fósil es alrededor de 19 000 años.

PUNTO *de repaso* Ahora trate de hacer el Ejercicio 51.

El valor de b en el modelo de desintegración exponencial $y = ae^{-bt}$ determina la *desintegración* de isótopos radiactivos. Por ejemplo, para hallar cuánto de 10 gramos iniciales del isótopo ^{226}Ra con vida media de 1599 años quedará después de 500 años, sustituya esta información en el modelo $y = ae^{-bt}$.

$$\frac{1}{2}(10) = 10e^{-b(1599)} \quad \Rightarrow \quad \ln\frac{1}{2} = -1599b \quad \Rightarrow \quad b = -\frac{\ln\frac{1}{2}}{1599}$$

Usando el valor de b hallado líneas antes y $a = 10$, la cantidad restante es

$$y = 10e^{-[-\ln(1/2)/1599](500)} \approx 8.05 \text{ gramos.}$$

Modelos de Gauss

Como se mencionó al principio de esta sección, los modelos de Gauss son de la forma

$$y = ae^{-(x-b)^2/c}.$$

Este tipo de modelo se usa por lo general en probabilidad y estadística para representar poblaciones que están **normalmente distribuidas**. La gráfica de un modelo de Gauss se denomina **curva de campana**. Trate de graficar la distribución normal con una calculadora de gráficas. ¿Puede ver por qué se llama así?

Para distribuciones normales *estándar*, el modelo toma la forma

$$y = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}e^{-x^2/2}.$$

El **valor promedio** de una población se puede hallar a partir de la curva de campana al observar el lugar donde se presenta el máximo valor de y de la función. El valor de x correspondiente al máximo valor de y de la función representa el valor promedio de la variable independiente, en este caso x.

Ejemplo 4 Calificaciones del SAT

En 2008, las calificaciones de matemáticas en el examen de aptitud escolar (SAT) para estudiantes de tercer año de preparatoria siguieron aproximadamente la distribución normal dada por

$$y = 0.0034e^{-(x-515)^2/26\,912}, \quad 200 \le x \le 800$$

donde x es la calificación del SAT para matemáticas. Trace la gráfica de esta función. De la gráfica, estime la calificación promedio del SAT. (Fuente: College Board)

Solución

La gráfica de la función se muestra en la Figura 3.39. En esta curva de campana, el valor máximo de la curva representa el promedio de calificación. De la gráfica, se puede estimar que el promedio de calificación de matemáticas para estudiantes de tercer año de preparatoria en 2008 fue 515.

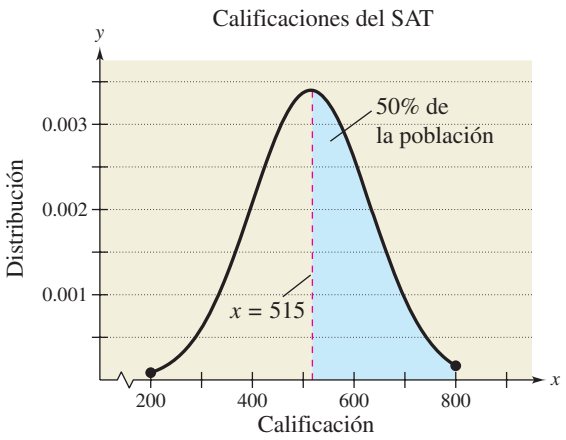


FIGURA 3.39

PUNTO *de repaso* Ahora trate de hacer el Ejercicio 57. ■

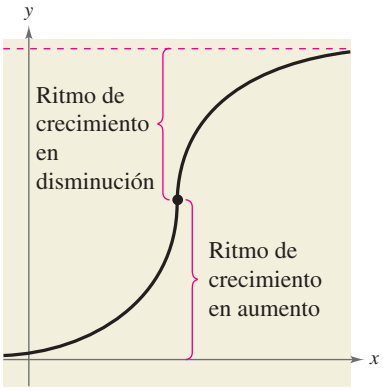


FIGURA 3.40

Modelos de crecimiento logístico

Algunas poblaciones inicialmente tienen crecimiento rápido, seguido por un ritmo de crecimiento a la baja, como se indica en la gráfica de la Figura 3.40. Un modelo para describir este tipo de patrón de crecimiento es la **curva logística** dada por la función

$$y = \frac{a}{1 + be^{-rx}}$$

donde y es el tamaño de la población y x es el tiempo. Un ejemplo es un cultivo de bacterias al que inicialmente se le permite crecer bajo condiciones ideales y, a continuación, bajo condiciones menos favorables que inhiben el crecimiento. Una curva de crecimiento logístico recibe el nombre de **curva sigmoidal.**

Ejemplo 5 Propagación de un virus

En un plantel universitario de 5000 estudiantes, uno de ellos regresa de vacaciones con un virus de gripe contagioso y de larga duración. La propagación del virus está modelada por

$$y = \frac{5000}{1 + 4999e^{-0.8t}}, \quad t \geq 0$$

donde y es el número total de estudiantes infectados después de t años. El colegio cancelará clases cuando 40% o más de los estudiantes estén infectados.

a. ¿Cuántos estudiantes estarán infectados después de 5 días?

b. ¿Después de cuántos días cancelará clases la universidad?

Solución algebraica

a. Después de 5 días, el número de estudiantes infectados es

$$y = \frac{5000}{1 + 4999e^{-0.8(5)}} = \frac{5000}{1 + 4999e^{-4}} \approx 54.$$

b. Las clases se cancelan cuando el número de estudiantes infectados es $(0.40)(5000) = 2000$.

$$2000 = \frac{5000}{1 + 4999e^{-0.8t}}$$

$$1 + 4999e^{-0.8t} = 2.5$$

$$e^{-0.8t} = \frac{1.5}{4999}$$

$$\ln e^{-0.8t} = \ln \frac{1.5}{4999}$$

$$-0.8t = \ln \frac{1.5}{4999}$$

$$t = -\frac{1}{0.8} \ln \frac{1.5}{4999}$$

$$t \approx 10.1$$

Por tanto, después de unos 10 días, al menos 40% de los estudiantes estarán infectados y la universidad cancelará clases.

PUNTO *de repaso* Ahora trate de hacer el Ejercicio 59.

Solución gráfica

a. Use una calculadora de gráficas para graficar $y = \frac{5000}{1 + 4999e^{-0.8x}}$. Use el comando *value* o los comandos *zoom* y *trace* de la calculadora para estimar que $y \approx 54$ cuando $x = 5$. Por tanto, después de 5 días, unos 54 estudiantes estarán infectados.

b. Las clases se cancelan cuando el número de estudiantes infectados es $(0.40)(5000) = 2000$. Use una calculadora de gráficas para graficar

$$y_1 = \frac{5000}{1 + 4999e^{-0.8x}} \text{ y } y_2 = 2000$$

en la misma pantalla. Use el comando *intersect* o los comandos *zoom* y *trace* de la calculadora para hallar el punto de intersección de las gráficas. En la Figura 3.41 se puede ver que el punto de intersección ocurre cuando $x \approx 10.1$. En consecuencia, después de unos 10 días, al menos 40% de los estudiantes estarán infectados y la universidad cancelará clases.

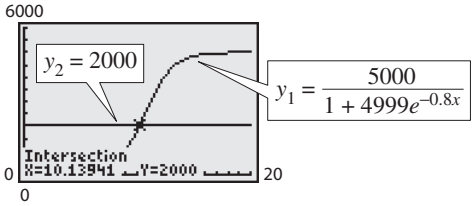


FIGURA 3.41

Claro Cortes IV/Reuters /Landov

El 12 de mayo de 2008, un terremoto de magnitud 7.9 afectó la provincia de Sichuan Oriental, China. El total de pérdidas económicas se calculó en 86 mil millones de dólares.

Modelos logarítmicos

Ejemplo 6 Magnitudes de terremotos

En la escala Richter, la magnitud R de un terremoto de intensidad I está dada por

$$R = \log \frac{I}{I_0}$$

donde $I_0 = 1$ es la mínima intensidad empleada para comparaciones. Encuentre la intensidad de cada terremoto. (La intensidad es una medida de la energía de las ondas de un terremoto.)

a. Nevada en 2008: $R = 6.0$

b. Sichuan Oriental, China en 2008: $R = 7.9$

Solución

a. Como $I_0 = 1$ y $R = 6.0$, tenemos

$$6.0 = \log \frac{I}{1}$$ Sustituir 1 por I_0 y 6.0 por R.

$$10^{6.0} = 10^{\log I}$$ Elevar a exponentes cada lado.

$$I = 10^{6.0} = 1\,000\,000.$$ Propiedad inversa

b. Para $R = 7.9$, tenemos

$$7.9 = \log \frac{I}{1}$$ Sustituir 1 por I_0 y 7.9 por R.

$$10^{7.9} = 10^{\log I}$$ Elevar a exponentes cada lado.

$$I = 10^{7.9} \approx 79\,400\,000.$$ Propiedad inversa

Observe que un incremento de 1.9 unidades en la escala Richter (de 6.0 a 7.9) representa un aumento de la intensidad equivalente a un factor de

$$\frac{79\,400\,000}{1\,000\,000} = 79.4.$$

En otras palabras, la intensidad del terremoto de Sichuan Oriental fue unas 79 veces mayor que la del terremoto de Nevada.

PUNTO *de repaso* Ahora trate de hacer el Ejercicio 63.

t	Año	Población, P
1	1910	92.23
2	1920	106.02
3	1930	123.20
4	1940	132.16
5	1950	151.33
6	1960	179.32
7	1970	203.30
8	1980	226.54
9	1990	248.72
10	2000	281.42

Discusión en clase

Comparación de modelos de población Las poblaciones P (en millones) de Estados Unidos para los años de censo de 1910 a 2000 se muestran en la tabla de la izquierda. El análisis de regresión de mínimos cuadrados da el mejor modelo cuadrático para estos datos como $P = 1.0328t^2 + 9.607t + 81.82$, y el mejor modelo exponencial para estos datos es $P = 82.677e^{0.124t}$. ¿Cuál modelo se ajusta mejor a los datos? Describa cómo llegó a esa conclusión. (Fuente: U.S. Census Bureau)

3.5 EJERCICIOS

En www.CalcChat.com vea las soluciones a los ejercicios impares.

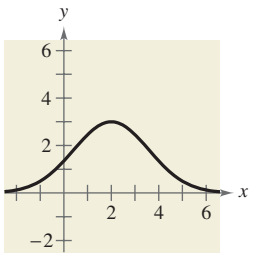
VOCABULARIO: Llene los espacios en blanco.

1. Un modelo de crecimiento exponencial tiene la forma _____ y un modelo de desintegración exponencial tiene la forma _____.
2. Un modelo logarítmico tiene la forma _____ o _____.
3. Los modelos de Gauss por lo general se usan en probabilidad y estadística para representar poblaciones que están _____ _____.
4. La gráfica de un modelo de Gauss tiene forma de _____, donde el _____ _____ es el valor máximo de y de la gráfica.
5. Un modelo de crecimiento logístico tiene la forma _____.
6. Una curva logística también se denomina curva _____.

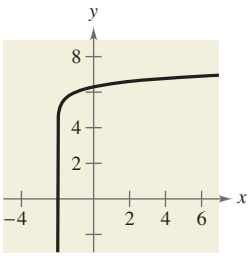
HABILIDADES Y APLICACIONES

En los Ejercicios 7-12, relacione la función con su gráfica. [Las gráficas están marcadas (a),(b),(c),(d),(e) y (f).]

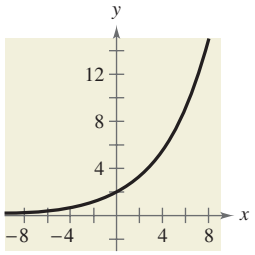
(a)



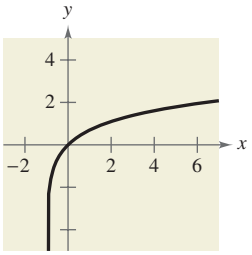
(b)



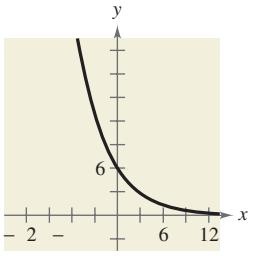
(c)



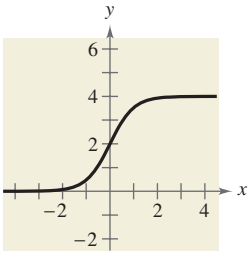
(d)



(e)



(f)



7. $y = 2e^{x/4}$
8. $y = 6e^{-x/4}$
9. $y = 6 + \log(x + 2)$
10. $y = 3e^{-(x-2)^2/5}$
11. $y = \ln(x + 1)$
12. $y = \dfrac{4}{1 + e^{-2x}}$

En los Ejercicios 13 y 14, (a) despeje P y (b) despeje t.

13. $A = Pe^{rt}$
14. $A = P\left(1 + \dfrac{r}{n}\right)^{nt}$

INTERÉS COMPUESTO En los Ejercicios 15-22, complete la tabla para una cuenta de ahorros en la que el interés se capitaliza continuamente.

	Inversión inicial	*% de tasa anual*	*Tiempo para duplicarse*	*Cantidad tras 10 años*
15.	\$1000	3.5%		
16.	\$750	$10\frac{1}{2}$%		
17.	\$750		$7\frac{3}{4}$ años	
18.	\$10 000		12 años	
19.	\$500			\$1505.00
20.	\$600			\$19 205.00
21.		4.5%		\$10 000.00
22.		2%		\$2000.00

INTERÉS COMPUESTO En los Ejercicios 23 y 24, determine el capital P que debe invertirse a una tasa r, capitalizado mensualmente, para que haya \$500 000 para el retiro en t años.

23. $r = 5\%, t = 10$
24. $r = 3\frac{1}{2}\%, t = 15$

INTERÉS COMPUESTO En los Ejercicios 25 y 26, determine el tiempo necesario para que \$1000 se dupliquen si se invierten a una tasa de interés r capitalizados (a) anualmente, (b) mensualmente, (c) diariamente y (d) continuamente.

25. $r = 10\%$
26. $r = 6.5\%$

27. **INTERÉS COMPUESTO** Complete la tabla para el tiempo t (en años) necesario para que P dólares se tripliquen, si el interés se capitaliza continuamente a una tasa r.

r	2%	4%	6%	8%	10%	12%
t						

28. **MODELAR DATOS** Trace una gráfica de dispersión de los datos del Ejercicio 27. Use la función *regression* de una calculadora de gráficas para hallar un modelo para los datos.

29. INTERÉS COMPUESTO Complete la tabla para el tiempo t (en años) necesario para que P dólares se tripliquen, si el interés se capitaliza anualmente a una tasa r.

r	2%	4%	6%	8%	10%	12%
t						

30. MODELAR DATOS Trace una gráfica de dispersión de los datos del Ejercicio 29. Use el comando *regression* de una calculadora de gráficas para hallar un modelo para los datos.

31. COMPARACIÓN DE MODELOS Si \$1 se invierte en una cuenta durante 10 años, la cantidad en la cuenta, donde t representa el tiempo en años, está dada por $A = 1 + 0.075[\![t]\!]$ o $A = e^{0.07t}$, según la cuenta pague interés simple a $7\frac{1}{2}\%$ o interés compuesto continuo a 7%. Grafique cada una de las funciones en el mismo conjunto de ejes. ¿Cuál crece a un ritmo más alto? (Recuerde que $[\![t]\!]$ es la función mayor entera estudiada en la Sección 1.6.)

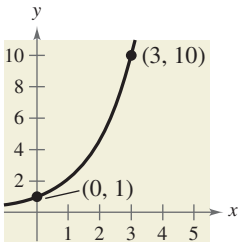
32. COMPARACIÓN DE MODELOS Si \$1 se invierte en una cuenta durante 10 años, la cantidad en la cuenta, donde t representa el tiempo en años, está dada por $A = 1 + 0.06[\![t]\!]$ o $A = [1 + (0.055/365)]^{[\![365t]\!]}$, según la cuenta pague interés simple a 6% o interés compuesto a $5\frac{1}{2}\%$ capitalizado diariamente. Use una calculadora de gráficas para graficar cada función en la misma pantalla. ¿Cuál crece a un ritmo más alto?

DESINTEGRACIÓN RADIACTIVA En los Ejercicios 33-38, complete la tabla para el isótopo radiactivo.

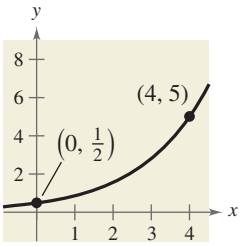
	Isótopo	*Vida media (años)*	*Cantidad inicial*	*Cantidad después de 1000 años*
33.	^{226}Ra	1599	10 g	
34.	^{14}C	5715	6.5 g	
35.	^{239}Pu	24 100	2.1g	
36.	^{226}Ra	1599		2 g
37.	^{14}C	5715		2 g
38.	^{239}Pu	24 100		0.4 g

En los Ejercicios 39-42, encuentre el modelo exponencial $y = ae^{bx}$ que se ajuste a los puntos mostrados en la gráfica o tabla.

39.



40.



41.

x	0	4
y	5	1

42.

x	0	3
y	1	$\frac{1}{4}$

43. POBLACIÓN La población P (en miles) del condado de Horry, Carolina del Sur, de 1970 a 2007, se puede modelar con

$$P = -18.5 + 92.2e^{0.0282t}$$

donde t representa el año, con $t = 0$ correspondiente a 1970. (Fuente: U.S. Census Bureau)

(a) Use el modelo para completar la tabla.

Año	1970	1980	1990	2000	2007
Población					

(b) De acuerdo con el modelo, ¿cuándo llegará a 300 000 la población del condado de Horry?

(c) ¿Piensa usted que el modelo es válido para predicciones de largo plazo de la población? Explique.

44. POBLACIÓN La tabla muestra las poblaciones (en millones) de cinco países en 2000 y las poblaciones proyectadas (en millones) para el año 2015. (Fuente: U.S. Census Bureau)

País	2000	2015
Bulgaria	7.8	6.9
Canadá	31.1	35.1
China	1268.9	1393.4
Reino Unido	59.5	62.2
Estados Unidos	282.2	325.5

(a) Encuentre el modelo de crecimiento o decaimiento exponenciales, $y = ae^{bt}$ o $y = ae^{-bt}$, para la población de cada país al hacer que $t = 0$ corresponda a 2000. Use el modelo para predecir la población de cada país en 2030.

(b) Se puede ver que las poblaciones de Estados Unidos y el Reino Unido están creciendo a tasas diferentes. ¿Cuál constante de la ecuación $y = ae^{bt}$ está determinada por estas tasas diferentes de crecimiento? Discuta la relación entre las tasas diferentes de crecimiento y la magnitud de la constante.

(c) Se puede ver que la población de China es creciente mientras que la de Bulgaria es decreciente. ¿Cuál constante en la ecuación $y = ae^{bt}$ refleja esta diferencia? Explique.

45. CRECIMIENTO DE SITIOS WEB El número y de visitas que cada mes recibe un nuevo sitio web de búsqueda puede modelarse con $y = 4080e^{kt}$, donde t representa el número de meses en que el sitio ha estado en operación. En el tercer mes del sitio, hubo 10 000 visitas. Encuentre el valor de k y úselo para predecir el número de visitas que el sitio recibirá después de 24 meses.

46. VALOR DE UNA PINTURA El valor V (en millones de dólares) de una famosa pintura se puede modelar con $V = 10e^{kt}$, donde t representa el año, con $t = 0$ correspondiente a 2000. En 2008, la misma pintura fue vendida en \$65 millones. Encuentre el valor de k y úselo para predecir el valor de la pintura en 2014.

47. POBLACIÓN Las poblaciones P (en miles) de Reno, Nevada, de 2000 a 2007, se pueden modelar con $P = 346.8e^{kt}$, donde t representa el año, con $t = 0$ correspondiente a 2000. En 2005, la población de Reno era de unos 395 000 habitantes. (Fuente: U.S. Census Bureau)

(a) Encuentre el valor de k. ¿La población es creciente o decreciente? Explique.

(b) Use el modelo para hallar la población de Reno en 2010 y 2015. ¿Los resultados son razonables? Explique.

(c) De acuerdo con el modelo, ¿durante qué año llegará a 500 000 la población?

48. POBLACIÓN Las poblaciones P (en miles) de Orlando, Florida, de 2000 a 2007, se pueden modelar con $P = 1656.2e^{kt}$, donde t representa el año, con $t = 0$ correspondiente a 2000. En 2005, la población de Orlando era de unas 1 940 000 personas. (Fuente: U.S. Census Bureau)

(a) Encuentre el valor de k. ¿La población es creciente o decreciente? Explique.

(b) Use el modelo para hallar la población de Orlando en 2010 y 2015. ¿Los resultados son razonables? Explique.

(c) De acuerdo con el modelo, ¿durante qué año llegará a 2.2 millones la población?

49. CRECIMIENTO DE BACTERIAS El número de bacterias en un cultivo aumenta de acuerdo con la ley de crecimiento exponencial. Después de 3 horas, hay 100 bacterias y, después de 5 horas, hay 400 bacterias. ¿Cuántas habrá después de 6 horas?

50. CRECIMIENTO DE BACTERIAS El número de bacterias en un cultivo aumenta de acuerdo con la ley de crecimiento exponencial. La población inicial es de 250 bacterias, y la población después de 10 horas es el doble de la población después de 1 hora. ¿Cuántas habrá después de 6 horas?

51. DATACIÓN MEDIANTE CARBONO

(a) La razón entre carbono 14 y carbono 12 en una pieza de madera descubierta en una cueva es $R = 1/8^{14}$. Estime la edad de la pieza de madera.

(b) La razón entre carbono 14 y carbono 12 en un pedazo de papel enterrado en una tumba es $R = 1/13^{11}$. Estime la edad del pedazo de papel.

52. DESINTEGRACIÓN RADIACTIVA La datación mediante carbono 14 supone que el dióxido de carbono en la Tierra de hoy tiene el mismo contenido radiactivo que tenía hace siglos. Si esto es verdadero, la cantidad de ^{14}C absorbido por un árbol que creció hace varios siglos debe ser igual que la cantidad de ^{14}C absorbido por un árbol que crece actualmente. Un trozo de carbón antiguo contiene sólo 15% del carbono radiactivo que un trozo de carbón moderno. ¿Cuánto tiempo hace que se quemó el árbol para formar el carbón antiguo si la vida media del ^{14}C es de 5715 años?

53. DEPRECIACIÓN Una camioneta SUV que cuesta \$23 300 cuando es nueva tiene un valor en libros de sólo \$12 500 después de 2 años.

(a) Encuentre el modelo lineal $V = mt + b$.

(b) Encuentre el modelo exponencial $V = ae^{kt}$.

(c) Use una calculadora de gráficas para graficar los dos modelos en la misma pantalla. ¿Cuál modelo se deprecia con más rapidez en los primeros 2 años?

(d) Encuentre el valor en libros del vehículo después de 1 año y después de 3 años usando cada modelo.

(e) Explique las ventajas y desventajas de usar cada modelo para un comprador y un vendedor.

54. DEPRECIACIÓN Una computadora del tipo laptop que cuesta \$1150 cuando es nueva tiene un valor en libros de sólo \$550 después de dos años.

(a) Encuentre el modelo lineal $V = mt + b$.

(b) Encuentre el modelo exponencial $V = ae^{kt}$.

(c) Use una calculadora de gráficas para graficar los dos modelos en la misma pantalla. ¿Cuál modelo se deprecia con más rapidez en los primeros 2 años?

(d) Encuentre el valor en libros del vehículo después de 1 año y después de 3 años usando cada modelo.

(e) Explique las ventajas y desventajas de usar cada modelo para un comprador y un vendedor.

55. VENTAS Las ventas S (en miles de unidades) de un nuevo quemador (grabador) de discos compactos, después de que ha estado en el mercado durante t años, se modelan con $S(t) = 100(1 - e^{kt})$. Quince mil unidades del nuevo producto se vendieron el primer año.

(a) Complete el modelo despejando k.

(b) Trace la gráfica del modelo.

(c) Use el modelo para estimar el número de unidades vendidas después de 5 años.

56. CURVA DE APRENDIZAJE La administración de una fábrica de plásticos ha encontrado que el número máximo de unidades que un trabajador puede producir en un día es de 30. La curva de aprendizaje para el número N de unidades producidas por día, después que un nuevo empleado haya trabajado t días, está modelado por $N = 30(1 - e^{kt})$. Después de 20 días en el trabajo, un nuevo empleado produce 19 unidades.

(a) Encuentre la curva de aprendizaje para este empleado (primero, encuentre el valor de k).

(b) ¿Cuántos días deben transcurrir antes que este empleado produzca 25 unidades por día?

57. CALIFICACIONES DE COCIENTE DE INTELIGENCIA (IQ) Las calificaciones del IQ para una muestra de un grupo de estudiantes adultos que regresan a clases en un pequeño colegio del noreste siguen la distribución normal $y = 0.0266e^{-(x-100)^2/450}$, $70 \le x \le 115$, donde x es la calificación del IQ.

(a) Use una calculadora de gráficas para graficar la función.

(b) De la gráfica del inciso (a), estime el promedio de calificación del IQ de un estudiante adulto.

58. EDUCACIÓN El tiempo (en horas por semana) que un estudiante utiliza un centro de instrucción de matemáticas sigue aproximadamente la distribución normal $y = 0.7979e^{-(x-5.4)^2/0.5}$, $4 \le x \le 7$, donde x es el número de horas.

(a) Use una calculadora de gráficas para graficar la función.

(b) De la gráfica del inciso (a), estime el número promedio de horas por semana que un estudiante usa el centro de instrucción.

59. SITIOS CELULARES Un sitio celular es aquel donde se coloca equipo de comunicaciones en una red celular para el uso de teléfonos móviles. Los números y de sitios celulares de 1985 a 2008 puede modelarse con

$$y = \frac{237\,101}{1 + 1950e^{-0.355t}}$$

donde t representa el año, con $t = 5$ correspondiente a 1985. (Fuente: CTIA-The Wireless Association)

(a) Use el modelo para hallar los números de sitios celulares en los años 1985, 2000 y 2006.

(b) Use una calculadora de gráficas para graficar la función.

(c) Use la gráfica para determinar el año en el que el número de sitios celulares llegará a 235 000.

(d) Confirme algebraicamente su respuesta al inciso (c).

60. POBLACIÓN La población P (en miles) de Pittsburgh, Pennsylvania, de 2000 a 2007, puede modelarse con

$$P = \frac{2632}{1 + 0.083e^{0.0500t}}$$

donde t representa el año, con $t = 0$ correspondiente a 2000. (Fuente: U.S. Census Bureau)

(a) Use el modelo para hallar la población de Pittsburgh en los años 2000, 2005 y 2007.

(b) Use una calculadora de gráficas para graficar la función.

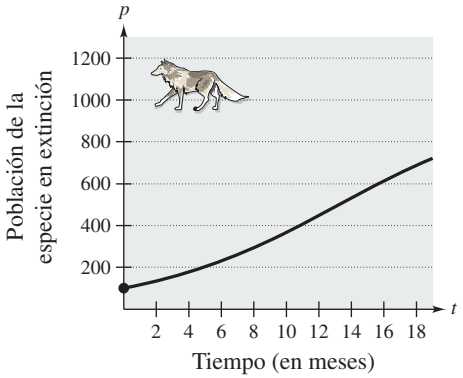
(c) Use la gráfica para determinar el año en que la población llegará a 2.2 millones.

(d) Confirme algebraicamente su respuesta al inciso (c).

61. CRECIMIENTO POBLACIONAL Una organización de conservación deja en libertad a 100 animales de una especie en peligro de extinción, en una reserva. La organización piensa que la reserva tiene capacidad de sostenimiento de 1000 animales y que el crecimiento de la manada estará modelado por la curva logística

$$p(t) = \frac{1000}{1 + 9e^{-0.1656t}}$$

donde t se mide en meses (vea figura).



(a) Estime la población después de 5 meses.

(b) ¿Después de cuántos meses la población será de 500?

(c) Use una calculadora de gráficas para graficar la función. Use la gráfica para determinar las asíntotas horizontales e interprete el significado de éstas en el contexto del problema.

62. VENTAS Después de descontinuar toda publicidad para un equipo de herramientas en 2004, el fabricante observó que las ventas empezaron a bajar de acuerdo con el modelo

$$S = \frac{500\,000}{1 + 0.4e^{kt}}$$

donde S representa el número de unidades vendidas y $t = 4$ representa 2004. En 2008, la compañía vendió 300 000 unidades.

(a) Complete el modelo al despejar k.

(b) Estime las ventas en 2012.

GEOLOGÍA En los Ejercicios 63 y 64, use la escala Richter

$$R = \log \frac{I}{I_0}$$

para medir las magnitudes de terremotos.

63. Encuentre la intensidad I de un terremoto midiendo R en la escala Richter (sea $I_0 = 1$).
(a) Sur de Sumatra, Indonesia, en 2007, $R = 8.5$
(b) Illinois en 2008, $R = 5.4$
(c) Costa Rica en 2009, $R = 6.1$

64. Encuentre la magnitud R de cada terremoto de intensidad I (sea $I_0 = 1$).
(a) $I = 199\,500\,000$ (b) $I = 48\,275\,000$
(c) $I = 17\,000$

INTENSIDAD DEL SONIDO En los Ejercicios 65-68, use la siguiente información para determinar la intensidad del sonido. El nivel del sonido β en decibeles, con una intensidad de I, está dado por $\beta = 10 \log(I/I_0)$, donde I_0 es una intensidad de 10^{-12} watts por metro cuadrado, correspondiente aproximadamente al sonido más leve que pueda ser escuchado por el oído humano. En los Ejercicios 65 y 66, encuentre el nivel del sonido β.

65. (a) $I = 10^{-10}$ watts por m^2 (cuarto en calma)
(b) $I = 10^{-5}$ watts por m^2 (esquina de calle bulliciosa)
(c) $I = 10^{-8}$ watts por m^2 (radio en calma)
(d) $I = 10^{0}$ watts por m^2 (umbral del dolor)

66. (a) $I = 10^{-11}$ watts por m^2 (caída de hojas)
(b) $I = 10^{2}$ watts por m^2 (*jet* a 30 metros)
(c) $I = 10^{-4}$ watts por m^2 (azotar puerta)
(d) $I = 10^{-2}$ watts por m^2 (sirena a 30 metros)

67. Debido a la instalación de materiales para la supresión de ruido, el nivel de ruido en un auditorio se redujo de 93 a 80 decibeles. Encuentre el porcentaje de disminución en el nivel de intensidad del ruido como resultado de la instalación de estos materiales.

68. Debido a la instalación de un silenciador, el nivel de ruido de un motor se redujo de 88 a 72 decibeles. Encuentre el porcentaje de disminución en el nivel de intensidad del ruido como resultado de la instalación del silenciador.

NIVELES DE pH En los Ejercicios 69-74, use el modelo de acidez dado por $\text{pH} = -\log[\text{H}^+]$, donde la acidez (pH) es una medida de la concentración del ion hidrógeno $[\text{H}^+]$ (medido en moles de hidrógeno por litro) de una solución.

69. Encuentre el pH si $[\text{H}^+] = 2.3 \times 10^{-5}$.

70. Encuentre el pH si $[\text{H}^+] = 1.13 \times 10^{-5}$.

71. Calcule $[\text{H}^+]$ para una solución en la que $\text{pH} = 5.8$.

72. Calcule $[\text{H}^+]$ para una solución en la que $\text{pH} = 3.2$.

73. El jugo de manzana tiene un pH de 2.9 y el agua potable de 8.0. ¿Cuántas veces es mayor la concentración del jugo de manzana que la del agua potable?

74. El pH de una solución se disminuye en una unidad. ¿En qué factor aumenta la concentración del ion hidrógeno?

75. MEDICINA LEGAL A las 8:30 A.M. un investigador fue llamado a la casa de una persona que había fallecido durante la noche. Para estimar la hora del deceso, el investigador tomó dos veces la temperatura del cuerpo. A las 9:00 A.M. era de 85.7° F, y a las 11:00 A.M. era de 82.8° F. De estas dos temperaturas, el investigador pudo determinar que el tiempo transcurrido desde el fallecimiento y la temperatura corporal estaban relacionados por la fórmula

$$t = -10 \ln \frac{T - 70}{98.6 - 70}$$

donde t es el tiempo en horas transcurrido desde que la persona murió y T es la temperatura (en grados Fahrenheit) del cuerpo de la persona. (Esta fórmula se deriva de un principio general del enfriamiento llamado *ley del enfriamiento de Newton*. Esta ley emplea suposiciones de que la persona tenía una temperatura corporal normal de 98.6° F a su muerte, y que la temperatura del cuarto era una constante de 70° F.) Use la fórmula para estimar la hora de la muerte de la persona.

76. HIPOTECA PARA VIVIENDAS Una hipoteca de \$120 000 para vivienda para 30 años a $7\frac{1}{2}\%$ tiene un pago mensual de \$839.06. Parte del pago mensual se va cargo de intereses sobre el saldo insoluto, y el resto se usa para reducir el capital. La cantidad que es pagada al interés es

$$u = M - \left(M - \frac{Pr}{12}\right)\left(1 + \frac{r}{12}\right)^{12t}$$

y la cantidad que es pagada para la reducción del capital es

$$v = \left(M - \frac{Pr}{12}\right)\left(1 + \frac{r}{12}\right)^{12t}.$$

En estas fórmulas, P es el monto de la hipoteca, r es la tasa de interés, M es el pago mensual y t es el tiempo (en años).

(a) Use una calculadora de gráficas para graficar cada función en la misma pantalla. (La pantalla debe mostrar los 30 años de pagos de hipoteca.)

(b) En los primeros años de la hipoteca, ¿la mayor parte del pago mensual se va al interés o al capital? Aproxime el tiempo cuando el pago mensual se divida de manera uniforme entre interés y reducción del capital.

(c) Repita los incisos (a) y (b) para un periodo de pago de 20 años ($M = \$966.71$). ¿Qué se puede concluir?

77. HIPOTECA PARA VIVIENDAS El total de interés u pagado sobre hipoteca para vivienda de P dólares a una tasa de interés r durante t años es

$$u = P\left[\frac{rt}{1 - \left(\frac{1}{1 + r/12}\right)^{12t}} - 1\right].$$

Considere una hipoteca de \$120 000 para vivienda a $7\frac{1}{2}\%$.

(a) Use una calculadora de gráficas para graficar la función del total de interés.

(b) Aproxime la duración de la hipoteca para la cual el total de interés pagado sea el mismo que el monto de la hipoteca. ¿Es posible que algunas personas paguen el doble de intereses que el monto de la hipoteca?

78. ANÁLISIS DE DATOS La tabla siguiente muestra el tiempo t (en segundos) necesario para que un auto alcance una velocidad de s millas por hora desde el reposo.

Velocidad, s	Tiempo, t
30	3.4
40	5.0
50	7.0
60	9.3
70	12.0
80	15.8
90	20.0

Dos modelos para estos datos son los siguientes.

$t_1 = 40.757 + 0.556s - 15.817 \ln s$

$t_2 = 1.2259 + 0.0023s^2$

(a) Use el comando *regression* de una calculadora de gráficas para hallar un modelo lineal t_3 y un modelo exponencial t_4 para los datos.

(b) Use una calculadora de gráficas para graficar los datos en cada uno de los modelos en la misma pantalla.

(c) Genere una tabla que compare los datos con estimaciones obtenidas a partir de cada modelo.

(d) Use los resultados del inciso (c) para hallar la suma de los valores absolutos de las diferencias entre los datos y los valores estimados dados por cada modelo. Con base en las cuatro sumas, ¿cuál modelo piensa usted que se ajusta mejor a los datos? Explique.

EXPLORACIÓN

¿VERDADERO O FALSO? En los Ejercicios 79-82, determine si la proposición es verdadera o falsa. Justifique su respuesta.

79. El dominio de una función de crecimiento logístico no puede ser el conjunto de los números reales.

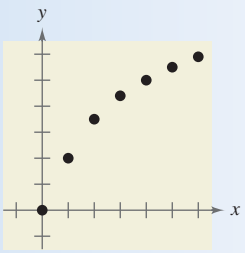
80. Una función de crecimiento logístico siempre tendrá una intersección con el eje x.

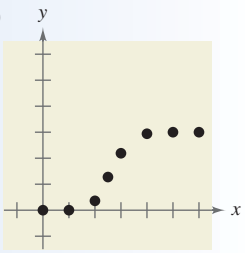
81. La gráfica de $f(x) = \dfrac{4}{1 + 6e^{-2x}} + 5$ es la gráfica de $g(x) = \dfrac{4}{1 + 6e^{-2x}}$ desplazada cinco unidades a la derecha.

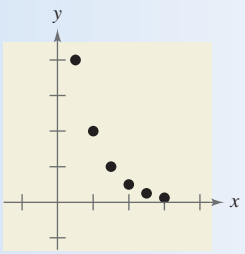
82. La gráfica de un modelo de Gauss nunca tendrá una intersección con el eje x.

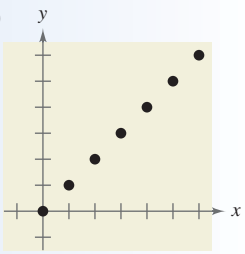
83. ESCRITURA Use la biblioteca de su escuela, internet o alguna otra fuente de consulta para escribir un resumen que describa la obra de John Napier acerca de logaritmos.

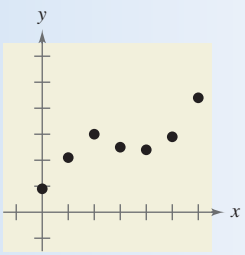
84. TOQUE FINAL Identifique cada uno de los modelos siguientes como exponencial, de Gauss, lineal, logarítmico, logístico, cuadrático o ninguno de los citados. Explique su razonamiento.

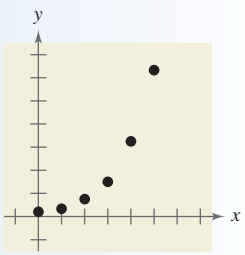
(a) 

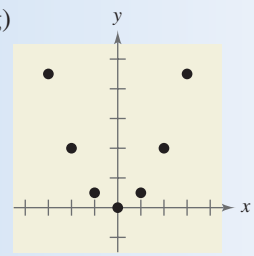
(b) 

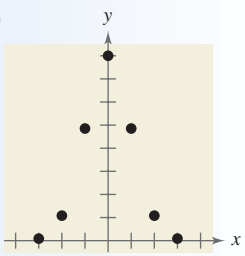
(c) 

(d) 

(e) 

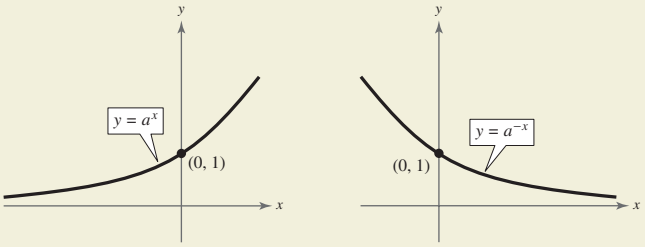
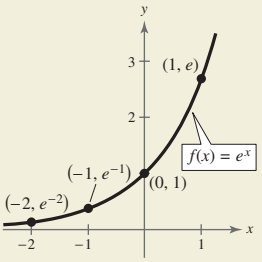
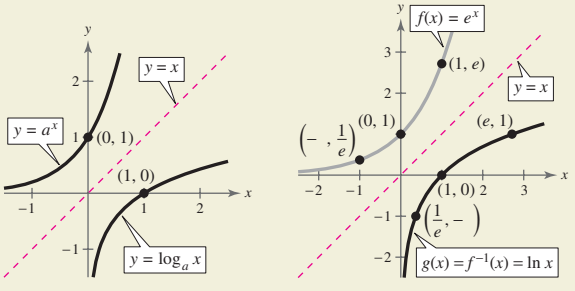
(f) 

(g) 

(h) 

PROYECTO: VENTAS POR ACCIÓN Para resolver una aplicación extendida que analice las ventas por acción de la Kohl's Corporation de 1992 a 2007, visite el sitio web de este texto en *academic.cengage.com*. (Fuente: Kohl's Corporation)

3 Resumen del capítulo

	¿Qué aprendió?	Explicación/Ejemplos	Ejercicios de repaso
Sección 3.1	Reconocer y evaluar funciones exponenciales con base a *(p. 216)*.	La función exponencial f con base a se denota por $f(x) = a^x$, donde $a > 0$, $a \neq 1$ y x es un número real.	1–6
	Graficar funciones exponenciales y usar la propiedad biunívoca *(p. 217)*.	 **Propiedad biunívoca:** Para $a > 0$ y $a \neq 1$, $a^x = a^y$ si y sólo si $x = y$.	7–24
	Reconocer, evaluar y graficar funciones exponenciales de base e *(p. 220)*.	La función $f(x) = e^x$ se llama función exponencial natural. 	25–32
	Usar funciones exponenciales para modelar y resolver problemas de la vida real *(p. 221)*.	Las funciones exponenciales se usan en fórmulas de interés compuesto (vea Ejemplo 8) y en modelos de desintegración radiactiva (vea Ejemplo 9).	33–36
Sección 3.2	Reconocer y evaluar funciones logarítmicas con base a *(p. 227)*.	Para $x > 0$, $a > 0$ y $a \neq 1$, $y = \log_a x$ si y sólo si $x = a^y$. La función $f(x) = \log_a x$ se llama función logarítmica con base a. La función logarítmica con base 10 es la función logarítmica común. Se denota por $\log_{10}$ o log.	37–48
	Graficar funciones logarítmicas *(p. 229)* y reconocer, evaluar y graficar funciones logarítmicas naturales *(p. 231)*.	La gráfica de $y = \log_a x$ es una reflexión de la gráfica de $y = a^x$ alrededor de la recta $y = x$. La función definida por $f(x) = \ln x$, $x > 0$, se llama función logarítmica natural. Su gráfica es una reflexión de la gráfica de $f(x) = e^x$ alrededor de la recta $y = x$. 	49–52 53–58
	Usar funciones logarítmicas para modelar y resolver problemas de la vida real *(p. 233)*.	Se usa una función logarítmica en el modelo de la memoria humana. (Vea Ejemplo 11.)	59, 60

	¿Qué aprendió?	Explicación/Ejemplos	Ejercicios de repaso
Sección 3.3	Usar la fórmula de cambio de base para reescribir y evaluar expresiones logarítmicas *(p. 237)*.	Sean a, b y x números reales positivos tales que $a \neq 1$ y $b \neq 1$. Entonces $\log_a x$ se puede convertir a una base diferente como sigue. *Base b*: $\log_a x = \frac{\log_b x}{\log_b a}$ — *Base 10*: $\log_a x = \frac{\log x}{\log a}$ — *Base e*: $\log_a x = \frac{\ln x}{\ln a}$	61–64
	Usar propiedades de los logaritmos para evaluar, reescribir, expandir o condensar expresiones logarítmicas *(p. 238)*.	Sea a un número positivo ($a \neq 1$), n un número real y u y v números reales positivos. **1. Propiedad del producto:** $\log_a(uv) = \log_a u + \log_a v$, $\ln(uv) = \ln u + \ln v$ **2. Propiedad del cociente:** $\log_a(u/v) = \log_a u - \log_a v$, $\ln(u/v) = \ln u - \ln v$ **3. Propiedad de la potencia:** $\log_a u^n = n \log_a u$, $\ln u^n = n \ln u$	65–80
	Usar funciones logarítmicas para modelar y resolver problemas de la vida real *(p. 240)*.	Se pueden usar funciones logarítmicas para hallar una ecuación que relacione los periodos de varios planetas y sus distancias al Sol. (Vea Ejemplo 7.)	81, 82
Sección 3.4	Resolver ecuaciones exponenciales y logarítmicas sencillas *(p. 244)*.	Las propiedades biunívocas y las propiedades inversas de funciones exponenciales o logarítmicas se pueden usar para ayudar a resolver ecuaciones exponenciales o logarítmicas.	83–88
	Resolver ecuaciones exponenciales *(p. 245)* y ecuaciones logarítmicas más complicadas *(p. 247)*.	Para resolver ecuaciones más complicadas, reescriba las ecuaciones de modo que se puedan usar las propiedades biunívocas e inversas de las funciones logarítmicas. (Vea Ejemplos 2-8.)	89–108
	Usar ecuaciones exponenciales y logarítmicas para modelar y resolver problemas de la vida real *(p. 249)*.	Se puede usar ecuaciones exponenciales y logarítmicas para hallar cuánto tiempo tardará una inversión en duplicarse (vea Ejemplo 10) y para hallar el año en el que las empresas llegaron a una cantidad dada de ventas. (Vea Ejemplo 11.)	109, 110
Sección 3.5	Reconocer los cinco tipos más comunes de modelos que contienen funciones exponenciales y logarítmicas *(p. 255)*.	**1. Modelo de crecimiento exponencial:** $y = ae^{bx}$, $b > 0$ **2. Modelo de desintegración exponencial:** $y = ae^{-bx}$, $b > 0$ **3. Modelo de Gauss:** $y = ae^{-(x-b)^2/c}$ **4. Modelo de crecimiento logístico:** $y = \frac{a}{1 + be^{-rx}}$ **5. Modelos logarítmicos:** $y = a + b \ln x$, $y = a + b \log x$	111–116
	Usar funciones de crecimiento y desintegración exponenciales para modelar y resolver problemas de la vida real *(p. 256)*.	Se puede usar una función de crecimiento exponencial para modelar una población de moscas de la fruta (vea Ejemplo 2), y se puede usar una función de desintegración exponencial para hallar la edad de un fósil (vea Ejemplo 3.)	117–120
	Usar funciones de Gauss *(p. 259)*, funciones de crecimiento logístico *(p. 260)* y funciones logarítmicas *(p. 261)* para modelar y resolver problemas de la vida real.	Se puede usar una función de Gauss para modelar calificaciones SAT de matemáticas para estudiantes de tercer año de preparatoria. (Vea Ejemplo 4.) Una función de crecimiento logístico se puede usar para modelar la diseminación de un virus de gripe. (Vea Ejemplo 5.) Una función logarítmica se puede usar para hallar la intensidad de un terremoto usando su magnitud. (Vea Ejemplo 6.)	121–123

3 EJERCICIOS DE REPASO

En www.CalcChat.com vea las soluciones a los ejercicios impares.

3.1 En los Ejercicios 1-6, evalúe la función en el valor indicado de x. Redondee su resultado a tres lugares decimales.

1. $f(x) = 0.3^x, \quad x = 1.5$
2. $f(x) = 30^x, \quad x = \sqrt{3}$
3. $f(x) = 2^{-0.5x}, \quad x = \pi$
4. $f(x) = 1278^{x/5}, \quad x = 1$
5. $f(x) = 7(0.2^x), \quad x = -\sqrt{11}$
6. $f(x) = -14(5^x), \quad x = -0.8$

En los Ejercicios 7-14, use la gráfica de f para describir la transformación que dé la gráfica de g.

7. $f(x) = 2^x, \quad g(x) = 2^x - 2$
8. $f(x) = 5^x, \quad g(x) = 5^x + 1$
9. $f(x) = 4^x, \quad g(x) = 4^{-x+2}$
10. $f(x) = 6^x, \quad g(x) = 6^{x+1}$
11. $f(x) = 3^x, \quad g(x) = 1 - 3^x$
12. $f(x) = 0.1^x, \quad g(x) = -0.1^x$
13. $f(x) = \left(\frac{1}{2}\right)^x, \quad g(x) = -\left(\frac{1}{2}\right)^{x+2}$
14. $f(x) = \left(\frac{2}{3}\right)^x, \quad g(x) = 8 - \left(\frac{2}{3}\right)^x$

En los Ejercicios 15-20, use una calculadora de gráficas para construir una tabla de valores para la función. A continuación trace la gráfica de ésta.

15. $f(x) = 4^{-x} + 4$
16. $f(x) = 2.65^{x-1}$
17. $f(x) = 5^{x-2} + 4$
18. $f(x) = 2^{x-6} - 5$
19. $f(x) = \left(\frac{1}{2}\right)^{-x} + 3$
20. $f(x) = \left(\frac{1}{8}\right)^{x+2} - 5$

En los Ejercicios 21-24, use la propiedad biunívoca para despejar x de la ecuación.

21. $\left(\frac{1}{3}\right)^{x-3} = 9$
22. $3^{x+3} = \frac{1}{81}$
23. $e^{3x-5} = e^7$
24. $e^{8-2x} = e^{-3}$

En los Ejercicios 25-28, evalúe $f(x) = e^x$ en el valor indicado de x. Redondee el resultado a tres lugares decimales.

25. $x = 8$
26. $x = \frac{5}{8}$
27. $x = -1.7$
28. $x = 0.278$

En los Ejercicios 29-32, use una calculadora de gráficas para construir una tabla de valores para la función. A continuación trace la gráfica de ésta.

29. $h(x) = e^{-x/2}$
30. $h(x) = 2 - e^{-x/2}$
31. $f(x) = e^{x+2}$
32. $s(t) = 4e^{-2/t}, \quad t > 0$

INTERÉS COMPUESTO En los Ejercicios 33 y 34, complete la tabla para determinar el saldo A para P dólares invertidos a una tasa r durante t años y capitalizados n veces por año.

n	1	2	4	12	365	Continua
A						

TABLA PARA LOS EJERCICIOS 33 Y 34

33. $P = \$5000, \; r = 3\%, \; t = 10$ años
34. $P = \$4500, \; r = 2.5\%, \; t = 30$ años

35. TIEMPOS DE ESPERA El tiempo promedio entre llamadas de entrada a un conmutador es de 3 minutos. La probabilidad F de esperar menos de t minutos hasta la siguiente llamada de entrada se aproxima con el modelo $F(t) = 1 - e^{-t/3}$. Una llamada acaba de entrar. Encuentre la probabilidad de que la siguiente llamada sea dentro de
(a) $\frac{1}{2}$ minuto. (b) 2 minutos. (c) 5 minutos.

36. DEPRECIACIÓN Después de t años, el valor V de un auto que originalmente costó \$23 970 está dado por $V(t) = 23\,970\left(\frac{3}{4}\right)^t$.
(a) Use una calculadora de gráficas para graficar la función.
(b) Encuentre el valor del auto 2 años después de comprado.
(c) De acuerdo con el modelo, ¿cuándo se deprecia el auto con más rapidez? ¿Es esto realista? Explique.
(d) De acuerdo con el modelo, ¿cuándo no tendrá valor el auto?

3.2 En los Ejercicios 37-40, escriba la ecuación original en forma logarítmica. Por ejemplo, la forma logarítmica de $2^3 = 8$ es $\log_2 8 = 3$.

37. $3^3 = 27$
38. $25^{3/2} = 125$
39. $e^{0.8} = 2.2255\ldots$
40. $e^0 = 1$

En los Ejercicios 41-44, evalúe la función en el valor indicado de x sin usar calculadora.

41. $f(x) = \log x, x = 1000$
42. $g(x) = \log_9 x, x = 3$
43. $g(x) = \log_2 x, x = \frac{1}{4}$
44. $f(x) = \log_3 x, x = \frac{1}{81}$

En los Ejercicios 45-48, use la propiedad biunívoca para despejar x de la ecuación.

45. $\log_4(x + 7) = \log_4 14$
46. $\log_8(3x - 10) = \log_8 5$
47. $\ln(x + 9) = \ln 4$
48. $\ln(2x - 1) = \ln 11$

En los Ejercicios 49-52, encuentre el dominio, la intersección con el eje x y la asíntota vertical de la función logarítmica y trace su gráfica.

49. $g(x) = \log_7 x$
50. $f(x) = \log\left(\frac{x}{3}\right)$
51. $f(x) = 4 - \log(x + 5)$
52. $f(x) = \log(x - 3) + 1$

53. Use una calculadora para evaluar $f(x) = \ln x$ en (a) $x = 22.6$ y (b) $x = 0.98$. Redondee sus resultados a tres lugares decimales si es necesario.

54. Use una calculadora para evaluar $f(x) = 5 \ln x$ en (a) $x = e^{-12}$ y (b) $x = \sqrt{3}$. Redondee sus resultados a tres lugares decimales si es necesario.

En los Ejercicios 55-58, encuentre el dominio, la intersección con el eje *x* y la asíntota vertical de la función logarítmica y trace su gráfica.

55. $f(x) = \ln x + 3$

56. $f(x) = \ln(x - 3)$

57. $h(x) = \ln(x^2)$

58. $f(x) = \frac{1}{4} \ln x$

59. EXTENSIÓN DE CORNAMENTA La extensión de cornamenta a (en pulgadas), así como la altura del hombro h (en pulgadas) de un reno macho adulto americano están relacionadas por el modelo $h = 116 \log(a + 40) - 176$. Aproxime la altura del hombro de un reno macho americano con una extensión de cornamenta de 55 pulgadas.

60. REMOCIÓN DE NIEVE El número de millas s de carreteras limpias de nieve se aproxima con el modelo

$$s = 25 - \frac{13 \ln(h/12)}{\ln 3}, \quad 2 \le h \le 15$$

donde h es la profundidad de la nieve en pulgadas. Use este modelo para hallar s cuando $h = 10$ pulgadas.

3.3 En los Ejercicios 61-64, evalúe el logaritmo usando la fórmula para cambio de base. Haga dos veces cada ejercicio, una vez con logaritmos comunes y otra con logaritmos naturales. Redondee los resultados a tres lugares decimales.

61. $\log_2 6$

62. $\log_{12} 200$

63. $\log_{1/2} 5$

64. $\log_3 0.28$

En los Ejercicios 65-68, use las propiedades de los logaritmos para reescribir y simplificar la expresión logarítmica.

65. $\log 18$

66. $\log_2\left(\frac{1}{12}\right)$

67. $\ln 20$

68. $\ln(3e^{-4})$

En los Ejercicios 69-74, use las propiedades de los logaritmos para expandir la expresión como suma, diferencia o múltiplo constante de logaritmos. (Suponga que todas las variables son positivas.)

69. $\log_5 5x^2$

70. $\log 7x^4$

71. $\log_3 \dfrac{9}{\sqrt{x}}$

72. $\log_7 \dfrac{\sqrt[3]{x}}{14}$

73. $\ln x^2y^2z$

74. $\ln\left(\dfrac{y-1}{4}\right)^2, \quad y > 1$

En los Ejercicios 75-80, condense la expresión del logaritmo a una sola cantidad.

75. $\log_2 5 + \log_2 x$

76. $\log_6 y - 2 \log_6 z$

77. $\ln x - \frac{1}{4} \ln y$

78. $3 \ln x + 2 \ln(x + 1)$

79. $\frac{1}{2} \log_3 x - 2 \log_3(y + 8)$

80. $5 \ln(x - 2) - \ln(x + 2) - 3 \ln x$

81. RAPIDEZ DE ASCENSO El tiempo t (en minutos) para que un pequeño avión ascienda a una altitud de h pies está modelado por $t = 50 \log[18\,000/(18\,000 - h)]$, donde 18 000 pies es el techo absoluto del avión.

(a) Determine el dominio de la función en el contexto del problema.

(b) Use una calculadora de gráficas para graficar la función e identificar cualesquiera asíntotas.

(c) Cuando el avión se aproxima a su techo absoluto, ¿qué se puede decir del tiempo necesario para aumentar su altitud?

(d) Encuentre el tiempo para que el avión ascienda a una altitud de 4000 pies.

82. MODELO DE MEMORIA HUMANA A unos estudiantes que participan en una investigación de teoría del aprendizaje se les dio un examen, y luego se les hizo pasar un examen equivalente cada mes durante 6 meses. Los datos obtenidos en el estudio se dan como los pares ordenados (t, s), donde t es el tiempo en meses después del examen inicial y s es el promedio de calificaciones del grupo. Use estos datos para hallar una ecuación logarítmica que relacione t y s

$(1, 84.2), (2, 78.4), (3, 72.1),$
$(4, 68.5), (5, 67.1), (6, 65.3)$

3.4 En los Ejercicios 83-88, despeje *x*

83. $5^x = 125$

84. $6^x = \frac{1}{216}$

85. $e^x = 3$

86. $\log_6 x = -1$

87. $\ln x = 4$

88. $\ln x = -1.6$

En los Ejercicios 89-92, resuelva algebraicamente la ecuación exponencial. Aproxime el resultado a tres lugares decimales.

89. $e^{4x} = e^{x^2+3}$

90. $e^{3x} = 25$

91. $2^x - 3 = 29$

92. $e^{2x} - 6e^x + 8 = 0$

En los Ejercicios 93-94, use una calculadora de gráficas para graficar y resolver la ecuación. Aproxime su resultado a tres lugares decimales.

93. $25e^{-0.3x} = 12$

94. $2^x = 3 + x - e^x$

En los Ejercicios 95-104, resuelva algebraicamente la ecuación logarítmica. Aproxime el resultado a tres lugares decimales.

95. $\ln 3x = 8.2$

96. $4 \ln 3x = 15$

97. $\ln x - \ln 3 = 2$

98. $\ln x - \ln 5 = 4$

99. $\ln \sqrt{x} = 4$

100. $\ln \sqrt{x + 8} = 3$

101. $\log_8(x-1) = \log_8(x-2) - \log_8(x+2)$

102. $\log_6(x+2) - \log_6 x = \log_6(x+5)$

103. $\log(1-x) = -1$ **104.** $\log(-x-4) = 2$

En los Ejercicios 105-108, use una calculadora de gráficas para graficar y resolver la ecuación. Aproxime el resultado a tres lugares decimales.

105. $2\ln(x+3) - 3 = 0$ **106.** $x - 2\log(x+4) = 0$

107. $6\log(x^2+1) - x = 0$

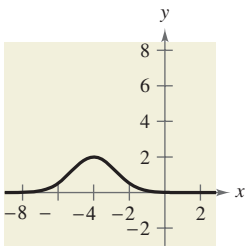
108. $3\ln x + 2\log x = e^x - 25$

109. INTERÉS COMPUESTO Usted deposita $8500 en una cuenta que paga 3.5% de interés, capitalizado continuamente. ¿Cuánto tardará ese dinero en triplicarse?

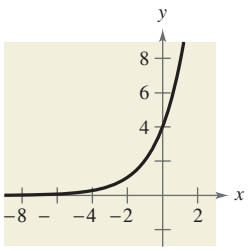
110. METEOROLOGÍA La velocidad del viento S (en millas por hora) cerca del centro de un tornado, y la distancia d (en millas) que el tornado recorre, están relacionados con el modelo $S = 93\log d + 65$. El 18 de marzo de 1925, un gran tornado golpeó partes de Missouri, Illinois e Indiana con una velocidad del viento en el centro de alrededor de 283 millas por hora. Aproxime la distancia recorrida por este tornado.

3.5 En los Ejercicios 111-116, relacione la función con su gráfica. [Las gráficas están marcadas (a),(b),(c),(d),(e) y (f).]

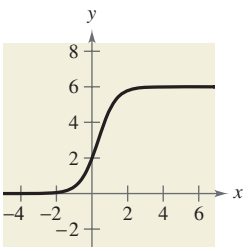
(a)



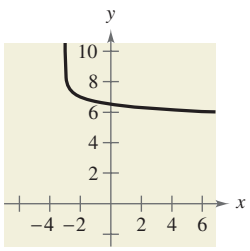
(b)



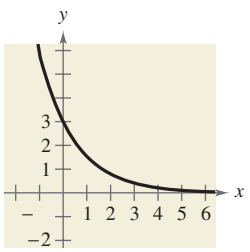
(c)



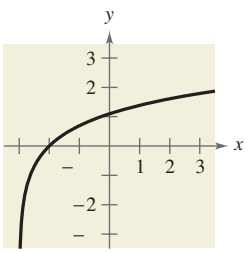
(d)



(e)



(f)



111. $y = 3e^{-2x/3}$ **112.** $y = 4e^{2x/3}$

113. $y = \ln(x+3)$ **114.** $y = 7 - \log(x+3)$

115. $y = 2e^{-(x+4)^2/3}$ **116.** $y = \dfrac{6}{1+2e^{-2x}}$

En los Ejercicios 117 y 118, encuentre el modelo exponencial $y = ae^{bx}$ que pase por los puntos.

117. $(0, 2), (4, 3)$ **118.** $\left(0, \frac{1}{2}\right), (5, 5)$

119. POBLACIÓN En 2007, la población de residentes de Florida, de 65 años o más, era alrededor de 3.1 millones. En 2015 y 2020, las poblaciones de residentes de la Florida con edades de 65 años y más se piensa que serán de unos 4.13 millones y 5.11 millones, respectivamente. Un modelo de crecimiento exponencial que aproxima estos datos está dado por $P = 2.36e^{0.0382t}$, $7 \le t \le 20$, donde P es la población (en millones) y $t = 7$ representa 2007. (Fuente: U.S. Census Bureau)

(a) Use una calculadora de gráficas para graficar el modelo y los datos en la misma pantalla. ¿El modelo es un buen ajuste para los datos? Explique.

(b) Según el modelo, ¿cuándo llegará a 5.5 millones la población de Florida con edades de 65 años o más? ¿Su respuesta le parece razonable? Explique.

120. POBLACIÓN DE FAUNA SILVESTRE Una especie de murciélago está en peligro de extinción. Hace cinco años, la población total de la especie era de 2000. Hace dos años, la población total de la especie era de 1400. ¿Cuál era la población total de la especie hace un año?

121. CALIFICACIONES DE EXAMEN Las calificaciones de examen para un examen de biología siguen una distribución normal modelada por $y = 0.0499e^{-(x-71)^2/128}$, $40 \le x \le 100$, donde x es la calificación del examen. Use una calculadora de gráficas para graficar la ecuación y estimar el promedio de calificación del examen.

122. RAPIDEZ PARA ESCRIBIR A MÁQUINA En una clase de mecanografía, el número promedio N de palabras por minuto escritas, después de t semanas de lecciones, se encontró que era $N = 157/(1 + 5.4e^{-0.12t})$. Encuentre el tiempo necesario para escribir (a) 50 palabras por minuto y (b) 75 palabras por minuto.

123. INTENSIDAD DEL SONIDO La relación entre el número de decibeles β y la intensidad I de un sonido, en watts por metro cuadrado, es $\beta = 10\log(I/10^{-12})$. Encuentre I para cada nivel β de decibeles.

(a) $\beta = 60$ (b) $\beta = 135$ (c) $\beta = 1$

EXPLORACIÓN

124. Considere la gráfica de $y = e^{kt}$. Describa las características de la gráfica cuando k es positiva y cuando k es negativa.

¿VERDADERO O FALSO? En los Ejercicios 125 y 126, determine si la ecuación es verdadera o falsa. Justifique su respuesta.

125. $\log_b b^{2x} = 2x$ **126.** $\ln(x+y) = \ln x + \ln y$

3 EXAMEN DEL CAPÍTULO

En www.CalcChat.com vea las soluciones a los ejercicios impares.

Tome este examen como lo haría en clase. Cuando termine, verifique su trabajo contra las respuestas dadas al final del libro.

En los Ejercicios 1-4, evalúe la expresión. Aproxime el resultado a tres lugares decimales.

1. $4.2^{0.6}$ **2.** $4^{3\pi/2}$ **3.** $e^{-7/10}$ **4.** $e^{3.1}$

En los Ejercicios 5-7, construya una tabla de valores. A continuación trace la gráfica de la función.

5. $f(x) = 10^{-x}$ **6.** $f(x) = -6^{x-2}$ **7.** $f(x) = 1 - e^{2x}$

8. Evalúe (a) $\log_7 7^{-0.89}$ y (b) $4.6 \ln e^2$.

En los Ejercicios 9-11, construya una tabla de valores. A continuación trace la gráfica de la función. Identifique cualesquiera asíntotas.

9. $f(x) = -\log x - 6$ **10.** $f(x) = \ln(x - 4)$ **11.** $f(x) = 1 + \ln(x + 6)$

En los Ejercicios 12-14, evalúe el logaritmo usando la fórmula para cambio de base. Redondee el resultado a tres lugares decimales.

12. $\log_7 44$ **13.** $\log_{16} 0.63$ **14.** $\log_{3/4} 24$

En los Ejercicios 15-17, use las propiedades de los logaritmos para expandir la expresión como suma, diferencia o múltiplo constante de logaritmos.

15. $\log_2 3a^4$ **16.** $\ln \dfrac{5\sqrt{x}}{6}$ **17.** $\log \dfrac{(x-1)^3}{y^2 z}$

En los Ejercicios 18-20, condense la expresión al logaritmo de una sola cantidad.

18. $\log_3 13 + \log_3 y$ **19.** $4 \ln x - 4 \ln y$

20. $3 \ln x - \ln(x + 3) + 2 \ln y$

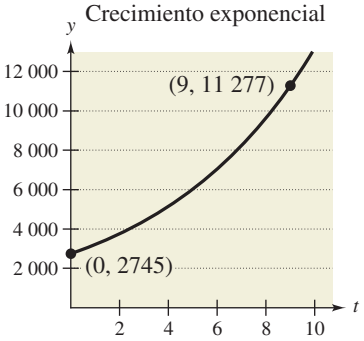


FIGURA PARA EJERCICIO 27

En los Ejercicios 21-26, resuelva algebraicamente la ecuación. Aproxime el resultado a tres lugares decimales.

21. $5^x = \dfrac{1}{25}$ **22.** $3e^{-5x} = 132$

23. $\dfrac{1025}{8 + e^{4x}} = 5$ **24.** $\ln x = \dfrac{1}{2}$

25. $18 + 4 \ln x = 7$ **26.** $\log x + \log(x - 15) = 2$

27. Encuentre un modelo de crecimiento exponencial para la gráfica que se muestra en la figura.

28. La vida media del actinio radiactivo (^{227}Ac) es 21.77 años. ¿Qué porcentaje de una cantidad presente de actinio radiactivo quedará después de 19 años?

29. Un modelo que puede usarse para predecir la estatura H (en centímetros) de un niño, con base en su edad, es $H = 70.228 + 5.104x + 9.222 \ln x$, $\frac{1}{4} \le x \le 6$, donde x es la edad del niño en años. (Fuente: Snapshots of Applications in Mathematics)

(a) Construya una tabla de valores y trace la gráfica del modelo.

(b) Use la gráfica del inciso (a) para estimar la estatura de un niño de 4 años de edad. A continuación calcule la estatura real usando el modelo.

En www.CalcChat.com vea las soluciones a los ejercicios impares.

3 EXAMEN ACUMULATIVO PARA LOS CAPÍTULOS 1 A 3

Tome este examen como lo haría en clase. Cuando termine, verifique su trabajo contra las respuestas dadas al final del libro.

1. Determine los puntos $(-2, 5)$ y $(3, -1)$. Encuentre las coordenadas del punto medio del segmento de recta que enlaza los puntos y la distancia entre ellos.

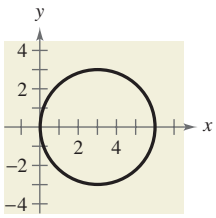


FIGURA PARA EL EJERCICIO 6

En los Ejercicios 2-4, grafique la ecuación sin usar calculadora de gráficas.

2. $x - 3y + 12 = 0$ **3.** $y = x^2 - 9$ **4.** $y = \sqrt{4 - x}$

5. Encuentre la ecuación de la recta que pasa por $\left(-\frac{1}{2}, 1\right)$ y $(3, 8)$.

6. Explique por qué la gráfica de la izquierda no representa y como una función de x

7. Evalúe (si es posible) la función dada por $f(x) = \dfrac{x}{x - 2}$ para cada valor.

(a) $f(6)$ (b) $f(2)$ (c) $f(s + 2)$

8. Compare la gráfica de cada función con la gráfica de $y = \sqrt[3]{x}$. (*Nota:* no es necesario trazar las gráficas.)

(a) $r(x) = \frac{1}{2}\sqrt[3]{x}$ (b) $h(x) = \sqrt[3]{x} + 2$ (c) $g(x) = \sqrt[3]{x + 2}$

En los Ejercicios 9 y 10, encuentre (a) $(f + g)(x)$, (b) $(f - g)(x)$, (c) $(fg)(x)$ y (d) $(f/g)(x)$. ¿Cuál es el dominio de f/g?

9. $f(x) = x - 3, \quad g(x) = 4x + 1$ **10.** $f(x) = \sqrt{x - 1}, \quad g(x) = x^2 + 1$

En los Ejercicios 11 y 12, encuentre (a) $f \circ g$ y (b) $g \circ f$. Encuentre el dominio de cada función compuesta.

11. $f(x) = 2x^2, \quad g(x) = \sqrt{x + 6}$

12. $f(x) = x - 2, \quad g(x) = |x|$

13. Determine si $h(x) = -5x + 3$ tiene una función inversa. Si es así, encuéntrela.

14. La potencia P producida por una turbina de viento es proporcional al cubo de la velocidad del viento S. Una velocidad del viento de 27 millas por hora produce una potencia de 750 kilowatts. Encuentre la potencia para una velocidad del viento de 40 millas por hora.

15. Encuentre la función cuadrática cuya gráfica tiene un vértice en $(-8, 5)$ y pasa por el punto $(-4, -7)$.

En los Ejercicios 16-18, trace la gráfica de la función sin ayuda de una calculadora de gráficas.

16. $h(x) = -(x^2 + 4x)$ **17.** $f(t) = \frac{1}{4}t(t - 2)^2$

18. $g(s) = s^2 + 4s + 10$

En los Ejercicios 19-21, encuentre todos los ceros de la función y escriba ésta como producto de factores lineales.

19. $f(x) = x^3 + 2x^2 + 4x + 8$

20. $f(x) = x^4 + 4x^3 - 21x^2$

21. $f(x) = 2x^4 - 11x^3 + 30x^2 - 62x - 40$

22. Use división larga para dividir $6x^3 - 4x^2$ por $2x^2 + 1$.

23. Use división sintética para dividir $3x^4 + 2x^2 - 5x + 3$ por $x - 2$.

24. Use el teorema de valor intermedio y una calculadora de gráficas para hallar intervalos de una unidad de longitud en los que se garantiza que la función $g(x) = x^3 + 3x^2 - 6$ tiene un cero. Aproxime los ceros reales de la función.

En los Ejercicios 25-27, trace manualmente la gráfica de la función racional. Asegúrese de identificar todas las intersecciones con los ejes y las asíntotas.

25. $f(x) = \dfrac{2x}{x^2 + 2x - 3}$

26. $f(x) = \dfrac{x^2 - 4}{x^2 + x - 2}$

27. $f(x) = \dfrac{x^3 - 2x^2 - 9x + 18}{x^2 + 4x + 3}$

En los Ejercicios 28 y 29, resuelva la desigualdad. Trace el conjunto solución en la recta numérica real.

28. $2x^3 - 18x \leq 0$

29. $\dfrac{1}{x + 1} \geq \dfrac{1}{x + 5}$

En los Ejercicios 30 y 31, use la gráfica de *f* para describir la transformación que dé la gráfica de *g*.

30. $f(x) = \left(\frac{2}{5}\right)^x, \quad g(x) = -\left(\frac{2}{5}\right)^{-x+3}$

31. $f(x) = 2.2^x, \quad g(x) = -2.2^x + 4$

En los Ejercicios 32-35, use una calculadora para evaluar la expresión. Redondee el resultado a tres lugares decimales.

32. $\log 98$

33. $\log\left(\frac{6}{7}\right)$

34. $\ln\sqrt{31}$

35. $\ln\left(\sqrt{40} - 5\right)$

36. Use las propiedades de los logaritmos para expandir $\ln\left(\dfrac{x^2 - 16}{x^4}\right)$, donde $x > 4$.

37. Escriba $2 \ln x - \frac{1}{2}\ln(x + 5)$ como logaritmo de una sola cantidad.

En los Ejercicios 38-40, resuelva algebraicamente la ecuación. Aproxime el resultado a tres lugares decimales.

38. $6e^{2x} = 72$

39. $e^{2x} - 13e^x + 42 = 0$

40. $\ln\sqrt{x + 2} = 3$

Año	Ventas, *S*
1997	35.5
1998	35.6
1999	36.0
2000	37.2
2001	38.4
2002	42.0
2003	43.5
2004	47.7
2005	47.4
2006	51.6
2007	52.4

TABLA PARA EL EJERCICIO 41

41. Las ventas S (en miles de millones de dólares) de billetes de lotería en cierto país, de 1997 a 2007, se muestran en la tabla de la izquierda. (Fuente: TLF Publications, Inc.)

(a) Use una calculadora de gráficas para crear una gráfica de dispersión de los datos. Con t represente el año, con $t = 7$ correspondiente a 1997.

(b) Use el comando *regression* de la calculadora de gráficas para hallar un modelo cúbico para los datos.

(c) Use la calculadora de gráficas para graficar el modelo en la misma pantalla usada para la gráfica de dispersión. ¿Qué tan bien se ajusta el modelo a los datos?

(d) Use el modelo para predecir las ventas de billetes de lotería en 2015. ¿La respuesta le parece razonable? Explique.

42. El número N de bacterias en un cultivo está dado por el modelo $N = 175e^{kt}$, donde t es el tiempo en horas. Si $N = 420$ cuando $t = 8$, estime el tiempo necesario para que la población se duplique en tamaño.

DEMOSTRACIONES EN MATEMÁTICAS

Cada una de las siguientes tres propiedades de los logaritmos se puede demostrar al usar propiedades de las funciones exponenciales.

Reglas de cálculo

La regla de cálculo fue inventada por William Oughtred (1574-1660) en 1625. La regla de cálculo es un equipo de cálculo con una parte deslizante y una fija que hace posible efectuar multiplicación usando la propiedad del producto de los logaritmos. Hay otras reglas de cálculo que permiten el cálculo de raíces y funciones trigonométricas. Las reglas de cálculo fueron usadas por matemáticos e ingenieros hasta la invención de la calculadora portátil en 1972.

Propiedades de los logaritmos *(p. 238)*

Sea a un número positivo tal que $a \neq 1$, y sea n un número real. Si u y v son números reales positivos, las siguientes propiedades son verdaderas.

	Logaritmo con base a	*Logaritmo natural*
1. Propiedad del producto:	$\log_a(uv) = \log_a u + \log_a v$	$\ln(uv) = \ln u + \ln v$
2. Propiedad del cociente:	$\log_a \frac{u}{v} = \log_a u - \log_a v$	$\ln \frac{u}{v} = \ln u - \ln v$
3. Propiedad de la potencia:	$\log_a u^n = n \log_a u$	$\ln u^n = n \ln u$

Demostración

Sea

$$x = \log_a u \quad \text{y} \quad y = \log_a v.$$

Las correspondientes formas exponenciales de estas dos ecuaciones son

$$a^x = u \quad \text{y} \quad a^y = v.$$

Para demostrar la propiedad del producto, multiplicamos u y v para obtener

$$uv = a^x a^y = a^{x+y}.$$

La correspondiente forma logarítmica de $uv = a^{x+y}$ es $\log_a(uv) = x + y$. Por tanto,

$$\log_a(uv) = \log_a u + \log_a v.$$

Para demostrar la propiedad del cociente, divida u entre v para obtener

$$\frac{u}{v} = \frac{a^x}{a^y} = a^{x-y}.$$

La correspondiente forma logarítmica de $\frac{u}{v} = a^{x-y}$ es $\log_a \frac{u}{v} = x - y$. Por tanto,

$$\log_a \frac{u}{v} = \log_a u - \log_a v.$$

Para demostrar la propiedad de la potencia, sustituya a^x por u en la expresión $\log_a u^n$, como sigue.

$$\begin{aligned} \log_a u^n &= \log_a (a^x)^n && \text{Sustituir } a^x \text{ por } u. \\ &= \log_a a^{nx} && \text{Propiedad de los exponentes} \\ &= nx && \text{Propiedad inversa de los logaritmos} \\ &= n \log_a u && \text{Sustituir } \log_a u \text{ por } x. \end{aligned}$$

Por tanto, $\log_a u^n = n \log_a u$.

RESOLUCIÓN DE PROBLEMAS

Este conjunto de Ejercicios, difíciles y que invitan a meditar, amplía y explora más a fondo los conceptos aprendidos en este capítulo.

1. Grafique la función exponencial dada por $y = a^x$ para $a = 0.5$, 1.2 y 2.0. ¿Cuál de estas curvas interseca la recta $y = x$? Determine todos los números positivos a para los cuales la curva $y = a^x$ interseca la recta $y = x$.

2. Use una calculadora de gráficas para graficar $y_1 = e^x$ y cada una de las funciones $y_2 = x^2$, $y_3 = x^3$, $y_4 = \sqrt{x}$ y $y_5 = |x|$. ¿Cuál función aumenta con máxima rapidez cuando x se aproxima a $+\infty$?

3. Use el resultado del Ejercicio 2 para hacer una conjetura acerca de la rapidez de crecimiento de $y_1 = e^x$ y $y = x^n$, donde n es un número natural y x se aproxima a $+\infty$.

4. Use los resultados de los Ejercicios 2 y 3 para describir lo que está implicado cuando se dice que una cantidad es creciente exponencialmente.

5. Dada la función exponencial

$$f(x) = a^x$$

demuestre que

(a) $f(u + v) = f(u) \cdot f(v)$. (b) $f(2x) = [f(x)]^2$.

6. Dado que

$$f(x) = \frac{e^x + e^{-x}}{2} \text{ y } g(x) = \frac{e^x - e^{-x}}{2}$$

demuestre que

$$[f(x)]^2 - [g(x)]^2 = 1.$$

7. Use una calculadora de gráficas para comparar la gráfica de la función dada por $y = e^x$ con la gráfica de cada función dada. [$n!$ (léase "n factorial") está definido como $n! = 1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot \cdots (n - 1) \cdot n$.]

(a) $y_1 = 1 + \dfrac{x}{1!}$

(b) $y_2 = 1 + \dfrac{x}{1!} + \dfrac{x^2}{2!}$

(c) $y_3 = 1 + \dfrac{x}{1!} + \dfrac{x^2}{2!} + \dfrac{x^3}{3!}$

8. Identifique el patrón de polinomios sucesivos dados en el Ejercicio 7. Extiéndalo un término más y compare la gráfica de la función polinomial resultante contra la gráfica de $y = e^x$. ¿Qué piensa usted que implica esta forma?

9. Grafique la función dada por

$$f(x) = e^x - e^{-x}.$$

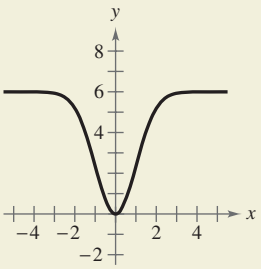
De la gráfica, la función parece ser biunívoca. Suponiendo que la función tenga una función inversa, encuentre $f^{-1}(x)$.

10. Encuentre una forma para $f^{-1}(x)$ si

$$f(x) = \frac{a^x + 1}{a^x - 1}$$

donde $a > 0$, $a \neq 1$.

11. Por observación, identifique la ecuación que corresponda a la gráfica. Explique su razonamiento.



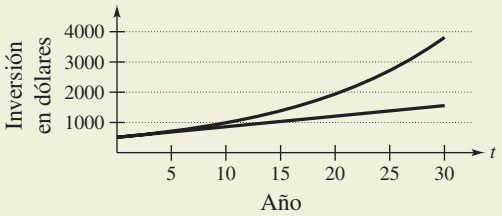
(a) $y = 6e^{-x^2/2}$

(b) $y = \dfrac{6}{1 + e^{-x/2}}$

(c) $y = 6(1 - e^{-x^2/2})$

12. Usted tiene dos opciones para invertir \$500. La primera gana 7% capitalizado anualmente y la segunda gana 7% de interés simple. La figura muestra el crecimiento de cada inversión en un periodo de 30 años.

(a) Identifique cuál gráfica representa cada tipo de inversión. Explique su razonamiento.



(b) Verifique su respuesta del inciso (a) al hallar las ecuaciones que modelan el crecimiento de la inversión y graficar los modelos.

(c) ¿Cuál opción escogería usted? Explique su razonamiento.

13. Dos diferentes muestras de isótopos radiactivos están en desintegración. Los isótopos tienen cantidades iniciales de c_1 y c_2, así como vidas medias de k_1 y k_2, respectivamente. Encuentre el tiempo t necesario para que las muestras se desintegren a cantidades iguales.

14. Un cultivo de laboratorio contiene 500 bacterias. Dos horas después, el número de bacterias ha disminuido a 200. Encuentre el modelo de decaimiento exponencial de la forma

$$B = B_0 a^{kt}$$

que se pueda usar para aproximar el número de bacterias después de t horas.

15. La tabla siguiente muestra las estimaciones de población de las colonias norteamericanas de 1700 a 1780. (Fuente: U.S. Census Bureau)

Año	Población
1700	250 900
1710	331 700
1720	466 200
1730	629 400
1740	905 600
1750	1 170 800
1760	1 593 600
1770	2 148 100
1780	2 780 400

En cada uno de los incisos siguientes, represente con y la población en el año t, con $t = 0$ correspondiente a 1700.

(a) Use el comando *regression* de una calculadora de gráficas para hallar un modelo exponencial para los datos.

(b) Use el comando *regression* de una calculadora de gráficas para hallar un modelo cuadrático para los datos.

(c) Use la calculadora de gráficas para graficar los datos y los modelos de los incisos (a) y (b) en la misma pantalla.

(d) ¿Cuál modelo es un mejor ajuste para los datos? ¿Utilizaría usted este modelo para predecir la población de Estados Unidos en 2015? Explique su razonamiento.

16. Demuestre que $\dfrac{\log_a x}{\log_{a/b} x} = 1 + \log_a \dfrac{1}{b}$.

17. Resuelva $(\ln x)^2 = \ln x^2$.

18. Use una calculadora de gráficas para comparar la gráfica de la función $y = \ln x$ con la de cada función dada.

(a) $y_1 = x - 1$

(b) $y_2 = (x - 1) - \frac{1}{2}(x - 1)^2$

(c) $y_3 = (x - 1) - \frac{1}{2}(x - 1)^2 + \frac{1}{3}(x - 1)^3$

19. Identifique el patrón de los polinomios sucesivos dados en el Ejercicio 18. Extiéndalo un término más y compare la gráfica de la resultante función polinomial con la gráfica de $y = \ln x$. ¿Qué piensa usted que implica el patrón?

20. Usando

$$y = ab^x \quad \text{y} \quad y = ax^b$$

obtenga el logaritmo natural de cada lado de cada ecuación. ¿Cuál es la pendiente y la intersección con el eje y de la recta que relaciona x y $\ln y$ para $y = ab^x$? ¿Cuáles son la pendiente e intersección con el eje y de la recta que relaciona $\ln x$ y $\ln y$ para $y = ax^b$?

En los Ejercicios 21 y 22, use el modelo

$$y = 80.4 - 11 \ln x, \quad 100 \le x \le 1500$$

que aproxima la rapidez mínima de ventilación necesaria, en términos del espacio de aire por niño, en un salón de escuela pública. En el modelo, x es el espacio de aire por niño en pies cúbicos y y es la rapidez de ventilación por niño en pies cúbicos por minuto.

21. Use una calculadora para graficar el modelo y aproximar la rapidez de ventilación necesaria si hay 300 pies cúbicos de espacio de aire por niño.

22. Un salón de clase está diseñado para 30 estudiantes. El sistema de acondicionamiento de aire en el salón tiene la capacidad de mover 450 pies cúbicos de aire por minuto.

(a) Determine la rapidez de ventilación por niño, suponiendo que el salón está lleno a toda su capacidad.

(b) Estime el espacio de aire necesario por niño.

(c) Determine el número mínimo de pies cuadrados de espacio de piso necesario para el salón, si la altura del cielo raso es de 30 pies.

En los Ejercicios 23-26, (a) use una calculadora de gráficas para crear una gráfica de dispersión de los datos, (b) determine si los datos podrían modelarse mejor con un modelo lineal, uno exponencial o uno logarítmico, (c) explique por qué elige usted el modelo que escogió en el inciso (b), (d) use el comando *regression* de una calculadora de gráficas para hallar el modelo que seleccionó en el inciso (b) para los datos y grafique el modelo con la gráfica de dispersión, y (e) determine qué tan bien se ajusta a los datos el modelo que usted escogió.

23. (1, 2.0), (1.5, 3.5), (2, 4.0), (4, 5.8), (6, 7.0), (8, 7.8)

24. (1, 4.4), (1.5, 4.7), (2, 5.5), (4, 9.9), (6, 18.1), (8, 33.0)

25. (1, 7.5), (1.5, 7.0), (2, 6.8), (4, 5.0), (6, 3.5), (8, 2.0)

26. (1, 5.0), (1.5, 6.0), (2, 6.4), (4, 7.8), (6, 8.6), (8, 9.0)

4

Trigonometría

4.1 Medidas en radianes y grados
4.2 Funciones trigonométricas: la circunferencia unitaria
4.3 Trigonometría del triángulo rectángulo
4.4 Funciones trigonométricas de cualquier ángulo
4.5 Gráficas de las funciones seno y coseno
4.6 Gráficas de otras funciones trigonométricas
4.7 Funciones trigonométricas inversas
4.8 Aplicaciones y modelos

En matemáticas

Se usa trigonometría para hallar relaciones entre los lados y ángulos de triángulos y para escribir funciones trigonométricas como modelos de cantidades de la vida real.

En la vida real

Se usan funciones trigonométricas para modelar cantidades periódicas. Por ejemplo, durante el día la profundidad del agua en un extremo del muelle en Bar Harbor, Maine, varía con las mareas. La profundidad puede ser modelada por medio de una función trigonométrica. (Vea Ejemplo 7, página 325.)

Andre Jenny/Alamy

EN CARRERAS

Hay numerosas carreras que usan trigonometría. A continuación veamos varias de ellas.

- Biólogo
  Ejercicio 70, página 308
- Meteorólogo
  Ejercicio 99, página 318
- Ingeniero mecánico
  Ejercicio 95, página 339
- Topógrafo
  Ejercicio 41, página 359

4.1 Medidas en radianes y grados

Lo que debe aprender

- Describir ángulos.
- Usar medidas en radianes.
- Usar medidas en grados.
- Usar ángulos para modelar y resolver problemas de la vida real.

Por qué debe aprenderlo

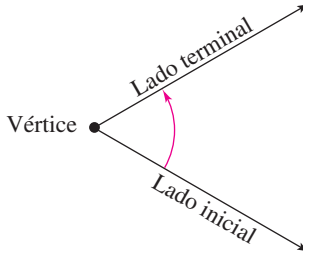
Se pueden usar ángulos para modelar y resolver problemas de la vida real. Por ejemplo, en el Ejercicio 119 de la página 291 nos piden usar ángulos para hallar la velocidad de una bicicleta.

© Wolfgang Rattay/Reuters/Corbis

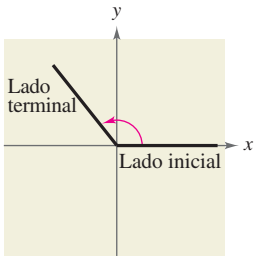
Ángulos

Ya que se deriva del griego, la palabra **trigonometría** significa "medición de triángulos." Inicialmente, la trigonometría se ocupaba de relaciones entre los lados y ángulos de triángulos y se usaba en el perfeccionamiento de la astronomía, navegación y topografía. Con el invento del cálculo y ciencias físicas en el siglo XVII, apareció una perspectiva diferente, que visualizaba las relaciones trigonométricas como *funciones* con el conjunto de los números reales como su dominio. En consecuencia, las aplicaciones de la trigonometría se ampliaron para incluir un gran número de fenómenos físicos que comprendían rotaciones y vibraciones. Estos fenómenos incluyen ondas sonoras, rayos de luz, órbitas planetarias, cuerdas en vibración, péndulos y órbitas de partículas atómicas.

El método de este texto incorpora *ambas* perspectivas, empezando con ángulos y su medida.



Ángulo
FIGURA 4.1



Ángulo en posición normal
FIGURA 4.2

Un **ángulo** se determina al girar un rayo (semirrecta) alrededor de su punto extremo. La posición inicial del rayo es el **lado inicial** del ángulo, y la posición después de la rotación es el **lado terminal,** como se ilustra en la Figura 4.1. El punto extremo del rayo es el **vértice** del ángulo. Esta percepción de un ángulo se ajusta a un sistema de coordenadas en el que el origen es el vértice y el lado inicial coincide con el eje x positivo. Ese ángulo está en **posición normal,** como se muestra en la Figura 4.2. Se generan **ángulos positivos** por rotación en sentido contrario al movimiento de las agujas de un reloj (movimiento levógiro), y **ángulos negativos** por rotación en el sentido de las agujas de un reloj (dextrógiro), como se ve en la Figura 4.3. Los ángulos se designan con las letras griegas α, β y θ, así como con las letras mayúsculas A, B y C. En la Figura 4.4, observe que los ángulos α y β tienen los mismos lados inicial y terminal. Estos ángulos son **coterminales.**

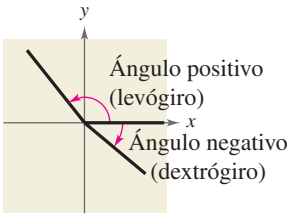


FIGURA 4.3

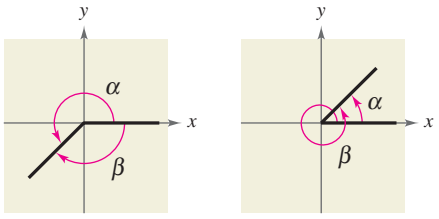
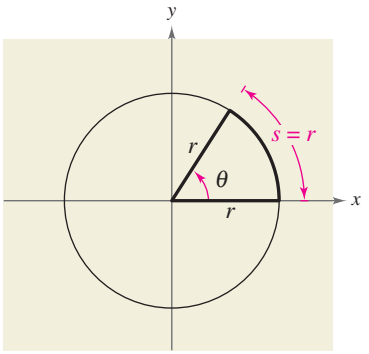


FIGURA 4.4 Ángulos coterminales



Longitud de arco = radio cuando $\theta = 1$ radián

FIGURA 4.5

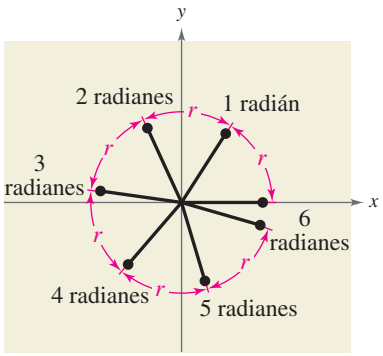


FIGURA 4.6

Medidas en radianes

La **medida de un ángulo** está determinada por la cantidad de rotación desde el lado inicial hasta el lado terminal. Una forma de medir ángulos es en *radianes*. Este tipo de medida es especialmente útil en cálculo. Para definir un radián se puede usar un **ángulo central** de una circunferencia, cuyo vértice es el centro de la circunferencia, como se muestra en la Figura 4.5.

Definición de radián

Un **radián** es la medida de un ángulo central θ que interseca un arco s igual en longitud al radio r de la circunferencia. Vea la Figura 4.5. Algebraicamente, esto significa que

$$\theta = \frac{s}{r}$$

donde θ se mide en radianes.

Como la circunferencia de un círculo es $2\pi r$ unidades, se deduce que un ángulo central de una revolución completa (en sentido levógiro) corresponde a una longitud de arco de

$$s = 2\pi r.$$

Además, como $2\pi \approx 6.28$, hay un poco más de seis longitudes de radio en una circunferencia completa, como se ve en la Figura 4.6. Como las unidades de medida para s y r son iguales, la razón s/r no tiene unidades, es simplemente un número real.

En vista que la medida en radianes de un ángulo de una revolución completa es 2π, se puede obtener lo siguiente.

$$\frac{1}{2}\text{ revolución} = \frac{2\pi}{2} = \pi \text{ radianes}$$

$$\frac{1}{4}\text{ revolución} = \frac{2\pi}{4} = \frac{\pi}{2} \text{ radianes}$$

$$\frac{1}{6}\text{ revolución} = \frac{2\pi}{6} = \frac{\pi}{3} \text{ radianes}$$

Éstos y otros ángulos comunes se ilustran en la Figura 4.7.

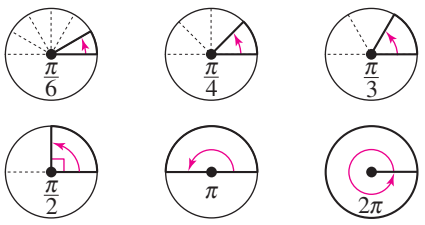


FIGURA 4.7

Tip de estudio

Una revolución alrededor de una circunferencia de radio r corresponde a un ángulo de 2π radianes porque

$$\theta = \frac{s}{r} = \frac{2\pi r}{r} = 2\pi \text{ radianes.}$$

Recuerde que los cuatro cuadrantes en un sistema de coordenadas están numerados como I, II, III y IV. La Figura 4.8 en la página 282 muestra cuáles ángulos entre 0 y 2π están en cada uno de los cuatro cuadrantes. Observe que los ángulos entre 0 y $\pi/2$ son **agudos** y los ángulos entre $\pi/2$ y π son ángulos **obtusos.**

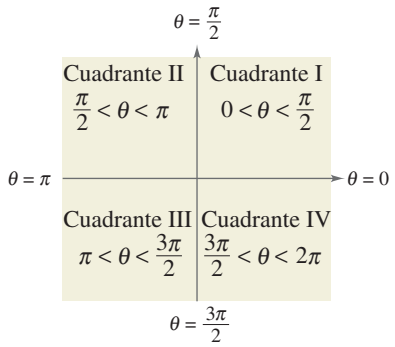


FIGURA 4.8

Tip de estudio

Es frecuente abreviar la frase "el lado terminal de θ está en un cuadrante" con sólo decir "θ está en un cuadrante". Los lados terminales de los "ángulos de cuadrante" 0, $\pi/2$, π, y $3\pi/2$ no se encuentran dentro de cuadrantes.

Dos ángulos son coterminales si tienen los mismos lados inicial y terminal. Por ejemplo, los ángulos 0 y 2π son coterminales, igual que los ángulos $\pi/6$ y $13\pi/6$. Se puede encontrar un ángulo que sea coterminal a un ángulo θ determinado si se suma o resta 2π (una revolución), como se demuestra en el Ejemplo 1. Un ángulo dado θ tiene una infinidad grande de ángulos coterminales. Por ejemplo, $\theta = \pi/6$ es coterminal con

$$\frac{\pi}{6} + 2n\pi$$

donde n es un entero.

Ayuda de álgebra

En el Apéndice A.1 puede repasar operaciones con fracciones.

Ejemplo 1 Trazar y hallar ángulos coterminales

a. Para el ángulo positivo $13\pi/6$, reste 2π para obtener un ángulo coterminal

$$\frac{13\pi}{6} - 2\pi = \frac{\pi}{6}.$$ Vea Figura 4.9.

b. Para el ángulo positivo $3\pi/4$, reste 2π para obtener un ángulo coterminal

$$\frac{3\pi}{4} - 2\pi = -\frac{5\pi}{4}.$$ Vea Figura 4.10.

c. Para el ángulo negativo $-2\pi/3$, sume 2π para obtener un ángulo coterminal

$$-\frac{2\pi}{3} + 2\pi = \frac{4\pi}{3}.$$ Vea Figura 4.11.

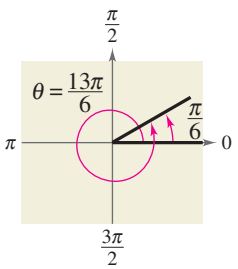


FIGURA 4.9

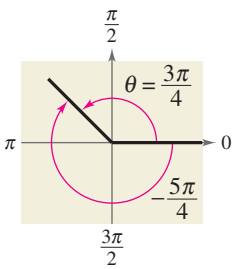


FIGURA 4.10

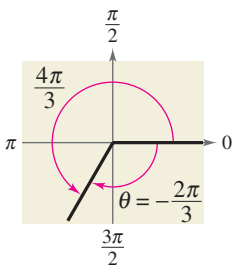
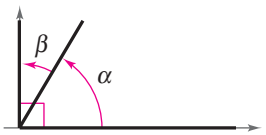


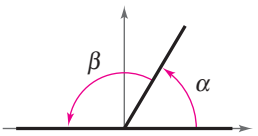
FIGURA 4.11

PUNTO *de repaso* Ahora trate de hacer el Ejercicio 27.

Dos ángulos positivos α y β son **complementarios** (complemento uno del otro) si su suma es $\pi/2$. Dos ángulos positivos son **suplementarios** (suplemento uno del otro) si su suma es π. Vea la Figura 4.12.



Ángulos complementarios



Ángulos suplementarios

FIGURA 4.12

Ejemplo 2 Ángulos complementarios y suplementarios

Si es posible, encuentre el complemento y el suplemento de (a) $2\pi/5$ y (b) $4\pi/5$.

Solución

a. El complemento de $2\pi/5$ es

$$\frac{\pi}{2} - \frac{2\pi}{5} = \frac{5\pi}{10} - \frac{4\pi}{10} = \frac{\pi}{10}.$$

El suplemento de $2\pi/5$ es

$$\pi - \frac{2\pi}{5} = \frac{5\pi}{5} - \frac{2\pi}{5} = \frac{3\pi}{5}.$$

b. Como $4\pi/5$ es mayor que $\pi/2$, no tiene complemento. (Recuerde que los complementos son ángulos *positivos*.) El suplemento es

$$\pi - \frac{4\pi}{5} = \frac{5\pi}{5} - \frac{4\pi}{5} = \frac{\pi}{5}.$$

PUNTO *de repaso* Ahora trate de hacer el Ejercicio 31.

Medidas en grados

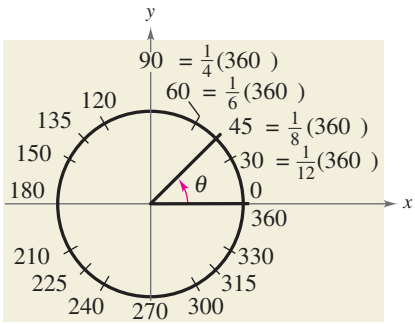


FIGURA 4.13

Una segunda forma de medir ángulos es en términos de **grados,** denotada por el símbolo °. Una medida de un grado (1°) es equivalente a una rotación de $\frac{1}{360}$ de una revolución completa alrededor del vértice. Para medir ángulos es conveniente marcar grados en la circunferencia de un círculo, como se ve en la Figura 4.13. Entonces, una revolución completa (en sentido contrario al giro de las manecillas de un reloj, levógiro) corresponde a 360°, la mitad de una revolución a 180°, un cuarto de revolución a 90°, etcétera.

Como 2π radianes corresponden a una revolución completa, grados y radianes están relacionados por las ecuaciones

$$360° = 2\pi \text{ rad} \quad \text{y} \quad 180° = \pi \text{ rad}.$$

De la última ecuación, obtenemos

$$1° = \frac{\pi}{180} \text{ rad} \quad \text{y} \quad 1 \text{ rad} = \left(\frac{180°}{\pi}\right)$$

que llevan a las reglas de conversión de la parte superior de la siguiente página.

Conversión entre grados y radianes

1. Para convertir grados a radianes multiplicamos grados por $\dfrac{\pi \text{ rad}}{180^\circ}$.

2. Para convertir radianes a grados multiplicamos radianes por $\dfrac{180^\circ}{\pi \text{ rad}}$.

Para aplicar estas dos reglas de conversión, use la relación básica π rad $= 180^\circ$. (Vea Figura 4.14.)

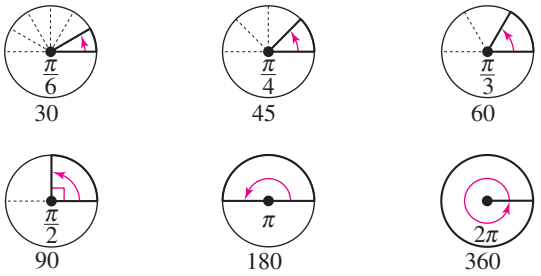


FIGURA 4.14

Cuando no se especifican unidades de medida de ángulos se presupone *una medida en radianes*. Por ejemplo, si se escribe $\theta = 2$, se presupone que $\theta = 2$ radianes.

Ejemplo 3 Conversión de grados a radianes

a. $135^\circ = (135 \text{ grad})\left(\dfrac{\pi \text{ rad}}{180 \text{ grad}}\right) = \dfrac{3\pi}{4}$ radianes — Multiplicar por $\pi/180$.

b. $540^\circ = (540 \text{ grad})\left(\dfrac{\pi \text{ rad}}{180 \text{ grad}}\right) = 3\pi$ radianes — Multiplicar por $\pi/180$.

c. $-270^\circ = (-270 \text{ grad})\left(\dfrac{\pi \text{ rad}}{180 \text{ grad}}\right) = -\dfrac{3\pi}{2}$ radianes — Multiplicar por $\pi/180$.

PUNTO *de repaso* Ahora trate de hacer el Ejercicio 57.

Ejemplo 4 Conversión de radianes a grados

a. $-\dfrac{\pi}{2} \text{ rad} = \left(-\dfrac{\pi}{2} \text{ rad}\right)\left(\dfrac{180 \text{ grad}}{\pi \text{ rad}}\right) = -90^\circ$ — Multiplicar por $180/\pi$.

b. $\dfrac{9\pi}{2} \text{ rad} = \left(\dfrac{9\pi}{2} \text{ rad}\right)\left(\dfrac{180 \text{ grad}}{\pi \text{ rad}}\right) = 810^\circ$ — Multiplicar por $180/\pi$.

c. $2 \text{ rad} = (2 \text{ rad})\left(\dfrac{180 \text{ grad}}{\pi \text{ rad}}\right) = \dfrac{360^\circ}{\pi} \approx 114.59^\circ$ — Multiplicar por $180/\pi$.

PUNTO *de repaso* Ahora trate de hacer el Ejercicio 61.

Si el lector tiene acceso a una calculadora con tecla de conversión de "radián a grado", trate de usarla para verificar el resultado que se muestra en el inciso (b) del Ejemplo 4.

TECNOLOGÍA

Con calculadoras, es conveniente usar grados *decimales* para denotar partes fraccionarias de grados. Históricamente, sin embargo, las partes fraccionarias de grados se expresaban en *minutos* y *segundos*, usando las notaciones prima (′) y doble prima (″), respectivamente. Esto es,

$1' =$ un minuto $= \frac{1}{60}(1^\circ)$

$1'' =$ un segundo $= \frac{1}{3600}(1^\circ)$.

En consecuencia, un ángulo de 64 grados, 32 minutos y 42 segundos se representa con $\theta = 64^\circ\,32'\,47''$. Muchas calculadoras tienen teclas especiales para convertir un ángulo en grados, minutos y segundos (D° M′ S″) a forma de grado decimal, y viceversa.

Aplicaciones

La fórmula de *medida en radianes*, $\theta = s/r$, se puede usar para medir longitudes de arco a lo largo de una circunferencia.

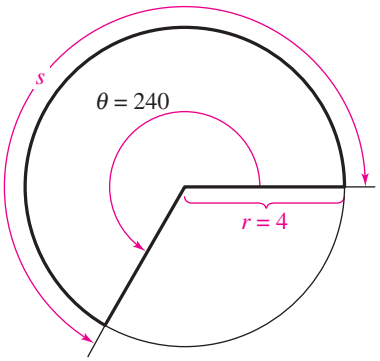


FIGURA 4.15

Longitud de arco

Para una circunferencia de radio r, un ángulo central θ interseca un arco de longitud s dado por

$$s = r\theta \qquad \text{Longitud de arco circular}$$

donde θ se mide en radianes. Observe que si $r = 1$, entonces $s = \theta$, y la medida en radianes de θ es igual a la longitud del arco.

Ejemplo 5 Hallar la longitud de un arco

Una circunferencia tiene radio de 4 pulgadas. Encuentre la longitud del arco interseca-do por un ángulo central de 240°, como se ve en la Figura 4.15.

Solución

Para usar la fórmula $s = r\theta$, primero convertimos 240° a una medida en radianes.

$$240^\circ = (240\ \cancel{\text{grad}})\left(\frac{\pi \text{ rad}}{180\ \cancel{\text{grad}}}\right)$$

$$= \frac{4\pi}{3} \text{ radianes}$$

Entonces, usando un radio de $r = 4$ pulgadas, se puede hallar que la longitud del arco es

$$s = r\theta$$

$$= 4\left(\frac{4\pi}{3}\right)$$

$$= \frac{16\pi}{3} \approx 16.76 \text{ pulgadas.}$$

Observe que las unidades para $r\theta$ están determinadas por las unidades para r porque θ está dado en radianes, que no tiene unidades.

PUNTO *de repaso* Ahora trate de hacer el Ejercicio 89.

Se puede usar la fórmula de la longitud de un arco circular para analizar el movimiento de una partícula que se mueve con una *velocidad constante* a lo largo de una trayectoria circular.

Rapidez lineal y angular

Considere una partícula que se mueve con velocidad constante a lo largo de un arco circular de radio r. Si s es la longitud del arco recorrida en el tiempo t, entonces la **velocidad lineal** v de la partícula es

$$\text{Rapidez angular } v = \frac{\text{longitud de arco}}{\text{tiempo}} = \frac{s}{t}.$$

Además, si θ es el ángulo (medido en radianes) correspondiente a la longitud de arco s, entonces la **velocidad angular** ω de la partícula es

$$\text{Rapidez angular } \omega = \frac{\text{ángulo central}}{\text{tiempo}} = \frac{\theta}{t}.$$

Tip de estudio

La velocidad lineal mide qué tan rápido se mueve una partícula, en tanto que la angular mide qué tan rápido cambia el ángulo. Si divide entre t la fórmula para obtener la longitud de un arco, establecerá la relación entre la velocidad lineal v y la angular ω, como se muestra.

$$s = r\theta$$

$$\frac{s}{t} = \frac{r\theta}{t}$$

$$v = r\omega$$

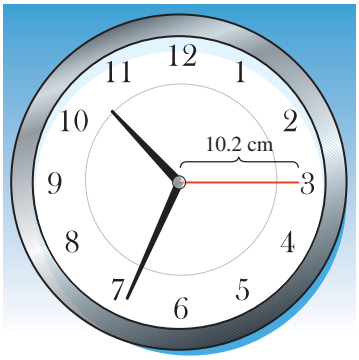


FIGURA 4.16

Ejemplo 6 Hallar la rapidez lineal

La aguja del segundero de un reloj mide 10.2 centímetros de largo, como se muestra en la Figura 4.16. Encuentre la rapidez lineal de la punta de esta aguja cuando se mueve por la carátula del reloj.

Solución

En una revolución, la longitud de arco recorrida es

$$\begin{aligned} s &= 2\pi r \\ &= 2\pi(10.2) \qquad \text{Sustituir por } r. \\ &= 20.4\pi \text{ centímetros.} \end{aligned}$$

El tiempo requerido para que la aguja del segundero recorra esta distancia es

$$t = 1 \text{ minuto} = 60 \text{ segundos.}$$

Entonces, la rapidez lineal de la punta de la aguja es

$$\begin{aligned} \text{Rapidez lineal} &= \frac{s}{t} \\ &= \frac{20.4\pi \text{ centímetros}}{60 \text{ segundos}} \\ &\approx 1.068 \text{ centímetros por segundo.} \end{aligned}$$

PUNTO *de repaso* Ahora trate de hacer el Ejercicio 111.

FIGURA 4.17

Ejemplo 7 Hallar la rapidez angular y lineal

Las palas de una turbina de viento miden 116 pies de largo (vea Figura 4.17). La hélice gira a 15 revoluciones por minuto.

a. Encuentre la rapidez angular de la hélice en radianes por minuto.

b. Encuentre la rapidez lineal de las puntas de las palas.

Solución

a. Debido a que cada revolución genera 2π radianes, se deduce que la hélice gira $(15)(2\pi) = 30\pi$ radianes por minuto. En otras palabras, la velocidad angular es

$$\begin{aligned} \text{Rapidez angular} &= \frac{\theta}{t} \\ &= \frac{30\pi \text{ radianes}}{1 \text{ minuto}} = 30\pi \text{ radianes por minuto.} \end{aligned}$$

b. La velocidad lineal es

$$\begin{aligned} \text{Rapidez lineal} &= \frac{s}{t} \\ &= \frac{r\theta}{t} \\ &= \frac{(116)(30\pi) \text{ pies}}{1 \text{ minuto}} \approx 10\,933 \text{ pies por minuto.} \end{aligned}$$

PUNTO *de repaso* Ahora trate de hacer el Ejercicio 113.

Un **sector circular** es la región limitada por dos radios de la circunferencia y su arco intersecado (vea Figura 4.18).

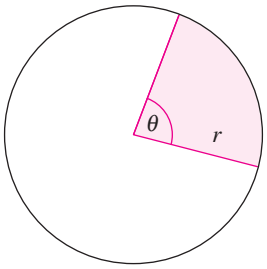


FIGURA 4.18

Área de un sector circular

Para una circunferencia de radio r, el área A de un sector circular con ángulo central θ está dado por

$$A = \frac{1}{2}r^2\theta$$

donde θ se mide en radianes.

Ejemplo 8 Área de un sector circular

Un aspersor en una "calle" de un campo de golf riega agua a una distancia de 70 pies y gira un ángulo de 120° (vea Figura 4.19). Encuentre el área de la "calle" regada por el aspersor.

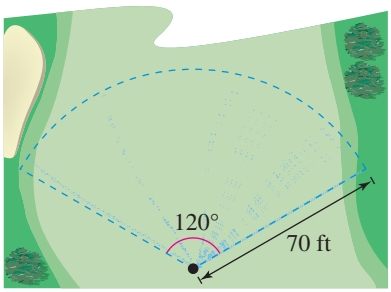


FIGURA 4.19

Solución

Primero convierta 120° a radianes como sigue.

$$\theta = 120°$$

$$= (120 \text{ grad})\left(\frac{\pi \text{ rad}}{180 \text{ grad}}\right) \quad \text{Multiplicar por } \pi/180.$$

$$= \frac{2\pi}{3} \text{ radianes}$$

Entonces, usando $\theta = 2\pi/3$ y $r = 70$, el área es

$$A = \frac{1}{2}r^2\theta \quad \text{Fórmula para el área de un sector circular}$$

$$= \frac{1}{2}(70)^2\left(\frac{2\pi}{3}\right) \quad \text{Sustituir } r \text{ y } \theta.$$

$$= \frac{4900\pi}{3} \quad \text{Simplificar.}$$

$$\approx 5131 \text{ pies cuadrados.} \quad \text{Simplificar.}$$

PUNTO *de repaso* Ahora trate de hacer el Ejercicio 117.

4.1 EJERCICIOS

En www.CalcChat.com vea las soluciones a los ejercicios impares.

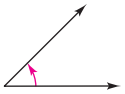
VOCABULARIO: Llene los espacios en blanco.

1. _____ significa "medición de triángulos".
2. Un _____ está determinado al girar un rayo en torno de su punto extremo.
3. Dos ángulos que tengan los mismos lados inicial y terminal son _____.
4. Un _____ es la medida de un ángulo central que interseca un arco igual al radio de la circunferencia.
5. Los ángulos que miden entre 0 y $\pi/2$ son ángulos _____, y los ángulos que miden entre $\pi/2$ y π son ángulos _____.
6. Dos ángulos positivos que tengan la suma de $\pi/2$ son ángulos _____, mientras que dos ángulos positivos que tengan una suma de π son ángulos _____.
7. La medida de ángulo que sea equivalente a una rotación de $\frac{1}{360}$ de una revolución completa alrededor del vértice de un ángulo es_____.
8. 180 grados = _____ radianes.
9. La velocidad _____ de una partícula es la razón entre la longitud del arco y el tiempo de recorrido, y la velocidad _____ de una partícula es la razón entre el ángulo central y el tiempo de recorrido.
10. El área A de un sector circular con radio r y ángulo central θ, donde θ se mide en radianes, está dada por la fórmula _____.

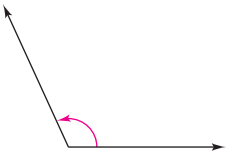
HABILIDADES Y APLICACIONES

En los Ejercicios 11-16, estime el ángulo al medio radián más cercano.

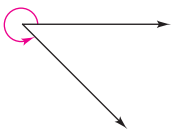
11.



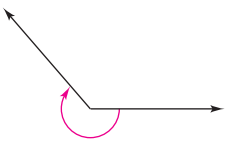
12.



13.

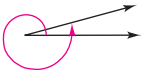


14.



15.

16.



En los Ejercicios 17-22, determine el cuadrante en el que se encuentra cada uno de los ángulos. (La medida del ángulo está dada en radianes.)

17. (a) $\frac{\pi}{4}$ (b) $\frac{5\pi}{4}$

18. (a) $\frac{11\pi}{8}$ (b) $\frac{9\pi}{8}$

19. (a) $-\frac{\pi}{6}$ (b) $-\frac{\pi}{3}$

20. (a) $-\frac{5\pi}{6}$ (b) $-\frac{11\pi}{9}$

21. (a) 3.5 (b) 2.25

22. (a) 6.02 (b) -4.25

En los Ejercicios 23-26, trace cada ángulo en posición normal.

23. (a) $\frac{\pi}{3}$ (b) $-\frac{2\pi}{3}$

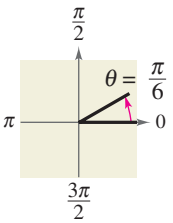
24. (a) $-\frac{7\pi}{4}$ (b) $\frac{5\pi}{2}$

25. (a) $\frac{11\pi}{6}$ (b) -3

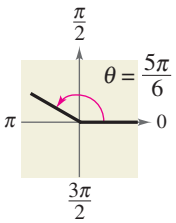
26. (a) 4 (b) 7π

En los Ejercicios 27-30, determine dos ángulos coterminales (uno positivo y uno negativo) por cada ángulo. Dé sus respuestas en radianes.

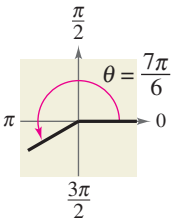
27. (a)



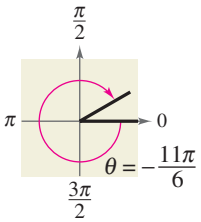
(b)



28. (a)



(b)



29. (a) $\theta = \frac{2\pi}{3}$ (b) $\theta = \frac{\pi}{12}$

30. (a) $\theta = -\frac{9\pi}{4}$ (b) $\theta = -\frac{2\pi}{15}$

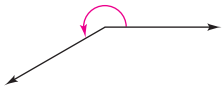
En los Ejercicios 31-34, encuentre (si es posible) el complemento y suplemento de cada uno de los ángulos.

31. (a) $\pi/3$ (b) $\pi/4$ **32.** (a) $\pi/12$ (b) $11\pi/12$

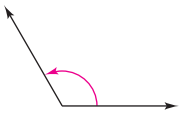
33. (a) 1 (b) 2 **34.** (a) 3 (b) 1.5

En los Ejercicios 35-40, estime el número de grados del ángulo. Use transportador para verificar su respuesta.

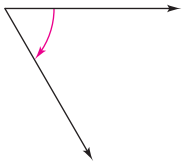
35.



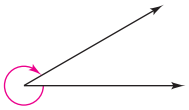
36.



37.

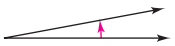


38.



39.

40.



En los Ejercicios 41-44, determine el cuadrante en el que se encuentra cada uno de los ángulos.

41. (a) 130° (b) 285°

42. (a) 8.3° (b) 257° 30′

43. (a) −132° 50′ (b) −336°

44. (a) −260° (b) −3.4°

En los Ejercicios 45-48, trace cada uno de los ángulos en posición normal.

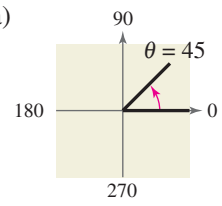
45. (a) 90° (b) 180° **46.** (a) 270° (b) 120°

47. (a) −30° (b) −135°

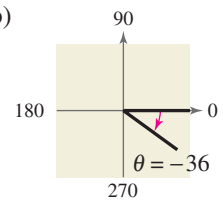
48. (a) −750° (b) −600°

En los Ejercicios 49-52, determine dos ángulos coterminales (uno positivo y otro negativo) por cada uno de los ángulos. Proporcione sus respuestas en grados.

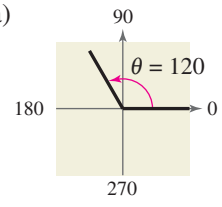
49. (a)



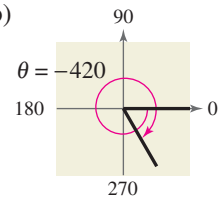
(b)



50. (a)



(b)



51. (a) $\theta = 240°$ (b) $\theta = -180°$

52. (a) $\theta = -390°$ (b) $\theta = 230°$

En los Ejercicios 53-56, encuentre (si es posible) el complemento y suplemento de cada uno de los ángulos.

53. (a) 18° (b) 85° **54.** (a) 46° (b) 93°

55. (a) 150° (b) 79° **56.** (a) 130° (b) 170°

En los Ejercicios 57-60, reescriba cada ángulo con su medida en radianes como múltiplo de π. (No use calculadora.)

57. (a) 30° (b) 45° **58.** (a) 315° (b) 120°

59. (a) −20° (b) −60° **60.** (a) −270° (b) 144°

En los Ejercicios 61-64, reescriba cada uno de los ángulos con su medida en grados. (No use calculadora.)

61. (a) $\frac{3\pi}{2}$ (b) $\frac{7\pi}{6}$ **62.** (a) $-\frac{7\pi}{12}$ (b) $\frac{\pi}{9}$

63. (a) $\frac{5\pi}{4}$ (b) $-\frac{7\pi}{3}$ **64.** (a) $\frac{11\pi}{6}$ (b) $\frac{34\pi}{15}$

En los Ejercicios 65-72, convierta la medida del ángulo de grados a radianes. Redondee a tres lugares decimales.

65. 45° **66.** 87.4°

67. −216.35° **68.** −48.27°

69. 532° **70.** 345°

71. −0.83° **72.** 0.54°

En los Ejercicios 73-80, convierta la medida del ángulo de radianes a grados. Redondee a tres lugares decimales.

73. $\pi/7$ **74.** $5\pi/11$

75. $15\pi/8$ **76.** $13\pi/2$

77. -4.2π **78.** 4.8π

79. −2 **80.** −0.57

En los Ejercicios 81-84, convierta cada medida del ángulo a forma de grado decimal sin usar calculadora. A continuación verifique sus respuestas usando calculadora.

81. (a) 54° 45′ (b) −128° 30′

82. (a) 245° 10′ (b) 2° 12′

83. (a) 85° 18′ 30″ (b) 330° 25″

84. (a) −135° 36″ (b) −408° 16′ 20″

En los Ejercicios 85-88, convierta cada medida del ángulo a grados, minutos y segundos sin usar calculadora. A continuación verifique sus respuestas usando calculadora.

85. (a) 240.6° (b) −145.8°

86. (a) −345.12° (b) 0.45°

87. (a) 2.5° (b) −3.58°

88. (a) −0.36° (b) 0.79°

En los Ejercicios 89-92, encuentre la longitud del arco en una circunferencia de radio r intersecado por un ángulo central θ.

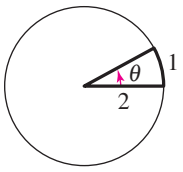
	Radio r	*Ángulo central θ*
89.	15 pulgadas	120°
90.	9 pies	60°
91.	3 metros	150°
92.	20 centímetros	45°

En los Ejercicios 93-96, encuentre la medida en radianes del ángulo central de una circunferencia de radio r que corta un arco de longitud s.

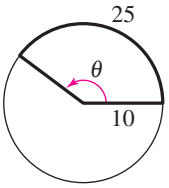
	Radio r	*Longitud de arco s*
93.	4 pulgadas	18 pulgadas
94.	14 pies	8 pies
95.	25 centímetros	10.5 centímetros
96.	80 kilómetros	150 kilómetros

En los Ejercicios 97-100, use la longitud de arco y radio dados para hallar el ángulo θ (en radianes).

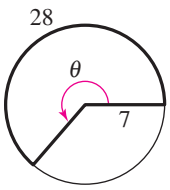
97.



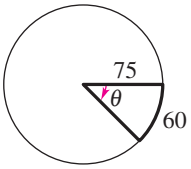
98.



99.



100.



En los Ejercicios 101-104, encuentre el área del sector circular con radio r y ángulo central θ.

	Radio r	*Ángulo central θ*
101.	6 pulgadas	$\pi/3$
102.	12 milímetros	$\pi/4$
103.	2.5 pies	225°
104.	1.4 millas	330°

DISTANCIA ENTRE CIUDADES En los Ejercicios 105 y 106, encuentre la distancia entre las ciudades. Suponga que la Tierra es una esfera de 4000 millas de radio y que las ciudades están en la misma longitud (una ciudad está al norte de la otra).

	Ciudad	*Latitud*
105.	Dallas, Texas	32° 47′ 39″ N
	Omaha, Nebraska	41° 15′ 50″ N
	Ciudad	*Latitud*
106.	San Francisco, California	37° 47′ 36″ N
	Seattle, Washington	47° 37′ 18″ N

107. DIFERENCIA EN LATITUDES Suponiendo que la Tierra es una esfera de 6378 kilómetros, ¿cuál es la diferencia en las latitudes de Syracuse, Nueva York, y Annapolis, Maryland, donde Syracuse está a unos 450 kilómetros al norte de Annapolis?

108. DIFERENCIA EN LATITUDES Suponiendo que la Tierra es una esfera de 6378 kilómetros, ¿cuál es la diferencia en las latitudes de Lynchburg, Virginia, y Myrtle Beach, Carolina del Sur, donde Lynchburg está a unos 400 kilómetros al norte de Myrtle Beach?

109. INSTRUMENTACIÓN La aguja de un voltímetro mide 6 centímetros de largo (vea figura). Encuentre el ángulo que gira la aguja cuando se mueve 2.5 centímetros en la escala.

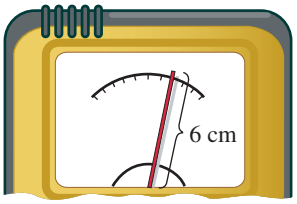


FIGURA PARA EJ. 109

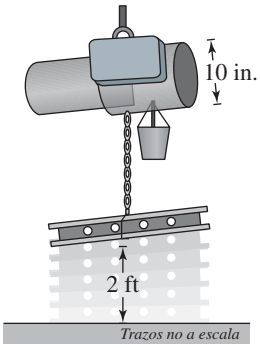


FIGURA PARA EJ. 110

110. GRÚA ELÉCTRICA Se usa una grúa eléctrica para levantar una viga (vea figura). El diámetro del tambor de la grúa mide 10 pulgadas, y la viga debe ser elevada 2 pies. Encuentre el número de grados que debe girar el tambor.

111. RAPIDEZ LINEAL Y ANGULAR Una sierra eléctrica circular tiene una hoja de $7\frac{1}{4}$ pulgadas de diámetro, que gira a 5000 revoluciones por minuto.

(a) Encuentre la rapidez angular de la hoja de la sierra en radianes por minuto.

(b) Encuentre la rapidez lineal (en pies por minuto) de uno de los 24 dientes cortantes cuando hace contacto con la madera que se corta.

112. RAPIDEZ LINEAL Y ANGULAR Un carrusel (tiovivo) de 50 pies de diámetro hace 4 revoluciones por minuto.

(a) Encuentre la rapidez angular del carrusel en radianes por minuto.

(b) Encuentre la rapidez lineal (en pies por minuto) del borde de la plataforma del carrusel.

113. RAPIDEZ LINEAL Y ANGULAR El diámetro de un DVD es de unos 12 centímetros. El motor de movimiento del reproductor de DVD está controlado para girar en forma precisa entre 200 y 500 revoluciones por minuto, según la pista que sea leída.

(a) Encuentre un intervalo para la rapidez angular de un DVD cuando gira.

(b) Encuentre el intervalo para la rapidez lineal de un punto en la pista más externa cuando gira el DVD.

114. RAPIDEZ ANGULAR Una polea de dos pulgadas de diámetro, en un motor eléctrico que opera a 1700 revoluciones por minuto, está conectada mediante una banda a una polea de cuatro pulgadas de diámetro en el eje de una sierra.

(a) Encuentre la rapidez angular (en radianes por minuto) de cada una de las poleas.

(b) Encuentre las revoluciones por minuto de la sierra.

115. RAPIDEZ ANGULAR Un auto se desplaza a razón de 65 millas por hora, y el diámetro de sus ruedas es 2 pies.

(a) Encuentre el número de revoluciones por minuto al que giran las ruedas.

(b) Encuentre la rapidez angular de las ruedas en radianes por minuto.

116. RAPIDEZ ANGULAR Una máquina de alineación y balanceo por computadora hace girar una llanta, de 25 pulgadas de diámetro, a 480 revoluciones por minuto.

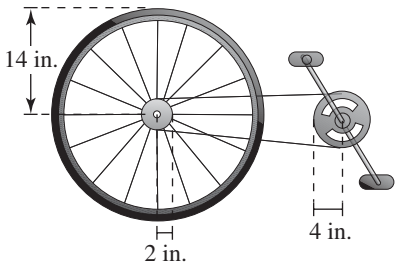
(a) Encuentre la rapidez en pavimento (en millas por hora) a la que está siendo balanceada la llanta.

(b) ¿A qué rapidez debe ser ajustada la máquina de alineación y balanceo para que la llanta se pruebe a 55 millas por hora?

117. ÁREA Un aspersor de un "green" de golf está ajustado para regar agua a una distancia de 15 metros y para girar un ángulo de 140°. Trace un diagrama que muestre la región que puede ser irrigada con el aspersor. Encuentre el área de la región.

118. ÁREA El limpiador del parabrisas trasero o "medallón" de un auto gira 125°. La longitud total del mecanismo del limpiador es de 25 pulgadas y limpia el "medallón" en una distancia de 14 pulgadas. Encuentre el área cubierta por el limpiador.

119. VELOCIDAD DE UNA BICICLETA Los radios de la rueda dentada de los pedales (plato), la rueda dentada y de la rueda de la bicicleta de la figura miden 4, 2 y 14 pulgadas, respectivamente. Un ciclista pedalea a razón de 1 revolución por segundo.



(a) Encuentre la rapidez de la bicicleta en pies por segundo y en millas por hora.

(b) Use su resultado del inciso (a) para escribir una función para la distancia d (en millas) que recorre un ciclista, en términos del número n de revoluciones de la rueda dentada de los pedales.

(c) Escriba una función para hallar la distancia d (en millas) que un ciclista recorre en términos del tiempo t (en segundos). Compare esta función con la función del inciso (b).

(d) Clasifique los tipos de funciones encontradas en los incisos (b) y (c). Explique su razonamiento.

120. TOQUE FINAL Escriba un breve ensayo que explique a un condiscípulo el significado de cada uno de los siguientes conceptos.

(a) un ángulo en posición normal

(b) ángulos positivos y negativos

(c) ángulos coterminales

(d) medida de ángulo en grados y radianes

(e) ángulos obtusos y agudos

(f) ángulos complementarios y suplementarios

EXPLORACIÓN

¿VERDADERO O FALSO? En los Ejercicios 121-123, determine si la proposición es verdadera o falsa. Justifique su respuesta.

121. Una medida de 4 radianes corresponde a dos revoluciones completas desde el lado inicial al lado terminal de un ángulo.

122. La diferencia entre las medidas de dos ángulos coterminales es siempre un múltiplo de 360° si se expresa en grados, y es siempre un múltiplo de 2π radianes si se expresa en radianes.

123. Un ángulo que mida $-1260°$ se encuentra en el tercer cuadrante.

124. PIÉNSELO Un motor de ventilador gira a una rapidez angular determinada. ¿Cómo cambia la rapidez de las puntas de las aspas si un ventilador de mayor diámetro se instala en el motor? Explique.

125. PIÉNSELO ¿Un grado o un radián es la unidad de medida más grande? Explique.

126. ESCRITURA Si el radio de un círculo es creciente y la magnitud del ángulo central se conserva constante, ¿cómo está cambiando la longitud del arco intersecado? Explique su razonamiento.

127. PRUEBA Demuestre que el área de un sector circular de radio r con ángulo central θ es $A = \frac{1}{2}\theta r^2$, donde θ se mide en radianes.

4.2 Funciones trigonométricas: la circunferencia unitaria

Lo que debe aprender

- Identificar la circunferencia unitaria y describir su relación con los números reales.
- Evaluar funciones trigonométricas usando la circunferencia unitaria.
- Usar el dominio y periodo para evaluar las funciones seno y coseno.
- Usar calculadora para evaluar funciones trigonométricas.

Por qué debe aprenderlo

Se usan funciones trigonométricas para modelar el movimiento de un peso oscilante. Por ejemplo, en el Ejercicio 60 de la página 298 el desplazamiento de un peso oscilante suspendido por un resorte, a partir del equilibrio, se modela como una función del tiempo

Richard Megna/Fundamental Photographs

La circunferencia unitaria

Las dos perspectivas históricas de la trigonometría incorporan diferentes métodos para introducir funciones trigonométricas. Nuestra primera introducción de estas funciones está basada en la circunferencia unitaria.

Considere la **circunferencia unitaria** dada por

$$x^2 + y^2 = 1$$ Circunferencia unitaria

como se ve en la Figura 4.20.

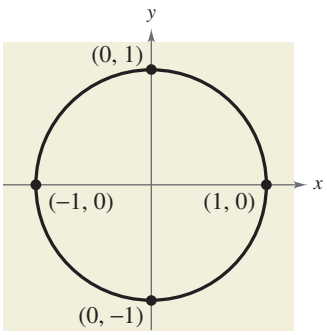


FIGURA 4.20

Imagine que la recta numérica real está enrollada alrededor de esta circunferencia, con los números positivos correspondientes a un enrollado en sentido contrario al giro de las manecillas de un reloj (levógiro) y con los números negativos correspondientes a un enrollado en el sentido de giro de las manecillas de un reloj (dextrógiro), como se ve en la Figura 4.21.

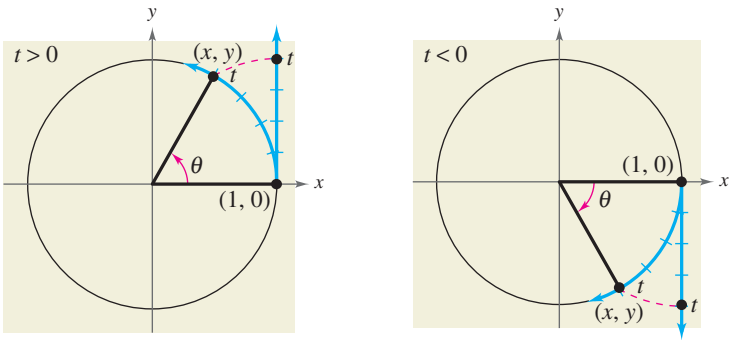


FIGURA 4.21

Como la recta numérica real está enrollada alrededor de la circunferencia unitaria, cada número real t corresponde a un punto (x, y) sobre la circunferencia. Por ejemplo, el número real 0 corresponde al punto $(1, 0)$. Además, como la circunferencia unitaria tiene una longitud de arco de 2π, el número real 2π también corresponde al punto $(1, 0)$.

En general, cada número real t también corresponde a un ángulo central θ (en posición normal) cuya medida en radianes es t. Con esta interpretación de t, la fórmula de la longitud del arco $s = r\theta$ (con $r = 1$) indica que el número real t es la longitud (direccional) del arco intersecado por el ángulo θ, dado en radianes.

Las funciones trigonométricas

De la exposición anterior se deduce que las coordenadas x y y son dos funciones de la variable real t. Se pueden usar estas coordenadas para definir las seis funciones trigonométricas de t.

seno **cosecante** **coseno** **secante** **tangente** **cotangente**

Estas seis funciones normalmente se abrevian como sen, csc, cos, sec, tan y cot, respectivamente.

Tip de estudio

Observe en las definiciones de la derecha que las funciones del segundo renglón son las recíprocas de las correspondientes funciones del primer renglón.

Definiciones de las funciones trigonométricas

Sea t un número real y sea (x, y) el punto sobre la circunferencia unitaria correspondiente a t.

$$\operatorname{sen} t = y \qquad \cos t = x \qquad \tan t = \frac{y}{x}, \quad x \neq 0$$

$$\csc t = \frac{1}{y}, \quad y \neq 0 \qquad \sec t = \frac{1}{x}, \quad x \neq 0 \qquad \cot t = \frac{x}{y}, \quad y \neq 0$$

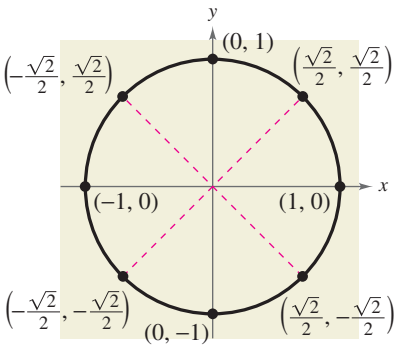


FIGURA 4.22

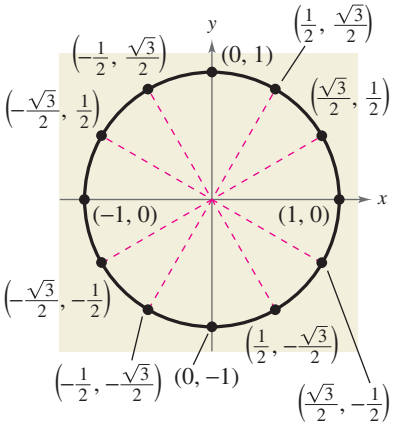


FIGURA 4.23

En las definiciones de las funciones trigonométricas, observe que la tangente y secante no están definidas cuando $x = 0$. Por ejemplo, como $t = \pi/2$ corresponde a $(x, y) = (0, 1)$, se deduce que $\tan(\pi/2)$ y $\sec(\pi/2)$ *no están definidas*. Del mismo modo, la cotangente y cosecante no están definidas cuando $y = 0$. Por ejemplo, como $t = 0$ corresponde a $(x, y) = (1, 0)$, cot 0 y csc 0 *no están definidas*.

En la Figura 4.22, la circunferencia unitaria se ha dividido en ocho arcos iguales, correspondientes a valores de t de

$$0, \frac{\pi}{4}, \frac{\pi}{2}, \frac{3\pi}{4}, \pi, \frac{5\pi}{4}, \frac{3\pi}{2}, \frac{7\pi}{4} \text{ y } 2\pi.$$

Análogamente, en la Figura 4.23, la circunferencia unitaria se ha dividido en 12 arcos iguales, correspondientes a valores de t de

$$0, \frac{\pi}{6}, \frac{\pi}{3}, \frac{\pi}{2}, \frac{2\pi}{3}, \frac{5\pi}{6}, \pi, \frac{7\pi}{6}, \frac{4\pi}{3}, \frac{3\pi}{2}, \frac{5\pi}{3}, \frac{11\pi}{6} \text{ y } 2\pi.$$

Para verificar los puntos sobre la circunferencia unitaria de la Figura 4.22, observe que $\left(\frac{\sqrt{2}}{2}, \frac{\sqrt{2}}{2}\right)$ también está sobre la recta $y = x$. Por tanto, sustituir x por y en la ecuación de la circunferencia unitaria produce lo siguiente.

$$x^2 + x^2 = 1 \quad \Rightarrow \quad 2x^2 = 1 \quad \Rightarrow \quad x^2 = \frac{1}{2} \quad \Rightarrow \quad x = \pm\frac{\sqrt{2}}{2}$$

Como el punto está en el primer cuadrante, $x = \frac{\sqrt{2}}{2}$ y como $y = x$, también tenemos que $y = \frac{\sqrt{2}}{2}$. Se puede usar igual razonamiento para verificar el resto de los puntos en la Figura 4.22 y los puntos en la Figura 4.23.

Usando las coordenadas (x, y) en las Figuras 4.22 y 4.23, se pueden evaluar las funciones trigonométricas para valores de t comunes. Este procedimiento está demostrado en los Ejemplos 1, 2 y 3. Usted debe estudiar y aprender estos valores de funciones exactos para valores de t comunes, porque le ayudarán en secciones posteriores para efectuar cálculos.

Ayuda de álgebra

En el Apéndice A.1 y en el Apéndice A.2, respectivamente, puede repasar la división de fracciones y la racionalización denominadores.

Ejemplo 1 Evaluar funciones trigonométricas

Evalúe las seis funciones trigonométricas en cada número real.

a. $t = \frac{\pi}{6}$ **b.** $t = \frac{5\pi}{4}$ **c.** $t = 0$ **d.** $t = \pi$

Solución

Para cada valor de t, empiece por hallar el punto correspondiente (x, y) en la circunferencia unitaria. A continuación use las definiciones de funciones trigonométricas citadas en la página 293.

a. $t = \frac{\pi}{6}$ corresponde al punto $(x, y) = \left(\frac{\sqrt{3}}{2}, \frac{1}{2}\right)$.

$$\operatorname{sen}\frac{\pi}{6} = y = \frac{1}{2} \qquad \csc\frac{\pi}{6} = \frac{1}{y} = \frac{1}{1/2} = 2$$

$$\cos\frac{\pi}{6} = x = \frac{\sqrt{3}}{2} \qquad \sec\frac{\pi}{6} = \frac{1}{x} = \frac{2}{\sqrt{3}} = \frac{2\sqrt{3}}{3}$$

$$\tan\frac{\pi}{6} = \frac{y}{x} = \frac{1/2}{\sqrt{3}/2} = \frac{1}{\sqrt{3}} = \frac{\sqrt{3}}{3} \qquad \cot\frac{\pi}{6} = \frac{x}{y} = \frac{\sqrt{3}/2}{1/2} = \sqrt{3}$$

b. $t = \frac{5\pi}{4}$ corresponde al punto $(x, y) = \left(-\frac{\sqrt{2}}{2}, -\frac{\sqrt{2}}{2}\right)$.

$$\operatorname{sen}\frac{5\pi}{4} = y = -\frac{\sqrt{2}}{2} \qquad \csc\frac{5\pi}{4} = \frac{1}{y} = -\frac{2}{\sqrt{2}} = -\sqrt{2}$$

$$\cos\frac{5\pi}{4} = x = -\frac{\sqrt{2}}{2} \qquad \sec\frac{5\pi}{4} = \frac{1}{x} = -\frac{2}{\sqrt{2}} = -\sqrt{2}$$

$$\tan\frac{5\pi}{4} = \frac{y}{x} = \frac{-\sqrt{2}/2}{-\sqrt{2}/2} = 1 \qquad \cot\frac{5\pi}{4} = \frac{x}{y} = \frac{-\sqrt{2}/2}{-\sqrt{2}/2} = 1$$

c. $t = 0$ corresponde al punto $(x, y) = (1, 0)$.

$$\operatorname{sen} 0 = y = 0 \qquad \csc 0 = \frac{1}{y} \text{ no está definida.}$$

$$\cos 0 = x = 1 \qquad \sec 0 = \frac{1}{x} = \frac{1}{1} = 1$$

$$\tan 0 = \frac{y}{x} = \frac{0}{1} = 0 \qquad \cot 0 = \frac{x}{y} \text{ no está definida.}$$

d. $t = \pi$ corresponde al punto $(x, y) = (-1, 0)$.

$$\operatorname{sen}\pi = y = 0 \qquad \csc\pi = \frac{1}{y} \text{ no está definida.}$$

$$\cos\pi = x = -1 \qquad \sec\pi = \frac{1}{x} = \frac{1}{-1} = -1$$

$$\tan\pi = \frac{y}{x} = \frac{0}{-1} = 0 \qquad \cot\pi = \frac{x}{y} \text{ no está definida.}$$

PUNTO de repaso Ahora trate de hacer el Ejercicio 23.

Ejemplo 2 Evaluar funciones trigonométricas

Evalúe las seis funciones trigonométricas en $t = -\frac{\pi}{3}$.

Solución

Moviéndose en el sentido dextrógiro se deduce que $t = -\pi/3$ corresponde al punto $(x, y) = \left(1/2, -\sqrt{3}/2\right)$.

$$\operatorname{sen}\left(-\frac{\pi}{3}\right) = -\frac{\sqrt{3}}{2} \qquad \csc\left(-\frac{\pi}{3}\right) = -\frac{2}{\sqrt{3}} = -\frac{2\sqrt{3}}{3}$$

$$\cos\left(-\frac{\pi}{3}\right) = \frac{1}{2} \qquad \sec\left(-\frac{\pi}{3}\right) = 2$$

$$\tan\left(-\frac{\pi}{3}\right) = \frac{-\sqrt{3}/2}{1/2} = -\sqrt{3} \qquad \cot\left(-\frac{\pi}{3}\right) = \frac{1/2}{-\sqrt{3}/2} = -\frac{1}{\sqrt{3}} = -\frac{\sqrt{3}}{3}$$

PUNTO *de repaso* Ahora trate de hacer el Ejercicio 33.

Dominio y periodo de seno y coseno

El *dominio* de las funciones seno y coseno es el conjunto de todos los números reales. Para determinar la variación de estas dos funciones, considere la circunferencia unitaria que se muestra en la Figura 4.24. Por definición, sen $t = y$ y cos $t = x$. Como (x, y) está en la circunferencia unitaria, sabemos que $-1 \le y \le 1$ y $-1 \le x \le 1$. Por tanto, los valores de seno y coseno también varían entre -1 y 1.

$$-1 \le y \le 1 \quad \text{y} \quad -1 \le x \le 1$$
$$-1 \le \operatorname{sen} t \le 1 \quad \text{y} \quad -1 \le \cos t \le 1$$

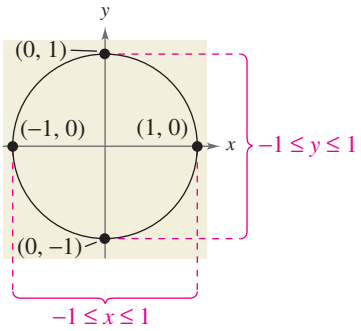


FIGURA 4.24

Sumar 2π a cada valor de t en el intervalo $[0, 2\pi]$ completa una segunda revolución alrededor de la circunferencia unitaria, como se muestra en la Figura 4.25. Los valores de $\operatorname{sen}(t + 2\pi)$ y $\cos(t + 2\pi)$ corresponde a los de sen t y cos t. Se pueden obtener resultados semejantes para revoluciones repetidas (positivas y negativas) en la circunferencia unitaria. Esto lleva al resultado general

$$\operatorname{sen}(t + 2\pi n) = \operatorname{sen} t$$

y

$$\cos(t + 2\pi n) = \cos t$$

para cualquier entero n y número real t. Las funciones que se comportan de manera repetitiva (o cíclica) se denominan **periódicas.**

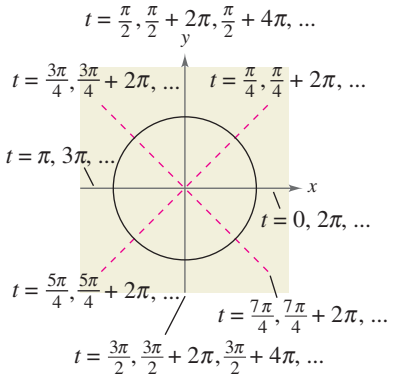


FIGURA 4.25

Definición de función periódica

Una función f es **periódica** si existe un número real positivo c tal que

$$f(t + c) = f(t)$$

para toda t en el dominio de f. El número más pequeño c para el cual f es periódica se denomina **periodo** de f.

Recuerde de la Sección 1.5 que una función f es *par* si $f(-t) = f(t)$, y es *impar* si $f(-t) = -f(t)$.

Funciones trigonométricas pares e impares

Las funciones coseno y secante son *pares*.

$$\cos(-t) = \cos t \qquad \sec(-t) = \sec t$$

Las funciones seno, cosecante, tangente y cotangente son *impares*.

$$\operatorname{sen}(-t) = -\operatorname{sen} t \qquad \csc(-t) = -\csc t$$

$$\tan(-t) = -\tan t \qquad \cot(-t) = -\cot t$$

Ejemplo 3 Usar el periodo para evaluar el seno y coseno

a. Como $\frac{13\pi}{6} = 2\pi + \frac{\pi}{6}$, se tiene que $\operatorname{sen}\frac{13\pi}{6} = \operatorname{sen}\left(2\pi + \frac{\pi}{6}\right) = \operatorname{sen}\frac{\pi}{6} = \frac{1}{2}$.

b. Como $-\frac{7\pi}{2} = -4\pi + \frac{\pi}{2}$, se tiene que

$$\cos\left(-\frac{7\pi}{2}\right) = \cos\left(-4\pi + \frac{\pi}{2}\right) = \cos\frac{\pi}{2} = 0.$$

c. Para $\operatorname{sen} t = \frac{4}{5}$, $\operatorname{sen}(-t) = -\frac{4}{5}$ porque la función seno es impar.

PUNTO *de repaso* Ahora trate de hacer el Ejercicio 37.

Tip de estudio

De la definición de función periódica se deduce que las funciones seno y coseno son periódicas y tienen un periodo de 2π. Las otras cuatro funciones trigonométricas también son periódicas y se estudiarán en la Sección 4.6.

Evaluación de funciones trigonométricas con calculadora

Cuando evalúe una función trigonométrica con calculadora necesita poner ésta en el *modo* deseado de medida (grados o radianes).

La mayor parte de las calculadoras no tienen teclas para las funciones cosecante, secante y cotangente. Para evaluar estas funciones se puede usar la tecla x^{-1} con sus respectivas funciones recíprocas de seno, coseno y tangente. Por ejemplo, para evaluar $\csc(\pi/8)$, use el hecho de que

$$\csc\frac{\pi}{8} = \frac{1}{\operatorname{sen}(\pi/8)}$$

e introduzca la siguiente secuencia de tecleo en el modo de *radianes*.

(SIN (π ÷ 8)) x^{-1} ENTER Pantalla 2.6131259

TECNOLOGÍA

Al evaluar funciones trigonométricas con calculadora, recuerde encerrar en paréntesis todas las medidas de ángulos fraccionarios. Por ejemplo, si desea evaluar sen t para $t = \pi/6$, se debe teclear

SIN (π ÷ 6) ENTER.

Este tecleo da el valor correcto de 0.5. Observe que algunas calculadoras automáticamente ponen un paréntesis izquierdo después de funciones trigonométricas. Lea la guía de usuario de su calculadora para tecleos específicos sobre cómo evaluar funciones trigonométricas.

Ejemplo 4 Usar calculadora

	Función	*Modo*	*Tecleo en calculadora*	*Pantalla*
a.	$\operatorname{sen}\frac{2\pi}{3}$	Radianes	SIN (2 π ÷ 3) ENTER	0.8660254
b.	cot 1.5	Radianes	(TAN (1.5)) x^{-1} ENTER	0.0709148

PUNTO *de repaso* Ahora trate de hacer el Ejercicio 55.

4.2 EJERCICIO

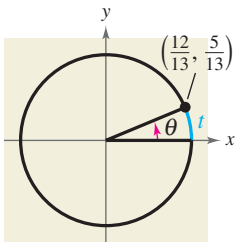
En www.CalcChat.com vea las soluciones a los ejercicios impares.

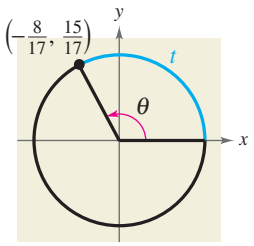
VOCABULARIO: Llene los espacios en blanco.

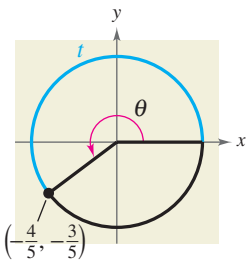
1. Cada número real t corresponde a un punto (x, y) en el _____ _____.
2. Una función f es _____ si existe un número real positivo c tal que $f(t + c) = f(t)$ para toda t en el dominio de f.
3. El número c más pequeño para el cual una función f es periódica se denomina _____ de f.
4. Una función f es _____si $f(-t) = -f(t)$ y _____ $f(-t) = f(t)$.

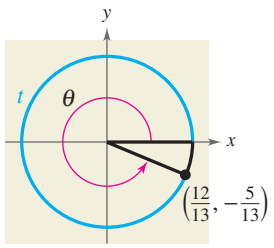
HABILIDADES Y APLICACIONES

En los Ejercicios 5-8, determine los valores exactos de las seis funciones trigonométricas del número real t.

5. 

6. 

7. 

8. 

En los Ejercicios 9-16, encuentre el punto (x, y) sobre la circunferencia unitaria que corresponda al número real t.

9. $t = \frac{\pi}{2}$
10. $t = \pi$
11. $t = \frac{\pi}{4}$
12. $t = \frac{\pi}{3}$
13. $t = \frac{5\pi}{6}$
14. $t = \frac{3\pi}{4}$
15. $t = \frac{4\pi}{3}$
16. $t = \frac{5\pi}{3}$

En los Ejercicios 17-26, evalúe (si es posible) el seno, coseno y tangente del número real.

17. $t = \frac{\pi}{4}$
18. $t = \frac{\pi}{3}$
19. $t = -\frac{\pi}{6}$
20. $t = -\frac{\pi}{4}$
21. $t = -\frac{7\pi}{4}$
22. $t = -\frac{4\pi}{3}$
23. $t = \frac{11\pi}{6}$
24. $t = \frac{5\pi}{3}$
25. $t = -\frac{3\pi}{2}$
26. $t = -2\pi$

En los Ejercicios 27-34, evalúe (si es posible) las seis funciones trigonométricas del número real.

27. $t = \frac{2\pi}{3}$
28. $t = \frac{5\pi}{6}$
29. $t = \frac{4\pi}{3}$
30. $t = \frac{7\pi}{4}$
31. $t = \frac{3\pi}{4}$
32. $t = \frac{3\pi}{2}$
33. $t = -\frac{\pi}{2}$
34. $t = -\pi$

En los Ejercicios 35-42, evalúe la función trigonométrica usando su periodo como ayuda.

35. $\operatorname{sen} 4\pi$
36. $\cos 3\pi$
37. $\cos \frac{7\pi}{3}$
38. $\operatorname{sen} \frac{9\pi}{4}$
39. $\cos \frac{17\pi}{4}$
40. $\operatorname{sen} \frac{19\pi}{6}$
41. $\operatorname{sen}\left(-\frac{8\pi}{3}\right)$
42. $\cos\left(-\frac{9\pi}{4}\right)$

En los Ejercicios 43-48, use el valor de la función trigonométrica para evaluar las funciones indicadas.

43. $\operatorname{sen} t = \frac{1}{2}$
    (a) $\operatorname{sen}(-t)$
    (b) $\csc(-t)$
44. $\operatorname{sen}(-t) = \frac{3}{8}$
    (a) $\operatorname{sen} t$
    (b) $\csc t$
45. $\cos(-t) = -\frac{1}{5}$
    (a) $\cos t$
    (b) $\sec(-t)$
46. $\cos t = -\frac{3}{4}$
    (a) $\cos(-t)$
    (b) $\sec(-t)$
47. $\operatorname{sen} t = \frac{4}{5}$
    (a) $\operatorname{sen}(\pi - t)$
    (b) $\operatorname{sen}(t + \pi)$
48. $\cos t = \frac{4}{5}$
    (a) $\cos(\pi - t)$
    (b) $\cos(t + \pi)$

En los Ejercicios 49-58, use una calculadora para evaluar la función trigonométrica. Redondee la respuesta a cuatro lugares decimales. (Asegúrese que su calculadora esté puesta en el modo correcto de ángulos.)

49. $\operatorname{sen}\frac{\pi}{4}$ **50.** $\tan\frac{\pi}{3}$

51. $\cot\frac{\pi}{4}$ **52.** $\csc\frac{2\pi}{3}$

53. $\cos(-1.7)$ **54.** $\cos(-2.5)$

55. $\csc 0.8$ **56.** $\sec 1.8$

57. $\sec(-22.8)$ **58.** $\cot(-0.9)$

59. MOVIMIENTO ARMÓNICO El desplazamiento de un peso oscilante, desde el equilibrio, suspendido por un resorte está dado por $y(t) = \frac{1}{4}\cos 6t$, donde y es el desplazamiento (en pies) y t es el tiempo (en segundos). Encuentre el desplazamiento cuando (a) $t = 0$, (b) $t = \frac{1}{4}$ y (c) $t = \frac{1}{2}$.

60. MOVIMIENTO ARMÓNICO El desplazamiento de un peso oscilante, desde el equilibrio, suspendido por un resorte y sometido al efecto de un amortiguamiento de fricción, está dado por $y(t) = \frac{1}{4}e^{-t}\cos 6t$, donde y es el desplazamiento (en pies) y t es el tiempo (en segundos).

(a) Complete la tabla.

t	0	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{2}$	$\frac{3}{4}$	1
y					

(b) Use el comando *table* de una calculadora de gráficas para aproximar el tiempo cuando el peso alcance el equilibrio.

(c) ¿Qué parece ocurrir al desplazamiento cuando t aumenta?

EXPLORACION

¿VERDADERO O FALSO? **En los Ejercicios 61-64, determine si la proposición es verdadera o falsa. Justifique su respuesta.**

61. Como $\operatorname{sen}(-t) = -\operatorname{sen} t$, se puede decir que el seno de un ángulo negativo es un número negativo.

62. $\tan a = \tan(a - 6\pi)$

63. El número real 0 corresponde al punto (0, 1) en la circunferencia unitaria.

64. $\cos\left(-\frac{7\pi}{2}\right) = \cos\left(\pi + \frac{\pi}{2}\right)$

65. Sean (x_1, y_1) y (x_2, y_2) puntos en la circunferencia unitaria correspondientes a $t = t_1$ y $t = \pi - t_1$, respectivamente

(a) Identifique la simetría de los puntos (x_1, y_1) y (x_2, y_2).

(b) Haga una conjetura acerca de cualquier relación entre $\operatorname{sen} t_1$ y $\operatorname{sen}(\pi - t_1)$.

(c) Haga una conjetura acerca de cualquier relación entre $\cos t_1$ y $\cos(\pi - t_1)$.

66. Use una circunferencia unitaria para verificar que las funciones coseno y secante son pares y que las funciones seno, cosecante, tangente y cotangente son impares.

67. Verifique que $\cos 2t \neq 2\cos t$ al aproximar $\cos 1.5$ y $2\cos 0.75$.

68. Verifique que $\operatorname{sen}(t_1 + t_2) \neq \operatorname{sen} t_1 + \operatorname{sen} t_2$ al aproximar $\operatorname{sen} 0.25$, $\operatorname{sen} 0.75$ y $\operatorname{sen} 1$.

69. PIÉNSELO Como $f(t) = \operatorname{sen} t$ es una función impar $g(t) = \cos t$ es una función par, ¿qué se puede decir de la función $h(t) = f(t)g(t)$?

70. PIÉNSELO Como $f(t) = \operatorname{sen} t$ y $g(t) = \tan t$ son funciones impares, ¿qué se puede decir de la función $h(t) = f(t)g(t)$?

71. ANÁLISIS GRÁFICO Con una calculadora de gráficas en modos *radian* y *parametric*, digite las ecuaciones

$$X_{1T} = \cos T \quad \text{y} \quad Y_{1T} = \operatorname{sen} T$$

y utilice los siguientes ajustes.

$$T\text{mín} = 0,\ T\text{máx} = 6.3,\ T\text{step} = 0.1$$

$$X\text{mín} = -1.5,\ X\text{máx} = 1.5,\ X\text{scl} = 1$$

$$Y\text{mín} = -1,\ Y\text{máx} = 1,\ Y\text{scl} = 1$$

(a) Grafique las ecuaciones digitadas y describa la gráfica.

(b) Use el comando *trace* para mover el cursor alrededor de la gráfica. ¿Qué representan los valores de t? ¿Qué representan los valores de x y y?

(c) ¿Cuáles son los valores mínimo y máximo de x y y?

72. TOQUE FINAL Un estudiante a quien usted asesora ha empleado una circunferencia unitaria dividida en 8 partes iguales para completar la tabla para valores seleccionados de t. ¿Qué está mal?

t	0	$\frac{\pi}{4}$	$\frac{\pi}{2}$	$\frac{3\pi}{4}$	π
x	1	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	0	$-\frac{\sqrt{2}}{2}$	-1
y	0	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	1	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	0
$\operatorname{sen} t$	1	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	0	$-\frac{\sqrt{2}}{2}$	-1
$\cos t$	0	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	1	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	0
$\tan t$	No está definido	1	0	-1	No está definido

4.3 Trigonometría del triángulo rectángulo

Lo que debe aprender

- Evaluar funciones trigonométricas de ángulos agudos.
- Usar identidades trigonométricas fundamentales.
- Usar una calculadora para evaluar funciones trigonométricas.
- Usar funciones trigonométricas para modelar y resolver problemas de la vida real.

Por qué debe aprenderlo

Con frecuencia se usan funciones trigonométricas para analizar situaciones de la vida real. Por ejemplo, en el Ejercicio 76 de la página 309 el lector puede usar funciones trigonométricas para hallar la altura de un globo lleno de helio.

Joseph Sohm/Visions of America/Corbis

Las seis funciones trigonométricas

Nuestra segunda mirada a las funciones trigonométricas es desde la perspectiva de un *triángulo rectángulo*. Considere un triángulo rectángulo, con un ángulo agudo marcado como θ, como se ve en la Figura 4.26. Respecto al ángulo θ, los tres lados del triángulo son la **hipotenusa**, el **lado opuesto** (el lado opuesto al ángulo θ) y el **lado adyacente** (el lado adyacente al ángulo θ).

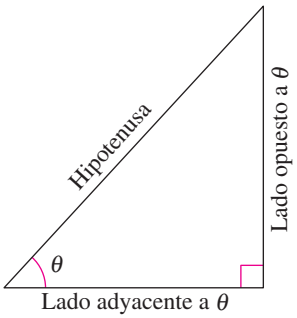


FIGURA 4.26

Usando las longitudes de estos tres lados, se pueden formar seis razones que definen las seis funciones trigonométricas del ángulo agudo θ.

seno cosecante coseno secante tangente cotangente

En las siguientes definiciones, es importante ver que $0° < \theta < 90°$ (θ está en el primer cuadrante) y que para tales ángulos el valor de cada función trigonométrica es *positiva*.

Definiciones de funciones trigonométricas de un triángulo rectángulo

Sea θ un ángulo *agudo* de un triángulo rectángulo. Las seis funciones trigonométricas del ángulo θ se definen como sigue. (Observe que las funciones del segundo renglón son las *recíprocas* de las correspondientes del primero.)

$$\operatorname{sen}\theta = \frac{\text{op}}{\text{hip}} \qquad \cos\theta = \frac{\text{ady}}{\text{hip}} \qquad \tan\theta = \frac{\text{op}}{\text{ady}}$$

$$\csc\theta = \frac{\text{hip}}{\text{op}} \qquad \sec\theta = \frac{\text{hip}}{\text{ady}} \qquad \cot\theta = \frac{\text{ady}}{\text{op}}$$

Las abreviaturas op, ady e hip representan las longitudes de los tres lados de un triángulo rectángulo.

op = la longitud del lado *opuesto* a θ

ady = la longitud del lado *adyacente* a θ

hip = la longitud de la *hipotenusa*

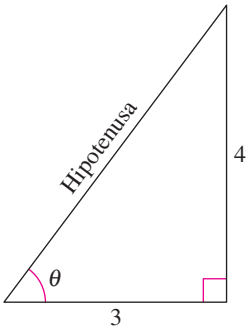


FIGURA 4.27

Ejemplo 1 Evaluar funciones trigonométricas

Use el triángulo de la Figura 4.27 para hallar los valores de las seis funciones trigonométricas de θ.

Solución

Por el teorema de Pitágoras, $(\text{hip})^2 = (\text{op})^2 + (\text{ady})^2$, tenemos que

$$\begin{aligned} \text{hip} &= \sqrt{4^2 + 3^2} \\ &= \sqrt{25} \\ &= 5. \end{aligned}$$

Por tanto, las seis funciones trigonométricas de θ son

$$\operatorname{sen}\theta = \frac{\text{op}}{\text{hip}} = \frac{4}{5} \qquad \csc\theta = \frac{\text{hip}}{\text{op}} = \frac{5}{4}$$

$$\cos\theta = \frac{\text{ady}}{\text{hip}} = \frac{3}{5} \qquad \sec\theta = \frac{\text{hip}}{\text{ady}} = \frac{5}{3}$$

$$\tan\theta = \frac{\text{op}}{\text{ady}} = \frac{4}{3} \qquad \cot\theta = \frac{\text{ady}}{\text{op}} = \frac{3}{4}.$$

PUNTO *de repaso* Ahora trate de hacer el Ejercicio 7.

Ayuda de álgebra

Puede repasar el teorema de Pitágoras en la Sección 1.1

NOTA HISTÓRICA

Georg Joachim Rhaeticus (1514-1574) fue el principal astrónomo matemático teutón del siglo XVI. Fue el primero en definir las funciones trigonométricas como razones entre los lados de un triángulo rectángulo.

En el Ejemplo 1, nos dieron las longitudes de los dos lados del triángulo rectángulo, pero no el ángulo θ. Con frecuencia, se le pedirá hallar las funciones trigonométricas de un ángulo agudo θ *determinado*. Para hacer esto, construya un triángulo rectángulo que tenga θ como uno de sus ángulos.

Ejemplo 2 Evaluar funciones trigonométricas de 45°

Encuentre los valores de sen 45°, cos 45° y tan 45°.

Solución

Construya un triángulo rectángulo que tenga 45° como uno de sus ángulos agudos, como se ve en la Figura 4.28. Seleccione la longitud del lado adyacente igual a 1. Por geometría, sabemos que el otro ángulo agudo también es de 45°. Por tanto, el triángulo es isósceles y la longitud del lado opuesta también es 1. Usando el teorema de Pitágoras, se puede hallar que la longitud de la hipotenusa es $\sqrt{2}$.

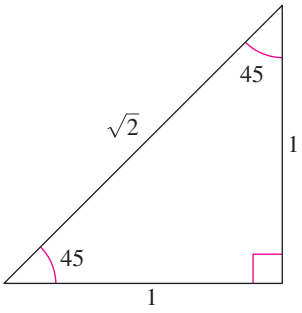


FIGURA 4.28

$$\operatorname{sen} 45° = \frac{\text{op}}{\text{hip}} = \frac{1}{\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{2}}{2}$$

$$\cos 45° = \frac{\text{ady}}{\text{hip}} = \frac{1}{\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{2}}{2}$$

$$\tan 45° = \frac{\text{op}}{\text{ady}} = \frac{1}{1} = 1$$

PUNTO *de repaso* Ahora trate de hacer el Ejercicio 23.

Tip de estudio

Como los ángulos 30°, 45° y 60° ($\pi/6$, $\pi/4$, y $\pi/3$) se presentan con frecuencia en trigonometría, usted debe aprender a construir los triángulos mostrados en las Figuras 4.28 y 4.29.

Ejemplo 3 Evaluar funciones trigonométricas de 30° y 60°

Use el triángulo equilátero que se muestra en la Figura 4.29 para hallar los valores de sen 60°, cos 60°, sen 30° y cos 30°.

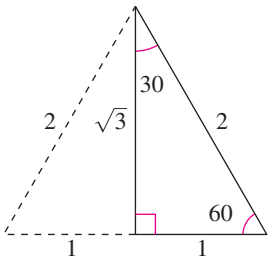


FIGURA 4.29

Solución

Use el teorema de Pitágoras y el triángulo equilátero de la Figura 4.29 para verificar las longitudes de los lados que se ven en la figura. Para $\theta = 60°$, tenemos ady $= 1$, op $= \sqrt{3}$ e hip $= 2$. Por tanto,

$$\text{sen } 60° = \frac{\text{op}}{\text{hip}} = \frac{\sqrt{3}}{2} \quad \text{y} \quad \cos 60° = \frac{\text{ady}}{\text{hip}} = \frac{1}{2}.$$

Para $\theta = 30°$, ady $= \sqrt{3}$, op $= 1$ e hip $= 2$. Por tanto,

$$\text{sen } 30° = \frac{\text{op}}{\text{hip}} = \frac{1}{2} \quad \text{y} \quad \cos 30° = \frac{\text{ady}}{\text{hip}} = \frac{\sqrt{3}}{2}.$$

PUNTO *de repaso* Ahora trate de hacer el Ejercicio 27.

TECNOLOGÍA

Se puede usar calculadora para convertir las respuestas del Ejemplo 3 en decimales, pero la forma radical es el valor exacto, el cual casi siempre se prefiere.

Senos, cosenos y tangentes de ángulos especiales

$\text{sen } 30° = \text{sen } \frac{\pi}{6} = \frac{1}{2}$	$\cos 30° = \cos \frac{\pi}{6} = \frac{\sqrt{3}}{2}$	$\tan 30° = \tan \frac{\pi}{6} = \frac{\sqrt{3}}{3}$
$\text{sen } 45° = \text{sen } \frac{\pi}{4} = \frac{\sqrt{2}}{2}$	$\cos 45° = \cos \frac{\pi}{4} = \frac{\sqrt{2}}{2}$	$\tan 45° = \tan \frac{\pi}{4} = 1$
$\text{sen } 60° = \text{sen } \frac{\pi}{3} = \frac{\sqrt{3}}{2}$	$\cos 60° = \cos \frac{\pi}{3} = \frac{1}{2}$	$\tan 60° = \tan \frac{\pi}{3} = \sqrt{3}$

En el recuadro, observe que $\text{sen } 30° = \frac{1}{2} = \cos 60°$. Esto ocurre porque 30° y 60° son ángulos complementarios. En general, se puede demostrar a partir de las definiciones de un triángulo rectángulo que las *cofunciones de ángulos complementarios son iguales*. Esto es, si θ es un ángulo agudo, las siguientes relaciones son verdaderas.

$$\text{sen}(90° - \theta) = \cos\theta \qquad \cos(90° - \theta) = \text{sen}\,\theta$$
$$\tan(90° - \theta) = \cot\theta \qquad \cot(90° - \theta) = \tan\theta$$
$$\sec(90° - \theta) = \csc\theta \qquad \csc(90° - \theta) = \sec\theta$$

Identidades trigonométricas

En trigonometría se emplea mucho tiempo estudiando relaciones entre funciones trigonométricas (identidades).

Identidades trigonométricas fundamentales

Identidades recíprocas

$$\operatorname{sen}\theta = \frac{1}{\csc\theta} \qquad \cos\theta = \frac{1}{\sec\theta} \qquad \tan\theta = \frac{1}{\cot\theta}$$

$$\csc\theta = \frac{1}{\operatorname{sen}\theta} \qquad \sec\theta = \frac{1}{\cos\theta} \qquad \cot\theta = \frac{1}{\tan\theta}$$

Identidades cociente

$$\tan\theta = \frac{\operatorname{sen}\theta}{\cos\theta} \qquad \cot\theta = \frac{\cos\theta}{\operatorname{sen}\theta}$$

Identidades pitagóricas

$$\operatorname{sen}^2\theta + \cos^2\theta = 1 \qquad 1 + \tan^2\theta = \sec^2\theta \qquad 1 + \cot^2\theta = \csc^2\theta$$

Observe que $\operatorname{sen}^2\theta$ o representa $(\operatorname{sen}\theta)^2$, $\cos^2\theta$ representa $(\cos\theta)^2$ y así sucesivamente.

Ejemplo 4 Aplicar identidades trigonométricas

Sea θ un ángulo agudo tal que $\operatorname{sen}\theta = 0.6$. Halle los valores de (a) $\cos\theta$ y (b) $\tan\theta$ usando identidades trigonométricas.

Solución

a. Para hallar el valor de $\cos\theta$ use la identidad pitagórica

$$\operatorname{sen}^2\theta + \cos^2\theta = 1.$$

En consecuencia, tenemos

$$(0.6)^2 + \cos^2\theta = 1 \qquad \text{Sustituir 0.6 por sen } \theta.$$

$$\cos^2\theta = 1 - (0.6)^2 = 0.64 \qquad \text{Restar } (0.6)^2 \text{ de cada lado.}$$

$$\cos\theta = \sqrt{0.64} = 0.8. \qquad \text{Sacar raíz cuadrada positiva.}$$

b. Ahora, conociendo el seno y coseno de θ se puede hallar que la tangente de θ es

$$\tan\theta = \frac{\operatorname{sen}\theta}{\cos\theta} = \frac{0.6}{0.8} = 0.75.$$

Use las definiciones de $\cos\theta$ y $\tan\theta$ y el triángulo de la Figura 4.30 para verificar sus resultados.

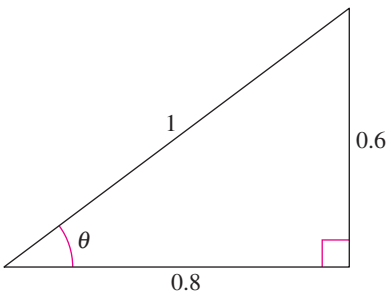


FIGURA 4.30

PUNTO de repaso Ahora trate de hacer el Ejercicio 33.

Ejemplo 5 Aplicar identidades trigonométricas

Sea θ un ángulo agudo tal que $\tan\theta = 3$. Encuentre los valores de (a) $\cot\theta$ y (b) $\sec\theta$ usando identidades trigonométricas.

Solución

a. $\cot\theta = \dfrac{1}{\tan\theta}$ Identidad recíproca

$\cot\theta = \dfrac{1}{3}$

b. $\sec^2\theta = 1 + \tan^2\theta$ Identidad pitagórica

$\sec^2\theta = 1 + 3^2$

$\sec^2\theta = 10$

$\sec\theta = \sqrt{10}$

Use las definiciones de $\cot\theta$ y $\sec\theta$, junto con el triángulo de la Figura 4.31, para verificar estos resultados.

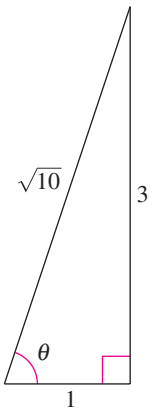


FIGURA 4.31

PUNTO *de repaso* Ahora trate de hacer el Ejercicio 35.

Tip de estudio

Se pueden usar las identidades recíprocas de seno, coseno y tangente para evaluar las funciones cosecante, secante y cotangente con una calculadora. Por ejemplo, se puede usar la siguiente secuencia de tecleo para evaluar sec 28°.

1 ÷ COS 28 ENTER

En la pantalla de la calculadora se lee 1.1325701.

Evaluación de funciones trigonométricas con calculadora

Para usar calculadora para evaluar funciones trigonométricas de ángulos medidos en grados, primero ponga la calculadora en el modo *degree* y a continuación prosiga como se demostró en la Sección 4.2. Por ejemplo, se pueden hallar valores de cos 28° y sec 28° como sigue.

	Función	*Modo*	*Tecleo en la calculadora*	*Pantalla*
a.	cos 28°	Degree	COS 28 ENTER	0.8829476
b.	sec 28°	Degree	(COS (28)) x^{-1} ENTER	1.1325701

En todo este texto, se supone que los ángulos se miden en radianes a menos que se indique lo contrario. Por ejemplo, sen 1 significa que el seno de 1 radián y sen 1° significa el seno de 1 grado.

Ejemplo 6 Usar calculadora

Use calculadora para evaluar sec(5° 40′ 12″).

Solución

Empiece por convertir a forma de grado decimal. [Recuerde que $1' = \frac{1}{60}(1°)$ y $1'' = \frac{1}{3600}(1°)$].

$$5°\,40'\,12'' = 5° + \left(\frac{40}{60}\right)° + \left(\frac{12}{3600}\right)° = 5.67°$$

A continuación, use calculadora para evaluar sec 5.67°.

Función	*Tecleos en la calculadora*	*Pantalla*
$\sec(5°\,40'\,12'') = \sec 5.67°$	(COS (5.67)) x^{-1} ENTER	1.0049166

PUNTO *de repaso* Ahora trate de hacer el Ejercicio 51.

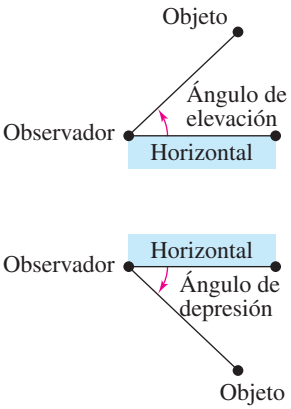


FIGURA 4.32

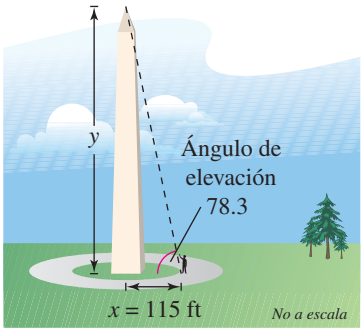


FIGURA 4.33

Aplicaciones con triángulos rectángulos

Numerosas aplicaciones de trigonometría comprenden un proceso llamado **resolver triángulos rectángulos**. En este tipo de aplicación, normalmente al estudiante se le da el lado de un triángulo rectángulo y uno de los ángulos agudos y se le pide hallar uno de los otros lados, *o bien*, se le dan dos lados y se le pide hallar uno de los ángulos agudos.

En el Ejemplo 7, el ángulo que se le da es el **ángulo de elevación**, que representa el ángulo desde la horizontal hacia un objeto. Para objetos que se encuentran debajo de la horizontal es común usar el término **ángulo de depresión**, como se ve en la Figura 4.32.

Ejemplo 7 Usar trigonometría para resolver un triángulo rectángulo

Un topógrafo está de pie a 115 pies de la base del monumento a Washington, como se ve en la Figura 4.33. El topógrafo mide el ángulo de elevación a lo alto del monumento como 78.3°. ¿Cuál es la altura del monumento a Washington?

Solución

En la Figura 4.33 se puede ver que

$$\tan 78.3° = \frac{\text{op}}{\text{ady}} = \frac{y}{x}$$

donde $x = 115$ y y es la altura del monumento. En consecuencia, la altura del monumento a Washington es

$$y = x \tan 78.3° \approx 115(4.82882) \approx 555 \text{ pies}.$$

PUNTO *de repaso* Ahora trate de hacer el ejercicio 67.

Ejemplo 8 Usar trigonometría para resolver un triángulo rectángulo

Un faro histórico está a 200 yardas de una pista para bicicletas a lo largo de la orilla de un lago. Un pasillo al faro es de 400 yardas de largo. Encuentre el ángulo agudo θ entre la pista para bicicletas y el pasillo, como se ilustra en la Figura 4.34.

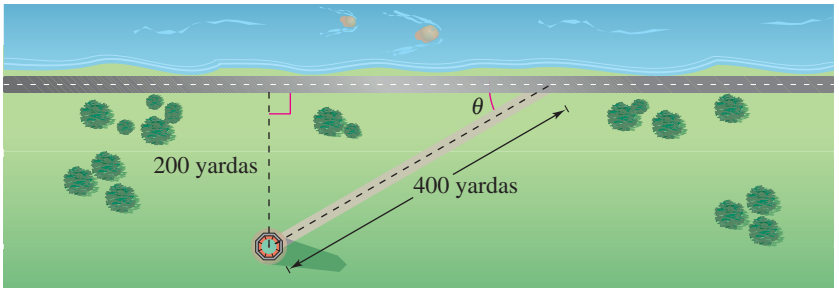


FIGURA 4.34

Solución

En la Figura 4.34 se puede ver que el seno del ángulo θ es

$$\text{sen } \theta = \frac{\text{op}}{\text{hip}} = \frac{200}{400} = \frac{1}{2}.$$

Ahora debe reconocerse que $\theta = 30°$.

PUNTO *de repaso* Ahora trate de hacer el Ejercicio 69.

Ahora ya debe saber reconocer que $\theta = 30°$ es el ángulo agudo que satisface la ecuación $\operatorname{sen}\theta = \frac{1}{2}$. Suponga, sin embargo, que se le da la ecuación $\operatorname{sen}\theta = 0.6$ y se le pide hallar el ángulo agudo θ. Como

$$\operatorname{sen} 30° = \frac{1}{2}$$
$$= 0.5000$$

y

$$\operatorname{sen} 45° = \frac{1}{\sqrt{2}}$$
$$\approx 0.7071$$

usted puede pensar que θ está entre 30° y 45°. En una sección posterior estudiará un método mediante el cual se puede determinar un valor más preciso de θ.

Ejemplo 9 Resolver un triángulo rectángulo

Encuentre la longitud c de la rampa para patinetas que se ve en la Figura 4.35.

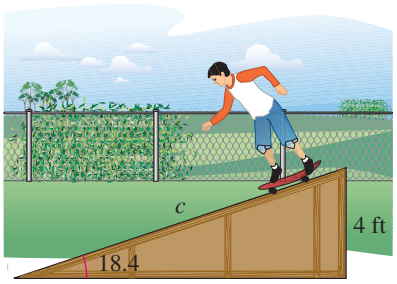


FIGURA 4.35

Solución

En la Figura 4.35 podemos ver que

$$\operatorname{sen} 18.4° = \frac{\text{op}}{\text{hip}}$$
$$= \frac{4}{c}.$$

Entonces, la longitud de la rampa para patineta es

$$c = \frac{4}{\operatorname{sen} 18.4°}$$
$$\approx \frac{4}{0.3156}$$
$$\approx 12.7 \text{ pies.}$$

PUNTO *de repaso* Ahora trate de hacer el Ejercicio 71.

4.3 EJERCICIOS

En www.CalcChat.com vea las soluciones a los ejercicios impares.

VOCABULARIO

1. Relacione la función trigonométrica con su definición de triángulo rectángulo.

(a) Seno (b) Coseno (c) Tangente (d) Cosecante (e) Secante (f) Cotangente

(i) $\frac{\text{hipotenusa}}{\text{adyacente}}$ (ii) $\frac{\text{adyacente}}{\text{opuesto}}$ (iii) $\frac{\text{hipotenusa}}{\text{opuesto}}$ (iv) $\frac{\text{adyacente}}{\text{hipotenusa}}$ (v) $\frac{\text{opuesto}}{\text{hipotenusa}}$ (vi) $\frac{\text{opuesto}}{\text{adyacente}}$

En los Ejercicios 2-4, llene los espacios en blanco.

2. Respecto al ángulo θ, los tres lados de un triángulo rectángulo son el lado _____, el lado _____ y la _____.

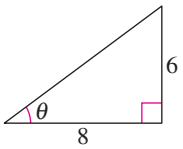
3. Las cofunciones de ángulos _____ son iguales.

4. Un ángulo que mide de la horizontal hacia arriba hasta un objeto recibe el nombre de ángulo de _____, en tanto que un ángulo que mide desde la horizontal hacia abajo hasta un objeto se denomina ángulo de _____.

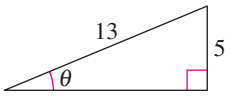
HABILIDADES Y APLICACIONES

En los Ejercicios 5-8, encuentre los valores exactos de las seis funciones trigonométricas del ángulo θ que se ilustra en la figura. (Use el teorema de Pitágoras para hallar el tercer lado del triángulo.)

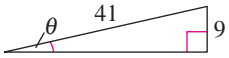
5.



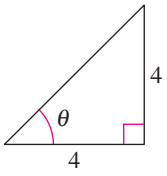
6.



7.

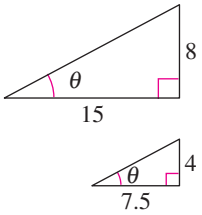


8.

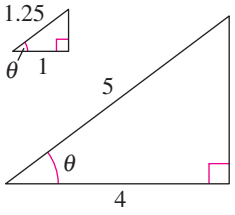


En los Ejercicios 9-12, encuentre los valores exactos de las seis funciones trigonométricas del ángulo θ para cada uno de los dos triángulos. Explique por qué los valores de la función son iguales.

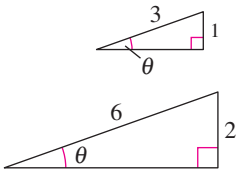
9.



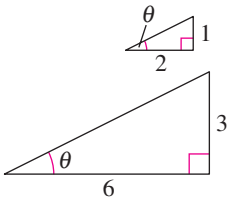
10.



11.



12.



En los Ejercicios 13-20, trace un triángulo rectángulo que corresponda a la función trigonométrica del ángulo agudo θ. Use el teorema de Pitágoras para determinar el tercer lado y a continuación encuentre las otras cinco funciones trigonométricas de θ.

13. $\tan\theta = \frac{3}{4}$ **14.** $\cos\theta = \frac{5}{6}$

15. $\sec\theta = \frac{3}{2}$ **16.** $\tan\theta = \frac{4}{5}$

17. $\operatorname{sen}\theta = \frac{1}{5}$ **18.** $\sec\theta = \frac{17}{7}$

19. $\cot\theta = 3$ **20.** $\csc\theta = 9$

En los Ejercicios 21-30, construya un triángulo apropiado para completar la tabla. ($0° \le \theta \le 90°$, $0 \le \theta \le \pi/2$)

	Función	θ *(grad)*	θ *(rad)*	*Valor de la función*
21.	sen	$30°$		
22.	cos	$45°$		
23.	sec		$\frac{\pi}{4}$	
24.	tan		$\frac{\pi}{3}$	
25.	cot			$\frac{\sqrt{3}}{3}$
26.	csc			$\sqrt{2}$
27.	csc		$\frac{\pi}{6}$	
28.	sen		$\frac{\pi}{4}$	
29.	cot			1
30.	tan			$\frac{\sqrt{3}}{3}$

En los Ejercicios 31-36, use el valor o valores de la función dada, así como identidades trigonométricas (incluidas las de cofunción), para hallar las funciones trigonométricas indicadas.

31. $\operatorname{sen} 60^\circ = \dfrac{\sqrt{3}}{2}, \quad \cos 60^\circ = \dfrac{1}{2}$

(a) $\operatorname{sen} 30^\circ$ (b) $\cos 30^\circ$
(c) $\tan 60^\circ$ (d) $\cot 60^\circ$

32. $\operatorname{sen} 30^\circ = \dfrac{1}{2}, \quad \tan 30^\circ = \dfrac{\sqrt{3}}{3}$

(a) $\csc 30^\circ$ (b) $\cot 60^\circ$
(c) $\cos 30^\circ$ (d) $\cot 30^\circ$

33. $\cos \theta = \frac{1}{3}$

(a) $\operatorname{sen} \theta$ (b) $\tan \theta$
(c) $\sec \theta$ (d) $\csc(90^\circ - \theta)$

34. $\sec \theta = 5$

(a) $\cos \theta$ (b) $\cot \theta$
(c) $\cot(90^\circ - \theta)$ (d) $\operatorname{sen} \theta$

35. $\cot \alpha = 5$

(a) $\tan \alpha$ (b) $\csc \alpha$
(c) $\cot(90^\circ - \alpha)$ (d) $\cos \alpha$

36. $\cos \beta = \dfrac{\sqrt{7}}{4}$

(a) $\sec \beta$ (b) $\operatorname{sen} \beta$
(c) $\cot \beta$ (d) $\operatorname{sen}(90^\circ - \beta)$

En los Ejercicios 37-46, use identidades trigonométricas para transformar el lado (miembro) izquierdo de la ecuación en el lado (miembro) derecho ($0 < \theta < \pi/2$).

37. $\tan \theta \cot \theta = 1$

38. $\cos \theta \sec \theta = 1$

39. $\tan \alpha \cos \alpha = \operatorname{sen} \alpha$

40. $\cot \alpha \operatorname{sen} \alpha = \cos \alpha$

41. $(1 + \operatorname{sen} \theta)(1 - \operatorname{sen} \theta) = \cos^2 \theta$

42. $(1 + \cos \theta)(1 - \cos \theta) = \operatorname{sen}^2 \theta$

43. $(\sec \theta + \tan \theta)(\sec \theta - \tan \theta) = 1$

44. $\operatorname{sen}^2 \theta - \cos^2 \theta = 2 \operatorname{sen}^2 \theta - 1$

45. $\dfrac{\operatorname{sen} \theta}{\cos \theta} + \dfrac{\cos \theta}{\operatorname{sen} \theta} = \csc \theta \sec \theta$

46. $\dfrac{\tan \beta + \cot \beta}{\tan \beta} = \csc^2 \beta$

En los Ejercicios 47-56, use calculadora para evaluar cada función. Redondee las respuestas a cuatro lugares decimales. (Asegúrese que la calculadora esté en el modo correcto de ángulos.)

47. (a) $\operatorname{sen} 10^\circ$ (b) $\cos 80^\circ$

48. (a) $\tan 23.5^\circ$ (b) $\cot 66.5^\circ$

49. (a) $\operatorname{sen} 16.35^\circ$ (b) $\csc 16.35^\circ$

50. (a) $\cot 79.56^\circ$ (b) $\sec 79.56^\circ$

51. (a) $\cos 4^\circ\, 50'\, 15''$ (b) $\sec 4^\circ\, 50'\, 15''$

52. (a) $\sec 42^\circ\, 12'$ (b) $\csc 48^\circ\, 7'$

53. (a) $\cot 11^\circ\, 15'$ (b) $\tan 11^\circ\, 15'$

54. (a) $\sec 56^\circ\, 8'\, 10''$ (b) $\cos 56^\circ\, 8'\, 10''$

55. (a) $\csc 32^\circ\, 40'\, 3''$ (b) $\tan 44^\circ\, 28'\, 16''$

56. (a) $\sec\left(\frac{9}{5} \cdot 20 + 32\right)^\circ$ (b) $\cot\left(\frac{9}{5} \cdot 30 + 32\right)^\circ$

En los Ejercicios 57-62, encuentre los valores de θ en grados ($0^\circ < \theta < 90^\circ$) y radianes ($0 < \theta < \pi/2$) sin ayuda de calculadora.

57. (a) $\operatorname{sen} \theta = \frac{1}{2}$ (b) $\csc \theta = 2$

58. (a) $\cos \theta = \dfrac{\sqrt{2}}{2}$ (b) $\tan \theta = 1$

59. (a) $\sec \theta = 2$ (b) $\cot \theta = 1$

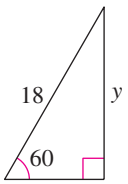
60. (a) $\tan \theta = \sqrt{3}$ (b) $\cos \theta = \frac{1}{2}$

61. (a) $\csc \theta = \dfrac{2\sqrt{3}}{3}$ (b) $\operatorname{sen} \theta = \dfrac{\sqrt{2}}{2}$

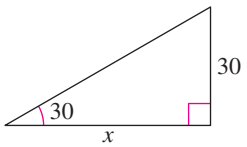
62. (a) $\cot \theta = \dfrac{\sqrt{3}}{3}$ (b) $\sec \theta = \sqrt{2}$

En los Ejercicios 63-66, despeje x, y o r como se indica.

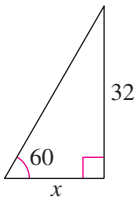
63. Despeje y.



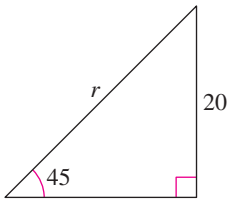
64. Despeje x.



65. Despeje x.



66. Despeje r.



67. EDIFICIO EMPIRE STATE Supongamos que usted se encuentra de pie a 45 metros de distancia de la base del edificio Empire State. Estima que el ángulo de elevación hasta el piso 86 (el observatorio) es 82°. Si la altura total del edificio es de otros 123 metros arriba del piso 86, ¿cuál es la altura aproximada del edificio? Uno de sus amigos está en el piso 86. ¿Cuál es la distancia entre usted y su amigo?

68. ESTATURA Una persona que mide 6 pies de estatura camina desde la base de una torre de transmisión directamente hacia la punta de la sombra proyectada por la sombra. Cuando la persona está a 132 pies de la torre y 3 pies arriba de la punta de la sombra, la sombra de la persona empieza a aparecer más allá de la sombra de la torre.

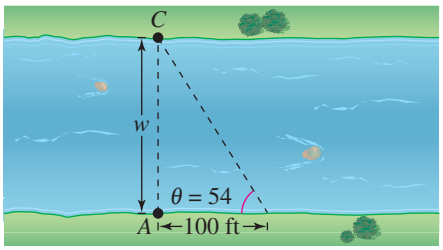
(a) Dibuje un triángulo rectángulo que dé una representación visual del problema. Muestre las cantidades conocidas del triángulo y use una variable para indicar la altura de la torre.

(b) Use una función trigonométrica para escribir una ecuación que contenga la cantidad desconocida.

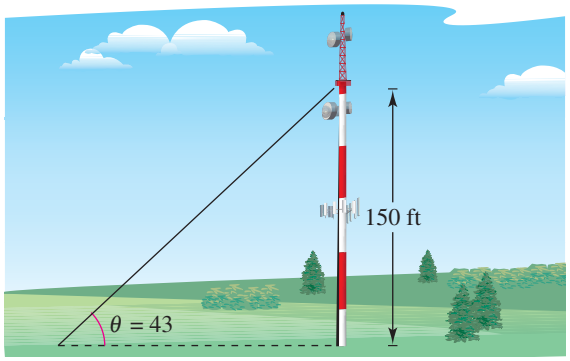
(c) ¿Cuál es la altura de la torre?

69. ÁNGULO DE ELEVACIÓN Usted está bajando en esquíes por una montaña con una altura vertical de 1500 pies. La distancia desde la cima de la montaña a la base es de 3000 pies. ¿Cuál es el ángulo de elevación desde la base a la cima de la montaña?

70. ANCHO DE UN RÍO Un biólogo desea saber el ancho w de un río de modo que se puedan instalar debidamente los instrumentos para estudiar los contaminantes del agua. Desde el punto A, el biólogo camina 100 pies aguas abajo y observa el punto C (vea la figura). Desde este punto de vista, se determina que $\theta = 54°$. ¿Cuál es el ancho del río?



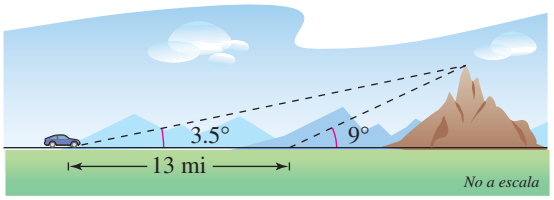
71. LONGITUD Un cable de sujeción (llamado viento) va del suelo a una torre para antenas. El cable está unido a la torre a 150 pies del suelo. El ángulo formado entre el cable y el suelo es de 43° (vea figura).



(a) ¿Cuál es la longitud del cable?

(b) ¿A qué distancia de la base de la torre está anclado el cable al suelo?

72. ALTURA DE UNA MONTAÑA Viajando por un terreno plano, usted observa una montaña directamente al frente. Su ángulo de elevación (a la cima) es de 3.5°. Después de acercarse en el auto 13 millas a la montaña, el ángulo de elevación es de 9°. Aproxime la altura de la montaña.



73. CÁLCULOS DE TALLER MECÁNICO Una placa de acero tiene la forma de un cuarto de círculo con radio de 60 centímetros. Dos agujeros de dos centímetros han de perforarse en la placa como se ve en la figura. Encuentre las coordenadas del centro de cada agujero.

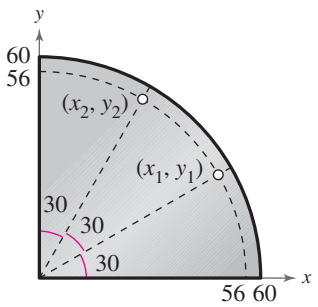


FIGURA PARA EJERCICIO 73

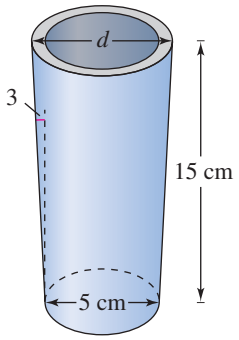
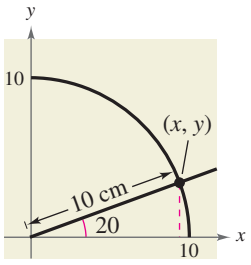


FIGURA PARA EJERCICIO 74

74. CÁLCULOS DE TALLER MECÁNICO Un eje cónico tiene un diámetro de 5 centímetros en el extremo pequeño y mide 15 centímetros de largo (vea figura). La conicidad es de 3°. Encuentre el diámetro d del extremo grande del eje.

75. GEOMETRÍA Use un compás para trazar un cuarto de círculo de 10 centímetros de radio. Usando un transportador, construya un ángulo de 20° en posición normal (vea figura). Trace una recta perpendicular desde el punto de intersección del lado terminal del ángulo y el arco del círculo. Por medición, calcule las coordenadas (x, y) del punto de intersección y use estas mediciones para aproximar las seis funciones trigonométricas de un ángulo de 20°



76. ALTURA Se utiliza una cuerda de 20 metros para sujetar un globo lleno de helio. Debido a una brisa, la cuerda forma un ángulo de aproximadamente 85° con el suelo.

(a) Trace un triángulo rectángulo que dé una representación visual del problema. Muestre las cantidades conocidas del triángulo y use una variable para indicar la altura del globo.

(b) Use una función trigonométrica para escribir una ecuación que contenga la cantidad desconocida.

(c) ¿Cuál es la altura del globo?

(d) La brisa se hace más fuerte y el ángulo que el globo forma con el suelo disminuye. ¿Cómo afecta esto al triángulo que usted dibujó en el inciso (a)?

(e) Complete la tabla siguiente, que muestra las alturas (en metros) del globo para medidas de ángulo θ decrecientes.

Ángulo, θ	80°	70°	60°	50°
Altura				

Ángulo, θ	40°	30°	20°	10°
Altura				

(f) A medida que el ángulo que forma el globo con el suelo se aproxima a 0°, ¿cómo afecta esto la altura del globo? Trace un triángulo rectángulo para explicar su razonamiento.

EXPLORACIÓN

¿VERDADERO O FALSO? En los Ejercicios 77-82, determine si la proposición es verdadera o falsa. Justifique su respuesta.

77. $\operatorname{sen} 60° \csc 60° = 1$

78. $\sec 30° = \csc 60°$

79. $\operatorname{sen} 45° + \cos 45° = 1$

80. $\cot^2 10° - \csc^2 10° = -1$

81. $\dfrac{\operatorname{sen} 60°}{\operatorname{sen} 30°} = \operatorname{sen} 2°$

82. $\tan[(5°)^2] = \tan^2 5°$

83. PIÉNSELO

(a) Complete la tabla.

θ	0.1	0.2	0.3	0.4	0.5
$\operatorname{sen}\theta$					

(b) ¿Es θ o $\operatorname{sen}\theta$ mayor para θ en el intervalo (0,0.5]?

(c) Cuando θ se aproxima a 0, ¿cómo se comparan θ y $\operatorname{sen}\theta$? Explique.

84. PIÉNSELO

(a) Complete la tabla.

θ	0°	18°	36°	54°	72°	90°
$\operatorname{sen}\theta$						
$\cos\theta$						

(b) Discuta el comportamiento de la función seno para θ en la variación de 0° a 90°.

(c) Discuta el comportamiento de la función coseno para θ en la variación de 0° a 90°.

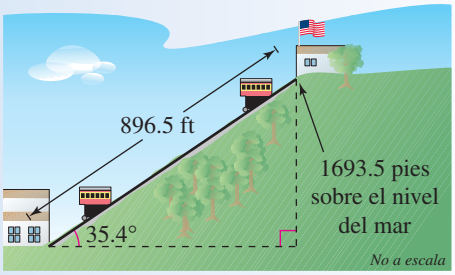
(d) Use las definiciones de las funciones seno y coseno para explicar los resultados de los incisos (b) y (c).

85. ESCRITURA En trigonometría del triángulo rectángulo, explique por qué $\operatorname{sen} 30° = \frac{1}{2}$ cualquiera que sea el tamaño del triángulo.

86. GEOMETRÍA Use el triángulo equilátero que se ve en la Figura 4.29 y triángulos semejantes para verificar los puntos en la Figura 4.23 (en la Sección 4.2) que no están sobre los ejes.

87. PIÉNSELO Nos dan sólo el valor $\tan\theta$. ¿Es posible hallar el valor de $\sec\theta$ sin hallar la medida de θ? Explique.

88. TOQUE FINAL El plano inclinado de Johnstown en Pennsylvania es uno de los montacargas más elevados y empinados del mundo. Los carros sobre vías recorren una distancia de 896.5 pies a un ángulo de alrededor de 35.4°, subiendo a una altura de 1693.5 pies sobre el nivel del mar.



(a) Encuentre la altura vertical del plano inclinado.

(b) Encuentre la elevación del extremo inferior del plano inclinado.

(c) Los carros suben por la montaña a una velocidad de 300 pies por minuto. Encuentre la velocidad a la que suben verticalmente.

4.4 Funciones trigonométricas de cualquier ángulo

Lo que debe aprender

- Evaluar funciones trigonométricas de cualquier ángulo.
- Hallar ángulos de referencia.
- Evaluar funciones trigonométricas de números reales.

Por qué debe aprenderlo

Puede usar funciones trigonométricas para modelar y resolver problemas de la vida real. Por ejemplo, en el Ejercicio 99 de la página 318 puede usar funciones trigonométricas para modelar las temperaturas normales mensuales en la ciudad de Nueva York y en Fairbanks, Alaska.

Introducción

En la Sección 4.3, las definiciones de las funciones trigonométricas se restringieron a ángulos agudos. En esta sección, las definiciones se amplían para abarcar *cualquier* ángulo. Si θ es un ángulo *agudo*, estas definiciones coinciden con las dadas en la sección anterior.

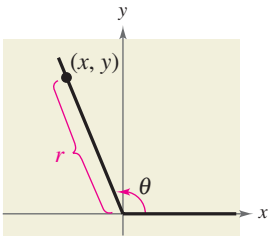
Definición de las funciones trigonométricas de cualquier ángulo

Sea θ un ángulo en posición normal con (x, y) un punto en el lado terminal de θ y $r = \sqrt{x^2 + y^2} \neq 0$.

$$\operatorname{sen}\theta = \frac{y}{r} \qquad \cos\theta = \frac{x}{r}$$

$$\tan\theta = \frac{y}{x}, \quad x \neq 0 \qquad \cot\theta = \frac{x}{y}, \quad y \neq 0$$

$$\sec\theta = \frac{r}{x}, \quad x \neq 0 \qquad \csc\theta = \frac{r}{y}, \quad y \neq 0$$



Como $r = \sqrt{x^2 + y^2}$ *no puede* ser cero, se deduce que las funciones seno y coseno están definidas para cualquier valor real de θ. No obstante, si $x = 0$, la tangente y la secante de θ no están definidas. Por ejemplo, la tangente de 90° no está definida. Del mismo modo, si $y = 0$, la cotangente y cosecante de θ no están definidas.

Ejemplo 1 Evaluar funciones trigonométricas

Sea $(-3, 4)$ un punto en el lado terminal de θ. Encuentre el seno, coseno y tangente de θ.

Solución

Consultando la Figura 4.36 se puede ver que $x = -3$, $y = 4$ y

$$r = \sqrt{x^2 + y^2} = \sqrt{(-3)^2 + 4^2} = \sqrt{25} = 5.$$

Por tanto, tenemos lo siguiente.

$$\operatorname{sen}\theta = \frac{y}{r} = \frac{4}{5} \qquad \cos\theta = \frac{x}{r} = -\frac{3}{5} \qquad \tan\theta = \frac{y}{x} = -\frac{4}{3}$$

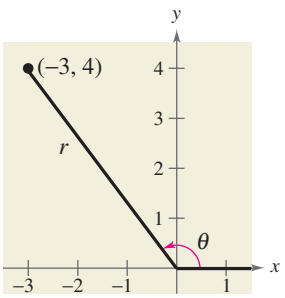


FIGURA 4.36

PUNTO *de repaso* Ahora trate de hacer el Ejercicio 9.

Ayuda de álgebra

La fórmula $r = \sqrt{x^2 + y^2}$ es un resultado de la fórmula de la distancia. Puede repasar la fórmula de la distancia en la Sección 1.1.

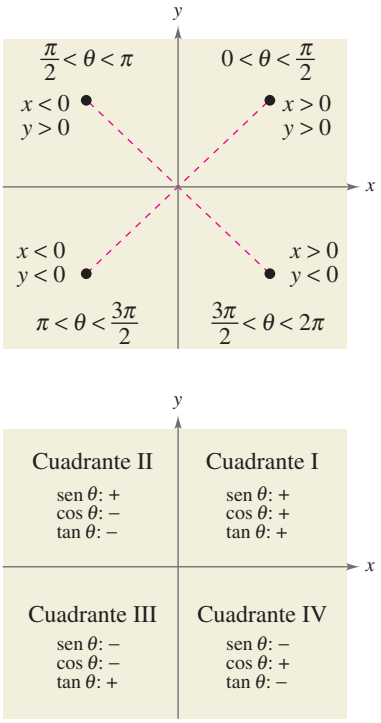


FIGURA 4.37

Los *signos* de las funciones trigonométricas en los cuatro cuadrantes se pueden determinar por las definiciones de las funciones. Por ejemplo, como $\cos\theta = x/r$, se deduce que $\cos\theta$ es positivo siempre que $x > 0$, que está en los cuadrantes I y IV. (Recuerde, r es siempre positiva.) De un modo semejante, se pueden verificar los resultados que se ven en la Figura 4.37.

Ejemplo 2 Evaluar funciones trigonométricas

Dadas $\tan\theta = -\frac{5}{4}$ y $\cos\theta > 0$, encuentre $\operatorname{sen}\theta$ y $\sec\theta$.

Solución

Observe que θ está en el cuarto cuadrante porque ese es el único cuadrante en el que la tangente es negativa y el coseno es positivo. Además, usando

$$\tan\theta = \frac{y}{x}$$
$$= -\frac{5}{4}$$

y el hecho de que y es negativa en el cuarto cuadrante, se puede hacer que $y = -5$ y $x = 4$. Por tanto, $r = \sqrt{16 + 25} = \sqrt{41}$ y tendremos

$$\operatorname{sen}\theta = \frac{y}{r} = \frac{-5}{\sqrt{41}}$$
$$\approx -0.7809$$
$$\sec\theta = \frac{r}{x} = \frac{\sqrt{41}}{4}$$
$$\approx 1.6008.$$

PUNTO *de repaso* Ahora trate de hacer el Ejercicio 23.

Ejemplo 3 Funciones trigonométricas de ángulos cuadrantales

Evalúe las funciones coseno y tangente en los cuatro ángulos cuadrantales $\frac{\pi}{2}$, π y $\frac{3\pi}{2}$.

Solución

Para empezar, escoja un punto en el lado terminal de cada ángulo, como se ve en la Figura 4.38. Por cada uno de los cuatro puntos, $r = 1$, y tenemos lo siguiente.

$$\cos 0 = \frac{x}{r} = \frac{1}{1} = 1 \qquad \tan 0 = \frac{y}{x} = \frac{0}{1} = 0 \qquad (x, y) = (1, 0)$$

$$\cos\frac{\pi}{2} = \frac{x}{r} = \frac{0}{1} = 0 \qquad \tan\frac{\pi}{2} = \frac{y}{x} = \frac{1}{0} \Longrightarrow \text{no está definido} \qquad (x, y) = (0, 1)$$

$$\cos\pi = \frac{x}{r} = \frac{-1}{1} = -1 \qquad \tan\pi = \frac{y}{x} = \frac{0}{-1} = 0 \qquad (x, y) = (-1, 0)$$

$$\cos\frac{3\pi}{2} = \frac{x}{r} = \frac{0}{1} = 0 \qquad \tan\frac{3\pi}{2} = \frac{y}{x} = \frac{-1}{0} \Longrightarrow \text{no está definido} \qquad (x, y) = (0, -1)$$

PUNTO *de repaso* Ahora trate de hacer el Ejercicio 37.:

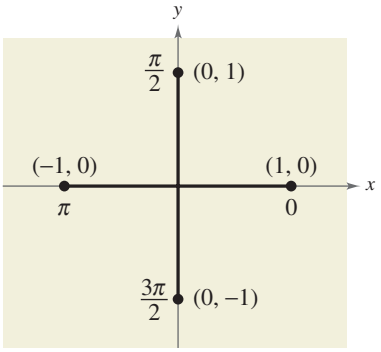


FIGURA 4.38

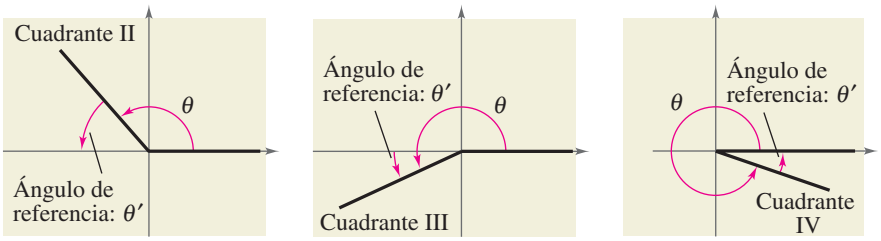
Ángulos de referencia

Los valores de las funciones trigonométricas de ángulos mayores de 90° (o menores de 0°) se pueden determinar a partir de sus valores en ángulos agudos correspondientes llamados **ángulos de referencia.**

Definición de ángulo de referencia

Sea θ un ángulo en posición normal. Su ángulo de referencia es el ángulo agudo θ' formado por el lado terminal de θ y el eje horizontal.

La Figura 4.39 muestra los ángulos de referencia para θ en los cuadrantes II, III y IV.



$\theta' = \pi - \theta$ (radianes) $\theta' = 180 - \theta$ (ángulos)

$\theta' = \theta - \pi$ (radianes) $\theta' = \theta - 180$ (grados)

$\theta' = 2\pi - \theta$ (radianes) $\theta' = 360 - \theta$ (grados)

FIGURA 4.39

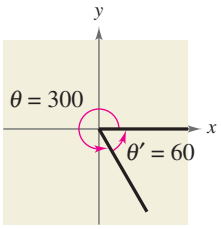


FIGURA 4.40

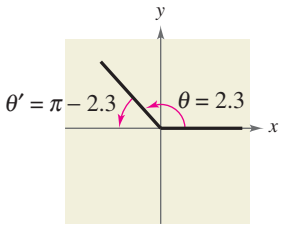


FIGURA 4.41

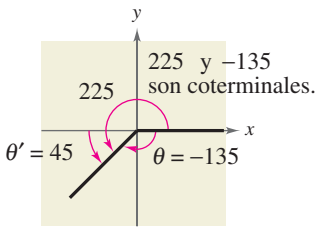


FIGURA 4.42

Ejemplo 4 Hallar ángulos de referencia

Encuentre el ángulo de referencia θ'.

a. $\theta = 300°$ **b.** $\theta = 2.3$ **c.** $\theta = -135°$

Solución

a. Como 300° está en el cuarto cuadrante, el ángulo que forma con el eje x es

$$\theta' = 360° - 300°$$
$$= 60°. \quad \text{Grados}$$

La Figura 4.40 muestra el ángulo $\theta = 300°$ y su ángulo de referencia $\theta' = 60°$.

b. Como 2.3 está entre $\pi/2 \approx 1.5708$ y $\pi \approx 3.1416$, se deduce que está en el segundo cuadrante y su ángulo de referencia es

$$\theta' = \pi - 2.3$$
$$\approx 0.8416. \quad \text{Radianes}$$

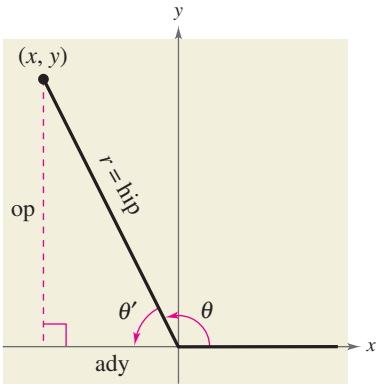
La Figura 4.41 muestra el ángulo $\theta = 2.3$ y su ángulo de referencia $\theta' = \pi - 2.3$.

c. Primero, determine que $-135°$ es coterminal con 225°, que está en el tercer cuadrante. Por tanto, el ángulo de referencia es

$$\theta' = 225° - 180°$$
$$= 45°. \quad \text{Grados}$$

La Figura 4.42 muestra el ángulo $\theta = -135°$ y su ángulo de referencia $\theta' = 45°$.

PUNTO *de repaso* Ahora trate de hacer el Ejercicio 45.



op = $|y|$, ady = $|x|$
FIGURA 4.43

Funciones trigonométricas de números reales

Para ver cómo se usa un ángulo de referencia para evaluar una función trigonométrica, considere el punto (x, y) en el lado terminal de θ, como se ve en la Figura 4.43. Por definición, sabemos que

$$\operatorname{sen}\theta = \frac{y}{r} \quad \text{y} \quad \tan\theta = \frac{y}{x}.$$

Para el triángulo rectángulo con ángulo agudo θ' y lados de longitudes $|x|$ y $|y|$, tenemos

$$\operatorname{sen}\theta' = \frac{\text{op}}{\text{hip}} = \frac{|y|}{r}$$

y

$$\tan\theta' = \frac{\text{op}}{\text{ady}} = \frac{|y|}{|x|}.$$

En consecuencia, se deduce que sen θ y sen θ' son iguales, *excepto posiblemente en signo*. Lo mismo es cierto para tan θ y tan θ' y *también* para las otras cuatro funciones trigonométricas. En todos los casos, el signo del valor de la función puede ser determinado por el cuadrante en el que se encuentre θ.

Evaluar funciones trigonométricas de cualquier ángulo

Para hallar el valor de una función trigonométrica de cualquier ángulo θ:

1. Determine el valor de la función para el ángulo de referencia θ' asociado.
2. Según el cuadrante en el que se encuentre θ, aplique el signo apropiado al valor de la función.

Tip de estudio

Aprender la tabla de valores de la derecha merece la pena el esfuerzo, porque con ello se aumenta tanto la eficiencia como la confianza. A continuación está un modelo para la función seno que puede ser útil para recordar los valores.

θ	0°	30°	45°	60°	90°
sen θ	$\frac{\sqrt{0}}{2}$	$\frac{\sqrt{1}}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{\sqrt{4}}{2}$

Invierta el orden para obtener valores de coseno de los mismos ángulos.

Mediante el uso de ángulos de referencia y los ángulos especiales estudiados en la sección anterior se puede ampliar bastante el alcance de valores trigonométricos *exactos*. Por ejemplo, saber los valores de función de 30° quiere decir que sabemos los valores de función de todos los ángulos para los cuales 30° es un ángulo de referencia. Por aspectos prácticos, la tabla siguiente muestra los valores exactos de las funciones trigonométricas de ángulos especiales y ángulos cuadrantales.

Valores trigonométricos de ángulos comunes

θ (grados)	0°	30°	45°	60°	90°	180°	270°
θ (radianes)	0	$\frac{\pi}{6}$	$\frac{\pi}{4}$	$\frac{\pi}{3}$	$\frac{\pi}{2}$	π	$\frac{3\pi}{2}$
sen θ	0	$\frac{1}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	1	0	-1
cos θ	1	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{1}{2}$	0	-1	0
tan θ	0	$\frac{\sqrt{3}}{3}$	1	$\sqrt{3}$	No está definido	0	No está definido

Ejemplo 5 Usar ángulos de referencia

Evalúe cada una de las funciones trigonométricas siguientes.

a. $\cos\dfrac{4\pi}{3}$ **b.** $\tan(-210°)$ **c.** $\csc\dfrac{11\pi}{4}$

Solución

a. Como $\theta = 4\pi/3$ está en el tercer cuadrante, el ángulo de referencia es

$$\theta' = \frac{4\pi}{3} - \pi = \frac{\pi}{3}$$

como se muestra en la Figura 4.44. Además, el coseno es negativo en el tercer cuadrante, por lo cual

$$\cos\frac{4\pi}{3} = (-)\cos\frac{\pi}{3}$$

$$= -\frac{1}{2}.$$

b. Como $-210° + 360° = 150°$, se deduce que $-210°$ es coterminal con el ángulo de $150°$ del segundo cuadrante. En consecuencia, el ángulo de referencia es $\theta' = 180° - 150° = 30°$, como se ve en la Figura 4.45. Por último, como la tangente es negativa en el segundo cuadrante, tenemos

$$\tan(-210°) = (-)\tan 30°$$

$$= -\frac{\sqrt{3}}{3}.$$

c. Como $(11\pi/4) - 2\pi = 3\pi/4$, se deduce que $11\pi/4$ es coterminal con el ángulo de $3\pi/4$ del segundo cuadrante. Por tanto, el ángulo de referencia es $\theta' = \pi - (3\pi/4) = \pi/4$, como se ve en la Figura 4.46. Debido a que la cosecante es positiva en el segundo cuadrante, tenemos

$$\csc\frac{11\pi}{4} = (+)\csc\frac{\pi}{4}$$

$$= \frac{1}{\operatorname{sen}(\pi/4)}$$

$$= \sqrt{2}.$$

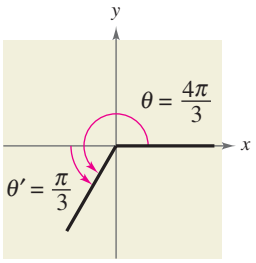


FIGURA 4.44

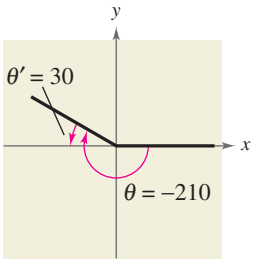


FIGURA 4.45

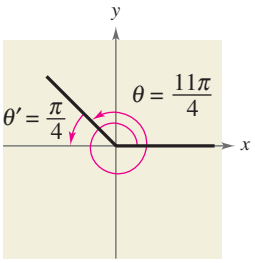


FIGURA 4.46

PUNTO *de repaso* Ahora trate de hacer el Ejercicio 59.

Ejemplo 6 Usar identidades trigonométricas

Sea θ un ángulo en el segundo cuadrante, tal que $\operatorname{sen}\theta = \frac{1}{3}$. Encuentre (a) $\cos\theta$ y (b) $\tan\theta$ con el uso de identidades trigonométricas.

Solución

a. Usando la identidad pitagórica $\operatorname{sen}^2\theta + \cos^2\theta = 1$, obtenemos

$$\left(\frac{1}{3}\right)^2 + \cos^2\theta = 1 \qquad \text{Sustituir } \tfrac{1}{3} \text{ por sen } \theta.$$

$$\cos^2\theta = 1 - \frac{1}{9} = \frac{8}{9}.$$

Como $\cos\theta < 0$ en el segundo cuadrante, se puede usar la raíz negativa para obtener

$$\cos\theta = -\frac{\sqrt{8}}{\sqrt{9}}$$

$$= -\frac{2\sqrt{2}}{3}.$$

b. Usando la identidad trigonométrica $\tan\theta = \dfrac{\operatorname{sen}\theta}{\cos\theta}$, se obtiene

$$\tan\theta = \frac{1/3}{-2\sqrt{2}/3} \qquad \text{Sustituir por sen } \theta \text{ y cos } \theta.$$

$$= -\frac{1}{2\sqrt{2}}$$

$$= -\frac{\sqrt{2}}{4}.$$

PUNTO *de repaso* Ahora trate de hacer el Ejercicio 69.

Puede usar calculadora para evaluar funciones trigonométricas, como se ve en el siguiente ejemplo.

Ejemplo 7 Usar calculadora

Use una calculadora para evaluar cada una de las funciones trigonométricas siguientes.

a. $\cot 410°$ **b.** $\operatorname{sen}(-7)$ **c.** $\sec\dfrac{\pi}{9}$

Solución

	Función	*Modo*	*Tecleo en la calculadora*	*Pantalla*
a.	$\cot 410°$	Grado	(TAN (410)) x^{-1} ENTER	0.8390996
b.	$\operatorname{sen}(-7)$	Radianes	SIN ((−) 7) ENTER	−0.6569866
c.	$\sec\dfrac{\pi}{9}$	Radianes	(COS (π ÷ 9)) x^{-1} ENTER	1.0641778

PUNTO *de repaso* Ahora trate de hacer el Ejercicio 79.

4.4 EJERCICIOS

En www.CalcChat.com vea las soluciones a los ejercicios impares.

VOCABULARIO: Llene los espacios en blanco.

En los Ejercicios 1-6, sea θ un ángulo en posición normal, con (x, y) un punto en el lado terminal de θ y $r = \sqrt{x^2 + y^2} \neq 0$.

1. $\operatorname{sen}\theta =$ _____ **2.** $\frac{r}{y} =$ _____

3. $\tan\theta =$ _____ **4.** $\sec\theta =$ _____

5. $\frac{x}{r} =$ _____ **6.** $\frac{x}{y} =$ _____

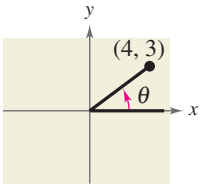
7. Como $r = \sqrt{x^2 + y^2}$ no puede ser _____, las funciones seno y coseno son _____ para cualquier valor real de θ.

8. El ángulo agudo positivo que se forma por el lado terminal del ángulo θ y el eje horizontal se denomina ángulo _____ de θ y está denotado por θ'.

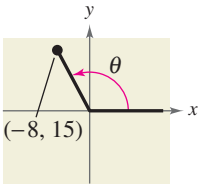
HABILIDADES Y APLICACIONES

En los Ejercicios 9-12, determine los valores exactos de las seis funciones trigonométricas del ángulo θ.

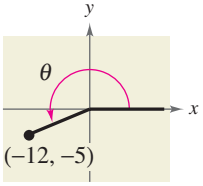
9. (a)



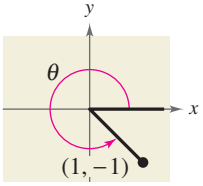
(b)



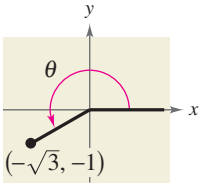
10. (a)



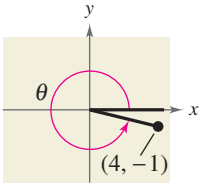
(b)



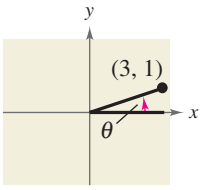
11. (a)



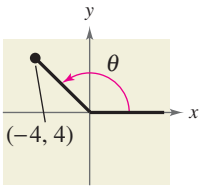
(b)



12. (a)



(b)



En los Ejercicios 13-18, el punto está en el lado terminal de un ángulo en posición normal. Determine los valores exactos de las seis funciones trigonométricas del ángulo.

13. $(5, 12)$ **14.** $(8, 15)$

15. $(-5, -2)$ **16.** $(-4, 10)$

17. $(-5.4, 7.2)$ **18.** $\left(3\frac{1}{2}, -7\frac{3}{4}\right)$

En los Ejercicios 19-22, exprese el cuadrante en el que está θ.

19. $\operatorname{sen}\theta > 0$ y $\cos\theta > 0$

20. $\operatorname{sen}\theta < 0$ y $\cos\theta < 0$

21. $\operatorname{sen}\theta > 0$ y $\cos\theta < 0$

22. $\sec\theta > 0$ y $\cot\theta < 0$

En los Ejercicios 23-32, encuentre los valores de las seis funciones trigonométricas de θ con la restricción dada.

Valor de la función	*Restricción*
23. $\tan\theta = -\frac{15}{8}$	$\operatorname{sen}\theta > 0$
24. $\cos\theta = \frac{8}{17}$	$\tan\theta < 0$
25. $\operatorname{sen}\theta = \frac{3}{5}$	θ está en el cuadrante II.
26. $\cos\theta = -\frac{4}{5}$	θ está en el cuadrante III.
27. $\cot\theta = -3$	$\cos\theta > 0$
28. $\csc\theta = 4$	$\cot\theta < 0$
29. $\sec\theta = -2$	$\operatorname{sen}\theta < 0$
30. $\operatorname{sen}\theta = 0$	$\sec\theta = -1$
31. $\cot\theta$ no está definida.	$\pi/2 \leq \theta \leq 3\pi/2$
32. $\tan\theta$ no está definida.	$\pi \leq \theta \leq 2\pi$

En los Ejercicios 33-36, el lado terminal de θ está en la recta dada en el cuadrante especificado. Encuentre los valores de las seis funciones trigonométricas de θ al hallar un punto sobre la recta.

Recta	*Cuadrante*
33. $y = -x$	II
34. $y = \frac{1}{3}x$	III
35. $2x - y = 0$	III
36. $4x + 3y = 0$	IV

En los Ejercicios 37-44, evalúe la función trigonométrica del ángulo cuadrantal.

37. $\operatorname{sen} \pi$

38. $\csc \frac{3\pi}{2}$

39. $\sec \frac{3\pi}{2}$

40. $\sec \pi$

41. $\operatorname{sen} \frac{\pi}{2}$

42. $\cot \pi$

43. $\csc \pi$

44. $\cot \frac{\pi}{2}$

En los Ejercicios 45-52, encuentre el ángulo de referencia θ' y trace θ y θ' en posición normal.

45. $\theta = 160°$

46. $\theta = 309°$

47. $\theta = -125°$

48. $\theta = -215°$

49. $\theta = \frac{2\pi}{3}$

50. $\theta = \frac{7\pi}{6}$

51. $\theta = 4.8$

52. $\theta = 11.6$

En los Ejercicios 53-68, evalúe el seno, coseno y tangente del ángulo sin usar calculadora.

53. $225°$

54. $300°$

55. $750°$

56. $-405°$

57. $-150°$

58. $-840°$

59. $\frac{2\pi}{3}$

60. $\frac{3\pi}{4}$

61. $\frac{5\pi}{4}$

62. $\frac{7\pi}{6}$

63. $-\frac{\pi}{6}$

64. $-\frac{\pi}{2}$

65. $\frac{9\pi}{4}$

66. $\frac{10\pi}{3}$

67. $-\frac{3\pi}{2}$

68. $-\frac{23\pi}{4}$

En los Ejercicios 69-74, encuentre el valor trigonométrico indicado en el cuadrante especificado.

	Función	*Cuadrante*	*Valor trigonométrico*
69.	$\operatorname{sen} \theta = -\frac{3}{5}$	IV	$\cos \theta$
70.	$\cot \theta = -3$	II	$\operatorname{sen} \theta$
71.	$\tan \theta = \frac{3}{2}$	III	$\sec \theta$
72.	$\csc \theta = -2$	IV	$\cot \theta$
73.	$\cos \theta = \frac{5}{8}$	I	$\sec \theta$
74.	$\sec \theta = -\frac{9}{4}$	III	$\tan \theta$

En los Ejercicios 75-90, use una calculadora para evaluar la función trigonométrica. Redondee la respuesta a cuatro lugares decimales. (Asegúrese que la calculadora esté en el modo correcto de ángulo.)

75. $\operatorname{sen} 10°$

76. $\sec 225°$

77. $\cos(-110°)$

78. $\csc(-330°)$

79. $\tan 304°$

80. $\cot 178°$

81. $\sec 72°$

82. $\tan(-188°)$

83. $\tan 4.5$

84. $\cot 1.35$

85. $\tan \frac{\pi}{9}$

86. $\tan\left(-\frac{\pi}{9}\right)$

87. $\operatorname{sen}(-0.65)$

88. $\sec 0.29$

89. $\cot\left(-\frac{11\pi}{8}\right)$

90. $\csc\left(-\frac{15\pi}{14}\right)$

En los Ejercicios 91-96, encuentre dos soluciones de la ecuación. Dé sus respuestas en grados ($0° \leq \theta < 360°$) y en radianes ($0 \leq \theta < 2\pi$). No use calculadora.

91. (a) $\operatorname{sen} \theta = \frac{1}{2}$ (b) $\operatorname{sen} \theta = -\frac{1}{2}$

92. (a) $\cos \theta = \frac{\sqrt{2}}{2}$ (b) $\cos \theta = -\frac{\sqrt{2}}{2}$

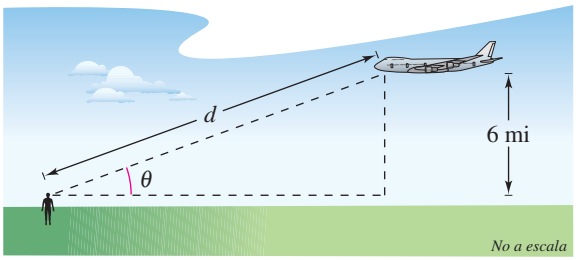
93. (a) $\csc \theta = \frac{2\sqrt{3}}{3}$ (b) $\cot \theta = -1$

94. (a) $\sec \theta = 2$ (b) $\sec \theta = -2$

95. (a) $\tan \theta = 1$ (b) $\cot \theta = -\sqrt{3}$

96. (a) $\operatorname{sen} \theta = \frac{\sqrt{3}}{2}$ (b) $\operatorname{sen} \theta = -\frac{\sqrt{3}}{2}$

97. DISTANCIA Un avión, que vuela a una altitud de 6 millas, está en una trayectoria de vuelo que pasa directamente sobre un observador (vea figura). Si θ es el ángulo de elevación desde el observador al avión, encuentre la distancia d del observador al avión cuando (a) $\theta = 30°$, (b) $\theta = 90°$ y (c) $\theta = 120°$.



98. MOVIMIENTO ARMÓNICO El desplazamiento de un peso oscilante suspendido por un resorte está dado por $y(t) = 2 \cos 6t$, donde y es el desplazamiento (en centímetros) y t es el tiempo (en segundos). Encuentre el desplazamiento cuando (a) $t = 0$, (b) $t = \frac{1}{4}$ y (c) $t = \frac{1}{2}$.

99. ANÁLISIS DE DATOS: METEOROLOGÍA La tabla siguiente muestra las temperaturas mensuales normales (en grados Fahrenheit) para meses seleccionados en la ciudad de Nueva York (N) y Fairbanks, Alaska (F). (Fuente: National Climatic Data Center)

Mes	Ciudad de Nueva York, N	Fairbanks, F
Enero	33	-10
Abril	52	32
Julio	77	62
Octubre	58	24
Diciembre	38	-6

(a) Use el comando *regression* de una calculadora de gráficas para hallar un modelo de la forma $y = a\,\text{sen}(bt + c) + d$ para cada ciudad. Con t represente el mes, con $t = 1$ para enero.

(b) Use los modelos del inciso (a) para hallar las temperaturas mensuales normales para las dos ciudades en febrero, marzo, mayo, junio, agosto, septiembre y noviembre.

(c) Compare los modelos para las dos ciudades.

100. VENTAS Una empresa que produce patines para nieve, que son productos estacionales, pronostica que las ventas mensuales para los siguientes dos años serán $S = 23.1 + 0.442t + 4.3\cos(\pi t/6)$, donde S se mide en miles de unidades y t es el tiempo en meses, con $t = 1$ representando a enero de 2010. Pronostique las ventas para cada uno de los siguientes meses.

(a) Febrero 2010 (b) Febrero 2011

(c) Junio 2010 (d) Junio 2011

101. MOVIMIENTO ARMÓNICO El desplazamiento, desde el equilibrio, de un peso oscilante suspendido por un resorte y sometido al efecto amortiguador de la fricción, está dado por $y(t) = 2e^{-t}\cos 6t$, donde y es el desplazamiento (en centímetros) y t es el tiempo (en segundos). Encuentre el desplazamiento cuando (a) $t = 0$, (b) $t = \frac{1}{4}$ y (c) $t = \frac{1}{2}$.

102. CIRCUITOS ELÉCTRICOS La corriente I (en amperes) cuando se aplican 100 volts a un circuito está dada por $I = 5e^{-2t}\,\text{sen}\,t$, donde t es el tiempo (en segundos) después de aplicarse el voltaje. Aproxime la corriente en $t = 0.7$ segundos después de aplicar el voltaje.

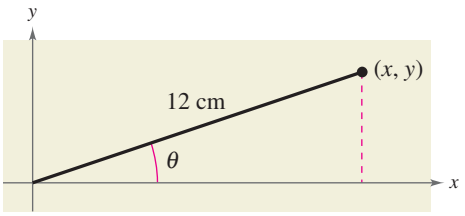
EXPLORACIÓN

¿VERDADERO O FALSO? En los Ejercicios 103 y 104, determine si la proposición es verdadera o falsa. Justifique su respuesta.

103. En cada uno de los cuatro cuadrantes, los signos de la función secante y la función seno serán iguales.

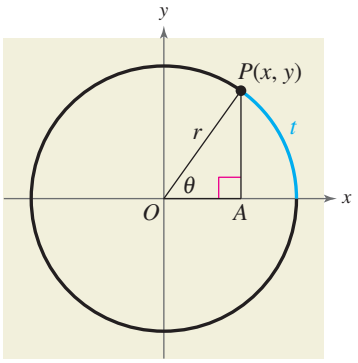
104. Para hallar el ángulo de referencia para un ángulo θ (dado en grados), encuentre el entero n tal que $0 \le 360°n - \theta \le 360°$. La diferencia $360°n - \theta$ es el ángulo de referencia.

105. ESCRITURA Considere un ángulo en posición normal con $r = 12$ centímetros, como se muestra en la figura. Escriba un breve párrafo que describa los cambios en los valores de x, y, sen θ y tan θ cuando θ aumenta continuamente de 0° a 90°.



106. TOQUE FINAL Escriba un breve ensayo que explique a un compañero de clase la forma de evaluar las seis funciones trigonométricas de cualquier ángulo θ en posición normal. Incluya una explicación de ángulos de referencia y cómo usarlos, los signos de las funciones en cada uno de los cuatro cuadrantes, así como los valores trigonométricos de ángulos comunes. Asegúrese de incluir figuras o diagramas en su escrito.

107. PIÉNSELO La figura siguiente muestra el punto $P(x, y)$ en una circunferencia unitaria y el triángulo rectángulo OAP.



(a) Encuentre sen t y cos t usando las definiciones de la circunferencia unitaria de seno y coseno (de la Sección 4.2).

(b) ¿Cuál es el valor de r? Explique.

(c) Use las definiciones seno y coseno dadas en esta sección para hallar sen θ y cos θ. Escriba sus respuestas en términos de x y y.

(d) Con base en sus respuestas a los incisos (a) y (c), ¿qué puede concluir?

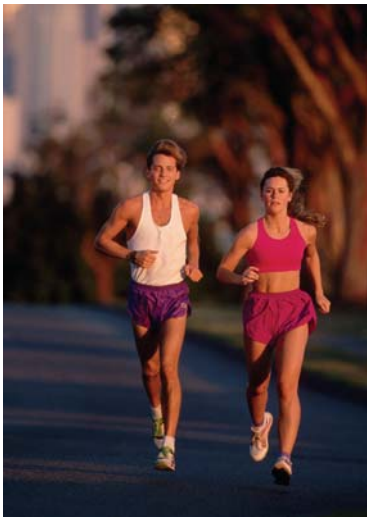
4.5 Gráficas de las funciones seno y coseno

Lo que debe aprender

- Trazar las gráficas de funciones básicas seno y coseno.
- Usar amplitud y periodo para ayudar a trazar las gráficas de las funciones seno y coseno.
- Dibujar traslaciones de las gráficas de las funciones seno y coseno.
- Usar las funciones seno y coseno para modelar datos de la vida real.

Por qué debe aprenderlo

Las funciones seno y coseno se usan con frecuencia en cálculos científicos. Por ejemplo, en el Ejercicio 87 en la página 328 se puede usar una función trigonométrica para modelar el flujo de aire en su ciclo respiratorio.



© Karl Weatherly/Corbis

Curvas básicas de seno y coseno

En esta sección estudiaremos técnicas para trazar gráficas de las funciones seno y coseno. La gráfica de la función seno es una **curva senoidal.** En la Figura 4.47, la parte negra de la gráfica representa un periodo de la función y se denomina un ciclo de la curva senoidal. La parte gris de la gráfica indica que la curva senoidal básica se repite indefinidamente en las direcciones positiva y negativa. La gráfica de la función coseno se muestra en la Figura 4.48.

Recuerde de la Sección 4.2 que el dominio de las funciones seno y coseno es el conjunto de todos los números reales. Además, el rango de cada función es el intervalo $[-1, 1]$, y cada función tiene un periodo de 2π. ¿Ve usted cómo esta información es consistente con las gráficas básicas que se muestran en las Figuras 4.47 y 4.48?

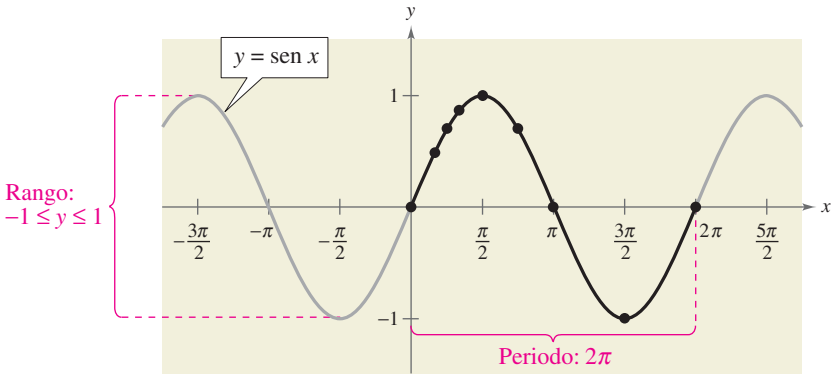


FIGURA 4.47

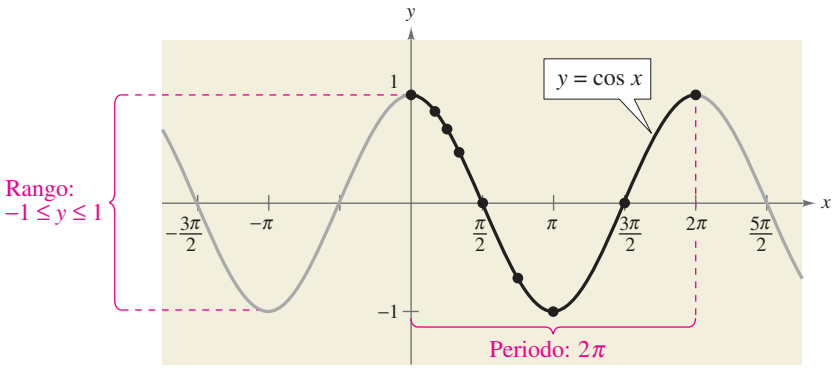


FIGURA 4.48

Observe en las Figuras 4.47 y 4.48 que la curva senoidal es simétrica respecto al *origen*, mientras que la curva cosenoidal es simétrica respecto al *eje y*. Estas propiedades de simetría se siguen del hecho de que la función senoidal es impar y la función cosenoidal es par.

Para trazar manualmente las gráficas de las funciones básicas seno y coseno, ayuda observar cinco **puntos clave** en un periodo de cada gráfica: *las intersecciones con los ejes, puntos máximos y puntos mínimos* (vea Figura 4.49).

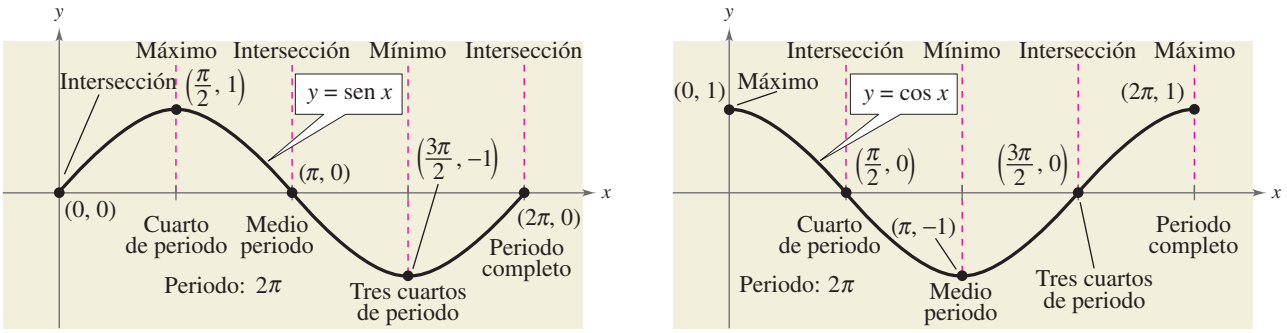


FIGURA 4.49

Ejemplo 1 Uso de puntos clave para trazar una curva senoidal

Trace la gráfica de $y = 2 \text{ sen } x$ en el intervalo $[-\pi, 4\pi]$.

Solución

Observe que

$$y = 2 \text{ sen } x = 2(\text{sen } x)$$

indica que los valores de y para los puntos clave tendrán el doble de magnitud que los de la gráfica de $y = \text{sen } x$. Divida el periodo 2π en cuatro partes iguales para obtener los puntos clave para $y = 2 \text{ sen } x$.

Intersección	*Máximo*	*Intersección*	*Mínimo*	*Intersección*
$(0, 0)$,	$\left(\frac{\pi}{2}, 2\right)$,	$(\pi, 0)$,	$\left(\frac{3\pi}{2}, -2\right)$	y $(2\pi, 0)$

Al enlazar estos puntos clave con una curva lisa y prolongar ésta en ambas direcciones en el intervalo $[-\pi, 4\pi]$, se obtiene la gráfica que se ilustra en la Figura 4.50.

TECNOLOGÍA

Cuando use calculadora de gráficas para graficar funciones trigonométricas, preste especial atención a la pantalla que use. Por ejemplo, trate de graficar $y = [\text{sen}(10x)]/10$ en la pantalla normal en modo de radianes. ¿Qué observa? Use el comando *zoom* para hallar una pantalla que exhiba una buena imagen de la gráfica.

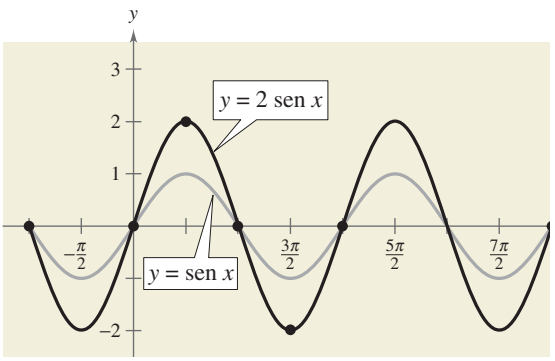


FIGURA 4.50

PUNTO *de repaso* Ahora trate de hacer el Ejercicio 39.

Amplitud y periodo

En el resto de esta sección estudiaremos el efecto gráfico de cada una de las constantes a, b, c y d en ecuaciones de las formas

$$y = d + a \operatorname{sen}(bx - c)$$

y

$$y = d + a \cos(bx - c).$$

Un rápido repaso de las transformaciones estudiadas en la Sección 1.7 debe ayudar en esta investigación.

El factor constante a en $y = a \operatorname{sen} x$ actúa como *factor de escala*, esto es, un *estiramiento vertical* o *contracción vertical* de la curva senoidal básica. Si $|a| > 1$, la curva senoidal básica se estira y si $|a| < 1$, la curva senoidal básica se contrae. El resultado es que la gráfica de $y = a \operatorname{sen} x$ varía entre $-a$ y a en lugar de entre -1 y 1. El valor absoluto de a es la **amplitud** de la función $y = a \operatorname{sen} x$. El rango de la función $y = a \operatorname{sen} x$ para $a > 0$ es $-a \le y \le a$.

Definición de amplitud de curvas seno y coseno

La **amplitud** de $y = a \operatorname{sen} x$ y $y = a \cos x$ representa la mitad de la distancia entre los valores máximo y mínimo de la función y está dada por

$$\text{Amplitud} = |a|.$$

Ejemplo 2 Escala: contracción y estiramiento verticales

En los mismos ejes de coordenadas, trace la gráfica de cada función.

a. $y = \frac{1}{2}\cos x$ **b.** $y = 3 \cos x$

Solución

a. Como la amplitud de $y = \frac{1}{2}\cos x$ es $\frac{1}{2}$, el valor máximo es $\frac{1}{2}$ y el mínimo es $-\frac{1}{2}$. Divida un ciclo, $0 \le x \le 2\pi$, en cuatro partes iguales para obtener los puntos clave.

Máximo	*Intersección*	*Mínimo*	*Intersección*		*Máximo*
$\left(0, \frac{1}{2}\right)$,	$\left(\frac{\pi}{2}, 0\right)$,	$\left(\pi, -\frac{1}{2}\right)$,	$\left(\frac{3\pi}{2}, 0\right)$	y	$\left(2\pi, \frac{1}{2}\right)$.

b. Un análisis semejante muestra que la amplitud de $y = 3 \cos x$ es 3, y los puntos clave son

Máximo	*Intersección*	*Mínimo*	*Intersección*		*Máximo*
$(0, 3)$,	$\left(\frac{\pi}{2}, 0\right)$,	$(\pi, -3)$,	$\left(\frac{3\pi}{2}, 0\right)$	y	$(2\pi, 3)$.

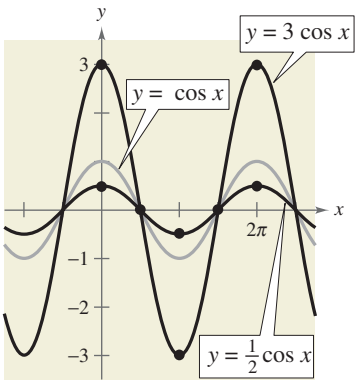


FIGURA 4.51

Las gráficas de estas dos funciones se muestran en la Figura 4.51. Observe que la gráfica de $y = \frac{1}{2}\cos x$ es una *contracción* vertical de la gráfica de $y = \cos x$ y la gráfica de $y = 3 \cos x$ es un *estiramiento* vertical de la gráfica de $y = \cos x$.

PUNTO *de repaso* Ahora trate de hacer el Ejercicio 41.

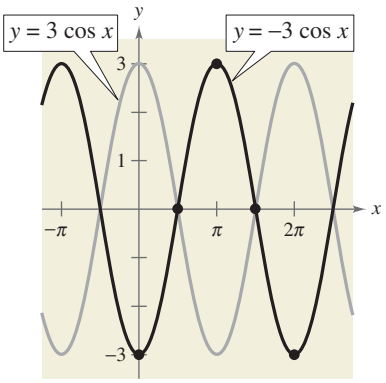


FIGURA 4.52

Ya sabemos de la Sección 1.7 que la gráfica de $y = -f(x)$ es una **reflexión** en el eje x de la gráfica de $y = f(x)$. Por ejemplo, la gráfica de $y = -3\cos x$ es una reflexión de la gráfica de $y = 3\cos x$, como se muestra en la Figura 4.52.

Como $y = a \operatorname{sen} x$ completa un ciclo de $x = 0$ a $x = 2\pi$, se deduce que $y = a \operatorname{sen} bx$ completa un ciclo de $x = 0$ a $x = 2\pi/b$.

Periodo de funciones seno y coseno

Sea b un número real positivo. El **periodo** de $y = a \operatorname{sen} bx$ y $y = a \cos bx$ está dado por

$$\text{Periodo} = \frac{2\pi}{b}.$$

Observe que si $0 < b < 1$, el periodo de $y = a \operatorname{sen} bx$ es mayor que 2π y representa un *estiramiento horizontal* de la gráfica de $y = a \operatorname{sen} bx$. Del mismo modo, si $b > 1$, el periodo de $y = a \operatorname{sen} bx$ es menor que 2π y representa una *contracción horizontal* de la gráfica de $y = a \operatorname{sen} x$. Si b es negativa, las identidades $\operatorname{sen}(-x) = -\operatorname{sen} x$ y $\cos(-x) = \cos x$ se usan para reescribir la función.

Ejemplo 3 Escala: estiramiento horizontal

Trace la gráfica de $y = \operatorname{sen} \dfrac{x}{2}$.

Solución

La amplitud es 1. Además, como $b = \frac{1}{2}$, el periodo es

$$\frac{2\pi}{b} = \frac{2\pi}{\frac{1}{2}} = 4\pi. \qquad \text{Sustituir por } b.$$

Ahora, divida el periodo-intervalo $[0, 4\pi]$ en cuatro partes iguales con los valores π, 2π y 3π para obtener los puntos clave en la gráfica.

Intersección	*Máximo*	*Intersección*	*Mínimo*	*Intersección*
$(0, 0)$,	$(\pi, 1)$,	$(2\pi, 0)$,	$(3\pi, -1)$	y $(4\pi, 0)$

La gráfica se muestra en la Figura 4.53.

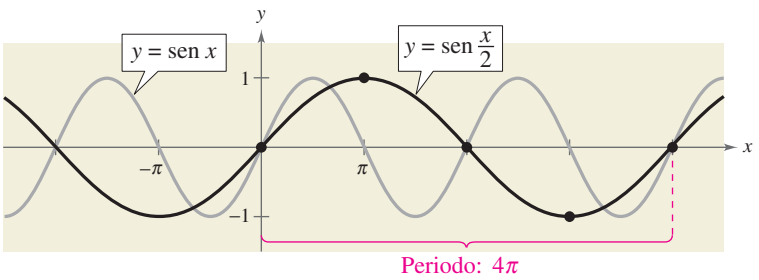


FIGURA 4.53

PUNTO *de repaso* Ahora trate de hacer el Ejercicio 43.

Tip de estudio

En general, para dividir un periodo-intervalo en cuatro partes iguales, sucesivamente sume "periodo/4", empezando con el punto extremo izquierdo del intervalo. Por ejemplo, para el periodo-intervalo $[-\pi/6, \pi/2]$ de longitud $2\pi/3$, se suma sucesivamente

$$\frac{2\pi/3}{4} = \frac{\pi}{6}$$

para obtener $-\pi/6$, 0, $\pi/6$, $\pi/3$ y $\pi/2$ como los valores de x para los puntos clave en la gráfica.

Traslaciones de curvas seno y coseno

Ayuda de álgebra

En la Sección 1.7 puede repasar las técnicas para desplazar, reflejar y estirar gráficas.

La constante c en las ecuaciones generales

$$y = a\,\text{sen}(bx - c) \qquad \text{y} \qquad y = a\cos(bx - c)$$

crea una *traslación* (*desplazamiento*) *horizontal* de las curvas básicas seno y coseno. Comparando $y = a$ sen bx con $y = a$ sen $(bx - c)$, se encuentra que la gráfica de $y = a$ sen $(bx - c)$ completa un ciclo de $bx - c = 0$ a $bx - c = 2\pi$. Al despejar x se puede hallar que el intervalo para un ciclo es

$$\overbrace{\frac{c}{b}}^{\text{Extremo izquierdo}} \le x \le \overbrace{\frac{c}{b} + \underbrace{\frac{2\pi}{b}}_{\text{Periodo}}}^{\text{Extremo derecho}}.$$

Esto implica que el periodo de $y = a$ sen $(bx - c)$ es $2\pi/b$, y la gráfica de $y = a$ sen bx está desplazada una cantidad c/b. El número c/b es el **desfase**.

Gráficas de funciones seno y coseno

Las gráficas de $y = a\,\text{sen}(bx - c)$ y $y = a\cos(bx - c)$ tienen las siguientes características. (Suponga que $b > 0$.)

$$\text{Amplitud} = |a| \qquad \text{Periodo} = \frac{2\pi}{b}$$

Los extremos izquierdo y derecho de un intervalo de un ciclo se pueden determinar si se resuelven las ecuaciones $bx - c = 0$ y $bx - c = 2\pi$.

Ejemplo 4 Traslación horizontal

Analice la gráfica de $y = \frac{1}{2}\,\text{sen}\left(x - \frac{\pi}{3}\right)$.

Solución algebraica

La amplitud es $\frac{1}{2}$ y el periodo es 2π. Resolviendo las ecuaciones tendremos

$$x - \frac{\pi}{3} = 0 \quad \Rightarrow \quad x = \frac{\pi}{3}$$

y

$$x - \frac{\pi}{3} = 2\pi \quad \Rightarrow \quad x = \frac{7\pi}{3}$$

y se ve que el intervalo $[\pi/3, 7\pi/3]$ corresponde a un ciclo de la gráfica. Dividiendo este intervalo en cuatro partes iguales se producen los puntos clave

Intersección *Máximo* *Intersección* *Mínimo* *Intersección*

$$\left(\frac{\pi}{3}, 0\right), \quad \left(\frac{5\pi}{6}, \frac{1}{2}\right), \quad \left(\frac{4\pi}{3}, 0\right), \quad \left(\frac{11\pi}{6}, -\frac{1}{2}\right) \quad \text{y} \quad \left(\frac{7\pi}{3}, 0\right).$$

PUNTO de repaso Ahora trate de hacer el Ejercicio 49.

Solución gráfica

Use una calculadora de gráficas ajusta al modo *radian* para graficar $y = (1/2)\,\text{sen}(x - \pi/3)$, como se ve en la Figura 4.54. Use los comandos *minimum*, *maximum* y *zero* o *root* de la calculadora para aproximar los puntos clave (1.05, 0), (2.62, 0.5), (4.19, 0), (5.76, −0.5) y (7.33, 0).

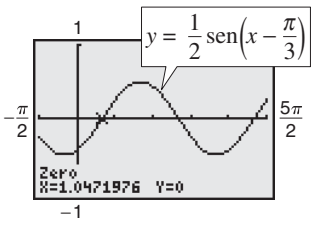


FIGURA 4.54

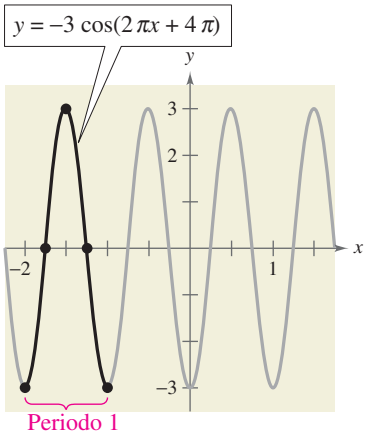


FIGURA 4.55

Ejemplo 5 Traslación horizontal

Trace la gráfica de

$$y = -3\cos(2\pi x + 4\pi).$$

Solución

La amplitud es 3 y el periodo es $2\pi/2\pi = 1$. Al resolver las ecuaciones

$$2\pi x + 4\pi = 0$$
$$2\pi x = -4\pi$$
$$x = -2$$

y

$$2\pi x + 4\pi = 2\pi$$
$$2\pi x = -2\pi$$
$$x = -1$$

se ve que el intervalo $[-2, -1]$ corresponde a un ciclo de la gráfica. Dividiendo este intervalo en cuatro partes iguales resultan los puntos clave

Mínimo	*Intersección*	*Máximo*	*Intersección*		*Mínimo*
$(-2, -3)$,	$\left(-\frac{7}{4}, 0\right)$,	$\left(-\frac{3}{2}, 3\right)$,	$\left(-\frac{5}{4}, 0\right)$	y	$(-1, -3)$.

La gráfica se muestra en la Figura 4.55.

PUNTO *de repaso* Ahora trate de hacer el Ejercicio 51.

El tipo final de transformación es la *traslación vertical* causada por la constante d en las ecuaciones

$$y = d + a\,\text{sen}(bx - c)$$

y

$$y = d + a\cos(bx - c).$$

El desplazamiento es d unidades hacia arriba para $d > 0$ y d unidades hacia abajo para $d < 0$. En otras palabras, la gráfica oscila alrededor de la recta horizontal $y = d$ en lugar de alrededor del eje x.

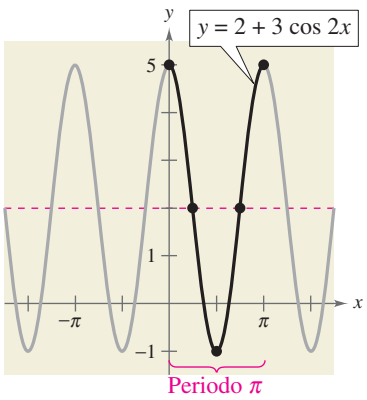


FIGURA 4.56

Ejemplo 6 Traslación vertical

Trace la gráfica de

$$y = 2 + 3\cos 2x.$$

Solución

La amplitud es 3 y el periodo es π. Los puntos clave sobre el intervalo $[0, \pi]$ son

$$(0, 5), \quad \left(\frac{\pi}{4}, 2\right), \quad \left(\frac{\pi}{2}, -1\right), \quad \left(\frac{3\pi}{4}, 2\right) \quad \text{y} \quad (\pi, 5).$$

La gráfica se muestra en la Figura 4.56. Comparada con la gráfica de $f(x) = 3\cos 2x$, la de $y = 2 + 3\cos 2x$ está desplazada hacia arriba dos unidades.

PUNTO *de repaso* Ahora trate de hacer el Ejercicio 57.

Modelado matemático

Se pueden usar funciones seno y coseno para modelar numerosas situaciones de la vida real, incluidas corrientes eléctricas, tonos musicales, ondas de radio, mareas y modelos climáticos.

Hora, t	Profundidad, y
Medianoche	3.4
2 A.M.	8.7
4 A.M.	11.3
6 A.M.	9.1
8 A.M.	3.8
10 A.M.	0.1
Mediodía	1.2

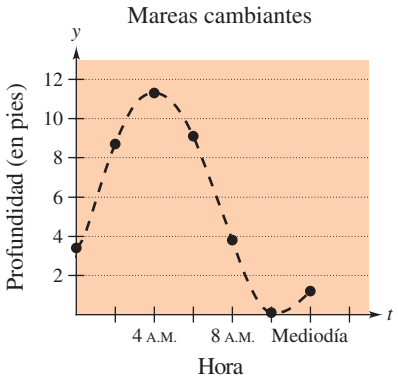


FIGURA 4.57

Ejemplo 7 Hallar un modelo trigonométrico

En todo el día, la profundidad del agua en el extremo de un muelle en Bar Harbor, Maine, varía con las mareas. La tabla muestra las profundidades (en pies) para varias horas durante la mañana. (Fuente: Nautical Software, Inc.)

a. Use una función trigonométrica para modelar los datos.

b. Encuentre las profundidades a las 9 A.M. y a las 3 P.M.

c. Un bote necesita al menos 10 pies de agua para amarrarse al muelle. ¿Durante qué horas en la tarde se puede amarrar con seguridad?

Solución

a. Empiece por graficar los datos, como se muestra en la Figura 4.57. Se puede usar ya sea un modelo seno o un coseno. Suponga que se usa un modelo coseno de la forma

$$y = a\cos(bt - c) + d.$$

La diferencia entre la altura máxima y la mínima de la gráfica es el doble de la amplitud de la función. En consecuencia, la amplitud es

$$a = \frac{1}{2}[(\text{profundidad máxima}) - (\text{profundidad mínima})] = \frac{1}{2}(11.3 - 0.1) = 5.6.$$

La función coseno completa la mitad de un ciclo entre las horas en las que se presentan las profundidades máxima y mínima. Por tanto, el periodo es

$$p = 2[(\text{hora de profundidad mínima}) - (\text{hora de profundidad máxima})]$$
$$= 2(10 - 4) = 12$$

lo cual implica que $b = 2\pi/p \approx 0.524$. Como la marea alta se presenta 4 horas después de la medianoche, considere que el extremo izquierdo es $c/b = 4$, por lo cual $c \approx 2.094$. Además, como el promedio de profundidad es $\frac{1}{2}(11.3 + 0.1) = 5.7$, se deduce que $d = 5.7$. Por tanto, se puede modelar la profundidad con la función dada por

$$y = 5.6\cos(0.524t - 2.094) + 5.7.$$

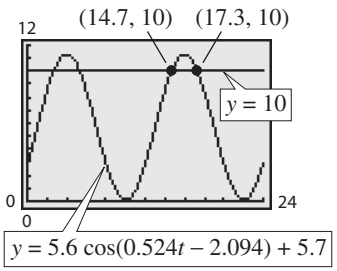


FIGURA 4.58

b. Las profundidades a las 9 A.M. y a las 3 P.M. son como sigue.

$$y = 5.6\cos(0.524 \cdot 9 - 2.094) + 5.7$$
$$\approx 0.84 \text{ pies} \qquad 9 \text{ A.M.}$$
$$y = 5.6\cos(0.524 \cdot 15 - 2.094) + 5.7$$
$$\approx 10.57 \text{ pies} \qquad 3 \text{ P.M.}$$

c. Para investigar cuándo la profundidad y es al menos de 10 pies, se puede graficar el modelo con la recta $y = 10$ usando una calculadora de gráficas, como se ve en la Figura 4.58. Usando el comando *intersect*, se puede determinar que la profundidad es al menos de 10 pies entre las 2.42 P.M. ($t \approx 14.7$) y las 5.18 P.M. ($t \approx 17.3$).

PUNTO *de repaso* Ahora trate de hacer el Ejercicio 91.

4.5 EJERCICIOS

En www.CalcChat.com vea las soluciones a los ejercicios impares.

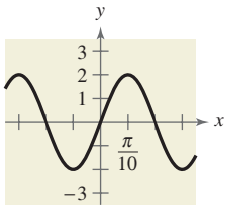
VOCABULARIO: Llene los espacios en blanco.

1. Un periodo de una función seno o coseno recibe el nombre de _____ de la curva seno o coseno.
2. El _____ de una curva seno o coseno representa la mitad de la distancia entre los valores máximo y mínimo de la función.
3. Para la función dada por $y = a \operatorname{sen}(bx - c)$, $\frac{c}{b}$ representa la _____ _____ de la gráfica de la función.
4. Para la función dada por $y = d + a\cos(bx - c)$, d representa un _____ _____ de la gráfica de la función.

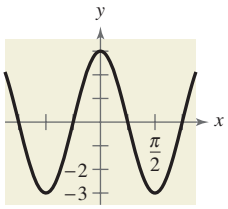
HABILIDADES Y APLICACIONES

En los Ejercicios 5-18, encuentre el periodo y amplitud.

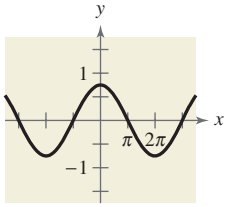
5. $y = 2 \operatorname{sen} 5x$



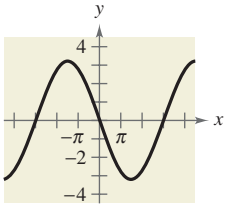
6. $y = 3\cos 2x$



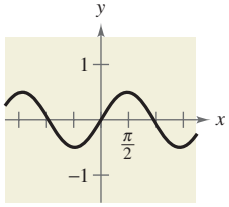
7. $y = \frac{3}{4}\cos\frac{x}{2}$



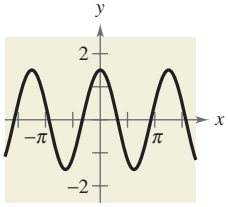
8. $y = -3 \operatorname{sen}\frac{x}{3}$



9. $y = \frac{1}{2}\operatorname{sen}\frac{\pi x}{3}$



10. $y = \frac{3}{2}\cos\frac{\pi x}{2}$



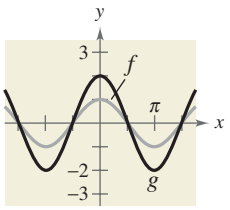
11. $y = -4 \operatorname{sen} x$
12. $y = -\cos\frac{2x}{3}$
13. $y = 3 \operatorname{sen} 10x$
14. $y = \frac{1}{5}\operatorname{sen} 6x$
15. $y = \frac{5}{3}\cos\frac{4x}{5}$
16. $y = \frac{5}{2}\cos\frac{x}{4}$
17. $y = \frac{1}{4}\operatorname{sen} 2\pi x$
18. $y = \frac{2}{3}\cos\frac{\pi x}{10}$

En los Ejercicios 19-26, describa la relación entre las gráficas de f y g. Considere la amplitud, periodo y desplazamientos.

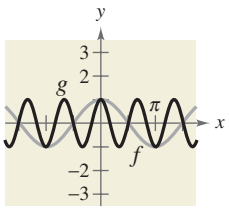
19. $f(x) = \operatorname{sen} x$
    $g(x) = \operatorname{sen}(x - \pi)$
20. $f(x) = \cos x$
    $g(x) = \cos(x + \pi)$
21. $f(x) = \cos 2x$
    $g(x) = -\cos 2x$
22. $f(x) = \operatorname{sen} 3x$
    $g(x) = \operatorname{sen}(-3x)$
23. $f(x) = \cos x$
    $g(x) = \cos 2x$
24. $f(x) = \operatorname{sen} x$
    $g(x) = \operatorname{sen} 3x$
25. $f(x) = \operatorname{sen} 2x$
    $g(x) = 3 + \operatorname{sen} 2x$
26. $f(x) = \cos 4x$
    $g(x) = -2 + \cos 4x$

En los Ejercicios 27-30, describa la relación entre las gráficas de f y g. Considere la amplitud, periodo y desplazamientos.

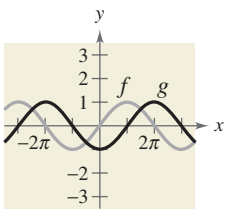
27.



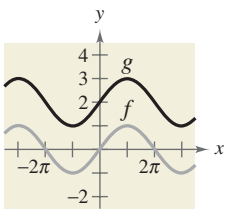
28.



29.



30.



En los Ejercicios 31-38, grafique f y g en el mismo conjunto de ejes de coordenadas. (Incluya dos periodos.)

31. $f(x) = -2 \operatorname{sen} x$
    $g(x) = 4 \operatorname{sen} x$
32. $f(x) = \operatorname{sen} x$
    $g(x) = \operatorname{sen}\frac{x}{3}$
33. $f(x) = \cos x$
    $g(x) = 2 + \cos x$
34. $f(x) = 2\cos 2x$
    $g(x) = -\cos 4x$

35. $f(x) = -\frac{1}{2}\operatorname{sen}\frac{x}{2}$
$g(x) = 3 - \frac{1}{2}\operatorname{sen}\frac{x}{2}$

36. $f(x) = 4\operatorname{sen}\pi x$
$g(x) = 4\operatorname{sen}\pi x - 3$

37. $f(x) = 2\cos x$
$g(x) = 2\cos(x + \pi)$

38. $f(x) = -\cos x$
$g(x) = -\cos(x - \pi)$

En los Ejercicios 39-60, trace la gráfica de la función. (Incluya dos periodos.)

39. $y = 5\operatorname{sen} x$

40. $y = \frac{1}{4}\operatorname{sen} x$

41. $y = \frac{1}{3}\cos x$

42. $y = 4\cos x$

43. $y = \cos\frac{x}{2}$

44. $y = \operatorname{sen} 4x$

45. $y = \cos 2\pi x$

46. $y = \operatorname{sen}\frac{\pi x}{4}$

47. $y = -\operatorname{sen}\frac{2\pi x}{3}$

48. $y = -10\cos\frac{\pi x}{6}$

49. $y = \operatorname{sen}\left(x - \frac{\pi}{2}\right)$

50. $y = \operatorname{sen}(x - 2\pi)$

51. $y = 3\cos(x + \pi)$

52. $y = 4\cos\left(x + \frac{\pi}{4}\right)$

53. $y = 2 - \operatorname{sen}\frac{2\pi x}{3}$

54. $y = -3 + 5\cos\frac{\pi t}{12}$

55. $y = 2 + \frac{1}{10}\cos 60\pi x$

56. $y = 2\cos x - 3$

57. $y = 3\cos(x + \pi) - 3$

58. $y = 4\cos\left(x + \frac{\pi}{4}\right) + 4$

59. $y = \frac{2}{3}\cos\left(\frac{x}{2} - \frac{\pi}{4}\right)$

60. $y = -3\cos(6x + \pi)$

En los Ejercicios 61-66, g está relacionada a una función principal $f(x) = \operatorname{sen}(x)$ o $f(x) = \cos(x)$. (a) Describa la secuencia de transformaciones de f a g. (b) Trace la gráfica de g. (c) Use notación de funciones para escribir g en términos de f.

61. $g(x) = \operatorname{sen}(4x - \pi)$

62. $g(x) = \operatorname{sen}(2x + \pi)$

63. $g(x) = \cos(x - \pi) + 2$

64. $g(x) = 1 + \cos(x + \pi)$

65. $g(x) = 2\operatorname{sen}(4x - \pi) - 3$

66. $g(x) = 4 - \operatorname{sen}(2x + \pi)$

En los Ejercicios 67-72, use una calculadora de gráficas para graficar la función. Incluya dos periodos. Asegúrese de escoger una pantalla apropiada.

67. $y = -2\operatorname{sen}(4x + \pi)$

68. $y = -4\operatorname{sen}\left(\frac{2}{3}x - \frac{\pi}{3}\right)$

69. $y = \cos\left(2\pi x - \frac{\pi}{2}\right) + 1$

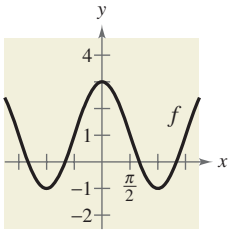
70. $y = 3\cos\left(\frac{\pi x}{2} + \frac{\pi}{2}\right) - 2$

71. $y = -0.1\operatorname{sen}\left(\frac{\pi x}{10} + \pi\right)$

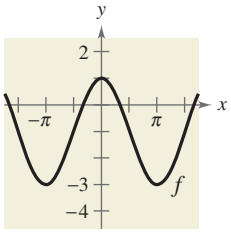
72. $y = \frac{1}{100}\operatorname{sen} 120\pi t$

RAZONAMIENTO GRÁFICO En los Ejercicios 73-76, encuentre a y d para la función $f(x) = a\cos x + d$ tal que la gráfica de f se relacione con la figura.

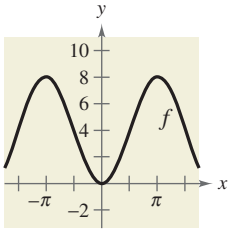
73.



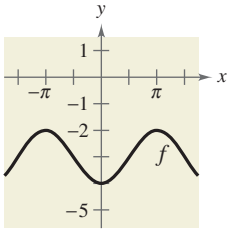
74.



75.

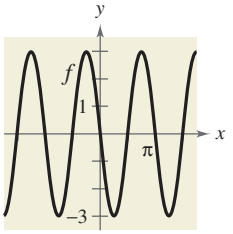


76.

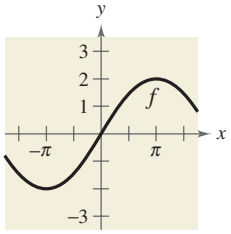


RAZONAMIENTO GRÁFICO En los Ejercicios 77-80, encuentre a, b y c para la función $f(x) = a\operatorname{sen}(bx - c)$ tal que la gráfica de f se relacione con la figura.

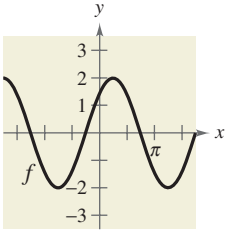
77.



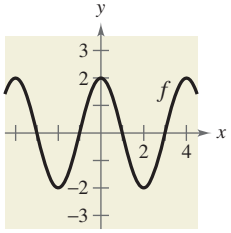
78.



79.



80.



En los Ejercicios 81 y 82, use una calculadora de gráficas para graficar y_1 y y_2 en el intervalo $[-2\pi, 2\pi]$. Use las gráficas para hallar números reales x tales que $y_1 = y_2$.

81. $y_1 = \operatorname{sen} x$
$y_2 = -\frac{1}{2}$

82. $y_1 = \cos x$
$y_2 = -1$

En los Ejercicios 83-86, escriba una ecuación para la función descrita por las características indicadas.

83. Una curva senoidal con periodo de π, una amplitud de 2, un desfase derecho de $\pi/2$ y una traslación vertical de 1 unidad hacia arriba.

84. Una curva senoidal con periodo de 4π, amplitud de 3, desfasamiento izquierdo de $\pi/4$ y traslación vertical de 1 unidad hacia abajo.

85. Una curva cosenoidal con periodo de π, amplitud de 1, desfasamiento izquierdo de π y traslación vertical de $\frac{3}{2}$ de unidad hacia abajo.

86. Una curva cosenoidal con período de 4π, amplitud de 3, desfasamiento derecho de $\pi/2$ y traslación vertical de 2 unidades hacia arriba.

87. CICLO RESPIRATORIO Para una persona en reposo, la velocidad v (en litros por segundo) de flujo de aire durante un ciclo respiratorio (el tiempo desde que se inicia una respiración hasta el inicio de la siguiente) está dada por $v = 0.85 \operatorname{sen} \dfrac{\pi t}{3}$, donde t es el tiempo (en segundos). (La inhalación ocurre cuando $v > 0$ y la exhalación, cuando $v < 0$.)

(a) Encuentre el tiempo para un ciclo respiratorio completo.

(b) Encuentre el número de ciclos por minuto.

(c) Trace la gráfica de la función de velocidad.

88. CICLO RESPIRATORIO Después de hacer ejercicio unos minutos, una persona tiene un ciclo respiratorio para el cual la velocidad de flujo de aire se aproxima con $v = 1.75 \operatorname{sen} \dfrac{\pi t}{2}$, donde t es el tiempo (en segundos). (La inhalación ocurre cuando $v > 0$ y la exhalación, cuando $v < 0$.)

(a) Encuentre el tiempo para un ciclo respiratorio completo.

(b) Encuentre el número de ciclos por minuto.

(c) Trace la gráfica de la función de velocidad.

89. ANÁLISIS DE DATOS: METEOROLOGÍA La tabla siguiente muestra las temperaturas altas diarias máximas en Las Vegas L y en International Falls I (en grados Fahrenheit) para el mes t, con $t = 1$ correspondiente a enero. (Fuente: National Climate Data Center)

Mes, t	Las Vegas, L	International Falls, I
1	57.1	13.8
2	63.0	22.4
3	69.5	34.9
4	78.1	51.5
5	87.8	66.6
6	98.9	74.2
7	104.1	78.6
8	101.8	76.3
9	93.8	64.7
10	80.8	51.7
11	66.0	32.5
12	57.3	18.1

(a) Un modelo para la temperatura en Las Vegas está dado por

$$L(t) = 80.60 + 23.50 \cos\left(\frac{\pi t}{6} - 3.67\right).$$

Encuentre un modelo trigonométrico para International Falls.

(b) Use una calculadora de gráficas para graficar los puntos de datos y el modelo para las temperaturas en Las Vegas. ¿Qué tan bien se ajusta el modelo a los datos?

(c) Use una calculadora de gráficas para graficar los puntos de datos y el modelo para las temperaturas en International Falls. ¿Qué tan bien se ajusta el modelo a los datos?

(d) Use los modelos para estimar el promedio de temperatura máxima en cada ciudad. ¿Cuál término de los modelos usó usted? Explique.

(e) ¿Cuál es el periodo de cada modelo? ¿Los periodos son lo que usted esperaba? Explique.

(f) ¿Cuál ciudad tiene la mayor variabilidad en temperatura en todo el año? ¿Cuál factor de los modelos determina esta variabilidad? Explique.

90. SALUD La función dada por

$$P = 100 - 20 \cos \frac{5\pi t}{3}$$

aproxima la presión sanguínea P (en milímetros de mercurio) en el tiempo t (en segundos) para una persona en reposo.

(a) Encuentre el periodo de la función.

(b) Encuentre el número de pulsaciones por minuto.

91. AFINACIÓN DE UN PIANO Al afinar un piano, un técnico golpea un diapasón para la nota de *la* arriba de la *do* mayor, y ajusta un movimiento ondulatorio que puede ser aproximado con $y = 0.001 \operatorname{sen} 880\pi t$, donde t es el tiempo (en segundos).

(a) ¿Cuál es el periodo de la función?

(b) La frecuencia f está dada por $f = 1/p$. ¿Cuál es la frecuencia de la nota?

92. ANÁLISIS DE DATOS: ASTRONOMÍA Los porcentajes y (en forma decimal) de la cara de la Luna que estuvo iluminada el día x en el año 2009, donde $x = 1$ representa el 1 de enero, se muestran en la tabla. (Fuente: U.S. Naval Observatory)

x	y
4	0.5
11	1.0
18	0.5
26	0.0
33	0.5
40	1.0

(a) Genere una gráfica de dispersión de los datos.

(b) Encuentre un modelo trigonométrico que se ajuste a los datos.

(c) Agregue la gráfica de su modelo del inciso (b) a la gráfica de dispersión.

(d) ¿Cuál es el periodo del modelo?

(e) Estime el porcentaje de iluminación de la Luna para el 12 de marzo de 2009.

93. CONSUMO DE COMBUSTIBLE El consumo diario C (en galones) de combustible diesel en una granja está modelado por

$$C = 30.3 + 21.6 \operatorname{sen}\left(\frac{2\pi t}{365} + 10.9\right)$$

donde t es el tiempo (en días), con $t = 1$ correspondiente al 1 de enero.

(a) ¿Cuál es el periodo del modelo? ¿Es lo que usted esperaba? Explique.

(b) ¿Cuál es el promedio diario de consumo de combustible? ¿Cuál término del modelo utilizó usted? Explique.

(c) Use una calculadora de gráficas para graficar el modelo. Use la gráfica para aproximar la época del año cuando el consumo excede de 40 galones por día.

94. RUEDA DE LA FORTUNA Una rueda de la fortuna está construida de modo que la altura (h) en pies sobre el piso de un asiento en el instante t (en segundos) se modele mediante

$$h(t) = 53 + 50 \operatorname{sen}\left(\frac{\pi}{10}t - \frac{\pi}{2}\right).$$

(a) Encuentre el periodo del modelo. ¿Qué le indica a usted el periodo acerca del paseo en ese juego mecánico?

(b) Encuentre la amplitud del modelo. ¿Qué le dice a usted la amplitud acerca del paseo?

(c) Use una calculadora de gráficas para graficar un ciclo del modelo.

EXPLORACIÓN

¿VERDADERO O FALSO? En los Ejercicios 95-97, determine si la proposición es verdadera o falsa. Justifique su respuesta.

95. La gráfica de la función dada por $f(x) = \operatorname{sen}(x + 2\pi)$ traslada la gráfica de $f(x) = \operatorname{sen} x$ exactamente un periodo a la derecha, de modo que las dos gráficas se ven idénticas.

96. La función dada por $y = \frac{1}{2}\cos 2x$ tiene una amplitud que es el doble de la de la función dada por $y = \cos x$.

97. La gráfica de $y = -\cos x$ es una reflexión de la gráfica de $y = \operatorname{sen}(x + \pi/2)$ en el eje x.

98. ESCRITURA Trace la gráfica de $y = \cos bx$ para $b = \frac{1}{2}$, 2 y 3. ¿En qué forma el valor de b afecta la gráfica? ¿Cuántos ciclos completos ocurren entre 0 y 2π para cada valor de b?

99. ESCRITURA Trace la gráfica de $y = \operatorname{sen}(x - c)$ para $c = -\pi/4$, 0 y $\pi/4$. ¿En qué forma el valor de c afecta la gráfica?

100. TOQUE FINAL Use una calculadora de gráficas para graficar la función dada por $y = d + a \operatorname{sen}(bx - c)$, para valores diferentes de a, b, c y d. Redacte un párrafo que describa los cambios en la gráfica correspondientes a cambios en cada constante.

CONJETURA En los Ejercicios 101 y 102, grafique f y g en el mismo conjunto de ejes de coordenadas. Incluya dos periodos. Haga una conjetura acerca de las funciones.

101. $f(x) = \operatorname{sen} x,\ g(x) = \cos\left(x - \frac{\pi}{2}\right)$

102. $f(x) = \operatorname{sen} x,\ g(x) = -\cos\left(x + \frac{\pi}{2}\right)$

103. Usando cálculo se puede demostrar que las funciones seno y coseno se pueden aproximar con los polinomios

$$\operatorname{sen} x \approx x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} \quad \text{y} \quad \cos x \approx 1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!}$$

donde x está en radianes.

(a) Use una calculadora de gráficas para graficar la función seno y su aproximación con polinomios en la misma pantalla. ¿Cómo se comparan las gráficas?

(b) Use una calculadora de gráficas para graficar la función coseno y su aproximación con polinomios en la misma pantalla. ¿Cómo se comparan las gráficas?

(c) Estudie los patrones en las aproximaciones con polinomios de las funciones seno y coseno, y pronostique el siguiente término en cada uno. A continuación repita los incisos (a) y (b). ¿Cómo cambió la precisión de las aproximaciones cuando se agregó el término adicional?

104. Use las aproximaciones con polinomios de las funciones seno y coseno del Ejercicio 103 para aproximar los siguientes valores de función. Compare los resultados con los dados por una calculadora. ¿El error en la aproximación es el mismo en cada caso? Explique.

(a) $\operatorname{sen}\frac{1}{2}$ (b) $\operatorname{sen} 1$ (c) $\operatorname{sen}\frac{\pi}{6}$

(d) $\cos(-0.5)$ (e) $\cos 1$ (f) $\cos\frac{\pi}{4}$

PROYECTO: METEOROLOGÍA Para resolver una aplicación ampliada, que analiza la temperatura mensual media y la precipitación mensual media en Honolulú, Hawai, visite el sitio web de este texto en *academic.cengage.com*. (Fuente: National Climatic Data Center)

4.6 Gráficas de otras funciones trigonométricas

Lo que debe aprender

- Trazar las gráficas de funciones tangente.
- Trazar las gráficas de funciones cotangente.
- Trazar las gráficas de funciones secante y cosecante.
- Trazar las gráficas de funciones trigonométricas amortiguadas.

Por qué debe aprenderlo

Se pueden usar gráficas de funciones trigonométricas para modelar situaciones de la vida real, por ejemplo, la distancia de una cámara de televisión a una unidad en un desfile, como en el Ejercicio 92 en la página 339.

Alan Pappe/Photodisc/Getty Images

Ayuda de álgebra

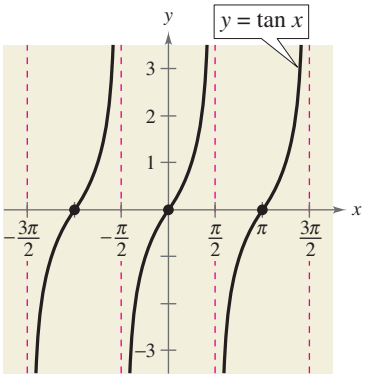
- Puede hacer un repaso de funciones impares y pares en la Sección 1.5.
- Puede hacer un repaso de la simetría de una gráfica en la Sección 1.2.
- Puede hacer un repaso de las identidades trigonométricas en la Sección 4.3.
- Puede hacer un repaso de las asíntotas en la Sección 2.6.
- Puede hacer un repaso del dominio y el rango de una función en la Sección 1.4.
- Puede hacer un repaso de intersecciones de una gráfica con los ejes de coordenadas en la Sección 1.2.

Gráfica de la función tangente

Recuerde que la función tangente es impar. Esto es, $\tan(-x) = -\tan x$. En consecuencia, la gráfica de $y = \tan x$ es simétrica respecto al origen. También se puede saber, de la identidad $\tan x = \operatorname{sen} x/\cos x$, que la tangente no está definida para valores en los que $\cos x = 0$. Dos de estos valores son $x = \pm\pi/2 \approx \pm 1.5708$.

x	$-\frac{\pi}{2}$	-1.57	-1.5	$-\frac{\pi}{4}$	0	$\frac{\pi}{4}$	1.5	1.57	$\frac{\pi}{2}$
$\tan x$	No está definida	-1255.8	-14.1	-1	0	1	14.1	1255.8	No está definida

Como se indica en la tabla, $\tan x$ aumenta sin límite cuando x se aproxima a $\pi/2$ desde la izquierda, y disminuye sin límite cuando x se aproxima a $-\pi/2$ desde la derecha. Por tanto, la gráfica de $y = \tan x$ tiene *asíntotas verticales* en $x = \pi/2$ y $x = -\pi/2$, como se ve en la Figura 4.59. Además, como el periodo de la función tangente es π, las asíntotas verticales también se presentan cuando $x = \pi/2 + n\pi$, donde n es un entero. El dominio de la función tangente es el conjunto de todos los números reales que no sean $x = \pi/2 + n\pi$, y el rango es el conjunto de todos los números reales.



PERIODO: π
DOMINIO: TODA $x \neq \frac{\pi}{2} + n\pi$
RANGO: $(-\infty, \infty)$
ASÍNTOTAS VERTICALES: $x = \frac{\pi}{2} + n\pi$
SIMETRÍA: ORIGEN

FIGURA 4.59

Trazar la gráfica de $y = a\tan(bx - c)$ es semejante a trazar la gráfica de $y = a\operatorname{sen}(bx - c)$ en que se localizan los puntos clave que identifican las intersecciones con los ejes y las asíntotas. Se pueden hallar dos asíntotas verticales consecutivas si se resuelven las ecuaciones

$$bx - c = -\frac{\pi}{2} \quad \text{y} \quad bx - c = \frac{\pi}{2}.$$

El punto medio entre dos asíntotas verticales consecutivas es una intersección de la gráfica con el eje x. El periodo de la función $y = a\tan(bx - c)$ es la distancia entre dos asíntotas verticales consecutivas. La amplitud de una función tangente no está definida. Después de trazar las asíntotas y la intersección con el eje x, determine unos cuantos puntos adicionales entre las dos asíntotas y trace un ciclo. Por último, trace uno de los dos ciclos adicionales a izquierda y derecha.

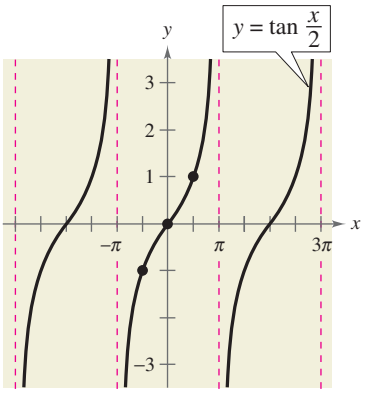


FIGURA 4.60

Ejemplo 1 Trazar la gráfica de una función tangente

Trace la gráfica de $y = \tan(x/2)$.

Solución

Al resolver las ecuaciones

$$\frac{x}{2} = -\frac{\pi}{2} \quad \text{y} \quad \frac{x}{2} = \frac{\pi}{2}$$

$$x = -\pi \qquad x = \pi$$

podemos ver que hay dos asíntotas verticales consecutivas en $x = -\pi$ y $x = \pi$. Entre estas dos asíntotas, determine unos cuantos puntos, incluida la intersección con el eje x, como se muestra en la tabla. En la Figura 4.60 se ilustran tres ciclos de la gráfica.

x	$-\pi$	$-\frac{\pi}{2}$	0	$\frac{\pi}{2}$	π
$\tan\frac{x}{2}$	No está definida	-1	0	1	No está definida

PUNTO *de repaso* Ahora trate de hacer el Ejercicio 15.

Ejemplo 2 Trazar la gráfica de una función tangente

Trace la gráfica de $y = -3\tan 2x$.

Solución

Al resolver las ecuaciones

$$2x = -\frac{\pi}{2} \quad \text{y} \quad 2x = \frac{\pi}{2}$$

$$x = -\frac{\pi}{4} \qquad x = \frac{\pi}{4}$$

podemos ver que hay dos asíntotas verticales consecutivas en $x = -\pi/4$ y $x = \pi/4$. Entre estas dos asíntotas, determine unos cuantos puntos, incluida la intersección con el eje x, como se muestra en la tabla. En la Figura 4.61 se ilustran tres ciclos de la gráfica.

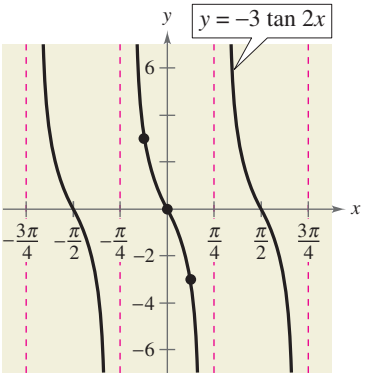


FIGURA 4.61

x	$-\frac{\pi}{4}$	$-\frac{\pi}{8}$	0	$\frac{\pi}{8}$	$\frac{\pi}{4}$
$-3\tan 2x$	No está definido	3	0	-3	No está definido

Al comparar las gráficas de los Ejemplos 1 y 2 se puede ver que la gráfica de $y = a\tan(bx - c)$ aumenta entre asíntotas verticales consecutivas cuando $a > 0$, y disminuye entre asíntotas verticales consecutivas cuando $a < 0$. En otras palabras, la gráfica de $a < 0$ es una reflexión en el eje x de la gráfica para $a > 0$.

PUNTO *de repaso* Ahora trate de hacer el Ejercicio 17.

Gráfica de la función cotangente

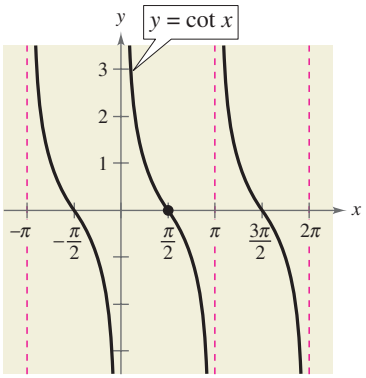
La gráfica de la función cotangente es semejante a la de la función tangente. También tiene un periodo de π, pero de la identidad

$$y = \cot x = \frac{\cos x}{\operatorname{sen} x}$$

se puede ver que la función cotangente tiene asíntotas verticales cuando sen x es cero, lo cual ocurre en $x = n\pi$, donde n es un entero. La gráfica de la función cotangente se ilustra en la Figura 4.62. Observe que las dos asíntotas verticales consecutivas de la gráfica de $y = a\cot(bx - c)$ se pueden hallar resolviendo las ecuaciones $bx - c = 0$ y $bx - c = \pi$.

TECNOLOGÍA

Algunas calculadoras de gráficas tienen dificultad para graficar funciones trigonométricas que tienen asíntotas verticales. Su calculadora de gráficas puede enlazar partes de las gráficas de las funciones tangente, cotangente, secante y cosecante que se supone no deben estar enlazadas. Para eliminar este problema, cambie el modo de la calculadora al de *dot*.



PERIODO: π
DOMINIO: TODA $x \neq n\pi$
RANGO: $(-\infty, \infty)$
ASÍNTOTAS VERTICALES: $x = n\pi$
SIMETRÍA: ORIGEN

FIGURA 4.62

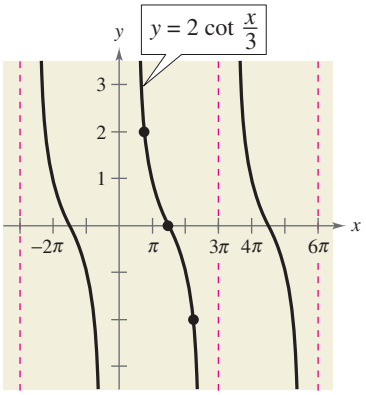


FIGURA 4.63

Ejemplo 3 Trazar la gráfica de una función cotangente

Trace la gráfica de $y = 2\cot\frac{x}{3}$.

Solución

Al resolver las ecuaciones

$$\frac{x}{3} = 0 \quad \text{y} \quad \frac{x}{3} = \pi$$

$$x = 0 \qquad x = 3\pi$$

podemos ver que hay dos asíntotas verticales consecutivas en $x = 0$ y $x = 3\pi$. Entre estas dos asíntotas, determine unos cuantos puntos, incluida la intersección con el eje x, como se muestra en la tabla. En la Figura 4.63 se ilustran tres ciclos de la gráfica. Observe que el periodo es 3π, la distancia entre asíntotas consecutivas.

x	0	$\frac{3\pi}{4}$	$\frac{3\pi}{2}$	$\frac{9\pi}{4}$	3π
$2\cot\frac{x}{3}$	No está definida	2	0	-2	No está definida

PUNTO *de repaso* Ahora trate de hacer el Ejercicio 27.

Gráficas de las funciones recíprocas

Las gráficas de las dos funciones trigonométricas restantes se pueden obtener de las gráficas de las funciones seno y coseno usando las identidades recíprocas

$$\csc x = \frac{1}{\operatorname{sen} x} \qquad \text{y} \qquad \sec x = \frac{1}{\cos x}.$$

Por ejemplo, a un valor dado de x, la coordenada y de sec x es la recíproca de la coordenada y de cos x. Por supuesto que, cuando cos $x = 0$, la recíproca no existe. Cerca de tales valores de x, el comportamiento de la función secante es semejante al de la función tangente. En otras palabras, las gráficas de

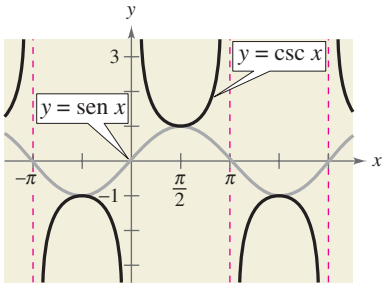
$$\tan x = \frac{\operatorname{sen} x}{\cos x} \qquad \text{y} \qquad \sec x = \frac{1}{\cos x}$$

tienen asíntotas verticales en $x = \pi/2 + n\pi$, donde n es un entero, y el coseno es cero en estos valores de x. Del mismo modo,

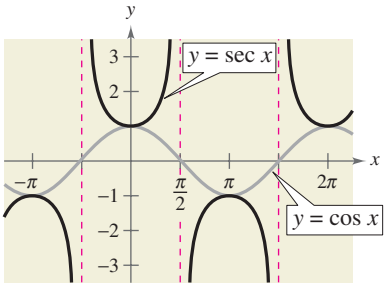
$$\cot x = \frac{\cos x}{\operatorname{sen} x} \qquad \text{y} \qquad \csc x = \frac{1}{\operatorname{sen} x}$$

tienen asíntotas verticales donde sen $x = 0$, es decir, en $x = n\pi$.

Para trazar la gráfica de una función secante o cosecante, primero se debe hacer un dibujo de su función recíproca. Por ejemplo, para trazar la gráfica de $y = \csc x$, primero se traza la gráfica de $y = \operatorname{sen} x$. A continuación se toman recíprocos de las coordenadas y para obtener puntos en la gráfica de $y = \csc x$. Este procedimiento se emplea para obtener las gráficas que se ilustran en la Figura 4.64.



PERIODO: 2π
DOMINIO: TODA $x \neq n\pi$
RANGO: $(-\infty, -1] \cup [1, \infty)$
ASÍNTOTAS VERTICALES: $x = n\pi$
SIMETRÍA: ORIGEN



PERIODO: 2π
DOMINIO: TODA $x \neq \frac{\pi}{2} + n\pi$
RANGO: $(-\infty, -1] \cup [1, \infty)$
ASÍNTOTAS VERTICALES: $x = \frac{\pi}{2} + n\pi$
SIMETRÍA: EJE y

FIGURA 4.64

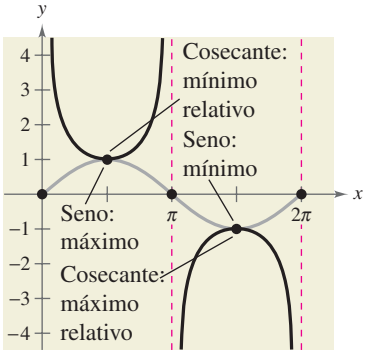


FIGURA 4.65

Al comparar las gráficas de las funciones cosecante con las de las funciones seno y coseno, observe que los "montes" y "valles" están intercambiados. Por ejemplo, un monte (o punto máximo) en la curva de seno corresponde a un valle (un mínimo relativo) en la curva cosecante, y un valle (o punto mínimo) en la curva seno corresponde a un monte (un máximo relativo) en la curva cosecante, como se muestra en la Figura 4.65. En forma adicional, las intersecciones con el eje x de las funciones seno y coseno se convierten en asíntotas verticales de las funciones cosecante y secante, respectivamente (vea Figura 4.65).

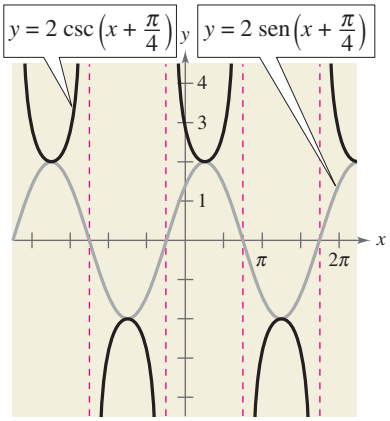


FIGURA 4.66

Ejemplo 4 Trazar la gráfica de una función cosecante

Trace la gráfica de $y = 2\csc\left(x + \frac{\pi}{4}\right)$.

Solución

Empiece por trazar la gráfica de

$$y = 2\,\text{sen}\left(x + \frac{\pi}{4}\right).$$

Para esta función, la amplitud es 2 y el periodo es 2π. Al resolver las ecuaciones

$$x + \frac{\pi}{4} = 0 \qquad \text{y} \qquad x + \frac{\pi}{4} = 2\pi$$

$$x = -\frac{\pi}{4} \qquad\qquad x = \frac{7\pi}{4}$$

podemos ver que un ciclo de la función seno corresponde al intervalo de $x = -\pi/4$ a $x = 7\pi/4$. La gráfica de esta función seno está representada por la curva gris en la Figura 4.66. Como la función seno es cero en el punto medio y puntos extremos de este intervalo, la correspondiente función cosecante

$$y = 2\csc\left(x + \frac{\pi}{4}\right)$$

$$= 2\left(\frac{1}{\text{sen}[x + (\pi/4)]}\right)$$

tiene asíntotas verticales en $x = -\pi/4$, $x = 3\pi/4$, $x = 7\pi/4$, etcétera. La gráfica de la función cosecante está representada por la curva negra en la Figura 4.66.

PUNTO *de repaso* Ahora trate de hacer el Ejercicio 33.

Ejemplo 5 Trazar la gráfica de una función secante

Trace la gráfica de $y = \sec 2x$.

Solución

Empezamos por trazar la gráfica de $y = \cos 2x$, como lo indica la curva gris de la Figura 4.67. A continuación, formamos la gráfica de $y = \sec 2x$ como la curva negra de la figura. Observe que las intersecciones con el eje x de $y = \cos 2x$

$$\left(-\frac{\pi}{4}, 0\right), \qquad \left(\frac{\pi}{4}, 0\right), \qquad \left(\frac{3\pi}{4}, 0\right), \ldots$$

corresponden a las asíntotas verticales

$$x = -\frac{\pi}{4}, \qquad x = \frac{\pi}{4}, \qquad x = \frac{3\pi}{4}, \ldots$$

de la gráfica de $y = \sec 2x$. Además, observe que el periodo de $y = \cos 2x$ y $y = \sec 2x$ es π.

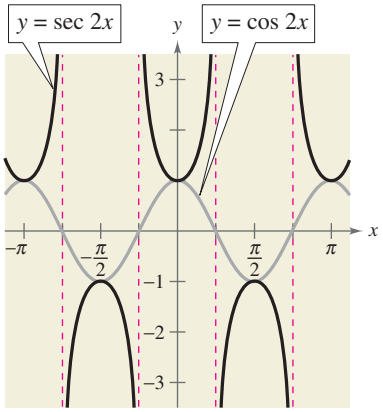


FIGURA 4.67

PUNTO *de repaso* Ahora trate de hacer el Ejercicio 35.

Gráficas trigonométricas amortiguadas

Un *producto* de dos funciones se puede graficar usando propiedades de las funciones individuales. Por ejemplo, considere la función

$$f(x) = x \operatorname{sen} x$$

como el producto de las funciones $y = x$ y $y = \operatorname{sen} x$. Usando propiedades del valor absoluto y el hecho de que $|\operatorname{sen} x| \leq 1$, tenemos que $0 \leq |x||\operatorname{sen} x| \leq |x|$. En consecuencia,

$$-|x| \leq x \operatorname{sen} x \leq |x|$$

lo cual significa que la gráfica de $f(x) = x \operatorname{sen} x$ está entre las rectas $y = -x$ y $y = x$. Además, como

$$f(x) = x \operatorname{sen} x = \pm x \quad \text{en} \quad x = \frac{\pi}{2} + n\pi$$

y

$$f(x) = x \operatorname{sen} x = 0 \quad \text{en} \quad x = n\pi$$

la gráfica de f toca la recta $y = -x$ o la recta $y = x$ en $x = \pi/2 + n\pi$ y tiene intersecciones con el eje x en $x = n\pi$. Un dibujo de f se muestra en la Figura 4.68. En la función $f(x) = x \operatorname{sen} x$, el factor x se denomina **factor (o coeficiente) de amortiguamiento.**

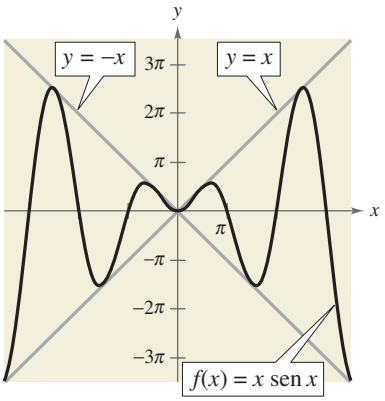


FIGURA 4.68

Tip de estudio

¿Puede ver por qué la gráfica de $f(x) = x \operatorname{sen} x$ toca las rectas $y = \pm x$ en $x = \pi/2 + n\pi$ y por qué la gráfica tiene intersecciones con el eje x en $x = n\pi$? Recuerde que la función seno es igual a 1 en $\pi/2, 3\pi/2, 5\pi/2, \ldots$ (múltiplos impares de $\pi/2$) y es igual a 0 en $\pi, 2\pi, 3\pi, \ldots$ (múltiplos de π).

Ejemplo 6 Onda senoidal amortiguada

Trace la gráfica de $f(x) = e^{-x} \operatorname{sen} 3x$.

Solution

Considere $f(x)$ como el producto de las dos funciones

$$y = e^{-x} \quad \text{y} \quad y = \operatorname{sen} 3x$$

cada una de las cuales tiene el conjunto de números reales como su dominio. Para cualquier número real x, sabemos que $e^{-x} \geq 0$ y $|\operatorname{sen} 3x| \leq 1$. Entonces, $e^{-x}|\operatorname{sen} 3x| \leq e^{-x}$, lo cual significa que

$$-e^{-x} \leq e^{-x} \operatorname{sen} 3x \leq e^{-x}.$$

Además, como

$$f(x) = e^{-x} \operatorname{sen} 3x = \pm e^{-x} \quad \text{en} \quad x = \frac{\pi}{6} + \frac{n\pi}{3}$$

y

$$f(x) = e^{-x} \operatorname{sen} 3x = 0 \quad \text{en} \quad x = \frac{n\pi}{3}$$

la gráfica de f toca las curvas $y = -e^{-x}$ y $y = e^{-x}$ en $x = \pi/6 + n\pi/3$ y tiene intersecciones con el eje x en $x = n\pi/3$. En la Figura 4.69 se ilustra un dibujo.

PUNTO *de repaso* Ahora trate de hacer el Ejercicio 65.

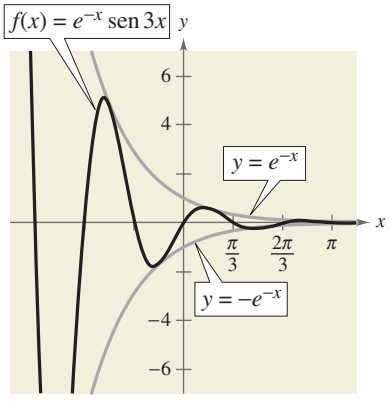
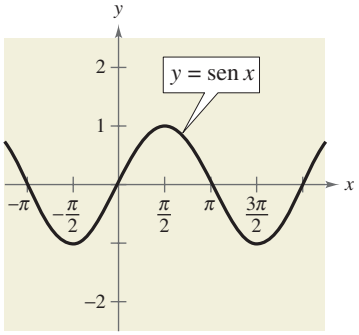
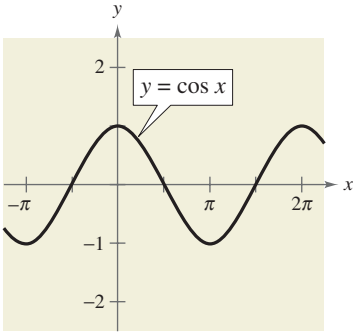


FIGURA 4.69

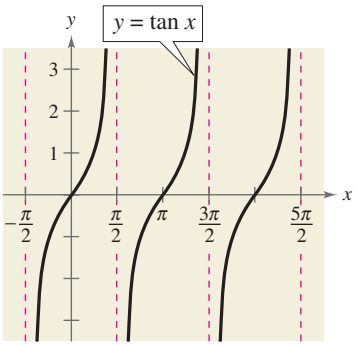
La figura 4.70 resume las características de las seis funciones trigonométricas básicas.



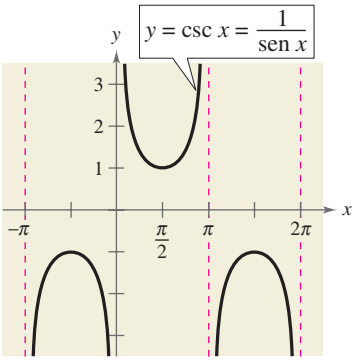
DOMINIO: $(-\infty, \infty)$
RANGO: $[-1, 1]$
PERIODO: 2π



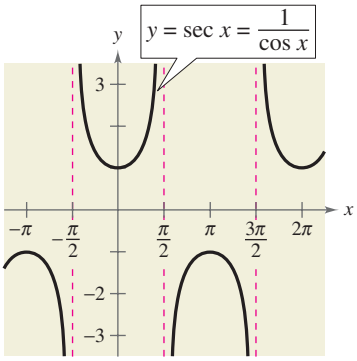
DOMINIO: $(-\infty, \infty)$
RANGO: $[-1, 1]$
PERIODO: 2π



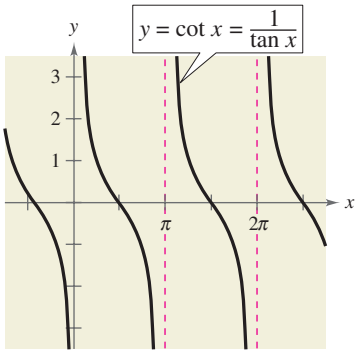
DOMINIO: TODA $x \neq \frac{\pi}{2} + n\pi$
RANGO: $(-\infty, \infty)$
PERIODO: π



DOMINIO: TODA $x \neq n\pi$
RANGO: $(-\infty, -1] \cup [1, \infty)$
PERIODO: 2π



DOMINIO: TODA $x \neq \frac{\pi}{2} + n\pi$
RANGO: $(-\infty, -1] \cup [1, \infty)$
PERIODO: 2π



DOMINIO: TODA $x \neq n\pi$
RANGO: $(-\infty, \infty)$
PERIODO: π

FIGURA 4.70

DISCUSIÓN EN CLASE

Combinación de funciones trigonométricas Recuerde de la Sección 1.8 que las funciones pueden combinarse aritméticamente. Esto también se aplica a las funciones trigonométricas. Para cada una de las funciones

$$h(x) = x + \operatorname{sen} x \quad \text{y} \quad h(x) = \cos x - \operatorname{sin} 3x$$

(a) Identifique dos funciones f y g más sencillas que comprendan la combinación, (b) use una tabla para mostrar cómo obtener los valores numéricos de $h(x)$ a partir de valores numéricos de $f(x)$ y $g(x)$, y (c) use gráficas de f y g para mostrar la forma en que la gráfica de h puede formarse.

¿Puede encontrar funciones

$$f(x) = d + a\,\operatorname{sen}(bx + c) \quad \text{y} \quad g(x) = d + a\cos(bx + c)$$

tales que $f(x) + g(x) = 0$ para toda x?

4.6 EJERCICIOS

En www.CalcChat.com vea las soluciones a los ejercicios impares.

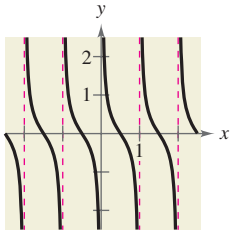
VOCABULARIO: Llene los espacios en blanco.

1. Las funciones tangente, cotangente y cosecante son _____, de modo que sus gráficas respectivas tienen simetría respecto al_____.
2. Las gráficas de las funciones tangente, cotangente, secante y cosecante tienen asíntotas _____.
3. Para trazar la gráfica de una función secante o cosecante, primero haga un dibujo de su correspondiente función_____.
4. Para las funciones dadas $f(x) = g(x) \cdot \operatorname{sen} x$, $g(x)$ se denomina factor _____ _____ de la función $f(x)$.
5. El periodo de $y = \tan x$ es _____.
6. El dominio de $y = \cot x$ es todos los números reales tales que _____.
7. El rango de $y = \sec x$ es _____.
8. El periodo de $y = \csc x$ es _____.

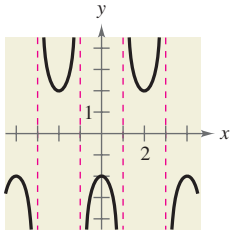
HABILIDADES Y APLICACIONES

En los Ejercicios 9-14, relacione la función con su gráfica. Exprese el periodo de la función. [Las gráficas están marcadas (a),(b),(c),(d),(e) y (f).]

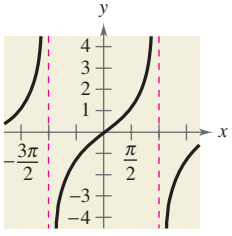
(a)



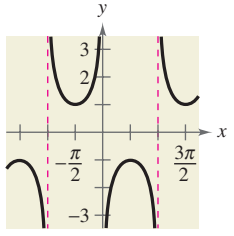
(b)



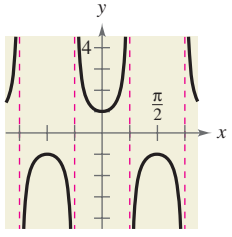
(c)



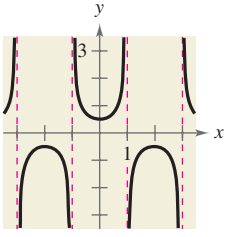
(d)



(e)



(f)



9. $y = \sec 2x$
10. $y = \tan \dfrac{x}{2}$
11. $y = \dfrac{1}{2} \cot \pi x$
12. $y = -\csc x$
13. $y = \dfrac{1}{2} \sec \dfrac{\pi x}{2}$
14. $y = -2 \sec \dfrac{\pi x}{2}$

En los Ejercicios 15-38, trace la gráfica de la función. Incluya dos periodos.

15. $y = \dfrac{1}{3} \tan x$
16. $y = \tan 4x$
17. $y = -2 \tan 3x$
18. $y = -3 \tan \pi x$
19. $y = -\frac{1}{2} \sec x$
20. $y = \frac{1}{4} \sec x$
21. $y = \csc \pi x$
22. $y = 3 \csc 4x$
23. $y = \frac{1}{2} \sec \pi x$
24. $y = -2 \sec 4x + 2$
25. $y = \csc \dfrac{x}{2}$
26. $y = \csc \dfrac{x}{3}$
27. $y = 3 \cot 2x$
28. $y = 3 \cot \dfrac{\pi x}{2}$
29. $y = 2 \sec 3x$
30. $y = -\frac{1}{2} \tan x$
31. $y = \tan \dfrac{\pi x}{4}$
32. $y = \tan(x + \pi)$
33. $y = 2 \csc(x - \pi)$
34. $y = \csc(2x - \pi)$
35. $y = 2 \sec(x + \pi)$
36. $y = -\sec \pi x + 1$
37. $y = \dfrac{1}{4} \csc\left(x + \dfrac{\pi}{4}\right)$
38. $y = 2 \cot\left(x + \dfrac{\pi}{2}\right)$

En los Ejercicios 39-48 use una calculadora de gráficas para graficar la función. Incluya dos periodos.

39. $y = \tan \dfrac{x}{3}$
40. $y = -\tan 2x$
41. $y = -2 \sec 4x$
42. $y = \sec \pi x$
43. $y = \tan\left(x - \dfrac{\pi}{4}\right)$
44. $y = \dfrac{1}{4} \cot\left(x - \dfrac{\pi}{2}\right)$
45. $y = -\csc(4x - \pi)$
46. $y = 2 \sec(2x - \pi)$
47. $y = 0.1 \tan\left(\dfrac{\pi x}{4} + \dfrac{\pi}{4}\right)$
48. $y = \dfrac{1}{3} \sec\left(\dfrac{\pi x}{2} + \dfrac{\pi}{2}\right)$

En los Ejercicios 49-56, use una gráfica para resolver la ecuación en el intervalo $[-2\pi, 2\pi]$.

49. $\tan x = 1$

50. $\tan x = \sqrt{3}$

51. $\cot x = -\frac{\sqrt{3}}{3}$

52. $\cot x = 1$

53. $\sec x = -2$

54. $\sec x = 2$

55. $\csc x = \sqrt{2}$

56. $\csc x = -\frac{2\sqrt{3}}{3}$

En los Ejercicios 57-64, use la gráfica de la función para determinar si la función es par, impar o ninguna de éstas. Verifique algebraicamente la respuesta

57. $f(x) = \sec x$

58. $f(x) = \tan x$

59. $g(x) = \cot x$

60. $g(x) = \csc x$

61. $f(x) = x + \tan x$

62. $f(x) = x^2 - \sec x$

63. $g(x) = x \csc x$

64. $g(x) = x^2 \cot x$

65. RAZONAMIENTO GRÁFICO Considere las funciones dadas por

$$f(x) = 2 \operatorname{sen} x \quad \text{y} \quad g(x) = \frac{1}{2}\csc x$$

en el intervalo $(0, \pi)$.

(a) Grafique f y g en el mismo plano de coordenadas.

(b) Aproxime el intervalo en el que $f > g$.

(c) Describa el comportamiento de cada una de las funciones cuando x se aproxime a π. ¿Cómo está relacionado el comportamiento de g con el de f cuando x se aproxima a π?

66. RAZONAMIENTO GRÁFICO Considere las funciones dadas por

$$f(x) = \tan\frac{\pi x}{2} \quad \text{y} \quad g(x) = \frac{1}{2}\sec\frac{\pi x}{2}$$

en el intervalo $(-1, 1)$.

(a) Use una calculadora de gráficas para graficar f y g en la misma pantalla.

(b) Aproxime el intervalo en el que $f < g$.

(c) Aproxime el intervalo en el que $2f < 2g$. ¿Cómo se compara el resultado con el del inciso (b)? Explique.

En los Ejercicios 67-72, use una calculadora de gráficas para graficar las dos ecuaciones en la misma pantalla. Use las gráficas para determinar si las expresiones son equivalentes. Verifique algebraicamente los resultados.

67. $y_1 = \operatorname{sen} x \csc x, \quad y_2 = 1$

68. $y_1 = \operatorname{sen} x \sec x, \quad y_2 = \tan x$

69. $y_1 = \dfrac{\cos x}{\operatorname{sen} x}, \quad y_2 = \cot x$

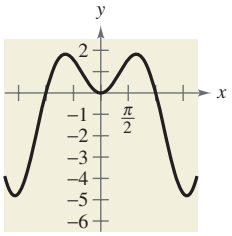
70. $y_1 = \tan x \cot^2 x, \quad y_2 = \cot x$

71. $y_1 = 1 + \cot^2 x, \quad y_2 = \csc^2 x$

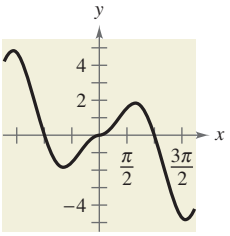
72. $y_1 = \sec^2 x - 1, \quad y_2 = \tan^2 x$

En los Ejercicios 73-76, relacione la función con su gráfica. Describa el comportamiento de la función cuando x se aproxime a cero. [Las gráficas están marcadas como (a),(b),(c) y (d).]

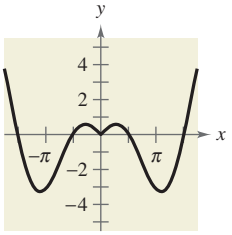
(a)



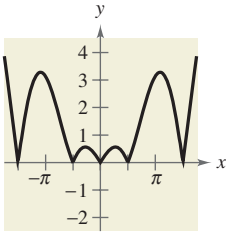
(b)



(c)



(d)



73. $f(x) = |x \cos x|$

74. $f(x) = x \operatorname{sen} x$

75. $g(x) = |x| \operatorname{sen} x$

76. $g(x) = |x| \cos x$

CONJETURA En los Ejercicios 77-80, grafique las funciones f y g. Use las gráficas para hacer una conjetura acerca de la relación entre las funciones.

77. $f(x) = \operatorname{sen} x + \cos\left(x + \dfrac{\pi}{2}\right), \quad g(x) = 0$

78. $f(x) = \operatorname{sen} x - \cos\left(x + \dfrac{\pi}{2}\right), \quad g(x) = 2 \operatorname{sen} x$

79. $f(x) = \operatorname{sen}^2 x, \quad g(x) = \frac{1}{2}(1 - \cos 2x)$

80. $f(x) = \cos^2\dfrac{\pi x}{2}, \quad g(x) = \dfrac{1}{2}(1 + \cos \pi x)$

En los Ejercicios 81-84, use una calculadora de gráficas para graficar la función y factor de amortiguamiento en la misma pantalla. Describa el comportamiento de la función cuando x aumente sin límite.

81. $g(x) = e^{-x^2/2} \operatorname{sen} x$

82. $f(x) = e^{-x} \cos x$

83. $f(x) = 2^{-x/4} \cos \pi x$

84. $h(x) = 2^{-x^2/4} \operatorname{sen} x$

En los Ejercicios 85-90, use calculadora de gráficas para graficar la función. Describa el comportamiento de la función cuando x se aproxime a cero.

85. $y = \dfrac{6}{x} + \cos x, \quad x > 0$

86. $y = \dfrac{4}{x} + \sin 2x, \quad x > 0$

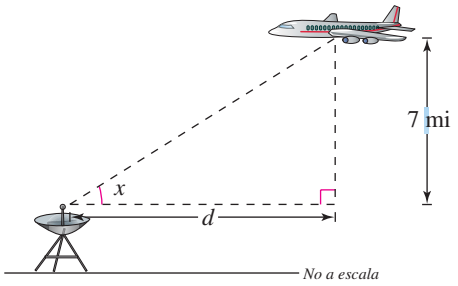
87. $g(x) = \dfrac{\operatorname{sen} x}{x}$

88. $f(x) = \dfrac{1 - \cos x}{x}$

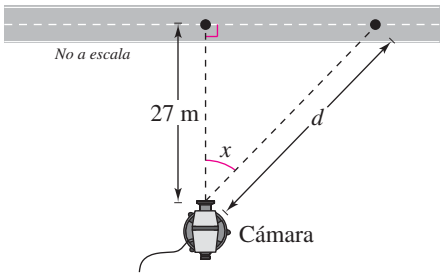
89. $f(x) = \operatorname{sen} \dfrac{1}{x}$

90. $h(x) = x \operatorname{sen} \dfrac{1}{x}$

91. DISTANCIA Un avión que vuela a una altitud de 7 millas sobre una antena de radar pasará directamente sobre ésta (vea figura). Sea d la distancia en tierra desde la antena al punto directamente bajo el avión, y sea x el ángulo de elevación al avión desde la antena. (d es positiva cuando el avión se aproxime a la antena.) Escriba d como función de x y grafique la función sobre el intervalo $0 < x < \pi$.



92. COBERTURA DE TELEVISIÓN Una cámara de televisión está en una plataforma de observación, a 27 metros de la calle en la que un desfile pasará de izquierda a derecha (vea figura). Escriba la distancia d de la cámara a una unidad particular del desfile, como función del ángulo x, y grafique la función sobre el intervalo $-\pi/2 < x < \pi/2$. (Considere x como negativa cuando una unidad del desfile se aproxime desde la izquierda.)



93. METEOROLOGÍA Las temperaturas altas H mensuales, normales (en grados Fahrenheit) en Erie, Pennsylvania se aproximan con

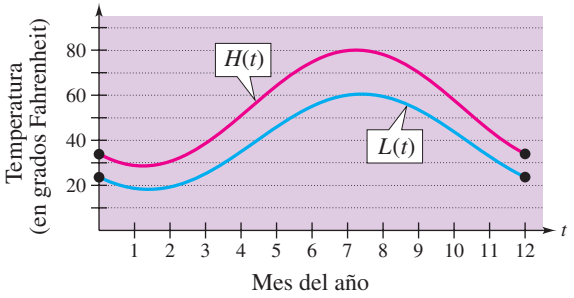
$$H(t) = 56.94 - 20.86 \cos(\pi t/6) - 11.58 \operatorname{sen}(\pi t/6)$$

y las temperaturas bajas L mensuales, normales, se aproximan con

$$L(t) = 41.80 - 17.13 \cos(\pi t/6) - 13.39 \operatorname{sen}(\pi t/6)$$

donde t es el tiempo (en meses), con $t = 1$ correspondiente a enero (vea figura). (Fuente: National Climatic Data Center)

(a) ¿Cuál es el periodo de cada función?

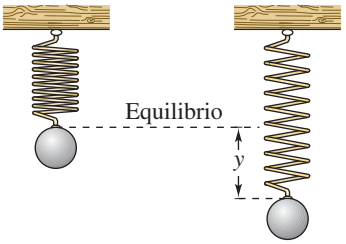


(b) ¿Durante qué parte del año es máxima la diferencia entre las temperaturas normal alta y normal baja? ¿Cuándo es mínima?

(c) El Sol está más al norte en el cielo hacia el 21 de junio, pero la gráfica muestra las temperaturas más cálidas en una fecha posterior. Aproxime el tiempo de retraso de las temperaturas relativas a la posición del Sol.

94. VENTAS Las ventas mensuales proyectadas S (en miles de unidades) de podadoras de césped (un producto estacional) se modelan con $S = 74 + 3t - 40 \cos(\pi t/6)$, donde t es el tiempo (en meses), con $t = 1$ correspondiente a enero. Grafique la función de ventas de 1 año.

95. MOVIMIENTO ARMÓNICO Un objeto que pesa W libras está suspendido del techo de una construcción mediante un resorte de acero (vea figura). El peso es jalado hacia abajo (dirección positiva) desde su posición de equilibrio y soltado. El movimiento resultante del peso se describe con la función $y = \frac{1}{2}e^{-t/4} \cos 4t$, $t > 0$, donde y es la distancia (en pies) y t es el tiempo (en segundos).



(a) Use una calculadora de gráficas para graficar la función.

(b) Describa el comportamiento de la función de desplazamiento para valores crecientes del tiempo t.

EXPLORACIÓN

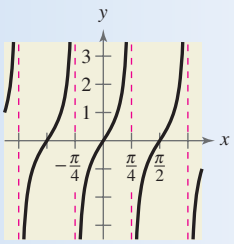
¿VERDADERO O FALSO? En los Ejercicios 96 y 97, determine si la proposición es verdadera o falsa. Justifique su respuesta.

96. La gráfica de $y = \csc x$ se puede obtener en una calculadora al graficar la recíproca de $y = \operatorname{sen} x$.

97. La gráfica de $y = \sec x$ se puede obtener en una calculadora al graficar una traslación de la recíproca de $y = \operatorname{sen} x$.

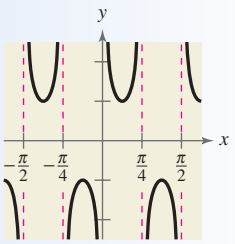
98. TOQUE FINAL Determine cuál función está representada por la gráfica. No use calculadora. Explique su razonamiento.

(a)



(i) $f(x) = \tan 2x$
(ii) $f(x) = \tan(x/2)$
(iii) $f(x) = 2\tan x$
(iv) $f(x) = -\tan 2x$
(v) $f(x) = -\tan(x/2)$

(b)



(i) $f(x) = \sec 4x$
(ii) $f(x) = \csc 4x$
(iii) $f(x) = \csc(x/4)$
(iv) $f(x) = \sec(x/4)$
(v) $f(x) = \csc(4x - \pi)$

En los Ejercicios 99 y 100, use una calculadora de gráficas para graficar la función. Use la gráfica para determinar el comportamiento de la función cuando $x \to c$.

(a) $x \to \frac{\pi^+}{2}$ (cuando x se aproxima a $\frac{\pi}{2}$ desde la derecha)

(b) $x \to \frac{\pi^-}{2}$ (cuando x se aproxima a $\frac{\pi}{2}$ desde la izquierda)

(c) $x \to -\frac{\pi^+}{2}$ (cuando x se aproxima a $-\frac{\pi}{2}$ desde la derecha)

(d) $x \to -\frac{\pi^-}{2}$ (cuando x se aproxima a $-\frac{\pi}{2}$ desde la izquierda)

99. $f(x) = \tan x$ **100.** $f(x) = \sec x$

En los Ejercicios 101 y 102, use una calculadora de gráficas para graficar la función. Use la gráfica para determinar el comportamiento de la función cuando $x \to c$.

(a) Cuando $x \to 0^+$, el valor de $f(x) \to$ ____.
(b) Cuando $x \to 0^-$, el valor de $f(x) \to$ ____.
(c) Cuando $x \to \pi^+$, el valor de $f(x) \to$ ____.
(d) Cuando $x \to \pi^-$, el valor de $f(x) \to$ ____.

101. $f(x) = \cot x$ **102.** $f(x) = \csc x$

103. PIÉNSELO Considere la función expresada por medio de $f(x) = x - \cos x$.

(a) Use una calculadora de gráficas para graficar la función y verificar que existe un cero entre 0 y 1. Use la gráfica para aproximar el cero.

(b) Empezando con $x_0 = 1$, genere una sucesión $x_1, x_2, x_3, \ldots$, donde $x_n = \cos(x_{n-1})$. Por ejemplo,

$x_0 = 1$
$x_1 = \cos(x_0)$
$x_2 = \cos(x_1)$
$x_3 = \cos(x_2)$
$\vdots$

¿A qué valor se aproxima la sucesión?

104. APROXIMACIÓN Usando cálculo, puede demostrarse que la función tangente se puede aproximar con el polinomio

$$\tan x \approx x + \frac{2x^3}{3!} + \frac{16x^5}{5!}$$

donde x está en radianes. Use una calculadora para graficar la función tangente y su aproximación con polinomios en la misma pantalla. ¿Cómo se comparan las gráficas?

105. APROXIMACIÓN Usando cálculo, puede demostrarse que la función secante se puede aproximar con el polinomio

$$\sec x \approx 1 + \frac{x^2}{2!} + \frac{5x^4}{4!}$$

donde x está en radianes. Use una calculadora para graficar la función secante y su aproximación con polinomios en la misma pantalla. ¿Cómo se comparan las gráficas?

106. RECONOCIMIENTO DE PATRONES

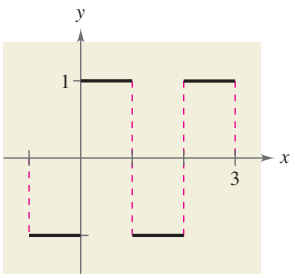
(a) Use una calculadora de gráficas para graficar cada función

$$y_1 = \frac{4}{\pi}\left(\operatorname{sen} \pi x + \frac{1}{3}\operatorname{sen} 3\pi x\right)$$

$$y_2 = \frac{4}{\pi}\left(\operatorname{sen} \pi x + \frac{1}{3}\operatorname{sen} 3\pi x + \frac{1}{5}\operatorname{sen} 5\pi x\right)$$

(b) Identifique el patrón iniciado en el inciso (a) y encuentre una función y_3 que lo continúe un término más. Use una calculadora de gráficas para graficar y_3.

(c) Las gráficas de los incisos (a) y (b) aproximan la función periódica en la figura. Encuentre una función y_4 que sea una mejor aproximación.



4.7 Funciones trigonométricas inversas

Lo que debe aprender

- Evaluar y graficar la función seno inversa.
- Evaluar y graficar las otras funciones trigonométricas inversas.
- Evaluar y graficar las composiciones de funciones trigonométricas.

Por qué debe aprenderlo

Se pueden usar funciones trigonométricas inversas para modelar y resolver problemas de la vida real. Por ejemplo, en el Ejercicio 106 de la página 349 se puede usar una función trigonométrica inversa para modelar el ángulo de elevación desde una cámara de televisión al lanzamiento de un transbordador espacial.

NASA

Función seno inversa

Recuerde de la Sección 1.9 que para que una función tenga función inversa debe ser biunívoca, es decir, debe pasar la prueba de la recta horizontal. En la Figura 4.71 se puede ver que $y = \operatorname{sen} x$ no pasa la prueba porque diferentes valores de x dan el mismo valor de y.

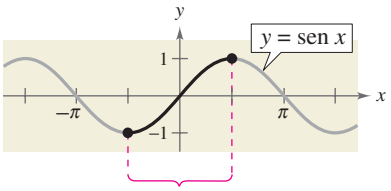


FIGURA 4.71

Pero si restringimos el dominio del intervalo $-\pi/2 \le x \le \pi/2$ (correspondiente a la parte negra de la gráfica en la Figura 4.71), se cumplen las siguientes propiedades.

1. En el intervalo $[-\pi/2, \pi/2]$, la función $y = \operatorname{sen} x$ es creciente.
2. En el intervalo $[-\pi/2, \pi/2]$, $y = \operatorname{sen} x$ toma su variación completa de valores, $-1 \le \operatorname{sen} x \le 1$.
3. En el intervalo $[-\pi/2, \pi/2]$, $y = \operatorname{sen} x$ es biunívoca.

En consecuencia, en el dominio restringido $-\pi/2 \le x \le \pi/2$, $y = \operatorname{sen} x$ tiene una función inversa única llamada **función seno inversa**. Está denotada con

$$y = \arcsen x \qquad \text{o bien} \qquad y = \operatorname{sen}^{-1} x.$$

La notación $\operatorname{sen}^{-1} x$ es consistente con la notación de función inversa $f^{-1}(x)$. La notación arcsen x (se lee como "arco seno de x") proviene de la asociación de un ángulo central con su *longitud de arco* intersecada en una circunferencia unitaria. Entonces, arcsen x significa el ángulo (o arco) cuyo seno es x. Ambas notaciones, arcsen x y $\operatorname{sen}^{-1} x$, se usan por lo general en matemáticas, por lo cual debe recordar que $\operatorname{sen}^{-1} x$ denota la función seno *inversa* más que 1/sen x. Los valores de arcsen x están en el intervalo $-\pi/2 \le \arcsen x \le \pi/2$. La gráfica de $y = \arcsen x$ se muestra en el Ejemplo 2.

Tip de estudio

Cuando evalúe la función seno inversa, ayuda recordar la frase "el arco seno de x es el ángulo (o número) cuyo seno es x".

Definición de función seno inversa

La **función seno inversa** se define por

$$y = \arcsen x \qquad \text{si y sólo sí} \qquad \operatorname{sen} y = x$$

donde $-1 \le x \le 1$ y $-\pi/2 \le y \le \pi/2$. El dominio de $y = \arcsen x$ es $[-1, 1]$, en tanto que el rango es $[-\pi/2, \pi/2]$.

Tip de estudio

Al igual que con funciones trigonométricas, gran parte del trabajo con funciones trigonométricas inversas se puede hacer por cálculos *exactos* en lugar de aproximaciones con calculadora. Los cálculos exactos ayudan a aumentar la comprensión que el estudiante tenga de las funciones inversas, al relacionarlas con las definiciones de triángulo rectángulo de las funciones trigonométricas.

Ejemplo 1 Evaluación de la función seno inversa

Si es posible, encuentre el valor exacto.

a. $\operatorname{arcsen}\left(-\frac{1}{2}\right)$ **b.** $\operatorname{sen}^{-1}\frac{\sqrt{3}}{2}$ **c.** $\operatorname{sen}^{-1} 2$

Solución

a. Como $\operatorname{sen}\left(-\frac{\pi}{6}\right) = -\frac{1}{2}$ para $-\frac{\pi}{2} \le y \le \frac{\pi}{2}$, se deduce que

$$\operatorname{arcsen}\left(-\frac{1}{2}\right) = -\frac{\pi}{6}.$$ Ángulo cuyo seno es $-\frac{1}{2}$

b. Como $\operatorname{sen}\frac{\pi}{3} = \frac{\sqrt{3}}{2}$ para $-\frac{\pi}{2} \le y \le \frac{\pi}{2}$, se deduce que

$$\operatorname{sen}^{-1}\frac{\sqrt{3}}{2} = \frac{\pi}{3}.$$ Ángulo cuyo seno es $\sqrt{3}/2$

c. No es posible evaluar $y = \operatorname{sen}^{-1} x$ cuando $x = 2$ porque no hay ángulo cuyo seno sea 2. Recuerde que el dominio de la función seno inversa es $[-1, 1]$.

PUNTO *de repaso* Ahora trate de hacer el Ejercicio 5.

Ejemplo 2 Graficar la función arco seno

Trace una gráfica de

$$y = \operatorname{arcsen} x.$$

Solución

Por definición, las ecuaciones $y = \operatorname{arcsen} x$ y $\operatorname{sen} y = x$ son equivalentes para $-\pi/2 \le y \le \pi/2$. Por tanto, sus gráficas son iguales. Del intervalo $[-\pi/2, \pi/2]$, se pueden asignar valores a y en la segunda ecuación para hacer una tabla de valores. A continuación se determinan los puntos y se traza una curva lisa que pase por ellos.

y	$-\frac{\pi}{2}$	$-\frac{\pi}{4}$	$-\frac{\pi}{6}$	0	$\frac{\pi}{6}$	$\frac{\pi}{4}$	$\frac{\pi}{2}$
$x = \operatorname{sen} y$	-1	$-\frac{\sqrt{2}}{2}$	$-\frac{1}{2}$	0	$\frac{1}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	1

La gráfica resultante para $y = \operatorname{arcsen} x$ se muestra en la Figura 4.72. Observe que es la reflexión (en la recta $y = x$) de la parte negra de la gráfica de la Figura 4.71. Asegúrese de ver que la Figura 4.72 muestre *toda* la gráfica de la función seno inversa. Recuerde que el dominio de $y = \operatorname{arcsen} x$ es el intervalo cerrado $[-1, 1]$ y el rango es el intervalo cerrado $[-\pi/2, \pi/2]$.

PUNTO *de repaso* Ahora trate de hacer el Ejercicio 21.

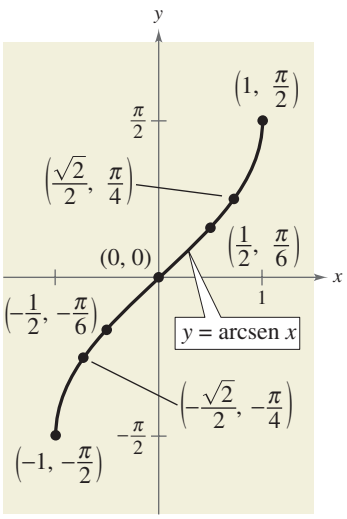


FIGURA 4.72

Otras funciones trigonométricas inversas

La función coseno es decreciente y biunívoca en el intervalo $0 \leq x \leq \pi$, como se ve en la Figura 4.73.

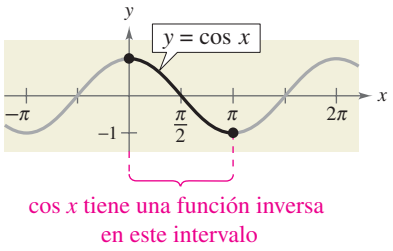


FIGURA 4.73

En consecuencia, en este intervalo la función coseno tiene una función inversa, la **función coseno inversa,** denotada por

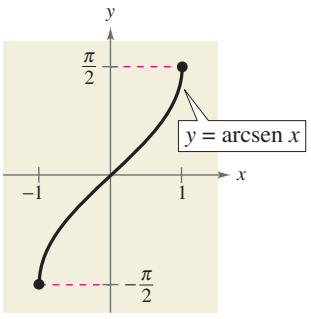
$$y = \arccos x \qquad \text{o} \qquad y = \cos^{-1} x.$$

Del mismo modo, se puede definir una **función tangente inversa** al restringir el dominio de $y = \tan x$ al intervalo $(-\pi/2, \pi/2)$. La lista siguiente resume las definiciones de las tres funciones trigonométricas inversas más comunes. Las tres restantes se definen en los Ejercicios 115-117.

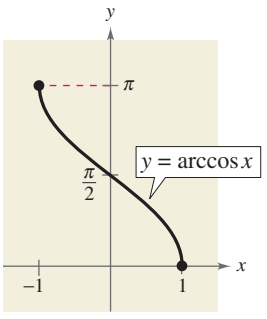
Definiciones de las funciones trigonométricas inversas

Función	*Dominio*	*Rango*
$y = \arcsen x$ si y sólo si $\operatorname{sen} y = x$	$-1 \leq x \leq 1$	$-\frac{\pi}{2} \leq y \leq \frac{\pi}{2}$
$y = \arccos x$ si y sólo si $\cos y = x$	$-1 \leq x \leq 1$	$0 \leq y \leq \pi$
$y = \arctan x$ si y sólo si $\tan y = x$	$-\infty < x < \infty$	$-\frac{\pi}{2} < y < \frac{\pi}{2}$

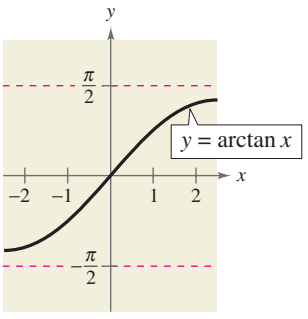
Las gráficas de estas tres funciones trigonométricas inversas se ilustran en la Figura 4.74.



DOMINIO: $[-1, 1]$
RANGO: $\left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right]$



DOMINIO: $[-1, 1]$
RANGO: $[0, \pi]$



DOMINIO: $(-\infty, \infty)$
RANGO: $\left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right)$

FIGURA 4.74

Ejemplo 3 Evaluación de funciones trigonométricas inversas

Encuentre el valor exacto.

a. $\arccos \frac{\sqrt{2}}{2}$ **b.** $\cos^{-1}(-1)$

c. $\arctan 0$ **d.** $\tan^{-1}(-1)$

Solución

a. Como $\cos(\pi/4) = \sqrt{2}/2$, y $\pi/4$ está en $[0, \pi]$, se deduce que

$$\arccos \frac{\sqrt{2}}{2} = \frac{\pi}{4}.$$ Ángulo cuyo coseno es $\sqrt{2}/2$

b. Como $\cos \pi = -1$, y π está en $[0, \pi]$, se deduce que

$$\cos^{-1}(-1) = \pi.$$ Ángulo cuyo coseno es -1

c. Como $\tan 0 = 0$, y 0 está en $(-\pi/2, \pi/2)$, se deduce que

$$\arctan 0 = 0.$$ Ángulo cuya tangente es 0

d. Como $\tan(-\pi/4) = -1$, y $-\pi/4$ está en $(-\pi/2, \pi/2)$, se deduce que

$$\tan^{-1}(-1) = -\frac{\pi}{4}.$$ Ángulo cuya tangente es -1

PUNTO *de repaso* Ahora trate de hacer el Ejercicio 15.

Ejemplo 4 Calculadoras y funciones trigonométricas inversas

Use calculadora para aproximar el valor (si es posible).

a. $\arctan(-8.45)$

b. $\text{sen}^{-1}\, 0.2447$

c. $\arccos 2$

Solución

	Función	*Modo*	*Tecleo de calculadora*
a.	$\arctan(-8.45)$	Radián	TAN^{-1} ((−) 8.45) ENTER

De la pantalla, se deduce que $\arctan(-8.45) \approx -1.453001$.

b. $\text{sen}^{-1}\, 0.2447$ Radián SIN^{-1} (0.2447) ENTER

De la pantalla, se deduce que $\text{sen}^{-1}\, 0.2447 \approx 0.2472103$.

c. $\arccos 2$ Radián COS^{-1} (2) ENTER

En el modo *real number*, la calculadora debe exhibir un *mesaje de error* porque el dominio de la función coseno inversa es $[-1, 1]$.

PUNTO *de repaso* Ahora trate de hacer el Ejercicio 29.

ATENCIÓN

Recuerde que el dominio de la función seno inversa y la función coseno inversa es $[-1, 1]$, como se indica en el Ejemplo 4(c).

En el Ejemplo 4, si se hubiera puesto la calculadora en el modo *degree*, la pantalla hubiera estado en grados y no en radianes. Esta convención es peculiar en calculadoras. Por definición, los valores de las funciones trigonométricas inversas *siempre son en radianes*.

Composición de funciones

Ayuda de álgebra

En la Sección 1.8 puede repasar la composición de funciones.

Recuerde de la Sección 1.9 que para toda x en los dominios de f y f^{-1}, las funciones inversas tienen las propiedades siguientes:

$$f(f^{-1}(x)) = x \quad \text{y} \quad f^{-1}(f(x)) = x.$$

Propiedades inversas de funciones trigonométricas

Si $-1 \le x \le 1$ y $-\pi/2 \le y \le \pi/2$, entonces

$$\operatorname{sen}(\operatorname{arcsen} x) = x \quad \text{y} \quad \operatorname{arcsen}(\operatorname{sen} y) = y.$$

Si $-1 \le x \le 1$ y $0 \le y \le \pi$, entonces

$$\cos(\arccos x) = x \quad \text{y} \quad \arccos(\cos y) = y.$$

Si x es un número real y $-\pi/2 < y < \pi/2$, entonces

$$\tan(\arctan x) = x \quad \text{y} \quad \arctan(\tan y) = y.$$

Recuerde que estas propiedades inversas no se aplican para valores arbitrarios de x y y. Por ejemplo,

$$\operatorname{arcsen}\left(\operatorname{sen}\frac{3\pi}{2}\right) = \operatorname{arcsen}(-1) = -\frac{\pi}{2} \neq \frac{3\pi}{2}.$$

En otras palabras, la propiedad

$$\operatorname{arcsen}(\operatorname{sen} y) = y$$

no es válida para valores de y fuera del intervalo $[-\pi/2, \pi/2]$.

Ejemplo 5 Usar propiedades inversas

Si es posible, encuentre el valor exacto.

a. $\tan[\arctan(-5)]$ **b.** $\operatorname{arcsen}\left(\operatorname{sen}\frac{5\pi}{3}\right)$ **c.** $\cos(\cos^{-1}\pi)$

Solución

a. Como -5 se encuentra en el dominio de la función arco tangente, se aplica la propiedad inversa, y tenemos

$$\tan[\arctan(-5)] = -5.$$

b. En este caso, $5\pi/3$ no se encuentra dentro del rango de la función arco seno, $-\pi/2 \le y \le \pi/2$. No obstante, $5\pi/3$ es coterminal con

$$\frac{5\pi}{3} - 2\pi = -\frac{\pi}{3}$$

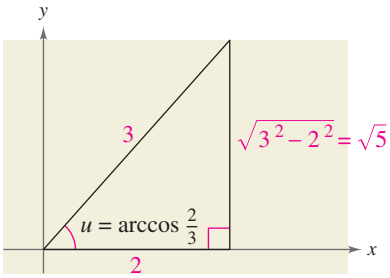
que sí está en el rango de la función arco seno, y tenemos

$$\operatorname{arcsen}\left(\operatorname{sen}\frac{5\pi}{3}\right) = \operatorname{arcsen}\left[\operatorname{sen}\left(-\frac{\pi}{3}\right)\right] = -\frac{\pi}{3}.$$

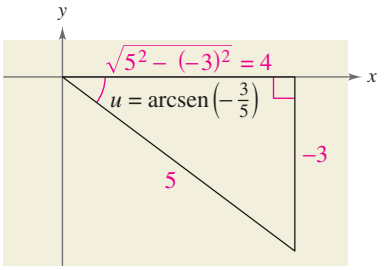
c. La expresión $\cos(\cos^{-1}\pi)$ no está definida porque $\cos^{-1}\pi$ no está definida. Recuerde que el dominio de la función coseno inversa es $[-1, 1]$.

PUNTO *de repaso* Ahora trate de hacer el Ejercicio 49.

El Ejemplo 6 muestra la forma de usar triángulos rectángulos para hallar valores exactos de composiciones de funciones inversas. Entonces, el Ejemplo 7 muestra cómo usar triángulos rectángulos para convertir una expresión trigonométrica en una expresión algebraica. Esta técnica de conversión se usa con frecuencia en cálculo.



Ángulo cuyo coseno es $\frac{2}{3}$
FIGURA 4.75



Ángulo cuyo coseno es $-\frac{3}{5}$
FIGURA 4.76

Ejemplo 6 Evaluar composición de funciones

Encuentre el valor exacto.

a. $\tan\left(\arccos\frac{2}{3}\right)$ **b.** $\cos\left[\arcsen\left(-\frac{3}{5}\right)\right]$

Solución

a. Si hacemos $u = \arccos\frac{2}{3}$, entonces $\cos u = \frac{2}{3}$. Como cos u es positiva, u es un ángulo del *primer* cuadrante. Se puede trazar y marcar el ángulo u como se muestra en la Figura 4.75. En consecuencia,

$$\tan\left(\arccos\frac{2}{3}\right) = \tan u = \frac{\text{op}}{\text{ady}} = \frac{\sqrt{5}}{2}.$$

b. Si hacemos $u = \arcsen\left(-\frac{3}{5}\right)$, entonces sen $u = -\frac{3}{5}$. Como sen u es negativo, u es un ángulo del *cuarto* cuadrante. Se puede trazar y marcar el ángulo u como se muestra en la Figura 4.76. En consecuencia,

$$\cos\left[\arcsen\left(-\frac{3}{5}\right)\right] = \cos u = \frac{\text{ady}}{\text{hip}} = \frac{4}{5}.$$

PUNTO *de repaso* Ahora trate de hacer el Ejercicio 57.

Ejemplo 7 Algunos problemas de cálculo

Escriba cada uno de lo siguiente como expresión algebraica con x.

a. $\text{sen}(\arccos 3x)$, $0 \le x \le \frac{1}{3}$ **b.** $\cot(\arccos 3x)$, $0 \le x < \frac{1}{3}$

Solución

Si hacemos $u = \arccos 3x$, entonces $\cos u = 3x$, donde $-1 \le 3x \le 1$. Como

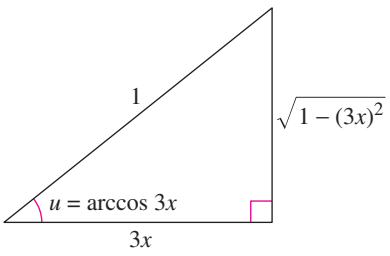
$$\cos u = \frac{\text{ady}}{\text{hip}} = \frac{3x}{1}$$

se puede trazar un triángulo rectángulo con ángulo agudo u, como se ve en la Figura 4.77. De este triángulo, fácilmente se puede convertir cada expresión a una forma algebraica

a. $\text{sen}(\arccos 3x) = \text{sen}\, u = \frac{\text{op}}{\text{hip}} = \sqrt{1-9x^2}$, $0 \le x \le \frac{1}{3}$

b. $\cot(\arccos 3x) = \cot u = \frac{\text{ady}}{\text{op}} = \frac{3x}{\sqrt{1-9x^2}}$, $0 \le x < \frac{1}{3}$

PUNTO *de repaso* Ahora trate de hacer el Ejercicio 67.



Ángulo cuyo coseno es $3x$
FIGURA 4.77

En el Ejemplo 7, se pueden hacer argumentos similares para valores de x que se encuentren en el intervalo $\left[-\frac{1}{3}, 0\right]$.

4.7 EJERCICIOS

En www.CalcChat.com vea las soluciones a los ejercicios impares.

VOCABULARIO: Llene los espacios en blanco.

	Función	*Notación alternativa*	*Dominio*	*Rango*
1.	$y = \operatorname{arcsen} x$	_____	_____	$-\frac{\pi}{2} \le y \le \frac{\pi}{2}$
2.	_____	$y = \cos^{-1} x$	$-1 \le x \le 1$	_____
3.	$y = \arctan x$	_____	_____	_____

4. Sin restricciones, no hay función trigonométrica que tenga un(a) función _____.

HABILIDADES Y APLICACIONES

En los Ejercicios 5-20, evalúe la expresión sin usar calculadora.

5. $\operatorname{arcsen} \frac{1}{2}$
6. $\operatorname{arcsen} 0$
7. $\arccos \frac{1}{2}$
8. $\arccos 0$
9. $\arctan \frac{\sqrt{3}}{3}$
10. $\arctan(1)$
11. $\cos^{-1}\left(-\frac{\sqrt{3}}{2}\right)$
12. $\operatorname{sen}^{-1}\left(-\frac{\sqrt{2}}{2}\right)$
13. $\arctan\left(-\sqrt{3}\right)$
14. $\arctan \sqrt{3}$
15. $\arccos\left(-\frac{1}{2}\right)$
16. $\operatorname{arcsen} \frac{\sqrt{2}}{2}$
17. $\operatorname{sen}^{-1}\left(-\frac{\sqrt{3}}{2}\right)$
18. $\tan^{-1}\left(-\frac{\sqrt{3}}{3}\right)$
19. $\tan^{-1} 0$
20. $\cos^{-1} 1$

En los Ejercicios 21 y 22, use una calculadora de gráficas para graficar f, g y $y = x$ en la misma pantalla para verificar geométricamente que g sea la función inversa de f. (Asegúrese de restringir en forma apropiada el dominio de f.)

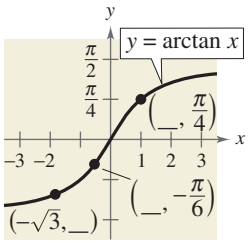
21. $f(x) = \operatorname{sen} x, \quad g(x) = \operatorname{arcsen} x$
22. $f(x) = \tan x, \quad g(x) = \arctan x$

En los Ejercicios 23-40, use una calculadora para evaluar la expresión. Redondee el resultado a dos lugares decimales.

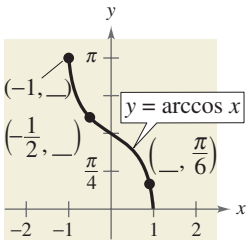
23. $\arccos 0.37$
24. $\operatorname{arcsen} 0.65$
25. $\operatorname{arcsen}(-0.75)$
26. $\arccos(-0.7)$
27. $\arctan(-3)$
28. $\arctan 25$
29. $\operatorname{sen}^{-1} 0.31$
30. $\cos^{-1} 0.26$
31. $\arccos(-0.41)$
32. $\operatorname{arcsen}(-0.125)$
33. $\arctan 0.92$
34. $\arctan 2.8$
35. $\operatorname{arcsen} \frac{7}{8}$
36. $\arccos\left(-\frac{1}{3}\right)$
37. $\tan^{-1} \frac{19}{4}$
38. $\tan^{-1}\left(-\frac{95}{7}\right)$
39. $\tan^{-1}\left(-\sqrt{372}\right)$
40. $\tan^{-1}\left(-\sqrt{2165}\right)$

En los Ejercicios 41 y 42, determine las coordenadas faltantes de los puntos sobre la gráfica de la función.

41.

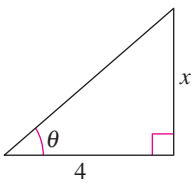


42.

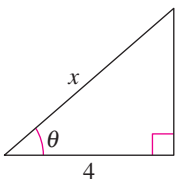


En los Ejercicios 43-48, use una función trigonométrica inversa para escribir θ como función de x.

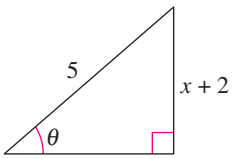
43.



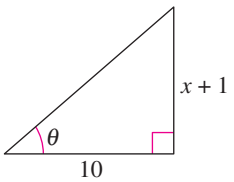
44.



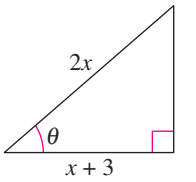
45.



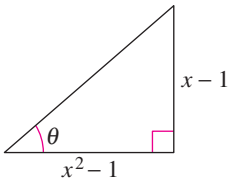
46.



47.



48.



En los Ejercicios 49-54, use las propiedades de las funciones trigonométricas inversas para evaluar la expresión.

49. $\operatorname{sen}(\operatorname{arcsen} 0.3)$
50. $\tan(\arctan 45)$
51. $\cos[\arccos(-0.1)]$
52. $\operatorname{sen}[\operatorname{arcsen}(-0.2)]$
53. $\operatorname{arcsen}(\operatorname{sen} 3\pi)$
54. $\arccos\left(\cos \frac{7\pi}{2}\right)$

En los Ejercicios 55-66, encuentre el valor exacto de la expresión. (*Sugerencia:* trace un triángulo rectángulo.)

55. $\operatorname{sen}\left(\arctan \frac{3}{4}\right)$

56. $\sec\left(\operatorname{arcsen} \frac{4}{5}\right)$

57. $\cos(\tan^{-1} 2)$

58. $\operatorname{sen}\left(\cos^{-1} \frac{\sqrt{5}}{5}\right)$

59. $\cos\left(\operatorname{arcsen} \frac{5}{13}\right)$

60. $\csc\left[\arctan\left(-\frac{5}{12}\right)\right]$

61. $\sec\left[\arctan\left(-\frac{3}{5}\right)\right]$

62. $\tan\left[\operatorname{arcsen}\left(-\frac{3}{4}\right)\right]$

63. $\operatorname{sen}\left[\arccos\left(-\frac{2}{3}\right)\right]$

64. $\cot\left(\arctan \frac{5}{8}\right)$

65. $\csc\left[\cos^{-1}\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right)\right]$

66. $\sec\left[\operatorname{sen}^{-1}\left(-\frac{\sqrt{2}}{2}\right)\right]$

En los Ejercicios 67-76, escriba una expresión algebraica que sea equivalente a la expresión. (*Sugerencia:* trace un triángulo rectángulo, como se demuestra en el Ejemplo 7.)

67. $\cot(\arctan x)$

68. $\operatorname{sen}(\arctan x)$

69. $\cos(\operatorname{arcsen} 2x)$

70. $\sec(\arctan 3x)$

71. $\operatorname{sen}(\arccos x)$

72. $\sec[\operatorname{arcsen}(x - 1)]$

73. $\tan\left(\arccos \frac{x}{3}\right)$

74. $\cot\left(\arctan \frac{1}{x}\right)$

75. $\csc\left(\arctan \frac{x}{\sqrt{2}}\right)$

76. $\cos\left(\operatorname{arcsen} \frac{x - h}{r}\right)$

En los Ejercicios 77 y 78, use una calculadora de gráficas para graficar f y g en la misma pantalla para verificar que las dos funciones sean iguales. Explique por qué son iguales. Identifique cualesquiera asíntotas de las gráficas.

77. $f(x) = \operatorname{sen}(\arctan 2x), \quad g(x) = \dfrac{2x}{\sqrt{1 + 4x^2}}$

78. $f(x) = \tan\left(\arccos \dfrac{x}{2}\right), \quad g(x) = \dfrac{\sqrt{4 - x^2}}{x}$

En los Ejercicios 79-82, llene el espacio en blanco.

79. $\arctan \dfrac{9}{x} = \operatorname{arcsen}(\quad), \quad x \neq 0$

80. $\operatorname{arcsen} \dfrac{\sqrt{36 - x^2}}{6} = \arccos(\quad), \quad 0 \leq x \leq 6$

81. $\arccos \dfrac{3}{\sqrt{x^2 - 2x + 10}} = \operatorname{arcsen}(\quad)$

82. $\arccos \dfrac{x - 2}{2} = \arctan(\quad), \quad |x - 2| \leq 2$

En los Ejercicios 83 y 84, trace una gráfica de la función y compare la gráfica de g con la de $f(x) = \operatorname{arcsen} x$.

83. $g(x) = \operatorname{arcsen}(x - 1)$

84. $g(x) = \operatorname{arcsen} \dfrac{x}{2}$

En los Ejercicios 85-90, trace una gráfica de la función.

85. $y = 2 \arccos x$

86. $g(t) = \arccos(t + 2)$

87. $f(x) = \arctan 2x$

88. $f(x) = \dfrac{\pi}{2} + \arctan x$

89. $h(v) = \tan(\arccos v)$

90. $f(x) = \arccos \dfrac{x}{4}$

En los Ejercicios 91-96, use una calculadora de gráficas para graficar la función.

91. $f(x) = 2 \arccos(2x)$

92. $f(x) = \pi \operatorname{arcsen}(4x)$

93. $f(x) = \arctan(2x - 3)$

94. $f(x) = -3 + \arctan(\pi x)$

95. $f(x) = \pi - \operatorname{sen}^{-1}\left(\dfrac{2}{3}\right)$

96. $f(x) = \dfrac{\pi}{2} + \cos^{-1}\left(\dfrac{1}{\pi}\right)$

En los Ejercicios 97 y 98, escriba la función en términos de la función seno con el uso de la identidad

$$A \cos \omega t + B \operatorname{sen} \omega t = \sqrt{A^2 + B^2} \operatorname{sen}\left(\omega t + \arctan \frac{A}{B}\right).$$

Use una calculadora de gráficas para graficar ambas formas de la función. ¿Qué implica la gráfica?

97. $f(t) = 3 \cos 2t + 3 \operatorname{sen} 2t$

98. $f(t) = 4 \cos \pi t + 3 \operatorname{sen} \pi t$

En los Ejercicios 99-104, llene el espacio en blanco. Si no es posible, exprese la razón. (*Nota:* la notación $x \to c^+$ indica que x se aproxima a c desde la derecha y $x \to c^-$ indica que x se aproxima a c desde la izquierda.)

99. Cuando $x \to 1^-$, el valor de $\operatorname{arcsen} x \to$ ____.

100. Cuando $x \to 1^-$, el valor de $\arccos x \to$ ____.

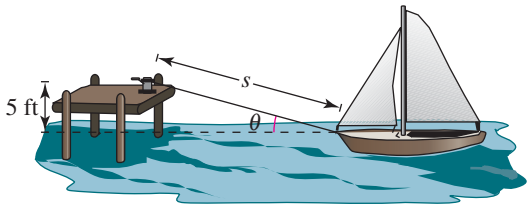
101. Cuando $x \to \infty$, el valor de $\arctan x \to$ ____.

102. Cuando $x \to -1^+$, el valor de $\operatorname{arcsen} x \to$ ____.

103. Cuando $x \to -1^+$, el valor de $\arccos x \to$ ____.

104. Cuando $x \to -\infty$, el valor de $\arctan x \to$ ____.

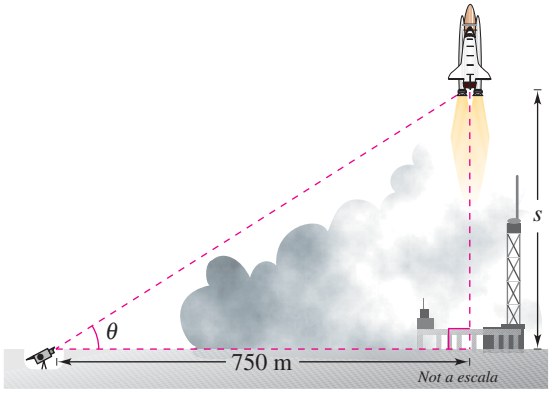
105. ATRACAR UN BOTE Un bote es jalado por medio de un malacate situado en un muelle a 5 pies sobre la cubierta del bote (vea figura). Sea θ el ángulo de elevación del bote al malacate y sea s la longitud de la cuerda del malacate al bote.



(a) Escriba θ como función de s.

(b) Hallar θ cuando $s = 40$ pies y $s = 20$ pies.

106. FOTOGRAFÍA Una cámara de televisión al nivel del suelo está filmando el despegue de un transbordador espacial en un punto a 750 metros de la plataforma de lanzamiento (vea figura). Sea θ el ángulo de elevación del transbordador y sea s la altura del transbordador.

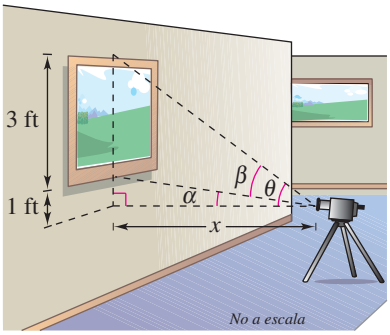


(a) Escriba θ como función de s.

(b) Encuentre θ cuando $s = 300$ metros y $s = 1200$ metros.

107. FOTOGRAFÍA Un fotógrafo está tomando una fotografía de una pintura de tres pies de alto colgada en una galería de arte. El lente de la cámara está a 1 pie debajo del borde inferior de la pintura (vea figura). El ángulo β subtendido por el lente de la cámara a x pies de la pintura es

$$\beta = \arctan \frac{3x}{x^2 + 4}, \quad x > 0.$$

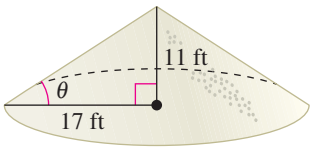


(a) Use una calculadora de gráficas para graficar β como función de x.

(b) Mueva el cursor a lo largo de la gráfica para aproximar la distancia desde la pintura cuando β sea máximo.

(c) Identifique la asíntota de la gráfica y discuta su significado en el contexto del problema.

108. ÁNGULO DE REPOSO GRANULAR Diferentes tipos de sustancias granulares se asientan naturalmente a diferentes ángulos cuando se almacenan en pilas en forma de conos. Este ángulo θ se denomina *ángulo de reposo* (vea figura). Cuando sal de piedra se almacena en una pila en forma de cono de 11 pies de alto, el diámetro de la base de la pila es de unos 34 pies. (Fuente: Bulk-Store Structures, Inc.)



(a) Encuentre el ángulo de reposo para sal de piedra.

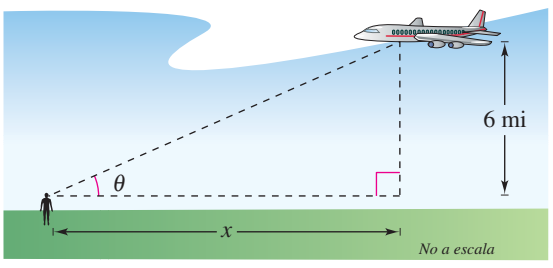
(b) ¿Cuál es la altura de la pila de sal de piedra que tiene un diámetro de 100 pies en la base?

109. ÁNGULO DE REPOSO GRANULAR Cuando se almacena maíz integral en una pila en forma de cono de 20 pies de alto, el diámetro de la base de la pila es de unos 82 pies.

(a) Encuentre el ángulo de reposo del maíz integral.

(b) ¿Cuál es la altura de la pila de maíz que tiene un diámetro de base de 100 pies?

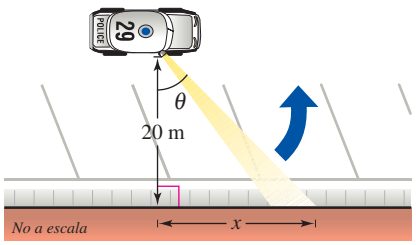
110. ÁNGULO DE ELEVACIÓN Un avión vuela a una altitud de 6 millas hacia un punto directamente sobre un observador. Considere θ y x como se ve en la figura.



(a) Escriba θ como función de x.

(b) Encuentre θ cuando $x = 7$ millas y $x = 1$ milla.

111. PATRULLA DE SEGURIDAD Una patrulla con su faro buscador encendido está estacionada a 20 metros de un almacén. Considere θ y x como se muestran en la figura.



(a) Escriba θ como función de x.

(b) Encuentre θ cuando $x = 5$ metros y $x = 12$ metros.

EXPLORACIÓN

¿VERDADERO O FALSO? En los Ejercicios 112-114, determine si la proposición es verdadera o falsa. Justifique su respuesta.

112. $\operatorname{sen}\frac{5\pi}{6} = \frac{1}{2} \Rightarrow \operatorname{arcsen}\frac{1}{2} = \frac{5\pi}{6}$

113. $\tan\frac{5\pi}{4} = 1 \Rightarrow \arctan 1 = \frac{5\pi}{4}$

114. $\arctan x = \dfrac{\operatorname{arcsen} x}{\arccos x}$

115. Defina la función cotangente inversa al restringir el dominio de la función cotangente al intervalo $(0, \pi)$, y trace su gráfica.

116. Defina la función secante inversa al restringir el dominio de la función secante a los intervalos $[0, \pi/2)$ y $(\pi/2, \pi]$, y trace su gráfica.

117. Defina la función cosecante inversa al restringir el dominio de la función cosecante a los intervalos $[-\pi/2, 0)$ y $(0, \pi/2]$, y trace su gráfica.

118. TOQUE FINAL Use los resultados de los Ejercicios 115-117 para explicar cómo graficar (a) la función cotangente inversa, (b) la función secante inversa, y (c) la función cosecante inversa en una calculadora de gráficas.

En los Ejercicios 119-126, use los resultados de los Ejercicios 115-117 para evaluar cada expresión sin usar calculadora.

119. $\operatorname{arcsec}\sqrt{2}$ **120.** $\operatorname{arcsec} 1$

121. $\operatorname{arccot}(-1)$ **122.** $\operatorname{arccot}\left(-\sqrt{3}\right)$

123. $\operatorname{arccsc} 2$ **124.** $\operatorname{arccsc}(-1)$

125. $\operatorname{arccsc}\left(\frac{2\sqrt{3}}{3}\right)$ **126.** $\operatorname{arcsec}\left(-\frac{2\sqrt{3}}{3}\right)$

En los Ejercicios 127-134, use los resultados de los Ejercicios 115-117 y una calculadora para aproximar el valor de la expresión. Redondee el resultado a dos lugares decimales.

127. $\operatorname{arcsec} 2.54$ **128.** $\operatorname{arcsec}(-1.52)$

129. $\operatorname{arccot} 5.25$ **130.** $\operatorname{arccot}(-10)$

131. $\operatorname{arccot}\frac{5}{3}$ **132.** $\operatorname{arccot}\left(-\frac{16}{7}\right)$

133. $\operatorname{arccsc}\left(-\frac{25}{3}\right)$ **134.** $\operatorname{arccsc}(-12)$

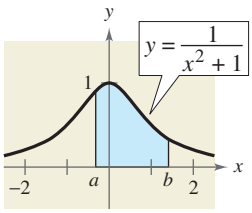
135. ÁREA En cálculo, se ha demostrado que el área de la región acotada por las gráficas de $y = 0$, $y = 1/(x^2 + 1)$, $x = a$ y de $x = b$ está dada por

$$\text{Área} = \arctan b - \arctan a$$

(vea figura). Encuentre el área para los siguientes valores de a y b.

(a) $a = 0, b = 1$ (b) $a = -1, b = 1$

(c) $a = 0, b = 3$ (d) $a = -1, b = 3$



136. PIÉNSELO Use una calculadora para graficar las funciones

$$f(x) = \sqrt{x} \quad \text{y} \quad g(x) = 6 \arctan x.$$

Para $x > 0$, parece que $g > f$. Explique por qué sabe que existe un número real positivo a tal que $g < f$ para $x > a$. Aproxime el número a.

137. PIÉNSELO Considere las funciones dadas por

$$f(x) = \operatorname{sen} x \quad \text{y} \quad f^{-1}(x) = \operatorname{arcsen} x.$$

(a) Use una calculadora de gráficas para graficar las funciones compuestas $f \circ f^{-1}$ y $f^{-1} \circ f$.

(b) Explique por qué las gráficas del inciso (a) no son la gráfica de la recta $y = x$. ¿Por qué difieren las gráficas de $f \circ f^{-1}$ y $f^{-1} \circ f$?

138. DEMOSTRACIÓN Demuestre las identidades siguientes.

(a) $\operatorname{arcsen}(-x) = -\operatorname{arcsen} x$

(b) $\arctan(-x) = -\arctan x$

(c) $\arctan x + \arctan\frac{1}{x} = \frac{\pi}{2}, \quad x > 0$

(d) $\operatorname{arcsen} x + \arccos x = \frac{\pi}{2}$

(e) $\operatorname{arcsen} x = \arctan\dfrac{x}{\sqrt{1 - x^2}}$

4.8 APLICACIONES Y MODELOS

Lo que debe aprender

- Resolver problemas de la vida real comprendan triángulos rectángulos.
- Resolver problemas de la vida real que comprendan orientación (rumbo).
- Resolver problemas de la vida real que comprendan movimiento armónico.

Por qué debe aprenderlo

Es frecuente que en la práctica se usen triángulos rectángulos. Por ejemplo, en el Ejercicio 65 en la página 361, se usan para determinar el elevador de granos más corto para una tolva de almacenamiento de granos en una granja.

Aplicaciones que comprendan triángulos rectángulos

En esta sección, los tres ángulos de un triángulo rectángulo están denotados por las letras A, B y C (donde C es el ángulo recto), y las longitudes de los lados opuestos a estos ángulos, por las letras a, b y c (donde c es la hipotenusa).

Ejemplo 1 Resolver un triángulo rectángulo

Resuelva el triángulo rectángulo mostrado en la Figura 4.78 para todos los lados y ángulos desconocidos.

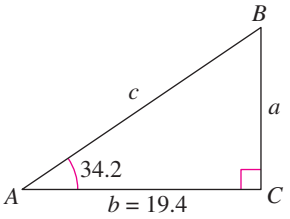


FIGURA 4.78

Solución

Como $C = 90°$, se deduce que $A + B = 90°$ y $B = 90° - 34.2° = 55.8°$. Para despejar a, usamos el hecho de que

$$\tan A = \frac{\text{op}}{\text{ady}} = \frac{a}{b} \quad \Rightarrow \quad a = b \tan A.$$

Por tanto, $a = 19.4 \tan 34.2° \approx 13.18$. Del mismo modo, para despejar c usamos el hecho de que

$$\cos A = \frac{\text{ady}}{\text{hip}} = \frac{b}{c} \quad \Rightarrow \quad c = \frac{b}{\cos A}.$$

Por tanto, $c = \dfrac{19.4}{\cos 34.2°} \approx 23.46$.

PUNTO de repaso Ahora trate de hacer el Ejercicio 5.

Ejemplo 2 Hallar un lado de un triángulo rectángulo

Un reglamento de seguridad expresa que el máximo ángulo de elevación para una escalera de rescate es 72°. La escalera más larga de un departamento de bomberos es 110 pies. ¿Cuál es la altura máxima segura de un rescate?

Solución

En la Figura 4.79 se muestra un dibujo. De la ecuación sen $A = a/c$ se deduce que

$$a = c \text{ sen } A = 110 \text{ sen } 72° \approx 104.6.$$

Por tanto, la máxima altura segura de rescate es de unos 104.6 pies sobre la altura del camión de bomberos.

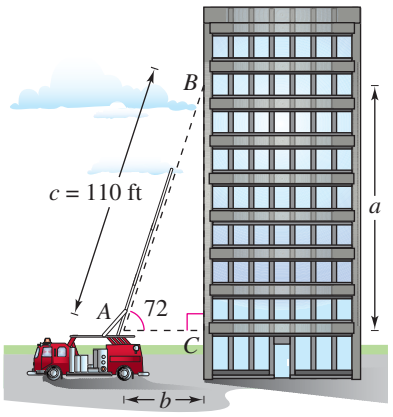


FIGURA 4.79

PUNTO de repaso Ahora trate de hacer el Ejercicio 19.

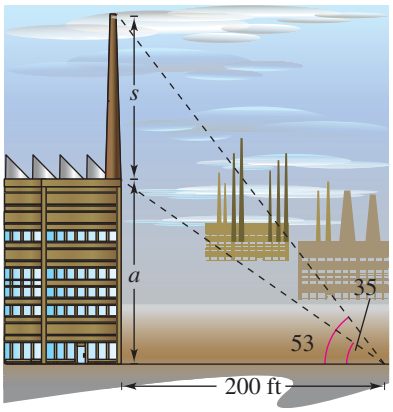


FIGURA 4.80

Ejemplo 3 Hallar un lado de un triángulo rectángulo

En un punto a 200 pies de la base de un edificio, el ángulo de elevación a la parte *más baja* de una chimenea es de 35°, mientras que el ángulo de elevación a la parte *más alta* es de 53°, como se muestra en la Figura 4.80. Encuentre la altura s de la chimenea sola.

Solución

Observe en la Figura 4.80 que este problema comprende dos triángulos rectángulos. Para el triángulo rectángulo más pequeño use el hecho de que

$$\tan 35^\circ = \frac{a}{200}$$

para concluir que la altura del edificio es

$$a = 200 \tan 35^\circ.$$

Para el triángulo rectángulo más grande use la ecuación

$$\tan 53^\circ = \frac{a + s}{200}$$

para concluir que $a + s = 200 \tan 53^\circ$. Entonces, la altura de la chimenea es

$$\begin{aligned} s &= 200 \tan 53^\circ - a \\ &= 200 \tan 53^\circ - 200 \tan 35^\circ \\ &\approx 125.4 \text{ feet.} \end{aligned}$$

PUNTO *de repaso* Ahora trate de hacer el Ejercicio 23.

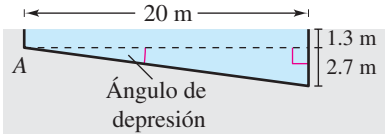


FIGURA 4.81

Ejemplo 4 Hallar un ángulo agudo de un triángulo rectángulo

Una piscina mide 20 metros de largo y 12 metros de ancho. El fondo está inclinado de modo que la profundidad del agua es 1.3 metros en el extremo bajo y 4 metros en el extremo profundo, como se ve en la Figura 4.81. Encuentre el ángulo de depresión del fondo de la piscina.

Solución

Usando la función tangente se puede ver que

$$\begin{aligned} \tan A &= \frac{\text{op}}{\text{ady}} \\ &= \frac{2.7}{20} \\ &= 0.135. \end{aligned}$$

Por tanto, el ángulo de depresión es

$$\begin{aligned} A &= \arctan 0.135 \\ &\approx 0.13419 \text{ radianes} \\ &\approx 7.69^\circ. \end{aligned}$$

PUNTO *de repaso* Ahora trate de hacer el Ejercicio 29.

Trigonometría y rumbo

En topografía y navegación, las direcciones pueden darse en términos de rumbo. Un rumbo mide el ángulo agudo que una trayectoria o línea de vista forma con una recta Norte-Sur fija, como se ve en la Figura 4.82. Por ejemplo, el rumbo S 35° E en la Figura 4.82 significa 35 grados al este del sur.

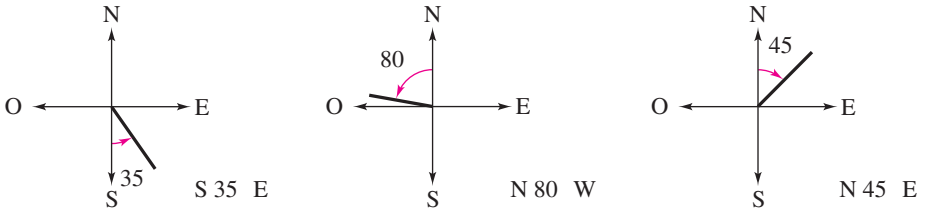


FIGURA 4.82

Ejemplo 5 Hallar direcciones en términos de rumbo

Un barco sale de un puerto al mediodía y se dirige al oeste a 20 nudos, o 20 millas náuticas (nm) por hora. A las 2 P.M. el barco cambio de curso a N 54° O, como se ve en la Figura 4.83. Encuentre el rumbo del barco y la distancia desde el puerto de salida a las 3 P.M.

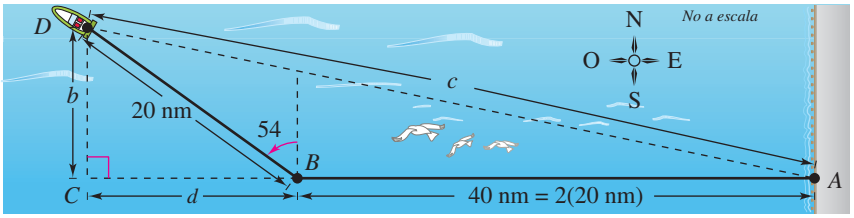


FIGURA 4.83

Solución

Para el triángulo BCD, tenemos $B = 90° - 54° = 36°$. Puede determinarse que los dos lados de este triángulo son

$$b = 20 \operatorname{sen} 36° \qquad \text{y} \qquad d = 20 \cos 36°.$$

Para el triángulo ACD, se puede hallar el ángulo A como sigue.

$$\tan A = \frac{b}{d + 40} = \frac{20 \operatorname{sen} 36°}{20 \cos 36° + 40} \approx 0.2092494$$

$$A \approx \arctan 0.2092494 \approx 11.82°$$

El ángulo con la recta Norte-Sur es $90° - 11.82° = 78.18°$. Por tanto, el rumbo del barco es N 78.18° O. Por último, del triángulo ACD, tenemos que $\operatorname{sen} A = b/c$, que da

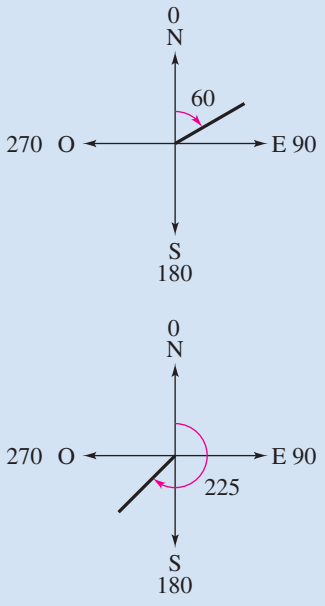
$$c = \frac{b}{\operatorname{sen} A} = \frac{20 \operatorname{sen} 36°}{\operatorname{sen} 11.82°}$$

$$\approx 57.4 \text{ millas náuticas} \qquad \text{Distancia desde puerto}$$

PUNTO de repaso Ahora trate de hacer el Ejercicio 37.

Tip de estudio

En *navegación aérea*, los rumbos se miden en grados *en el sentido de giro de las agujas de un reloj* desde el Norte. A continuación se muestran ejemplos de rumbos en navegación aérea.



Movimiento armónico

La naturaleza periódica de las funciones trigonométricas es útil para describir el movimiento de un punto en un objeto que vibra, oscila, gira o es desplazado por un movimiento ondulatorio.

Por ejemplo, considere una pelota que sube y baja sujeta en el extremo de un resorte, como se ilustra en la Figura 4.84. Suponga que 10 centímetros es la distancia máxima que la pelota se mueve verticalmente hacia arriba o hacia abajo desde su posición de equilibrio (en reposo). Suponga además que el tiempo que tarda la pelota en moverse desde su desplazamiento máximo arriba de cero a su máximo desplazamiento debajo de cero, y de regreso otra vez, es $t = 4$ segundos. Suponiendo condiciones ideales de perfecta elasticidad y sin fricción ni resistencia del aire, la pelota continuará moviéndose arriba y abajo de una manera uniforme y regular.

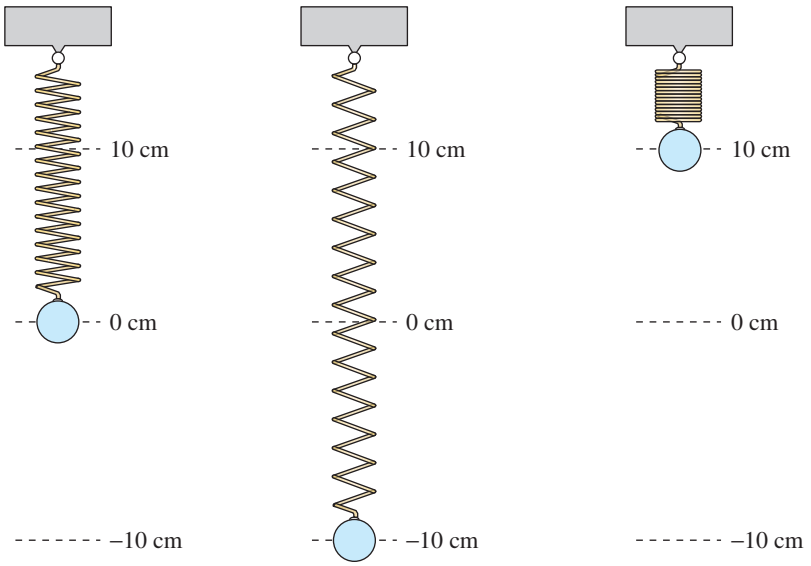


FIGURA 4.84

De este resorte se puede concluir que el periodo (tiempo para un ciclo completo) de movimiento es

$$\text{Periodo} = 4 \text{ segundos}$$

su amplitud (desplazamiento máximo desde el equilibrio) es

$$\text{Amplitud} = 10 \text{ centímetros}$$

y su **frecuencia** (número de ciclos por segundo) es

$$\text{Frecuencia} = \frac{1}{4} \text{ ciclo por segundo.}$$

El movimiento de esta naturaleza puede ser descrito por una función seno o coseno, y se denomina **movimiento armónico simple.**

Definición de movimiento armónico simple

Se dice que un punto que se mueve en una recta coordenada es **movimiento armónico** simple si su distancia d desde el origen en el tiempo t está dado por

$$d = a \operatorname{sen} \omega t \qquad \text{o} \qquad d = a \cos \omega t$$

donde a y ω son números reales tales que $\omega > 0$. El movimiento tiene amplitud $|a|$, periodo $\dfrac{2\pi}{\omega}$ y frecuencia $\dfrac{\omega}{2\pi}$.

Ejemplo 6 Movimiento armónico simple

Escriba la ecuación para el movimiento armónico simple de la pelota descrita en la Figura 4.84, donde el periodo es de 4 segundos. ¿Cuál es la frecuencia de este movimiento armónico?

Solución

Como el resorte está en equilibrio ($d = 0$) cuando $t = 0$, se usa la ecuación

$$d = a \operatorname{sen} \omega t.$$

Además, como el desplazamiento máximo desde 0 es 10 y el periodo es 4, tendremos

$$\text{Amplitud} = |a| = 10$$

$$\text{Periodo} = \frac{2\pi}{\omega} = 4 \quad \Rightarrow \quad \omega = \frac{\pi}{2}.$$

En consecuencia, la ecuación de movimiento es

$$d = 10 \operatorname{sen} \frac{\pi}{2} t.$$

Observe que la opción de $a = 10$ o $a = -10$ depende de si la pelota inicialmente se mueve hacia arriba o hacia abajo. La frecuencia es

$$\text{Frecuencia} = \frac{\omega}{2\pi} = \frac{\pi/2}{2\pi} = \frac{1}{4} \text{ de ciclo por segundo.}$$

PUNTO *de repaso* Ahora trate de hacer el Ejercicio 53.

FIGURA 4.85

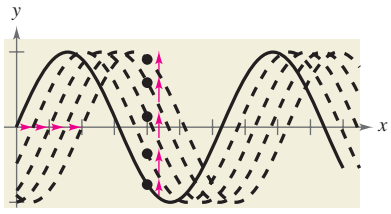


FIGURA 4.86

Una ilustración de la relación entre ondas senoidales y movimiento armónico se puede ver en el movimiento ondulatorio cuando una piedra se deja caer en una superficie de agua en calma. Las ondas se mueven hacia fuera en forma aproximada a una onda senoidal (o cosenoidal), como se ve en la Figura 4.85. Como ejemplo, suponga que está usted pescando y que la plomada de pesca está unida de manera que no se mueve horizontalmente. Como las ondas se mueven hacia fuera desde donde cayó la piedra, la plomada de pesca se moverá hacia arriba y abajo en movimiento armónico, como se ve en la Figura 4.86.

Ejemplo 7 Movimiento armónico simple

Dada la ecuación para movimiento armónico simple

$$d = 6\cos\frac{3\pi}{4}t$$

encuentre (a) el máximo desplazamiento, (b) la frecuencia, (c) el valor de d cuando $t = 4$, y (d) el mínimo valor positivo de t para el cual $d = 0$.

Solución algebraica

La ecuación dada tiene la forma $d = a\cos\omega t$, con $a = 6$ y $\omega = 3\pi/4$.

a. El máximo desplazamiento (desde el punto de equilibrio) está dado por la amplitud. Por tanto, el máximo desplazamiento es 6.

b. Frecuencia $= \dfrac{\omega}{2\pi}$

$$= \frac{3\pi/4}{2\pi}$$

$$= \frac{3}{8} \text{ de ciclo por unidad de tiempo}$$

c. $d = 6\cos\left[\dfrac{3\pi}{4}(4)\right]$

$= 6\cos 3\pi$

$= 6(-1)$

$= -6$

d. Para hallar el mínimo valor positivo de t para el cual $d = 0$, resuelva la ecuación

$$d = 6\cos\frac{3\pi}{4}t = 0.$$

Primero divida cada lado entre 6 para obtener

$$\cos\frac{3\pi}{4}t = 0.$$

Esta ecuación se satisface cuando

$$\frac{3\pi}{4}t = \frac{\pi}{2}, \frac{3\pi}{2}, \frac{5\pi}{2}, \ldots.$$

Multiplique estos valores por $4/(3\pi)$ para obtener

$$t = \frac{2}{3}, 2, \frac{10}{3}, \ldots.$$

Por tanto, el mínimo valor positivo de t es $t = \frac{2}{3}$.

PUNTO *de repaso* Ahora trate de hacer el Ejercicio 57.

Solución gráfica

Use una calculadora gráfica en el modo de *radianes* para graficar

$$y = 6\cos\frac{3\pi}{4}x.$$

a. Utilice el comando *maximum* de la calculadora para estimar que el desplazamiento máximo a partir del punto de equilibrio es igual $y = 0$ es 6, como se muestra en la figura 4.87.

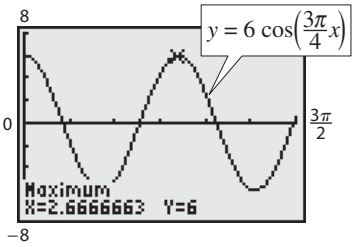


FIGURA 4.87

b. El periodo es el tiempo en el que la gráfica completa un ciclo, el cual es $x \approx 2.667$. Puede estimar la frecuencia de la siguiente manera.

$$\text{Frecuencia} \approx \frac{1}{2.667} \approx 0.375 \text{ ciclos por unidad de tiempo}$$

c. Use el comando *trace* o *value* para estimar que el valor de y cuando $x = 4$ es $y = -6$, como se muestra en la figura 4.88.

d. Utilice el comando *zero* o *root* para estimar que el menor valor positivo de x para el cual $y = 0$ is $x \approx 0.6667$, como se muestra en la figura 4.89.

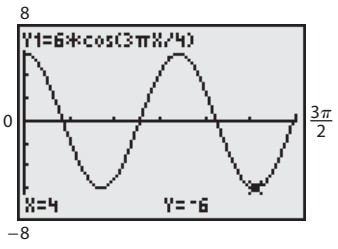


FIGURA 4.88

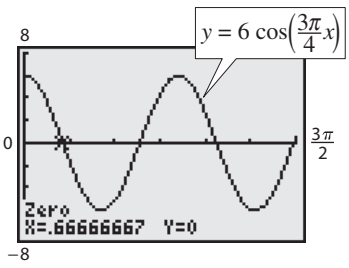


FIGURA 4.89

4.8 EJERCICIOS

En www.CalcChat.com vea las soluciones a los ejercicios impares.

VOCABULARIO: Llene los espacios en blanco.

1. Un _____ indica el ángulo agudo que una raya o una recta hace con una recta Norte-Sur fija.
2. Se dice que un punto que se mueve sobre una recta de coordenadas está en _____ _____ _____ si su distancia d desde el origen en el tiempo t está dada ya sea por $d = a \operatorname{sen} \omega t$ o $d = a \cos \omega t$.
3. El tiempo para un ciclo completo de un punto en movimiento armónico simple es su _____.
4. El número de ciclos por segundo de un punto en movimiento armónico simple es su _____.

HABILIDADES Y APLICACIONES

En los Ejercicios 5-14, del triángulo rectángulo que se muestra en la figura reuelva para todos los lados y ángulos desconocidos.

5. $A = 30°, \quad b = 3$
6. $B = 54°, \quad c = 15$
7. $B = 71°, \quad b = 24$
8. $A = 8.4°, \quad a = 40.5$
9. $a = 3, \quad b = 4$
10. $a = 25, \quad c = 35$
11. $b = 16, \quad c = 52$
12. $b = 1.32, \quad c = 9.45$
13. $A = 12° 15', \quad c = 430.5$
14. $B = 65° 12', \quad a = 14.2$

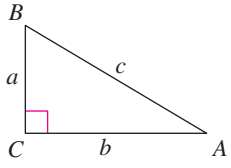


FIGURA PARA EL EJ. 5–14

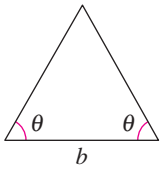
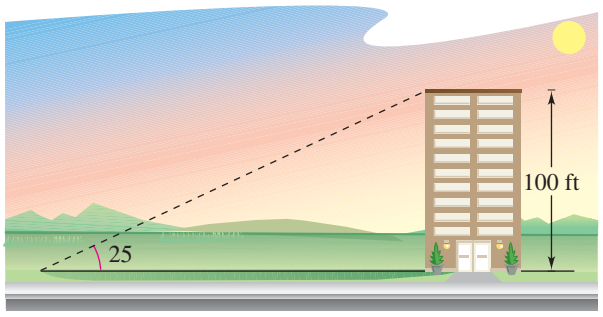


FIGURA PARA EL EJ. 15–18

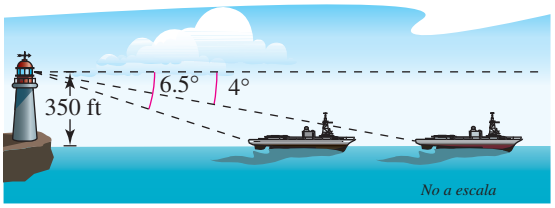
En los Ejercicios 15-18, encuentre la altura del triángulo isósceles que se muestra en la figura. Redondee las respuestas a dos lugares decimales.

15. $\theta = 45°, \quad b = 6$
16. $\theta = 18°, \quad b = 10$
17. $\theta = 32°, \quad b = 8$
18. $\theta = 27°, \quad b = 11$

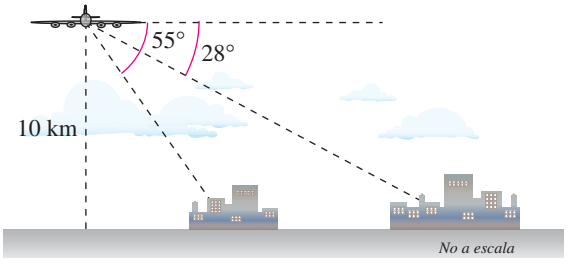
19. **LONGITUD** El Sol está 25° sobre el horizonte. Encuentre la longitud de una sombra proyectada por un edificio que mide 100 pies de alto (vea figura).



20. **LONGITUD** El Sol está 20° arriba del horizonte. Encuentre la longitud de una sombra proyectada por la estatua de un parque que mide 12 pies de alto.
21. **ALTURA** Una escalera de 20 pies de largo se apoya contra el lado de una casa. Encuentre la altura desde lo alto de la escalera al suelo, si el ángulo de elevación de la escalera es de 80°.
22. **ALTURA** La longitud de la sombra de un árbol es 125 pies cuando el ángulo de elevación del Sol es 331. Aproxime la altura del árbol.
23. **ALTURA** Desde un punto a 50 pies del frente de una iglesia, los ángulos de elevación a la base de la torre y a la punta de esa torre son 35° y 47° 40′, respectivamente. Encuentre la altura de la torre.
24. **DISTANCIA** Un observador situado en un faro a 350 pies sobre el nivel del mar observa dos barcos directamente mar afuera. Los ángulos de depresión de los barcos son 4° y 6.5° (vea figura). ¿A qué distancia están entre sí?



25. **DISTANCIA** El pasajero de un avión que vuela a una altura de 10 kilómetros ve dos ciudades directamente al este del avión. Los ángulos de depresión a las ciudades son 28° y 55° (vea figura). ¿A qué distancia están una de la otra?



26. ALTITUD Usted observa un avión que se aproxima en las alturas y supone que su velocidad es de 550 millas por hora. El ángulo de elevación del avión es 16° en un momento y 57° un minuto más tarde. Aproxime la altura del avión.

27. ÁNGULO DE ELEVACIÓN Un ingeniero erige una torre de 75 pies para telefonía celular. Encuentre el ángulo de elevación a lo alto de la torre en un punto al nivel del suelo a 50 pies de su base.

28. ÁNGULO DE ELEVACIÓN La altura de un tablero exterior de baloncesto es de $12\frac{1}{2}$ pies y proyecta una sombra de $17\frac{1}{3}$ pies de largo.

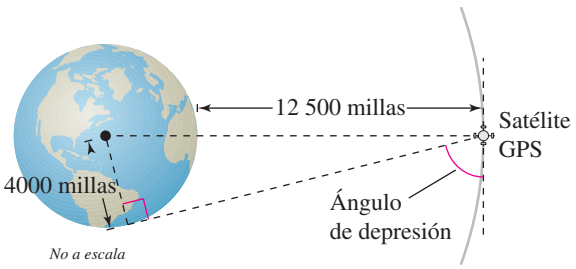
(a) Trace un triángulo rectángulo que dé una representación visual del problema. Marque las cantidades conocidas y las desconocidas.

(b) Use una función trigonométrica para escribir una ecuación que contenga la cantidad desconocida.

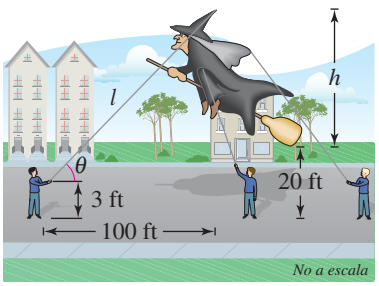
(c) Encuentre el ángulo de elevación del Sol.

29. ÁNGULO DE DEPRESIÓN Una torre de 150 pies de alto para telefonía celular se instala en la cima de una montaña, a 1200 pies sobre el nivel del mar. ¿Cuál es el ángulo de depresión desde lo alto de la torre a un usuario de teléfono celular que está a 5 millas horizontales y a 400 pies sobre el nivel del mar?

30. ÁNGULO DE DEPRESIÓN Un satélite de sistema de posicionamiento global (GPS) gira en órbita a 12 500 millas sobre la superficie de la Tierra (vea figura). Encuentre el ángulo de depresión del satélite al horizonte. Suponga que el radio de la Tierra es de 4000 millas.



31. ALTURA Una persona sostiene uno de los hilos unidos a lo alto de un globo gigante de un personaje en un desfile. Antes que se empiece el desfile, el globo está en posición vertical y su parte inferior está a alrededor de 20 pies sobre el nivel del suelo. Otra persona está de pie aproximadamente a 100 pies adelante del globo (vea figura).

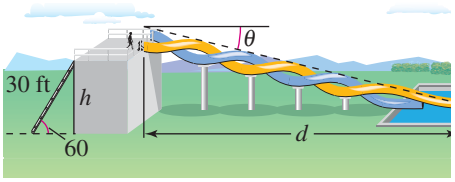


(a) Encuentre la longitud l del hilo sostenido por la persona, en términos de h, la altura del globo de arriba abajo.

(b) Encuentre una expresión para el ángulo de elevación θ desde lo alto del globo.

(c) Encuentre la altura h del globo si el ángulo de elevación a lo alto del globo es 35°.

32. ALTURA Los diseñadores de un parque acuático están creando un nuevo tobogán y han hecho algunos dibujos preliminares. La longitud de la escalera es de 30 pies y su ángulo de elevación es 60° (vea figura).

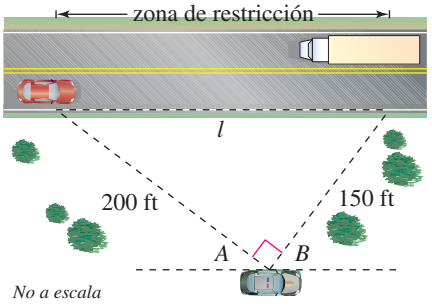


(a) Encuentre la altura h del tobogán.

(b) Encuentre el ángulo de depresión θ de lo alto del tobogán al extremo de éste en el suelo, en términos de la distancia horizontal d que recorre un usuario.

(c) El ángulo de depresión del tobogán está limitado, por restricciones de seguridad, a no tener menos de 25° y no más de 30°. Encuentre un intervalo para hallar cuánto se desplaza horizontalmente el usuario.

33. RESTRICCIÓN DE VELOCIDAD Un departamento de policía ha establecido una zona de restricción de velocidad en un tramo recto de carretera. Una patrulla está estacionada paralela a la zona, a 200 pies de un extremo y a 150 pies del otro (vea figura).



(a) Encuentre la longitud l de la zona y las medidas de los ángulos A y B (en grados).

(b) Encuentre el tiempo mínimo (en segundos) que tarda el vehículo en pasar por la zona sin exceder el límite de velocidad indicado de 35 millas por hora.

34. ASCENSO DE UN AEROPLANO Durante el despegue, el ángulo de ascenso de un avión es de 18° y su velocidad es de 275 pies por segundo.

(a) Encuentre la altitud del avión después de 1 minuto.

(b) ¿Cuánto tardará el avión para ascender a una altitud de 10 000 pies?

35. NAVEGACIÓN Un avión que vuela a 600 millas por hora tiene un rumbo de 52°. Después de volar 1.5 horas, ¿a qué distancia del Norte y a qué distancia del Este estará el avión desde su punto de partida?

36. NAVEGACIÓN Un jet sale de Reno, Nevada, y se dirige a Miami, Florida, a un rumbo de 100°. La distancia entre las dos ciudades es de 2472 millas, aproximadamente.

(a) ¿A qué distancia al Norte y a qué distancia al Oeste se encuentra Reno respecto a Miami?

(b) Si el jet ha de regresar directamente a Reno desde Miami, ¿con qué rumbo debe volar?

37. NAVEGACIÓN Un barco sale de puerto al mediodía y lleva un rumbo S 29° O. El barco navega a 20 nudos.

(a) ¿Cuántas millas náuticas al Sur y cuántas millas náuticas al Oeste habrá navegado el barco a las 6 P.M.?

(b) A las 6 P.M., el barco cambia de curso y se dirige al Oeste. Encuentre el rumbo del barco y la distancia desde el puerto de salida a las 7 P.M.

38. NAVEGACIÓN Un yate privado sale de un muelle en Myrtle Beach, Carolina del Sur, y se dirige hacia Freeport, en las Bahamas, a un rumbo S 1.4° E. El yate promedia una velocidad de 20 nudos durante el viaje de 428 millas náuticas.

(a) ¿Cuánto tardará el yate en hacer el viaje?

(b) ¿A qué distancia al Este y al Sur está el yate después de 12 horas?

(c) Si un avión sale de Myrtle Beach y vuela a Freeport, ¿qué rumbo debe tomar?

39. NAVEGACIÓN Un barco está a 45 millas al Este y 30 millas al Sur del puerto. El capitán desea navegar directamente a puerto. ¿Qué rumbo debe tomar?

40. NAVEGACIÓN Un avión está a 160 millas al Norte y a 85 millas al Este de un aeropuerto. El piloto desea volar directamente al aeropuerto. ¿Qué rumbo debe tomar?

41. TOPOGRAFÍA Un topógrafo desea hallar la distancia que hay hasta el otro lado de un pantano (vea figura). El rumbo de A a B es N 32° O. El topógrafo camina 50 metros desde A, y en el punto C el rumbo a B es N 68° O. Encuentre (a) el rumbo de A a C y (b) la distancia de A a B.

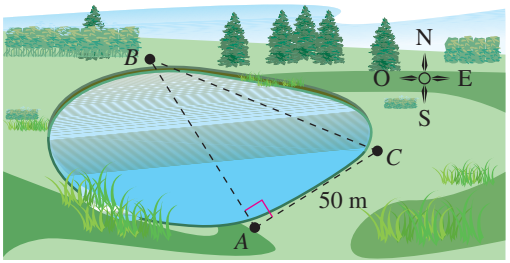
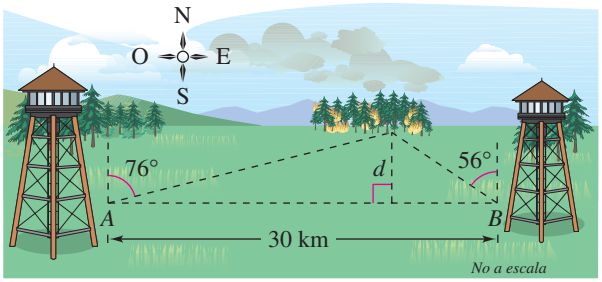


FIGURA FOR 41

42. UBICACIÓN DE UN INCENDIO Dos torres de vigilancia contra incendios están a 30 km entre sí, donde la torre A mira hacia el Oeste de la torre B. Un incendio es avistado desde las torres, y los rumbos de A y B son N 76° E y N 56° O, respectivamente (vea figura). Encuentre la distancia d al incendio desde el segmento de recta AB.



GEOMETRÍA En los Ejercicios 43 y 44, encuentre el ángulo α entre dos rectas no verticales L_1 y L_2. El ángulo α satisface la ecuación

$$\tan \alpha = \left| \frac{m_2 - m_1}{1 + m_2 m_1} \right|$$

donde m_1 y m_2 son las pendientes de L_1 y L_2, respectivamente. (Suponga que $m_1 m_2 \neq -1$.)

43. L_1: $3x - 2y = 5$
L_2: $x + y = 1$

44. L_1: $2x - y = 8$
L_2: $x - 5y = -4$

45. GEOMETRÍA Determine el ángulo entre la diagonal de un cubo y la diagonal de su base, como se ve en la figura.

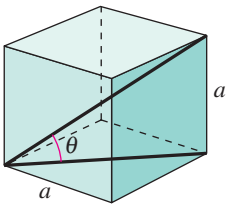


FIGURA PARA EJERCICIO 45

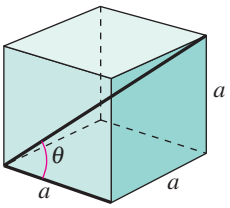


FIGURA PARA EJERCICIO 46

46. GEOMETRÍA Determine el ángulo entre la diagonal de un cubo y su lado, como se muestra en la figura.

47. GEOMETRÍA Encuentre la longitud de los lados de un pentágono regular inscrito en un círculo de 25 pulgadas de radio.

48. GEOMETRÍA Encuentre la longitud de los lados de un hexágono regular inscrito en un círculo de 25 pulgadas de radio.

49. HERRAJE Escriba la distancia y de un lado a otro de los lados planos de una tuerca hexagonal como función de r (vea figura).

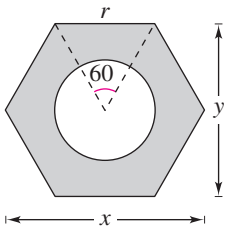


FIGURA PARA EJERCICIO 49

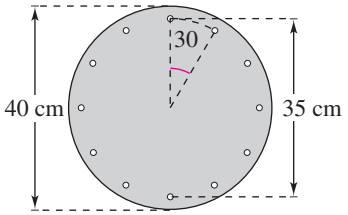
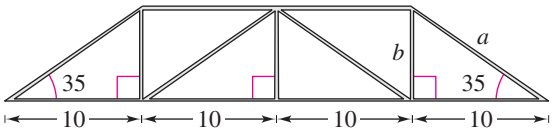


FIGURA PARA EJERCICIO 50

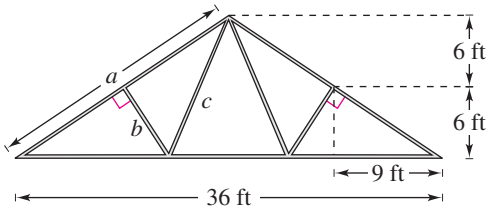
50. AGUJEROS PARA TORNILLOS La figura muestra una pieza circular de lámina metálica que tiene un diámetro de 40 centímetros y contiene 12 agujeros igualmente espaciados para tornillos. Determine la distancia en línea recta entre el centro de los agujeros consecutivos para tornillo.

ESTRUCTURAS En los Ejercicios 51 y 52, encuentre las longitudes de todos los miembros desconocidos de la estructura.

51.



52.



MOVIMIENTO ARMÓNICO En los Ejercicios 53-56, encuentre un modelo para movimiento armónico simple que satisfaga las condiciones especificadas.

	Desplazamiento ($t = 0$)	*Amplitud*	*Período*
53.	0	4 centímetros	2 segundos
54.	0	3 metros	6 segundos
55.	3 pulgadas	3 pulgadas	1.5 segundos
56.	2 pies	2 pies	10 segundos

MOVIMIENTO ARMÓNICO En los Ejercicios 57-60, para el movimiento armónico simple descrito por la función trigonométrica, encuentre (a) el máximo desplazamiento, (b) la frecuencia, (c) el valor de d cuando $t = 5$, y (d) el mínimo valor positivo de t para el cual $d = 0$. Use una calculadora de gráficas para verificar resultados.

57. $d = 9 \cos \frac{6\pi}{5} t$

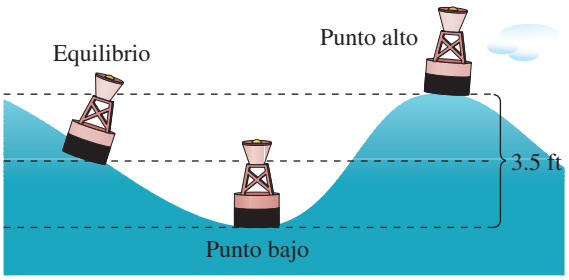
58. $d = \frac{1}{2} \cos 20\pi t$

59. $d = \frac{1}{4} \operatorname{sen} 6\pi t$

60. $d = \frac{1}{64} \operatorname{sen} 792\pi t$

61. DIAPASÓN Un punto en el extremo de un diapasón se mueve con movimiento armónico simple descrito por $d = a \operatorname{sen} \omega t$. Encuentre ω dado que el diapasón para la nota de *do* mayor tiene una frecuencia de 264 vibraciones por segundo.

62. MOVIMIENTO ONDULATORIO Una boya oscila en movimiento armónico simple a medida que pasan las olas. Se observa que la boya se mueve un total de 3.5 pies de su punto bajo a su punto alto (vea figura), y que regresa a su punto alto cada 10 segundos. Escriba una ecuación que describa el movimiento de la boya si su punto alto está en $t = 0$.



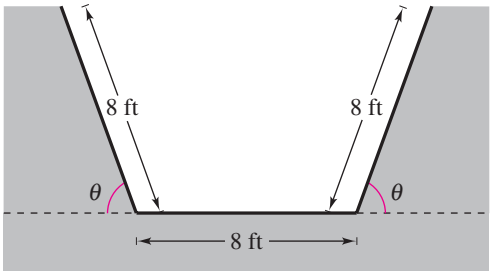
63. OSCILACIÓN DE UN RESORTE Una pelota que está subiendo y bajando en el extremo de un resorte tiene un desplazamiento máximo de 3 pulgadas. Su movimiento (en condiciones ideales) está modelado por $y = \frac{1}{4} \cos 16t$ $(t > 0)$, donde y se mide en pies y t es el tiempo en segundos.

(a) Grafique la función.

(b) ¿Cuál es el periodo de las oscilaciones?

(c) Determine la primera vez que el peso pasa el punto de equilibrio $(y = 0)$.

64. ANÁLISIS NUMÉRICO Y GRÁFICO La sección transversal de un canal de irrigación es un trapecio isósceles, tres de cuyos lados miden 8 pies de largo (vea la figura). El objetivo es hallar el ángulo θ que maximice el área de la sección transversal. [*Sugerencia:* el área de un trapecio es $(h/2)(b_1 + b_2)$.]



(a) Complete siete renglones adicionales de la tabla.

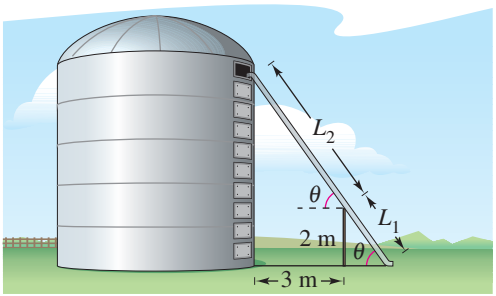
Base 1	Base 2	Altitud	Area
8	$8 + 16 \cos 10°$	$8 \operatorname{sen} 10°$	22.1
8	$8 + 16 \cos 20°$	$8 \operatorname{sen} 20°$	42.5

(b) Use una calculadora de gráficas para generar renglones adicionales de la tabla. Use la tabla para estimar la máxima área de sección transversal.

(c) Escriba el área A como función de θ.

(d) Use una calculadora de gráficas para graficar la función. Use la gráfica para estimar la máxima área de sección transversal. ¿Cómo se compara su estimación con la de la del inciso (b)?

65. ANÁLISIS NUMÉRICO Y GRÁFICO Una cerca de 2 metros de alto está a 3 metros del costado de una tolva para almacenamiento de granos. Un elevador de granos debe llegar del suelo fuera de la cerca hasta la tolva de almacenamiento (vea figura). El objetivo es determinar el elevador más corto que satisfaga las restricciones.



(a) Complete cuatro renglones de la tabla.

θ	L_1	L_2	$L_1 + L_2$
0.1	$\dfrac{2}{\operatorname{sen} 0.1}$	$\dfrac{3}{\cos 0.1}$	23.0
0.2	$\dfrac{2}{\operatorname{sen} 0.2}$	$\dfrac{3}{\cos 0.2}$	13.1

(b) Use una calculadora de gráficas para generar renglones adicionales de la tabla. Use la tabla para estimar la longitud mínima del elevador.

(c) Escriba la longitud $L_1 + L_2$ como función de θ.

(d) Use una calculadora de gráficas para graficar la función. Use la gráfica para estimar la longitud mínima. ¿Cómo se compara la estimación de usted con la del inciso (b)?

66. ANÁLISIS DE DATOS La tabla siguiente muestra el promedio de ventas S (en millones de dólares) de un fabricante de ropa gruesa para cada mes t, donde $t = 1$ representa enero.

Tiempo, t	1	2	3	4	5	6
Ventas, S	13.46	11.15	8.00	4.85	2.54	1.70

Tiempo, t	7	8	9	10	11	12
Ventas, S	2.54	4.85	8.00	11.15	13.46	14.30

(a) Genere una gráfica de dispersión de los datos.

(b) Encuentre un modelo trigonométrico que se ajuste a los datos. Grafique el modelo con su gráfica de dispersión. ¿Qué tan bien se ajusta el modelo a los datos?

(c) ¿Cuál es el periodo del modelo? ¿Piensa usted que es razonable, dado el contexto? Explique su razonamiento.

(d) Interprete el significado de la amplitud del modelo en el contexto del problema.

67. ANÁLISIS DE DATOS El número de horas H de luz diurna en Denver, Colorado, el día 15 de cada mes es: 1(9.67), 2(10.72), 3(11.92), 4(13.25), 5(14.37), 6(14.97), 7(14.72), 8(13.77), 9(12.48), 10(11.18), 11(10.00), 12(9.38). El mes está representado por t, con $t = 1$ correspondiente a enero. Un modelo para los datos está dado por

$$H(t) = 12.13 + 2.77 \operatorname{sen}[(\pi t/6) - 1.60].$$

(a) Use una calculadora de gráficas para graficar los puntos de datos y el modelo en la misma pantalla.

(b) ¿Cuál es el periodo del modelo? ¿Es lo que usted esperaba? Explique.

(c) ¿Cuál es la amplitud del modelo? ¿Qué representa en el contexto del problema? Explique.

EXPLORACIÓN

68. TOQUE FINAL Al caminar por un terreno plano, usted observa una torre de turbina de viento de altura h directamente al frente. El ángulo de elevación hasta lo alto de la torre es A grados. Después que usted se acerca d pies a la torre, el ángulo de elevación aumenta a B grados.

(a) Trace un diagrama para representar la situación.

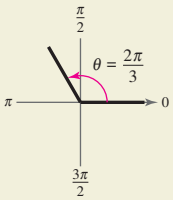
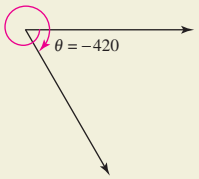
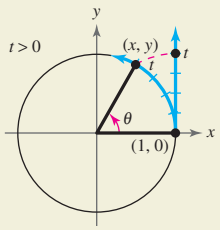
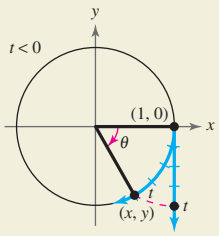
(b) Escriba una expresión para la altura h de la torre, en términos de los ángulos A y B y la distancia d.

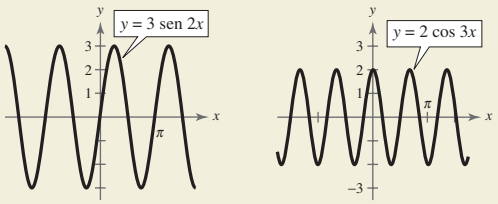
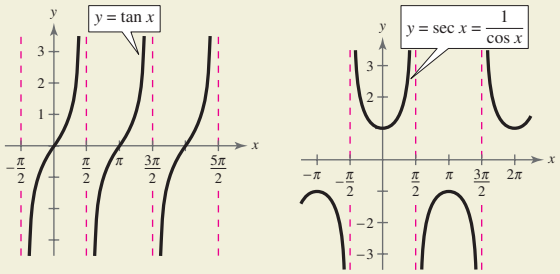
¿VERDADERO O FALSO? En los Ejercicios 69 y 70, determine si la proposición es verdadera o falsa. Justifique su respuesta.

69. La torre inclinada de Pisa no es vertical, pero si una persona conoce el ángulo de elevación θ hasta lo alto de la torre, cuando se encuentre a d pies de distancia de la torre, puede hallar su altura h con la fórmula $h = d \tan \theta$.

70. N 24° E significa 24 grados al Norte del Este.

4 Resumen del capítulo

	¿Qué aprendió?	Explicación/Ejemplos	Ejercicios de repaso
Sección 4.1	Describir ángulos *(p. 280)*.	 	1–8
	Convertir entre ángulos y radianes *(p. 284)*.	Para convertir grados a radianes, multiplique grados por $(\pi \text{ rad})/180°$. Para convertir radianes a grados, multiplique radianes por $180°/(\pi \text{ rad})$.	9–20
	Usar ángulos para modelar y resolver problemas de la vida real *(p. 285)*.	Se pueden usar ángulos para hallar la longitud de un arco circular y el área de un sector circular. (Vea Ejemplos 5 y 8.)	21–24
Sección 4.2	Identificar una circunferencia unitaria y describir su relación con los números reales *(p. 292)*.	 	25–28
	Evaluar funciones trigonométricas usando la circunferencia unitaria *(p. 293)*.	$t = \frac{2\pi}{3}$ corresponde a $(x, y) = \left(-\frac{1}{2}, \frac{\sqrt{3}}{2}\right)$. Por tanto, $\cos\frac{2\pi}{3} = -\frac{1}{2}$, $\operatorname{sen}\frac{2\pi}{3} = \frac{\sqrt{3}}{2}$, y $\tan\frac{2\pi}{3} = -\sqrt{3}$.	29–32
	Usar dominio y periodo para evaluar funciones seno y coseno *(p. 295)*.	Como $\frac{9\pi}{4} = 2\pi + \frac{\pi}{4}$, $\operatorname{sen}\frac{9\pi}{4} = \operatorname{sen}\frac{\pi}{4} = \frac{\sqrt{2}}{2}$.	33–36
	Usar calculadora para evaluar funciones trigonométricas *(p. 296)*.	$\operatorname{sen}\frac{3\pi}{8} \approx 0.9239$, $\cot(-1.2) \approx -0.3888$	37–40
Sección 4.3	Evaluar funciones trigonométricas de ángulos agudos *(p. 299)*.	$\operatorname{sen}\theta = \frac{\text{opu}}{\text{hip}}$, $\cos\theta = \frac{\text{ady}}{\text{hip}}$, $\tan\theta = \frac{\text{opu}}{\text{ady}}$ $\csc\theta = \frac{\text{hip}}{\text{opu}}$, $\sec\theta = \frac{\text{hip}}{\text{ady}}$, $\cot\theta = \frac{\text{ady}}{\text{opu}}$	41, 42
	Usar identidades trigonométricas fundamentales *(p. 302)*.	$\operatorname{sen}\theta = \frac{1}{\csc\theta}$, $\tan\theta = \frac{\operatorname{sen}\theta}{\cos\theta}$, $\operatorname{sen}^2\theta + \cos^2\theta = 1$	43–46
	Usar calculadora para evaluar funciones trigonométricas *(p. 303)*.	$\tan 34.7° \approx 0.6924$, $\csc 29°\ 15' \approx 2.0466$	47–54
	Usar funciones trigonométricas para modelar y resolver problemas de la vida real *(p. 304)*.	Se pueden usar funciones trigonométricas para hallar la altura de un monumento, el ángulo entre dos trayectorias y la longitud de una rampa. (Vea Ejemplos 7-9.)	55, 56

	¿Qué aprendió?	Explicación/Ejemplos	Ejercicios de repaso
Sección 4.4	Evaluar funciones trigonométricas de cualquier ángulo *(p. 310)*.	Sea (3, 4) un punto del lado terminal de θ. Entonces $\operatorname{sen}\theta = \frac{4}{5}$, $\cos\theta = \frac{3}{5}$ y $\tan\theta = \frac{4}{3}$.	57–70
	Hallar ángulos de referencia *(p. 312)*.	Sea θ un ángulo en posición normal. Su ángulo de referencia es el ángulo agudo θ' formado por el lado terminal de θ y el eje horizontal.	71–74
	Evaluar funciones trigonométricas de números reales *(p. 313)*.	$\cos\frac{7\pi}{3} = \frac{1}{2}$ porque $\theta' = \frac{7\pi}{3} - 2\pi = \frac{\pi}{3}$. Entonces, $\cos\frac{7\pi}{3} = \cos\frac{\pi}{3} = \frac{1}{2}$.	75–84
Sección 4.5	Trazar las gráficas de funciones seno y coseno usando amplitud y periodo *(p. 319)*.		85–88
	Trazar traslaciones de las gráficas de funciones seno y coseno *(p. 323)*.	Para $y = d + a\operatorname{sen}(bx - c)$ and $y = d + a\cos(bx - c)$, la constante c crea una traslación horizontal. La constante d crea una traslación vertical. (Vea Ejemplos 4-6.)	89–92
	Usar funciones seno y coseno para modelar datos de la vida real *(p. 325)*.	Se puede usar una función coseno para modelar la profundidad del agua en el extremo de un muelle a varias horas. (Vea Ejemplo 7.)	93, 94
Sección 4.6	Trazar las gráficas de la función tangente *(p. 330)*, cotangente *(p. 332)*, secante *(p. 333)*, y cosecante *(p. 333)*.		95–102
	Trazar las gráficas de funciones trigonométricas amortiguadas *(p. 335)*.	Para $f(x) = x\cos 2x$ y $g(x) = \log x\operatorname{sen} 4x$, los factores x y $\log x$ se denominan factores de amortiguamiento.	103, 104
Sección 4.7	Evaluar y graficar funciones trigonométricas inversas *(p. 341)*.	$\operatorname{sen}^{-1}\frac{1}{2} = \frac{\pi}{6}$, $\cos^{-1}\left(-\frac{\sqrt{2}}{2}\right) = \frac{3\pi}{4}$, $\tan^{-1}\sqrt{3} = \frac{\pi}{3}$	105–122, 131–138
	Evaluar y graficar composiciones de funciones trigonométricas *(p. 345)*.	$\cos[\arctan(5/12)] = 12/13$, $\operatorname{sen}(\operatorname{sen}^{-1} 0.4) = 0.4$	123–130
Sección 4.8	Resolver problemas de la vida real que impliquen triángulos rectángulos *(p. 351)*.	Se puede usar una función trigonométrica para hallar la altura de una chimenea construida sobre un edificio. (Vea Ejemplo 3.)	139, 140
	Resolver problemas de la vida real que impliquen rumbos direccionales *(p. 353)*.	Se pueden usar funciones trigonométricas para hallar el rumbo de un barco y la distancia desde puerto en un momento determinado. (Vea Ejemplo 5.)	141
	Resolver problemas de la vida real que impliquen movimiento armónico *(p. 354)*.	Se pueden usar funciones seno o coseno para describir el movimiento de un objeto que vibra, oscila, gira o es desplazado por movimiento ondulatorio. (Vea Ejemplos 6 y 7.)	142

4 EJERCICIOS DE REPASO

En www.CalcChat.com vea las soluciones a los ejercicios impares.

4.1 En los Ejercicios 1-8, (a) trace el ángulo en posición normal, (b) determine el cuadrante en el que se encuentre el ángulo y (c) determine un ángulo coterminal positivo y uno negativo.

1. $15\pi/4$
2. $2\pi/9$
3. $-4\pi/3$
4. $-23\pi/3$
5. $70°$
6. $280°$
7. $-110°$
8. $-405°$

En los Ejercicios 9-12, convierta la medida del ángulo de grados a radianes. Redondee la respuesta a tres lugares decimales.

9. $450°$
10. $-112.5°$
11. $-33° 45'$
12. $197° 17'$

En los Ejercicios 13-16, convierta la medida de ángulo de radianes a grados. Redondee la respuesta a tres lugares decimales.

13. $3\pi/10$
14. $-11\pi/6$
15. -3.5
16. 5.7

En los Ejercicios 17-20, convierta la medida de cada ángulo a grados, minutos y segundos sin usar calculadora.

17. $198.4°$
18. $-70.2°$
19. $0.65°$
20. $-5.96°$

21. LONGITUD DE ARCO Encuentre la longitud del arco en una circunferencia con radio de 20 pulgadas intersecado por un ángulo central de 138°.

22. FONÓGRAFO Los discos fonográficos son de vinilo y giran en un tornamesa. Un disco típico de álbum es de 12 pulgadas de diámetro y opera a $33\frac{1}{3}$ revoluciones por minuto.

(a) ¿Cuál es la rapidez angular de un disco fonográfico?

(b) ¿Cuál es la rapidez lineal en el borde exterior de un disco fonográfico?

23. SECTOR CIRCULAR Encuentre el área del sector de un círculo con radio de 18 pulgadas y ángulo central $\theta = 120°$.

24. SECTOR CIRCULAR Encuentre el área del sector de un círculo con radio de 6.5 milímetros y ángulo central $\theta = 5\pi/6$.

4.2 En los Ejercicios 25-28, encuentre el punto (x, y) sobre el círculo unitario que corresponda al número real t.

25. $t = 2\pi/3$
26. $t = 7\pi/4$
27. $t = 7\pi/6$
28. $t = -4\pi/3$

En los Ejercicios 29-32, evalúe (si es posible) las seis funciones trigonométricas del número real.

29. $t = 7\pi/6$
30. $t = 3\pi/4$
31. $t = -2\pi/3$
32. $t = 2\pi$

En los Ejercicios 33-36, evalúe la función trigonométrica usando su periodo como ayuda.

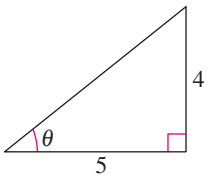
33. $\operatorname{sen}(11\pi/4)$
34. $\cos 4\pi$
35. $\operatorname{sen}(-17\pi/6)$
36. $\cos(-13\pi/3)$

En los Ejercicios 37-40, use una calculadora para evaluar la función trigonométrica. Redondee la respuesta a cuatro lugares decimales.

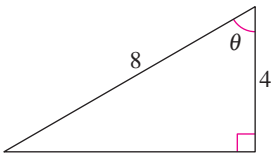
37. $\tan 33$
38. $\csc 10.5$
39. $\sec(12\pi/5)$
40. $\operatorname{sen}(-\pi/9)$

4.3 4.3 En los Ejercicios 41 y 42, encuentre los valores exactos de las seis funciones trigonométricas del ángulo θ que se muestra en la figura.

41.



42.



En los Ejercicios 43-46, use el valor dado de la función e identidades trigonométricas (incluidas las identidades de cofunción) para hallar las funciones trigonométricas indicadas.

43. $\operatorname{sen}\theta = \frac{1}{3}$ (a) $\csc\theta$ (b) $\cos\theta$ (c) $\sec\theta$ (d) $\tan\theta$

44. $\tan\theta = 4$ (a) $\cot\theta$ (b) $\sec\theta$ (c) $\cos\theta$ (d) $\csc\theta$

45. $\csc\theta = 4$ (a) $\operatorname{sen}\theta$ (b) $\cos\theta$ (c) $\sec\theta$ (d) $\tan\theta$

46. $\csc\theta = 5$ (a) $\operatorname{sen}\theta$ (b) $\cot\theta$ (c) $\tan\theta$ (d) $\sec(90° - \theta)$

En los Ejercicios 47-54, use una calculadora para evaluar la función trigonométrica. Redondee la respuesta a cuatro lugares decimales.

47. $\tan 33°$
48. $\csc 11°$
49. $\operatorname{sen} 34.2°$
50. $\sec 79.3°$
51. $\cot 15° 14'$
52. $\csc 44° 35'$
53. $\tan 31° 24' 5''$
54. $\cos 78° 11' 58''$

55. PENDIENTE DE FERROCARRIL Un tren recorre 3.5 kilómetros en una vía recta con pendiente de $1° 10'$ (vea figura en la página siguiente). ¿Cuál es la elevación vertical del tren en esa distancia?

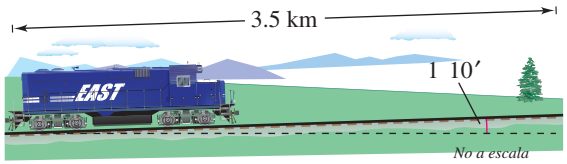


FIGURA PARA EJERCICIO 55

56. CABLE DE SUJECIÓN Un cable de sujeción (llamado *viento*) va del suelo a lo alto de un poste telefónico de 25 pies. El ángulo formado entre el cable y el suelo es de 52°. ¿A qué distancia de la base del poste está fijo el cable al suelo?

4.4 En los Ejercicios 57-64, el punto está en el lado terminal de un ángulo θ en posición normal. Determine los valores exactos de las seis funciones trigonométricas del ángulo θ.

57. $(12, 16)$ **58.** $(3, -4)$

59. $\left(\frac{2}{3}, \frac{5}{2}\right)$ **60.** $\left(-\frac{10}{3}, -\frac{2}{3}\right)$

61. $(-0.5, 4.5)$ **62.** $(0.3, 0.4)$

63. $(x, 4x), \quad x > 0$ **64.** $(-2x, -3x), \quad x > 0$

En los Ejercicios 65-70, encuentre los valores de las cinco funciones trigonométricas restantes de θ.

Valor de la función	*Restricción*
65. $\sec\theta = \frac{6}{5}$	$\tan\theta < 0$
66. $\csc\theta = \frac{3}{2}$	$\cos\theta < 0$
67. $\operatorname{sen}\theta = \frac{3}{8}$	$\cos\theta < 0$
68. $\tan\theta = \frac{5}{4}$	$\cos\theta < 0$
69. $\cos\theta = -\frac{2}{5}$	$\operatorname{sen}\theta > 0$
70. $\operatorname{sen}\theta = -\frac{1}{2}$	$\cos\theta > 0$

En los Ejercicios 71-74, encuentre el ángulo de referencia θ' y trace θ y θ' en posición normal.

71. $\theta = 264°$ **72.** $\theta = 635°$

73. $\theta = -6\pi/5$ **74.** $\theta = 17\pi/3$

En los Ejercicios 75-80, evalúe el seno, coseno y tangente del ángulo sin usar calculadora.

75. $\pi/3$ **76.** $\pi/4$

77. $-7\pi/3$ **78.** $-5\pi/4$

79. $495°$ **80.** $-150°$

En los Ejercicios 81-84, use una calculadora para evaluar la función trigonométrica. Redondee la respuesta a cuatro lugares decimales.

81. $\operatorname{sen} 4$ **82.** $\cot(-4.8)$

83. $\operatorname{sen}(12\pi/5)$ **84.** $\tan(-25\pi/7)$

4.5 En los Ejercicios 85-92, trace la gráfica de la función. Incluya dos periodos.

85. $y = \operatorname{sen} 6x$ **86.** $y = -\cos 3x$

87. $f(x) = 5\operatorname{sen}(2x/5)$ **88.** $f(x) = 8\cos(-x/4)$

89. $y = 5 + \operatorname{sen} x$ **90.** $y = -4 - \cos\pi x$

91. $g(t) = \frac{5}{2}\operatorname{sen}(t - \pi)$ **92.** $g(t) = 3\cos(t + \pi)$

93. ONDAS DE SONIDO Las ondas de sonido pueden ser modeladas por funciones senoidales de la forma $y = a \operatorname{sen} bx$, donde x se mide en segundos.

(a) Escriba una ecuación de una onda de sonido cuya amplitud es 2 y cuyo período es $\frac{1}{264}$ de segundo.

(b) ¿Cuál es la frecuencia de la onda de sonido descrita en el inciso (a)?

94. ANÁLISIS DE DATOS: METEOROLOGÍA Las horas S de puesta de Sol (tiempo medio de Greenwich) en la latitud 40° Norte el día 15 de cada mes son: 1(16:59), 2(17:35), 3(18:06), 4(18:38), 5(19:08), 6(19:30), 7(19:28), 8(18:57), 9(18:09), 10(17:21), 11(16:44), 12(16:36). El mes está representado por t, con $t = 1$ correspondiente a enero. Un modelo (en el que los minutos se han convertido a partes decimales de una hora) para los datos es: $S(t) = 18.09 + 1.41\operatorname{sen}[(\pi t/6) + 4.60]$.

(a) Use una calculadora de gráficas para graficar los puntos de datos y el modelo en la misma pantalla.

(b) ¿Cuál es el periodo del modelo? ¿Es lo que usted esperaba? Explique.

(c) ¿Cuál es la amplitud del modelo? ¿Qué representa en el modelo? Explique.

4.6 En los Ejercicios 95-102, trace una gráfica de la función. Incluya dos periodos.

95. $f(x) = 3\tan 2x$ **96.** $f(t) = \tan\left(t + \frac{\pi}{2}\right)$

97. $f(x) = \frac{1}{2}\cot x$ **98.** $g(t) = 2\cot 2t$

99. $f(x) = 3\sec x$ **100.** $h(t) = \sec\left(t - \frac{\pi}{4}\right)$

101. $f(x) = \frac{1}{2}\csc\frac{x}{2}$ **102.** $f(t) = 3\csc\left(2t + \frac{\pi}{4}\right)$

En los Ejercicios 103 y 104, use una calculadora de gráficas para graficar la función y el coeficiente de amortiguamiento de la función en la misma pantalla. Describa el comportamiento de la función cuando x aumenta sin límite.

103. $f(x) = x\cos x$ **104.** $g(x) = x^4\cos x$

4.7 En los Ejercicios 105-110, evalúe la expresión. Si es necesario, redondee la respuesta a dos lugares decimales.

105. $\operatorname{arcsen}\left(-\frac{1}{2}\right)$ **106.** $\operatorname{arcsen}(-1)$

107. $\operatorname{arcsen} 0.4$ **108.** $\operatorname{arcsen} 0.213$

109. $\operatorname{sen}^{-1}(-0.44)$ **110.** $\operatorname{sen}^{-1} 0.89$

En los Ejercicios 111-114, evalúe la expresión sin usar calculadora.

111. $\arccos\left(-\sqrt{2}/2\right)$ **112.** $\arccos\left(\sqrt{2}/2\right)$

113. $\cos^{-1}(-1)$ **114.** $\cos^{-1}\left(\sqrt{3}/2\right)$

En los Ejercicios 115-118, use una calculadora para evaluar la expresión. Redondee la respuesta a dos lugares decimales.

115. $\arccos 0.324$ **116.** $\arccos(-0.888)$

117. $\tan^{-1}(-1.5)$ **118.** $\tan^{-1} 8.2$

En los Ejercicios 119-122, use una calculadora para graficar la función.

119. $f(x) = 2 \arcsen x$ **120.** $f(x) = 3 \arccos x$

121. $f(x) = \arctan(x/2)$ **122.** $f(x) = -\arcsen 2x$

En los Ejercicios 123-128, encuentre el valor exacto de la expresión.

123. $\cos\left(\arctan \frac{3}{4}\right)$ **124.** $\tan\left(\arccos \frac{3}{5}\right)$

125. $\sec\left(\tan^{-1} \frac{12}{5}\right)$ **126.** $\sec\left[\operatorname{sen}^{-1}\left(-\frac{1}{4}\right)\right]$

127. $\cot\left(\arctan \frac{7}{10}\right)$ **128.** $\cot\left[\arcsen\left(-\frac{12}{13}\right)\right]$

En los Ejercicios 129 y 130, escriba una expresión algebraica que sea equivalente a la expresión.

129. $\tan[\arccos(x/2)]$ **130.** $\sec[\arcsen(x - 1)]$

En los Ejercicios 131-134, evalúe cada expresión sin usar calculadora.

131. $\operatorname{arccot} \sqrt{3}$ **132.** $\operatorname{arcsec}(-1)$

133. $\operatorname{arcsec}\left(-\sqrt{2}\right)$ **134.** $\operatorname{arccsc} 1$

En los Ejercicios 135-138, use una calculadora para aproximar el valor de la expresión. Redondee el resultado a dos lugares decimales.

135. $\operatorname{arccot}(10.5)$ **136.** $\operatorname{arcsec}(-7.5)$

137. $\operatorname{arcsec}\left(-\frac{5}{2}\right)$ **138.** $\operatorname{arccsc}(-2.01)$

4.8

139. ÁNGULO DE ELEVACIÓN La altura de una torre de transmisión es 70 metros, y proyecta una sombra de 30 metros de largo. Trace un diagrama y encuentre el ángulo de elevación del sol.

140. ALTURA Un balón de fútbol ha caído en el borde del techo del edificio de una escuela. Cuando una persona está a 25 pies de la base del edificio, el ángulo de elevación al balón es de 21°. ¿A qué altura desde el suelo está el balón?

141. DISTANCIA De la ciudad A a la ciudad B, un avión vuela 650 millas con un rumbo de 48°. De la ciudad B a la ciudad C, el avión vuela 810 millas con un rumbo de 115°. Encuentre la distancia de la ciudad A a la ciudad C y el rumbo de la ciudad A a la C.

142. MOVIMIENTO ONDULATORIO El corcho flotador de un pescador oscila en movimiento armónico simple de las olas en el lago en que está pescando. El corcho flotador se mueve un total de 1.5 pulgadas desde su punto alto a su punto bajo y regresa a su punto alto cada 3 segundos. Escriba una ecuación que modele el movimiento del corcho flotador si está en su punto alto en el tiempo $t = 0$.

EXPLORACIÓN

¿VERDADERO O FALSO? En los Ejercicios 143 y 144, determine si la proposición es verdadera o falsa. Justifique su respuesta.

143. $y = \operatorname{sen} \theta$ no es una función porque $\operatorname{sen} 30° = \operatorname{sen} 150°$.

144. Como $\tan 3\pi/4 = -1$, $\arctan(-1) = 3\pi/4$.

145. ESCRITURA Describa por escrito el comportamiento de $f(\theta) = \sec \theta$ en los ceros de $g(\theta) = \cos \theta$. Explique su razonamiento.

146. CONJETURA

(a) Use una calculadora de gráficas para completar la tabla.

θ	0.1	0.4	0.7	1.0	1.3
$\tan\left(\theta - \frac{\pi}{2}\right)$					
$-\cot \theta$					

(b) Haga una conjetura acerca de la relación entre $\tan[\theta - (\pi/2)]$ y $-\cot \theta$.

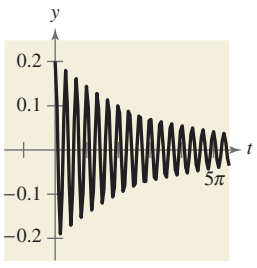
147. ESCRITURA Cuando grafica las funciones seno y coseno, determinar la amplitud es parte del análisis. Explique por qué esto no es cierto para las otras cuatro funciones trigonométricas.

148. OSCILACIÓN DE UN RESORTE Una pesa está suspendida del cielo raso de una casa mediante un resorte de acero. La pesa se eleva (dirección positiva) desde su posición de equilibrio y se suelta. El movimiento resultante está modelado por $y = Ae^{-kt} \cos bt = \frac{1}{5}e^{-t/10} \cos 6t$, donde y es la distancia en pies desde el equilibrio y t es el tiempo en segundos. La gráfica de la función se ilustra en la figura. Para cada uno de los incisos siguientes, describa el cambio en el sistema sin graficar la función resultante.

(a) A se cambia de $\frac{1}{5}$ a $\frac{1}{3}$.

(b) k se cambia de $\frac{1}{10}$ a $\frac{1}{3}$.

(c) b se cambia de 6 a 9.



4 EXAMEN DEL CAPÍTULO

En www.CalcChat.com vea las soluciones a los ejercicios impares

Tome este examen como lo haría en clase. Cuando termine, verifique su trabajo contra las respuestas dadas al final del libro.

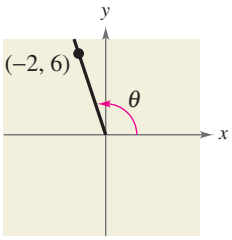


FIGURA PARA LA PREGUNTA 4

1. Considere un ángulo que mide $\frac{5\pi}{4}$ radianes.

(a) Trace el ángulo en posición normal.

(b) Determine dos ángulos coterminales (uno positivo y uno negativo).

(c) Convierta el ángulo a medida en grados.

2. Un camión se está moviendo a razón de 105 kilómetros por hora, y el diámetro de sus ruedas es de 1 metro. Encuentre la velocidad angular de las ruedas en radianes por minuto.

3. Un aspersor riega agua en un prado hasta una distancia de 25 pies y gira todo un ángulo de 130°. Encuentre el área del prado regada por el aspersor.

4. Encuentre los valores exactos de las seis funciones trigonométricas del ángulo θ que se muestra en la figura.

5. Dado que $\tan\theta = \frac{3}{2}$, encuentre las otras cinco funciones trigonométricas de θ.

6. Determine el ángulo de referencia θ' para el ángulo $\theta = 205°$ y trace θ y θ' en posición normal.

7. Determine el cuadrante en el que está θ si $\sec\theta < 0$ y $\tan\theta > 0$.

8. Encuentre dos valores exactos de θ en grados ($0 \le \theta < 360°$) si $\cos\theta = -\sqrt{3}/2$. (No use calculadora.)

9. Use una calculadora para aproximar dos valores de θ en radianes ($0 \le \theta < 2\pi$) si $\csc\theta = 1.030$. Redondee los resultados a dos lugares decimales.

En los Ejercicios 10 y 11, encuentre las restantes cinco funciones trigonométricas de θ que satisfagan las condiciones.

10. $\cos\theta = \frac{3}{5}$, $\tan\theta < 0$

11. $\sec\theta = -\frac{29}{20}$, $\operatorname{sen}\theta > 0$

En los Ejercicios 12 y 13, trace la gráfica de la función. (Incluya dos periodos.)

12. $g(x) = -2\operatorname{sen}\left(x - \frac{\pi}{4}\right)$

13. $f(\alpha) = \frac{1}{2}\tan 2\alpha$

En los Ejercicios 14 y 15, use una calculadora de gráficas para graficar la función. Si la función es periódica, encuentre su periodo.

14. $y = \operatorname{sen} 2\pi x + 2\cos\pi x$

15. $y = 6e^{-0.12t}\cos(0.25t)$, $0 \le t \le 32$

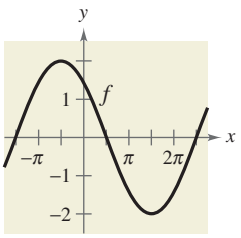


FIGURA PARA LA PREGUNTA 16

16. Encuentre a, b y c para la función $f(x) = a\operatorname{sen}(bx + c)$ tal que la gráfica de f sea igual que la de la figura.

17. Encuentre el valor exacto de $\cot\left(\operatorname{arcsen}\frac{3}{8}\right)$ sin ayuda de calculadora.

18. Grafique la función $f(x) = 2\operatorname{arcsen}\left(\frac{1}{2}x\right)$.

19. Un avión está a 90 millas al Sur y a 110 millas al Este del aeropuerto de Heathrow, en Londres. ¿Qué rumbo debe tomar para volar directamente al aeropuerto?

20. Escriba la ecuación para el movimiento armónico simple de una pelota en un resorte que empieza en su punto más bajo de 6 pulgadas abajo del equilibrio, rebota a su máxima altura de 6 pulgadas arriba del equilibrio y regresa a su punto más bajo en un total de 2 segundos.

DEMOSTRACIONES EN MATEMÁTICAS

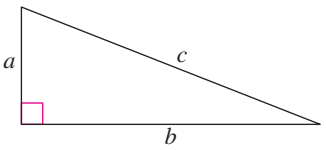
Teorema de Pitágoras

El de Pitágoras es uno de los teoremas más famosos en matemáticas. Más de 100 demostraciones existen hoy día. James A. Garfield, vigésimo presidente de Estados Unidos, creó una demostración del teorema de Pitágoras en 1876. Su demostración, que se muestra enseguida, implicaba el hecho de que un trapecio se puede formar a partir de dos triángulos rectángulos congruentes y un triángulo rectángulo isósceles.

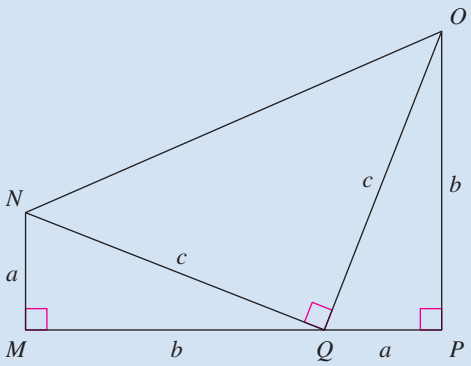
Teorema de Pitágoras

En un triángulo rectángulo, la suma de los cuadrados de las longitudes de los catetos es igual al cuadrado de la longitud de la hipotenusa, donde a y b son los catetos y c es la hipotenusa.

$$a^2 + b^2 = c^2$$



Demostración



$$\text{Área del trapecio } MNOP = \text{Área de } \triangle MNQ + \text{Área de } \triangle PQO + \text{Área de } \triangle NOQ$$

$$\frac{1}{2}(a + b)(a + b) = \frac{1}{2}ab + \frac{1}{2}ab + \frac{1}{2}c^2$$

$$\frac{1}{2}(a + b)(a + b) = ab + \frac{1}{2}c^2$$

$$(a + b)(a + b) = 2ab + c^2$$

$$a^2 + 2ab + b^2 = 2ab + c^2$$

$$a^2 + b^2 = c^2$$

RESOLUCIÓN DE PROBLEMAS

Este conjunto de ejercicios, difíciles y que invitan a meditar, amplía y explora más a fondo los conceptos aprendidos en este capítulo.

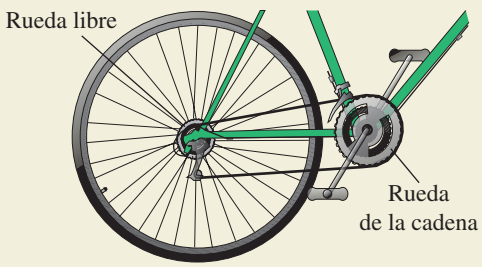
1. El restaurante que está en lo alto de la Space Needle en Seattle, Washington, es circular y tiene un radio de 47.25 pies. La parte que es del comedor del restaurante gira y hace alrededor de un cuarto de revolución cada 48 minutos. Un grupo de comensales departía en sus lugares en el borde del restaurante giratorio a las 6:45 P.M. y a las 8:57 P.M.

(a) Encuentre el ángulo que giró el grupo de comensales.

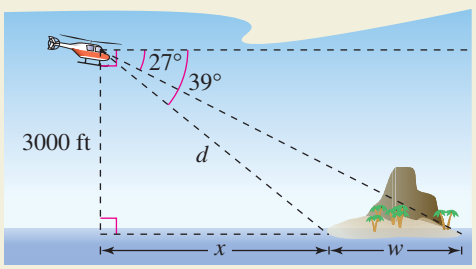
(b) Encuentre la distancia que el grupo se desplazó durante la comida.

2. La relación de engranes de una bicicleta es el número de veces que la rueda libre gira por cada vuelta que gira el plato o rueda de la cadena (vea la figura). La tabla muestra los números de dientes de la rueda libre y de la rueda de la cadena para los primeros cinco engranes de una bicicleta de turismo de 18 velocidades. La rueda de la cadena completa una rotación por cada engrane. Encuentre el ángulo que gira la rueda libre por cada engrane. Dé sus respuestas tanto en grados como en radianes.

Número de engrane	Número de dientes en la rueda libre	Número de dientes en la rueda de la cadena
1	32	24
2	26	24
3	22	24
4	32	40
5	19	24



3. Un topógrafo en un helicóptero está tratando de determinar el ancho de una isla, como se ve en la figura.



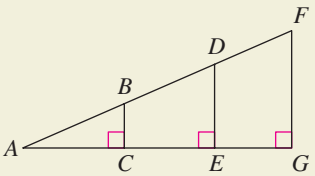
No a escala

(a) ¿Cuál es la distancia d más corta que el helicóptero tendría que volar para aterrizar en la isla?

(b) ¿Cuál es la distancia horizontal x que el helicóptero tendría que recorrer antes de estar directamente sobre el extremo más cercano de la isla?

(c) Encuentre el ancho w de la isla. Explique cómo obtuvo la respuesta.

4. Use la figura siguiente.



(a) Explique por qué $\triangle ABC$, $\triangle ADE$ y $\triangle AFG$ son triángulos semejantes.

(b) ¿Qué implica la semejanza acerca de las razones

$$\frac{BC}{AB}, \frac{DE}{AD} \text{ y } \frac{FG}{AF}?$$

(c) ¿El valor de sen A depende de cuál triángulo del inciso (a) se use para calcularlo? ¿El valor de sen A cambiaría si se encontrara usando un triángulo diferente, que fuera semejante a los tres triángulos dados?

(d) ¿Las conclusiones para el inciso (c) se aplican a las otras cinco funciones trigonométricas? Explique.

5. Use una calculadora de gráficas para graficar h, y use la gráfica para decidir si h es par, impar o ninguna de éstas.

(a) $h(x) = \cos^2 x$

(b) $h(x) = \text{sen}^2 x$

6. Si f es una función par y g es una función impar, use los resultados del Ejercicio 5 para hacer una conjetura acerca de h, donde

(a) $h(x) = [f(x)]^2$

(b) $h(x) = [g(x)]^2$.

7. El modelo para la altura h (en pies) de un carro de "rueda de la fortuna" es

$$h = 50 + 50 \text{ sen } 8\pi t$$

donde t es el tiempo (en minutos). (La rueda de la fortuna tiene un radio de 50 pies.) Este modelo da una altura de 50 pies cuando $t = 0$. Altere el modelo para que la altura del carro sea 1 pie cuando $t = 0$.

8. La presión P (en milímetros de mercurio) contra las paredes de los vasos sanguíneos de un paciente está modelada por

$$P = 100 - 20\cos\left(\frac{8\pi}{3}t\right)$$

donde t es el tiempo (en segundos).

(a) Use una calculadora de gráficas para graficar el modelo.

(b) ¿Cuál es el periodo del modelo? ¿Qué nos dice el periodo acerca de esta situación?

(c) ¿Cuál es la amplitud del modelo? ¿Qué nos dice acerca de esta situación?

(d) Si un ciclo de este modelo es equivalente a una pulsación cardiaca, ¿cuál es el pulso de este paciente?

(e) Si un médico desea que la frecuencia cardiaca de este paciente sea de 64 pulsaciones por minuto o menos, ¿cuál debe ser el periodo? ¿Cuál debe ser el coeficiente de t?

9. Una teoría popular trata de explicar los altibajos del diario dice cada uno de nosotros tiene tres ciclos, llamados biorritmos, que empiezan con el nacimiento. Estos tres ciclos pueden ser modelados por ondas senoidales.

$$\text{Físico (23 días): } P = \operatorname{sen}\frac{2\pi t}{23}, \quad t \geq 0$$

$$\text{Emocional (28 días): } E = \operatorname{sen}\frac{2\pi t}{28}, \quad t \geq 0$$

$$\text{Intelectual (33 días): } I = \operatorname{sen}\frac{2\pi t}{33}, \quad t \geq 0$$

donde t es el número de días desde el nacimiento. Considere una persona que nació el 20 de julio de 1988.

(a) Use una calculadora de gráficas para graficar los tres modelos en la misma pantalla para $7300 \leq t \leq 7380$.

(b) Describa los biorritmos de la persona durante el mes de septiembre de 2008.

(c) Calcule los tres niveles de energía de la persona el 22 de septiembre de 2008.

10. (a) Use una calculadora de gráficas para graficar las funciones dadas por

$$f(x) = 2\cos 2x + 3\operatorname{sen} 3x \quad \text{y}$$

$$g(x) = 2\cos 2x + 3\operatorname{sen} 4x.$$

(b) Use las gráficas del inciso (a) para hallar el periodo de cada función.

(c) Si α y β son enteros positivos, ¿la función dada por $h(x) = A\cos\alpha x + B\operatorname{sen}\beta x$ es periódica? Explique su razonamiento.

11. Dos funciones trigonométricas f y g tienen periodos de 2, y sus gráficas se intersecan en $x = 5.35$.

(a) Dé un valor positivo más pequeño y uno más grande de x en el que las funciones tienen el mismo valor.

(b) Determine un valor negativo de x en el que las gráficas se intersecan.

(c) ¿Es cierto que $f(13.35) = g(-4.65)$? Explique su razonamiento.

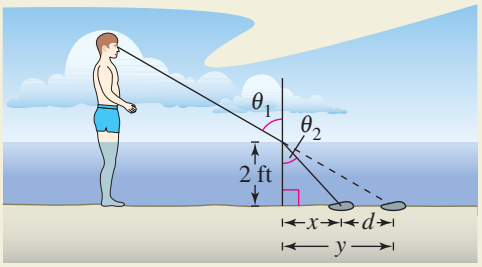
12. La función f es periódica, con periodo c. Por tanto, $f(t + c) = f(t)$. ¿Las siguientes son iguales? Explique.

(a) $f(t - 2c) = f(t)$

(b) $f\left(t + \frac{1}{2}c\right) = f\left(\frac{1}{2}t\right)$

(c) $f\left(\frac{1}{2}(t + c)\right) = f\left(\frac{1}{2}t\right)$

13. Si una persona está de pie en aguas poco profundas y ve un objeto bajo la superficie del agua, el objeto se verá más lejano de lo que en realidad está. Esto es porque cuando los rayos de luz pasan entre aire y agua, el agua refracta los rayos, es decir, los dobla. El índice de refracción del agua es 1.333. Ésta es la razón del seno de θ_1 y el seno de θ_2 (vea la figura).



(a) Una persona está de pie en agua que tiene 2 pies de profundidad y está mirando una piedra a un ángulo $\theta_1 = 60°$ (medido desde la línea perpendicular a la superficie del agua). Encuentre θ_2.

(b) Encuentre las distancias x y y.

(c) Encuentre la distancia d entre donde está la piedra y donde parece que está.

(d) ¿Qué ocurre a d cuando la persona se acerca a la piedra? Explique su razonamiento.

14. En cálculo, se puede demostrar que la función arco tangente se puede aproximar con el polinomio

$$\arctan x \approx x - \frac{x^3}{3} + \frac{x^5}{5} - \frac{x^7}{7}$$

donde x está en radianes.

(a) Use una calculadora de gráficas para graficar la función arco tangente y su aproximación con polinomios en la misma pantalla. ¿Cómo se comparan las gráficas?

(b) Estudie el patrón en la aproximación con polinomios de la función arco tangente y calcule el siguiente término. A continuación repita el inciso (a). ¿Cómo cambia la precisión de la aproximación cuando se agregan términos?

5 Trigonometría analítica

5.1 Uso de identidades fundamentales
5.2 Comprobación de las identidades trigonométricas
5.3 Solución de ecuaciones trigonométricas
5.4 Fórmulas de suma y diferencia
5.5 Fórmulas de ángulos múltiples y de producto a suma

En matemáticas

Se usa trigonometría analítica para simplificar expresiones trigonométricas y resolver ecuaciones trigonométricas.

En la vida real

Se usa trigonometría analítica para modelar fenómenos de la vida real. Por ejemplo, cuando un avión vuela más rápido que el sonido, las ondas sonoras forman un cono detrás de él. Se pueden usar conceptos de trigonometría para describir el ángulo en el vértice del cono. (Vea ejercicio 137, página 415.)

Christopher Pasatier/Reuters/Landov

EN CARRERAS

Hay numerosas carreras que usan trigonometría analítica. A continuación se citan varias de ellas.

- Ingeniero mecánico
  Ejercicio 89, página 396
- Físico
  Ejercicio 90, página 403
- Entrenador atlético
  Ejercicio 135, página 415
- Terapeuta físico
  Ejercicio 8, página 425

5.1 Uso de identidades fundamentales

Lo que debe aprender

- Reconocer y escribir las identidades trigonométricas fundamentales.
- Usar las identidades trigonométricas fundamentales para evaluar funciones trigonométricas, simplificar expresiones trigonométricas y reescribir expresiones trigonométricas.

Por qué debe aprenderlo

Se pueden usar identidades trigonométricas fundamentales para simplificar expresiones trigonométricas. Por ejemplo, en el Ejercicio 123 de la página 379 se pueden usar identidades trigonométricas para simplificar una expresión para el coeficiente de fricción.

Introducción

En el capítulo 4 estudiamos las definiciones, propiedades, gráficas y aplicaciones básicas de las funciones trigonométricas. En este capítulo, aprenderemos a usar las identidades fundamentales para hacer lo siguiente.

1. Evaluar funciones trigonométricas.
2. Simplificar expresiones trigonométricas.
3. Desarrollar identidades trigonométricas adicionales.
4. Resolver ecuaciones trigonométricas.

Identidades trigonométricas fundamentales

Identidades recíprocas

$$\operatorname{sen} u = \frac{1}{\csc u} \qquad \cos u = \frac{1}{\sec u} \qquad \tan u = \frac{1}{\cot u}$$

$$\csc u = \frac{1}{\operatorname{sen} u} \qquad \sec u = \frac{1}{\cos u} \qquad \cot u = \frac{1}{\tan u}$$

Identidades cociente

$$\tan u = \frac{\operatorname{sen} u}{\cos u} \qquad \cot u = \frac{\cos u}{\operatorname{sen} u}$$

Identidades pitagóricas

$$\operatorname{sen}^2 u + \cos^2 u = 1 \qquad 1 + \tan^2 u = \sec^2 u \qquad 1 + \cot^2 u = \csc^2 u$$

Identidades de cofunción

$$\operatorname{sen}\left(\frac{\pi}{2} - u\right) = \cos u \qquad \cos\left(\frac{\pi}{2} - u\right) = \operatorname{sen} u$$

$$\tan\left(\frac{\pi}{2} - u\right) = \cot u \qquad \cot\left(\frac{\pi}{2} - u\right) = \tan u$$

$$\sec\left(\frac{\pi}{2} - u\right) = \csc u \qquad \csc\left(\frac{\pi}{2} - u\right) = \sec u$$

Identidades par/impar

$$\operatorname{sen}(-u) = -\operatorname{sen} u \qquad \cos(-u) = \cos u \qquad \tan(-u) = -\tan u$$

$$\csc(-u) = -\csc u \qquad \sec(-u) = \sec u \qquad \cot(-u) = -\cot u$$

Tip de estudio

Usted debe aprender bien las identidades trigonométricas fundamentales porque se usan con frecuencia en trigonometría y también aparecerán más adelante en cálculo. Observe que u puede ser un ángulo, un número real o una variable

Las identidades pitagóricas a veces se usan en forma de radical como

$$\operatorname{sen} u = \pm\sqrt{1 - \cos^2 u}$$

o

$$\tan u = \pm\sqrt{\sec^2 u - 1}$$

donde el signo depende de la elección de u.

Uso de identidades fundamentales

Una aplicación común de identidades trigonométricas es usar valores dados de funciones trigonométricas para evaluar otras funciones trigonométricas.

Ejemplo 1 Usar identidades para evaluar una función

Use los valores $\sec u = -\frac{3}{2}$ y $\tan u > 0$ para hallar los valores de las seis funciones trigonométricas.

Solución

Usando una identidad recíproca se tiene

$$\cos u = \frac{1}{\sec u} = \frac{1}{-3/2} = -\frac{2}{3}.$$

Usando una identidad pitagórica se tiene

$$\begin{aligned} \operatorname{sen}^2 u &= 1 - \cos^2 u && \text{Identidad pitagórica} \\ &= 1 - \left(-\frac{2}{3}\right)^2 && \text{Sustituir } -\tfrac{2}{3} \text{ por } \cos u. \\ &= 1 - \frac{4}{9} = \frac{5}{9}. && \text{Simplificar.} \end{aligned}$$

Como $\sec u < 0$ y $\tan u > 0$, se deduce que u se encuentra en el tercer cuadrante. Además, como $\operatorname{sen} u$ es negativo cuando u está en el tercer cuadrante, se puede escoger la raíz negativa y obtener $\operatorname{sen} u = -\sqrt{5}/3$. Ahora, conociendo los valores del seno y coseno, se pueden hallar los valores de las seis funciones trigonométricas.

$$\operatorname{sen} u = -\frac{\sqrt{5}}{3} \qquad \csc u = \frac{1}{\operatorname{sen} u} = -\frac{3}{\sqrt{5}} = -\frac{3\sqrt{5}}{5}$$

$$\cos u = -\frac{2}{3} \qquad \sec u = \frac{1}{\cos u} = -\frac{3}{2}$$

$$\tan u = \frac{\operatorname{sen} u}{\cos u} = \frac{-\sqrt{5}/3}{-2/3} = \frac{\sqrt{5}}{2} \qquad \cot u = \frac{1}{\tan u} = \frac{2}{\sqrt{5}} = \frac{2\sqrt{5}}{5}$$

PUNTO *de repaso* Ahora trate de hacer el Ejercicio 21.

Ejemplo 2 Simplificar una expresión trigonométrica

Simplifique $\operatorname{sen} x \cos^2 x - \operatorname{sen} x$.

Solución

Primero factorice un factor monomio común y luego use una identidad fundamental.

$$\begin{aligned} \operatorname{sen} x \cos^2 x - \operatorname{sen} x &= \operatorname{sen} x(\cos^2 x - 1) && \text{Factorizar un factor monomio común.} \\ &= -\operatorname{sen} x(1 - \cos^2 x) && \text{Factorizar } -1. \\ &= -\operatorname{sen} x(\operatorname{sen}^2 x) && \text{Identidad pitagórica} \\ &= -\operatorname{sen}^3 x && \text{Multiplicar.} \end{aligned}$$

PUNTO *de repaso* Ahora trate de hacer el Ejercicio 59.

TECNOLOGÍA

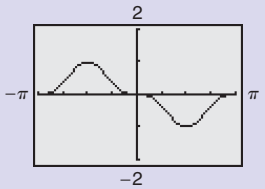
Se puede usar calculadora de gráficas para verificar el resultado del ejemplo 2. Para hacer esto, grafique

$$y_1 = \operatorname{sen} x \cos^2 x - \operatorname{sen} x$$

y

$$y_2 = -\operatorname{sen}^3 x$$

en la misma pantalla, como se ve a continuación. Debido a que el Ejemplo 2 muestra la equivalencia algebraicamente y las dos gráficas parecen coincidir, se puede concluir que las expresiones son equivalentes.



Cuando factorice expresiones trigonométricas, es útil hallar una forma especial para factorizar polinomios que se ajuste a la expresión, como se ve en el Ejemplo 3.

Ejemplo 3 Factorizar expresiones trigonométricas

Factorice cada una de las expresiones siguientes.

a. $\sec^2\theta - 1$ **b.** $4\tan^2\theta + \tan\theta - 3$

Ayuda de álgebra

En el ejemplo 3, el lector debe tener aptitud para factorizar la diferencia de dos cuadrados y factorizar un trinomio. En el Apéndice A.3 puede repasar las técnicas para factorizar.

Solución

a. Esta expresión tiene la forma $u^2 - v^2$, que es la diferencia de dos cuadrados. Se factoriza como

$$\sec^2\theta - 1 = (\sec\theta - 1)(\sec\theta + 1).$$

b. Esta expresión tiene la forma de polinomio $ax^2 + bx + c$, y se factoriza como

$$4\tan^2\theta + \tan\theta - 3 = (4\tan\theta - 3)(\tan\theta + 1).$$

PUNTO *de repaso* Ahora trate de hacer el Ejercicio 61.

En ocasiones, la operación de factorizar o de simplificar puede hacerse mejor si primero se reescribe la expresión en términos de sólo *una* función trigonométrica o en términos *sólo de seno y coseno*. Estas estrategias se muestran en los Ejemplos 4 y 5, respectivamente.

Ejemplo 4 Factorizar una expresión trigonométrica

Factorice $\csc^2 x - \cot x - 3$.

Solución

Use la identidad $\csc^2 x = 1 + \cot^2 x$ para reescribir la expresión en términos de la cotangente.

$$\begin{aligned}
\csc^2 x - \cot x - 3 &= (1 + \cot^2 x) - \cot x - 3 && \text{Identidad pitagórica}\\
&= \cot^2 x - \cot x - 2 && \text{Combinar términos semejantes.}\\
&= (\cot x - 2)(\cot x + 1) && \text{Factorizar.}
\end{aligned}$$

PUNTO *de repaso* Ahora trate de hacer el Ejercicio 65.

Ejemplo 5 Simplificar una expresión trigonométrica

Simplifique $\operatorname{sen} t + \cot t \cos t$.

Solución

Empiece por reescribir $\cot t$ en términos de seno y coseno.

$$\begin{aligned}
\operatorname{sen} t + \cot t \cos t &= \operatorname{sen} t + \left(\frac{\cos t}{\operatorname{sen} t}\right)\cos t && \text{Identidad cociente}\\
&= \frac{\operatorname{sen}^2 t + \cos^2 t}{\operatorname{sen} t} && \text{Sumar fracciones.}\\
&= \frac{1}{\operatorname{sen} t} && \text{Identidad pitagórica}\\
&= \csc t && \text{Identidad recíproca}
\end{aligned}$$

Tip de estudio

Recuerde que cuando sume expresiones racionales, primero debe hallar el mínimo común denominador (MCD). En el Ejemplo 5, el MCD es $\operatorname{sen} t$.

PUNTO *de repaso* Ahora trate de hacer el Ejercicio 71.

Ejemplo 6 Sumar expresiones trigonométricas

Sume y simplifique.

$$\frac{\operatorname{sen}\theta}{1+\cos\theta}+\frac{\cos\theta}{\operatorname{sen}\theta}$$

Solución

$$\frac{\operatorname{sen}\theta}{1+\cos\theta}+\frac{\cos\theta}{\operatorname{sen}\theta}=\frac{(\operatorname{sen}\theta)(\operatorname{sen}\theta)+(\cos\theta)(1+\cos\theta)}{(1+\cos\theta)(\operatorname{sen}\theta)}$$

$$=\frac{\operatorname{sen}^2\theta+\cos^2\theta+\cos\theta}{(1+\cos\theta)(\operatorname{sen}\theta)}$$ Multiplicar.

$$=\frac{\cancel{1+\cos\theta}}{\cancel{(1+\cos\theta)}(\operatorname{sen}\theta)}$$ Identidad pitagórica: $\operatorname{sen}^2\theta+\cos^2\theta=1$

$$=\frac{1}{\operatorname{sen}\theta}$$ Dividir el factor común.

$$=\csc\theta$$ Identidad recíproca

PUNTO *de repaso* Ahora trate de hacer el Ejercicio 75.

Los siguientes dos ejemplos comprenden técnicas para reescribir expresiones en formas que se usan en cálculo.

Ejemplo 7 Reescribir una expresión trigonométrica

Reescriba $\dfrac{1}{1+\operatorname{sen}x}$ de modo que *no* esté en forma fraccionaria.

Solución

De la identidad pitagórica $\cos^2 x=1-\operatorname{sen}^2 x=(1-\operatorname{sen}x)(1+\operatorname{sen}x)$, se puede ver que multiplicar numerador y denominador por $(1-\operatorname{sen}x)$ producirá un denominador monomio.

$$\frac{1}{1+\operatorname{sen}x}=\frac{1}{1+\operatorname{sen}x}\cdot\frac{1-\operatorname{sen}x}{1-\operatorname{sen}x}$$ Multiplicar numerador y denominador por $(1-\operatorname{sen}x)$.

$$=\frac{1-\operatorname{sen}x}{1-\operatorname{sen}^2 x}$$ Multiplicar.

$$=\frac{1-\operatorname{sen}x}{\cos^2 x}$$ Identidad pitagórica

$$=\frac{1}{\cos^2 x}-\frac{\operatorname{sen}x}{\cos^2 x}$$ Escribir como fracciones separadas.

$$=\frac{1}{\cos^2 x}-\frac{\operatorname{sen}x}{\cos x}\cdot\frac{1}{\cos x}$$ Producto de fracciones

$$=\sec^2 x-\tan x\sec x$$ Identidades recíprocas y cociente

PUNTO *de repaso* Ahora trate de hacer el ejercicio 81.

Ejemplo 8 Sustitución trigonométrica

Use la sustitución $x = 2 \tan \theta,\ 0 < \theta < \pi/2$, para reescribir

$$\sqrt{4 + x^2}$$

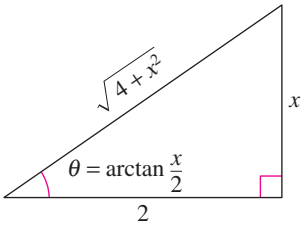
como una función trigonométrica de θ.

Solución

Empiece por hacer $x = 2 \tan \theta$. Entonces, puede obtener

$$\begin{aligned}
\sqrt{4 + x^2} &= \sqrt{4 + (2 \tan \theta)^2} && \text{Sustituir } 2 \tan \theta \text{ por } x \\
&= \sqrt{4 + 4 \tan^2 \theta} && \text{Regla de exponentes} \\
&= \sqrt{4(1 + \tan^2 \theta)} && \text{Factorizar.} \\
&= \sqrt{4 \sec^2 \theta} && \text{Identidad pitagórica} \\
&= 2 \sec \theta. && \sec \theta > 0 \text{ para } 0 < \theta < \pi/2
\end{aligned}$$

PUNTO *de repaso* Ahora trate de hacer el Ejercicio 93.



Ángulo cuya tangente es $\pi/2$.
FIGURA 5.1

La Figura 5.1 muestra la ilustración de triángulo rectángulo de la sustitución trigonométrica $x = 2 \tan \theta$ del Ejemplo 8. Se puede usar este triángulo para verificar la solución. Para $0 < \theta < \pi/2$, se tiene

$$\text{opu} = x, \quad \text{ady} = 2 \quad \text{e} \quad \text{hip} = \sqrt{4 + x^2}.$$

Con estas expresiones, se puede escribir lo siguiente.

$$\sec \theta = \frac{\text{hip}}{\text{ady}}$$

$$\sec \theta = \frac{\sqrt{4 + x^2}}{2}$$

$$2 \sec \theta = \sqrt{4 + x^2}$$

Por tanto, la solución es correcta.

Ejemplo 9 Reescribir una expresión logarítmica

Reescriba $\ln|\csc \theta| + \ln|\tan \theta|$ como un solo logaritmo y simplifique el resultado.

Solución

$$\begin{aligned}
\ln|\csc \theta| + \ln|\tan \theta| &= \ln|\csc \theta \tan \theta| && \text{Propiedad del producto de logaritmos} \\
&= \ln\left|\frac{1}{\operatorname{sen} \theta} \cdot \frac{\operatorname{sen} \theta}{\cos \theta}\right| && \text{Identidades recíprocas y cociente} \\
&= \ln\left|\frac{1}{\cos \theta}\right| && \text{Simplificar.} \\
&= \ln|\sec \theta| && \text{Identidad recíproca}
\end{aligned}$$

PUNTO *de repaso* Ahora trate de hacer El ejercicio 113.

Ayuda de álgebra

Recuerde que para números reales positivos u y v,

$$\ln u + \ln v = \ln(uv).$$

En la sección 3.3 se pueden repasar las propiedades de los logaritmos.

5.1 EJERCICIOS

En www.CalcChat.com vea las soluciones a los ejercicios impares.

VOCABULARIO: Llene los espacios en blanco para completar la identidad trigonométrica.

1. $\dfrac{\operatorname{sen} u}{\cos u} =$ _____
2. $\dfrac{1}{\csc u} =$ _____
3. $\dfrac{1}{\tan u} =$ _____
4. $\dfrac{1}{\cos u} =$ _____
5. $1 +$ _____ $= \csc^2 u$
6. $1 + \tan^2 u =$ _____
7. $\operatorname{sen}\left(\dfrac{\pi}{2} - u\right) =$ _____
8. $\sec\left(\dfrac{\pi}{2} - u\right) =$ _____
9. $\cos(-u) =$ _____
10. $\tan(-u) =$ _____

HABILIDADES Y APLICACIONES

En los Ejercicios 11-24, use los valores dados para evaluar (si es posible) las seis funciones trigonométricas.

11. $\operatorname{sen} x = \dfrac{1}{2}, \quad \cos x = \dfrac{\sqrt{3}}{2}$
12. $\tan x = \dfrac{\sqrt{3}}{3}, \quad \cos x = -\dfrac{\sqrt{3}}{2}$
13. $\sec \theta = \sqrt{2}, \quad \operatorname{sen} \theta = -\dfrac{\sqrt{2}}{2}$
14. $\csc \theta = \frac{25}{7}, \quad \tan \theta = \frac{7}{24}$
15. $\tan x = \frac{8}{15}, \quad \sec x = -\frac{17}{15}$
16. $\cot \phi = -3, \quad \operatorname{sen} \phi = \dfrac{\sqrt{10}}{10}$
17. $\sec \phi = \dfrac{3}{2}, \quad \csc \phi = -\dfrac{3\sqrt{5}}{5}$
18. $\cos\left(\dfrac{\pi}{2} - x\right) = \dfrac{3}{5}, \quad \cos x = \dfrac{4}{5}$
19. $\operatorname{sen}(-x) = -\dfrac{1}{3}, \quad \tan x = -\dfrac{\sqrt{2}}{4}$
20. $\sec x = 4, \quad \operatorname{sen} x > 0$
21. $\tan \theta = 2, \quad \operatorname{sen} \theta < 0$
22. $\csc \theta = -5, \quad \cos \theta < 0$
23. $\operatorname{sen} \theta = -1, \quad \cot \theta = 0$
24. $\tan \theta$ no está definida, $\quad \operatorname{sen} \theta > 0$

En los Ejercicios 25-30, relacione la expresión trigonométrica con una de las siguientes.

(a) $\sec x$ (b) -1 (c) $\cot x$
(d) 1 (e) $-\tan x$ (f) $\operatorname{sen} x$

25. $\sec x \cos x$
26. $\tan x \csc x$
27. $\cot^2 x - \csc^2 x$
28. $(1 - \cos^2 x)(\csc x)$
29. $\dfrac{\operatorname{sen}(-x)}{\cos(-x)}$
30. $\dfrac{\operatorname{sen}[(\pi/2) - x]}{\cos[(\pi/2) - x]}$

En los Ejercicios 31-36, relacione la expresión trigonométrica con una de las siguientes.

(a) $\csc x$ (b) $\tan x$ (c) $\operatorname{sen}^2 x$
(d) $\operatorname{sen} x \tan x$ (e) $\sec^2 x$ (f) $\sec^2 x + \tan^2 x$

31. $\operatorname{sen} x \sec x$
32. $\cos^2 x(\sec^2 x - 1)$
33. $\sec^4 x - \tan^4 x$
34. $\cot x \sec x$
35. $\dfrac{\sec^2 x - 1}{\operatorname{sen}^2 x}$
36. $\dfrac{\cos^2[(\pi/2) - x]}{\cos x}$

En los Ejercicios 37-58, use las identidades fundamentales para simplificar la expresión. Hay más de una forma correcta de cada respuesta.

37. $\cot \theta \sec \theta$
38. $\cos \beta \tan \beta$
39. $\tan(-x) \cos x$
40. $\operatorname{sen} x \cot(-x)$
41. $\operatorname{sen} \phi(\csc \phi - \operatorname{sen} \phi)$
42. $\sec^2 x(1 - \operatorname{sen}^2 x)$
43. $\dfrac{\cot x}{\csc x}$
44. $\dfrac{\csc \theta}{\sec \theta}$
45. $\dfrac{1 - \operatorname{sen}^2 x}{\csc^2 x - 1}$
46. $\dfrac{1}{\tan^2 x + 1}$
47. $\dfrac{\tan \theta \cot \theta}{\sec \theta}$
48. $\dfrac{\operatorname{sen} \theta \csc \theta}{\tan \theta}$
49. $\sec \alpha \cdot \dfrac{\operatorname{sen} \alpha}{\tan \alpha}$
50. $\dfrac{\tan^2 \theta}{\sec^2 \theta}$
51. $\cos\left(\dfrac{\pi}{2} - x\right) \sec x$
52. $\cot\left(\dfrac{\pi}{2} - x\right) \cos x$
53. $\dfrac{\cos^2 y}{1 - \operatorname{sen} y}$
54. $\cos t(1 + \tan^2 t)$
55. $\operatorname{sen} \beta \tan \beta + \cos \beta$
56. $\csc \phi \tan \phi + \sec \phi$
57. $\cot u \operatorname{sen} u + \tan u \cos u$
58. $\operatorname{sen} \theta \sec \theta + \cos \theta \csc \theta$

En los Ejercicios 59-70, factorice la expresión y use las identidades fundamentales para simplificar. Hay más de una forma correcta de cada respuesta.

59. $\tan^2 x - \tan^2 x \operatorname{sen}^2 x$

60. $\operatorname{sen}^2 x \csc^2 x - \operatorname{sen}^2 x$

61. $\operatorname{sen}^2 x \sec^2 x - \operatorname{sen}^2 x$

62. $\cos^2 x + \cos^2 x \tan^2 x$

63. $\dfrac{\sec^2 x - 1}{\sec x - 1}$

64. $\dfrac{\cos^2 x - 4}{\cos x - 2}$

65. $\tan^4 x + 2\tan^2 x + 1$

66. $1 - 2\cos^2 x + \cos^4 x$

67. $\operatorname{sen}^4 x - \cos^4 x$

68. $\sec^4 x - \tan^4 x$

69. $\csc^3 x - \csc^2 x - \csc x + 1$

70. $\sec^3 x - \sec^2 x - \sec x + 1$

En los Ejercicios 71-74, realice la multiplicación y use las identidades fundamentales para simplificar. Hay más de una forma correcta de cada respuesta.

71. $(\operatorname{sen} x + \cos x)^2$

72. $(\cot x + \csc x)(\cot x - \csc x)$

73. $(2\csc x + 2)(2\csc x - 2)$

74. $(3 - 3\operatorname{sen} x)(3 + 3\operatorname{sen} x)$

En los Ejercicios 75-80, realice la suma o resta y use las identidades fundamentales para simplificar. Hay más de una forma correcta de cada respuesta.

75. $\dfrac{1}{1+\cos x} + \dfrac{1}{1-\cos x}$

76. $\dfrac{1}{\sec x + 1} - \dfrac{1}{\sec x - 1}$

77. $\dfrac{\cos x}{1+\operatorname{sen} x} + \dfrac{1+\operatorname{sen} x}{\cos x}$

78. $\dfrac{\tan x}{1+\sec x} + \dfrac{1+\sec x}{\tan x}$

79. $\tan x + \dfrac{\cos x}{1+\operatorname{sen} x}$

80. $\tan x - \dfrac{\sec^2 x}{\tan x}$

En los ejercicios 81-84, reescriba la expresión de modo que ya no esté en forma fraccionaria. Hay más de una forma correcta de cada respuesta.

81. $\dfrac{\operatorname{sen}^2 y}{1-\cos y}$

82. $\dfrac{5}{\tan x + \sec x}$

83. $\dfrac{3}{\sec x - \tan x}$

84. $\dfrac{\tan^2 x}{\csc x + 1}$

ANÁLISIS NUMÉRICO Y GRÁFICO En los Ejercicios 85-88, use una calculadora de gráficas para completar la tabla y grafique las funciones. Haga una conjetura acerca de y_1 y y_2.

x	0.2	0.4	0.6	0.8	1.0	1.2	1.4
y_1							
y_2							

85. $y_1 = \cos\left(\dfrac{\pi}{2} - x\right), \quad y_2 = \operatorname{sen} x$

86. $y_1 = \sec x - \cos x, \quad y_2 = \operatorname{sen} x \tan x$

87. $y_1 = \dfrac{\cos x}{1 - \operatorname{sen} x}, \quad y_2 = \dfrac{1 + \operatorname{sen} x}{\cos x}$

88. $y_1 = \sec^4 x - \sec^2 x, \quad y_2 = \tan^2 x + \tan^4 x$

En los Ejercicios 89-92, use una calculadora de gráficas para determinar cuál de las seis funciones trigonométricas es igual a la expresión. Verifique algebraicamente su respuesta.

89. $\cos x \cot x + \operatorname{sen} x$

90. $\sec x \csc x - \tan x$

91. $\dfrac{1}{\operatorname{sen} x}\left(\dfrac{1}{\cos x} - \cos x\right)$

92. $\dfrac{1}{2}\left(\dfrac{1+\operatorname{sen}\theta}{\cos\theta} + \dfrac{\cos\theta}{1+\operatorname{sen}\theta}\right)$

En los Ejercicios 93-104, use la sustitución trigonométrica para escribir la expresión algebraica como función trigonométrica de θ, donde $0 < \theta < \pi/2$.

93. $\sqrt{9 - x^2}, \quad x = 3\cos\theta$

94. $\sqrt{64 - 16x^2}, \quad x = 2\cos\theta$

95. $\sqrt{16 - x^2}, \quad x = 4\operatorname{sen}\theta$

96. $\sqrt{49 - x^2}, \quad x = 7\operatorname{sen}\theta$

97. $\sqrt{x^2 - 9}, \quad x = 3\sec\theta$

98. $\sqrt{x^2 - 4}, \quad x = 2\sec\theta$

99. $\sqrt{x^2 + 25}, \quad x = 5\tan\theta$

100. $\sqrt{x^2 + 100}, \quad x = 10\tan\theta$

101. $\sqrt{4x^2 + 9}, \quad 2x = 3\tan\theta$

102. $\sqrt{9x^2 + 25}, \quad 3x = 5\tan\theta$

103. $\sqrt{2 - x^2}, \quad x = \sqrt{2}\operatorname{sen}\theta$

104. $\sqrt{10 - x^2}, \quad x = \sqrt{10}\operatorname{sen}\theta$

En los Ejercicios 105-108, use la sustitución trigonométrica para escribir la ecuación algebraica como una ecuación trigonométrica de θ, donde $-\pi/2 < \theta < \pi/2$. A continuación encuentre sen θ y cos θ.

105. $3 = \sqrt{9 - x^2}, \quad x = 3\operatorname{sen}\theta$

106. $3 = \sqrt{36 - x^2}, \quad x = 6\operatorname{sen}\theta$

107. $2\sqrt{2} = \sqrt{16 - 4x^2}, \quad x = 2\cos\theta$

108. $-5\sqrt{3} = \sqrt{100 - x^2}, \quad x = 10\cos\theta$

En los Ejercicios 109-112, use una calculadora de gráficas para despejar θ, donde $0 \le \theta < 2\pi$.

109. $\operatorname{sen}\theta = \sqrt{1 - \cos^2\theta}$

110. $\cos\theta = -\sqrt{1 - \operatorname{sen}^2\theta}$

111. $\sec\theta = \sqrt{1 + \tan^2\theta}$

112. $\csc\theta = \sqrt{1 + \cot^2\theta}$

En los Ejercicios 113-118, reescriba la expresión como un solo logaritmo y simplifique el resultado.

113. $\ln|\cos x| - \ln|\operatorname{sen} x|$ **114.** $\ln|\sec x| + \ln|\operatorname{sen} x|$

115. $\ln|\operatorname{sen} x| + \ln|\cot x|$ **116.** $\ln|\tan x| + \ln|\csc x|$

117. $\ln|\cot t| + \ln(1 + \tan^2 t)$

118. $\ln(\cos^2 t) + \ln(1 + \tan^2 t)$

En los Ejercicios 119-122, use una calculadora para demostrar la identidad para cada valor de θ.

119. $\csc^2\theta - \cot^2\theta = 1$

(a) $\theta = 132°$ (b) $\theta = \dfrac{2\pi}{7}$

120. $\tan^2\theta + 1 = \sec^2\theta$

(a) $\theta = 346°$ (b) $\theta = 3.1$

121. $\cos\left(\dfrac{\pi}{2} - \theta\right) = \operatorname{sen}\theta$

(a) $\theta = 80°$ (b) $\theta = 0.8$

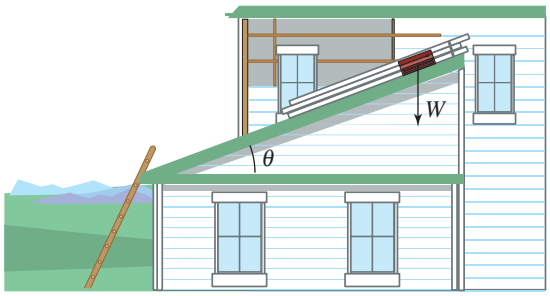
122. $\operatorname{sen}(-\theta) = -\operatorname{sen}\theta$

(a) $\theta = 250°$ (b) $\theta = \frac{1}{2}$

123. FRICCIÓN Las fuerzas que actúan sobre un objeto que pesa W unidades en un plano inclinado, colocado en un ángulo θ con la horizontal (vea figura), están modeladas por

$$\mu W\cos\theta = W\operatorname{sen}\theta$$

donde μ es el coeficiente de fricción. Despeje μ de la ecuación y simplifique el resultado.



124. RAZÓN DE CAMBIO La razón de cambio de la función $f(x) = -x + \tan x$ está dada por la expresión $-1 + \sec^2 x$. Demuestre que esta expresión también se puede escribir como $\tan^2 x$.

125. RAZÓN DE CAMBIO La razón de cambio de la función $f(x) = \sec x + \cos x$ está dada por la expresión $\sec x\tan x - \operatorname{sen} x$. Demuestre que esta expresión también se puede escribir como $\operatorname{sen} x\tan^2 x$.

126. RAZÓN DE CAMBIO La razón de cambio de la función $f(x) = -\csc x - \operatorname{sen} x$ está dada por la expresión $\csc x\cot x - \cos x$. Demuestre que esta expresión también se puede escribir como $\cos x\cot^2 x$.

EXPLORACIÓN

¿VERDADERO O FALSO? **En los Ejercicios 127 y 128, determine si la proposición es verdadera o falsa. Justifique su respuesta.**

127. Las identidades trigonométricas pares e impares son útiles para determinar si el valor de una función trigonométrica es positiva o negativa.

128. Se puede usar una identidad de cofunción para transformar una función tangente para que pueda estar representada por una función cosecante.

En los Ejercicios 129-132, llene los espacios en blanco. (*Nota:* la notación $x \to c^+$ indica que x se aproxima a c desde la derecha y $x \to c^-$ que x se aproxima a c desde la izquierda.)

129. Como $x \to \dfrac{\pi}{2}^-$, $\operatorname{sen} x \to$ ____ y $\csc x \to$ ____.

130. Como $x \to 0^+$, $\cos x \to$ ____ y $\sec x \to$ ____.

131. Como $x \to \dfrac{\pi}{2}^-$, $\tan x \to$ ____ y $\cot x \to$ ____.

132. Como $x \to \pi^+$, $\operatorname{sen} x \to$ ____ y $\csc x \to$ ____.

En los Ejercicios 133-138, determine si la ecuación es o no una identidad y dé una razón para su respuesta.

133. $\cos\theta = \sqrt{1 - \operatorname{sen}^2\theta}$ **134.** $\cot\theta = \sqrt{\csc^2\theta + 1}$

135. $\dfrac{(\operatorname{sen} k\theta)}{(\cos k\theta)} = \tan\theta$, k es una constante.

136. $\dfrac{1}{(5\cos\theta)} = 5\sec\theta$

137. $\operatorname{sen}\theta\csc\theta = 1$ **138.** $\csc^2\theta = 1$

139. Use la sustitución trigonométrica $u = a\operatorname{sen}\theta$, donde $-\pi/2 < \theta < \pi/2$ y $a > 0$, para simplificar la expresión $\sqrt{a^2 - u^2}$.

140. Use la sustitución trigonométrica $u = a\tan\theta$, donde $-\pi/2 < \theta < \pi/2$ y $a > 0$, para simplificar la expresión $\sqrt{a^2 + u^2}$.

141. Use la sustitución trigonométrica $u = a\sec\theta$, donde $0 < \theta < \pi/2$ y $a > 0$, para simplificar la expresión $\sqrt{u^2 - a^2}$.

142. TOQUE FINAL

(a) Use las definiciones de seno y coseno para derivar la identidad pitagórica $\operatorname{sen}^2\theta + \cos^2\theta = 1$.

(b) Use la identidad pitagórica $\operatorname{sen}^2\theta + \cos^2\theta = 1$ para deducir las otras identidades pitagóricas, $1 + \tan^2\theta = \sec^2\theta$ y $1 + \cot^2\theta = \csc^2\theta$. Discuta cómo recordar éstas y otras identidades fundamentales.

5.2 Comprobación de las identidades trigonométricas

Lo que debe aprender

- Comprobar las identidades trigonométricas

Por qué debe aprenderlo

Se pueden usar identidades trigonométricas para reescribir ecuaciones trigonométricas que modelan situaciones de la vida real. Por ejemplo, en el Ejercicio 70 en la página 386 se pueden usar identidades trigonométricas para simplificar la ecuación que modela la longitud de una sombra proyectada por un gnomon (aparato para indicar la hora).

Robert W. Ginn/PhotoEdit

Introducción

En esta sección estudiará técnicas para comprobar identidades trigonométricas. En la siguiente, aprenderá técnicas para resolver ecuaciones trigonométricas. La clave para comprobar identidades *y* resolver ecuaciones es la capacidad para usar las identidades fundamentales y las reglas del álgebra para reescribir expresiones trigonométricas.

Recuerde que una *ecuación condicional* es aquella que es verdadera sólo para algunos de los valores de su dominio. Por ejemplo, la ecuación condicional

$$\operatorname{sen} x = 0 \qquad \text{Ecuación condicional}$$

es verdadera sólo para $x = n\pi$, donde n es un entero. Cuando encuentre estos valores, estará usted *resolviendo* la ecuación.

Por otra parte, una ecuación que es verdadera para todos los valores reales del dominio de la variable es una *identidad*. Por ejemplo, la conocida ecuación

$$\operatorname{sen}^2 x = 1 - \cos^2 x \qquad \text{Identidad}$$

es verdadera para todos los números reales x. Por tanto, es una identidad.

Comprobación de identidades trigonométricas

Aun cuando hay similitudes, comprobar que una ecuación trigonométrica sea una identidad es muy diferente a resolver una ecuación. No hay un conjunto bien definido de reglas para la comprobación de identidades trigonométricas y el proceso se aprende mejor con práctica.

Guía para comprobar identidades trigonométricas

1. Trabaje con un lado (miembro) de la ecuación a la vez. Con frecuencia es mejor trabajar primero con el lado más complicado.
2. Busque oportunidades para factorizar una expresión, sumar fracciones, elevar al cuadrado un binomio o crear un denominador monomio.
3. Busque oportunidades para usar las identidades fundamentales. Observe cuáles funciones están en la expresión final que busque. Senos y cosenos se parean bien, al igual que secantes y tangentes, y cosecantes y cotangentes.
4. Si las guías anteriores no ayudan, trate de convertir todos los términos a senos y cosenos.
5. Siempre intente *algo*. Incluso caminos que llevan a callejones sin salida aportan ideas.

Comprobar identidades trigonométricas es un proceso útil si se necesita convertir una expresión trigonométrica en una forma que sea algebraicamente más útil. Cuando compruebe una identidad, usted no puede *suponer* que los dos lados (miembros) de la ecuación son iguales porque está tratando de verificar que *son* iguales. En consecuencia, cuando compruebe identidades no puede usar operaciones como sumar la misma cantidad a cada lado de la ecuación ni multiplicar en cruz.

Ejemplo 1 Comprobar una identidad trigonométrica

Compruebe la identidad $(\sec^2\theta - 1)/\sec^2\theta = \operatorname{sen}^2\theta$.

Solución

El lado (miembro) izquierdo es más complicado, de modo que empiece con él.

$$\frac{\sec^2\theta - 1}{\sec^2\theta} = \frac{(\tan^2\theta + 1) - 1}{\sec^2\theta} \quad \text{Identidad pitagórica}$$

$$= \frac{\tan^2\theta}{\sec^2\theta} \quad \text{Simplificar}$$

$$= \tan^2\theta(\cos^2\theta) \quad \text{Identidad recíproca}$$

$$= \frac{\operatorname{sen}^2\theta}{\cancel{(\cos^2\theta)}}\cancel{(\cos^2\theta)} \quad \text{Identidad cociente}$$

$$= \operatorname{sen}^2\theta \quad \text{Simplificar.}$$

Observe cómo se comprueba la identidad. Se empieza con el lado izquierdo de la ecuación (el lado más complicado) y se usan las identidades trigonométricas fundamentales para simplificarlo hasta obtener el lado derecho.

PUNTO *de repaso* Ahora trate de hacer el Ejercicio 15.

ATENCIÓN

Recuerde que una identidad sólo es verdadera para todos los valores reales del dominio de la variable. Por ejemplo, en el Ejemplo 1 la identidad no es verdadera cuando $\theta = \pi/2$ porque $\sec^2\theta$ no está definida cuando $\theta = \pi/2$.

Hay más de una forma de comprobar una identidad, como veremos a continuación respecto al ejemplo 1.

$$\frac{\sec^2\theta - 1}{\sec^2\theta} = \frac{\sec^2\theta}{\sec^2\theta} - \frac{1}{\sec^2\theta} \quad \text{Reescribir como la diferencia de fracciones.}$$

$$= 1 - \cos^2\theta \quad \text{Identidad recíproca}$$

$$= \operatorname{sen}^2\theta \quad \text{Identidad pitagórica.}$$

Ejemplo 2 Comprobar una identidad trigonométrica

Compruebe la identidad $2\sec^2\alpha = \dfrac{1}{1 - \operatorname{sen}\alpha} + \dfrac{1}{1 + \operatorname{sen}\alpha}$.

Solución algebraica

El lado derecho es más complicado, de modo que empiece con él.

$$\frac{1}{1 - \operatorname{sen}\alpha} + \frac{1}{1 + \operatorname{sen}\alpha} = \frac{1 + \operatorname{sen}\alpha + 1 - \operatorname{sen}\alpha}{(1 - \operatorname{sen}\alpha)(1 + \operatorname{sen}\alpha)} \quad \text{Sume fracciones.}$$

$$= \frac{2}{1 - \operatorname{sen}^2\alpha} \quad \text{Simplificar}$$

$$= \frac{2}{\cos^2\alpha} \quad \text{Identidad pitagórica}$$

$$= 2\sec^2\alpha \quad \text{Identidad recíproca}$$

PUNTO *de repaso* Ahora trate de hacer el Ejercicio 31.

Solución numérica

Use el comando *table* de una calculadora de gráficas puesta en modo *radian* para crear una tabla que muestre los valores de $y_1 = 2/\cos^2 x$ y $y_2 = 1/(1 - \operatorname{sen} x)$ para diferentes valores de x, como se ve en la Figura 5.2. En la tabla se ve que los valores son idénticos, por lo cual $2\sec^2 x = 1/(1 - \operatorname{sen} x) + 1/(1 + \operatorname{sen} x)$ parece ser una identidad.

X	Y1	Y2
-.5	2.5969	2.5969
-.25	2.1304	2.1304
0	2	2
.25	2.1304	2.1304
.5	2.5969	2.5969
.75	3.7357	3.7357
1	6.851	6.851

X=-.5

FIGURA 5.2

Ejemplo 3 Comprobar una identidad trigonométrica

Compruebe la identidad $(\tan^2 x + 1)(\cos^2 x - 1) = -\tan^2 x$.

Solución algebraica

Aplicando identidades antes de multiplicar se obtiene lo siguiente.

$$(\tan^2 x + 1)(\cos^2 x - 1) = (\sec^2 x)(-\operatorname{sen}^2 x)$$ Identidades pitagóricas

$$= -\frac{\operatorname{sen}^2 x}{\cos^2 x}$$ Identidad recíproca

$$= -\left(\frac{\operatorname{sen} x}{\cos x}\right)^2$$ Regla de exponentes

$$= -\tan^2 x$$ Identidad cociente

PUNTO *de repaso* Ahora trate de hacer el Ejercicio 53.

Solución algebraica

Use una calculadora de gráficas en modo *radian* para graficar el lado izquierdo de $y_1 = (\tan^2 x + 1)(\cos^2 x - 1)$ y el derecho de $y_2 = -\tan^2 x$ en la misma pantalla, como se ve en la Figura 5.3. (Seleccione el estilo *line* para y_1 y el estilo *path* para y_2.) Como las gráficas coinciden, $(\tan^2 x + 1)(\cos^2 x - 1) = -\tan^2 x$ es una identidad.

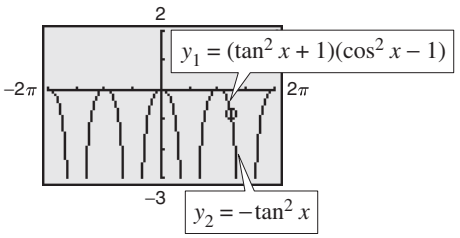


FIGURA 5.3

Ejemplo 4 Conversión a senos y cosenos

Compruebe la identidad $\tan x + \cot x = \sec x \csc x$.

Solución

Trate de convertir el lado izquierdo en senos y cosenos.

$$\tan x + \cot x = \frac{\operatorname{sen} x}{\cos x} + \frac{\cos x}{\operatorname{sen} x}$$ Identidades cociente

$$= \frac{\operatorname{sen}^2 x + \cos^2 x}{\cos x \operatorname{sen} x}$$ Sumar fracciones.

$$= \frac{1}{\cos x \operatorname{sen} x}$$ Identidad pitagórica

$$= \frac{1}{\cos x} \cdot \frac{1}{\operatorname{sen} x}$$ Producto de fracciones

$$= \sec x \csc x$$ Identidades recíprocas

PUNTO *de repaso* Ahora trate de hacer el Ejercicio 25.

¡ATENCIÓN

Aunque una calculadora de gráficas puede ser útil para comprobar una identidad, se deben usar técnicas algebraicas para producir una prueba *válida*.

Recuerde de álgebra que *racionalizar el denominador* usando conjugados es, en ocasiones, una poderosa técnica de simplificación. Una forma relacionada de esta técnica, que se muestra a continuación, funciona también para simplificar expresiones trigonométricas.

$$\frac{1}{1 - \cos x} = \frac{1}{1 - \cos x}\left(\frac{1 + \cos x}{1 + \cos x}\right) = \frac{1 + \cos x}{1 - \cos^2 x} = \frac{1 + \cos x}{\operatorname{sen}^2 x}$$

$$= \csc^2 x(1 + \cos x)$$

Esta técnica se demuestra en el siguiente ejemplo.

Tip de estudio

Como se muestra a la derecha, $\csc^2 x(1 + \cos x)$ es considerada una forma simplificada de $1/(1 - \cos x)$ porque la expresión no contiene ninguna fracción.

Ejemplo 5 Comprobar una identidad trigonométrica

Compruebe la identidad $\sec x + \tan x = \dfrac{\cos x}{1 - \operatorname{sen} x}$.

Solución algebraica

Empiece por el lado *derecho* porque se puede crear un denominador monomio al multiplicar el numerador y el denominador por $1 + \operatorname{sen} x$.

$$\frac{\cos x}{1 - \operatorname{sen} x} = \frac{\cos x}{1 - \operatorname{sen} x}\left(\frac{1 + \operatorname{sen} x}{1 + \operatorname{sen} x}\right)$$ Multiplicar numerador y denominador por $1 + \operatorname{sen} x$.

$$= \frac{\cos x + \cos x \operatorname{sen} x}{1 - \operatorname{sen}^2 x}$$ Multiplicar.

$$= \frac{\cos x + \cos x \operatorname{sen} x}{\cos^2 x}$$ Identidad pitagórica

$$= \frac{\cos x}{\cos^2 x} + \frac{\cos x \operatorname{sen} x}{\cos^2 x}$$ Escribir como fracciones separadas

$$= \frac{1}{\cos x} + \frac{\operatorname{sen} x}{\cos x}$$ Simplificar.

$$= \sec x + \tan x$$ Identidades

PUNTO *de repaso* Ahora trate de hacer el Ejercicio 59.

Solución gráfica

Use una calculadora de gráficas puesta en los modos *radian* y *dot* para graficar tanto $y_1 = \sec x + \tan x$ como $y_2 = \cos x/(1 - \operatorname{sen} x)$ en la misma pantalla, como se ve en la Figura 5.4. En vista de que las gráficas parecen coincidir, $\sec x + \tan x = \cos x/(1 - \operatorname{sen} x)$ es una identidad.

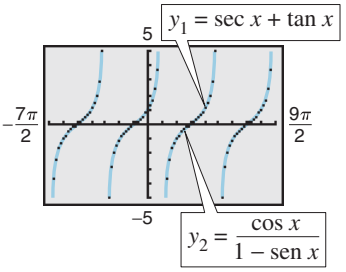


FIGURA 5.4

En los Ejemplos 1 a 5 hemos comprobado identidades trigonométricas trabajando con un lado (miembro) de la ecuación y convirtiendo a la forma dada en el otro lado. A veces conviene trabajar cada lado *por separado* para obtener una forma común, equivalente a ambos, lo cual se ilustra en el Ejemplo 6.

Ejemplo 6 Trabajar con cada lado por separado

Compruebe la identidad $\dfrac{\cot^2 \theta}{1 + \csc \theta} = \dfrac{1 - \operatorname{sen} \theta}{\operatorname{sen} \theta}$.

Solución algebraica

Trabajando con el lado izquierdo, tenemos

$$\frac{\cot^2 \theta}{1 + \csc \theta} = \frac{\csc^2 \theta - 1}{1 + \csc \theta}$$ Identidad pitagórica

$$= \frac{(\csc \theta - 1)\cancel{(\csc \theta + 1)}}{\cancel{1 + \csc \theta}}$$ Factorizar.

$$= \csc \theta - 1.$$ Simplificar.

Ahora, simplificando el lado derecho, tenemos

$$\frac{1 - \operatorname{sen} \theta}{\operatorname{sen} \theta} = \frac{1}{\operatorname{sen} \theta} - \frac{\operatorname{sen} \theta}{\operatorname{sen} \theta}$$ Escribir como fracciones separadas

$$= \csc \theta - 1.$$ Identidad recíproca

La identidad se comprueba porque ambos lados son iguales a $\csc \theta - 1$.

PUNTO *de repaso* Ahora trate de hacer el Ejercicio 19.

Solución numérica

Use el comando *table* de una calculadora de gráficas puesta en el modo *radian* para crear una tabla que muestre los valores de $y_1 = \cot^2 x/(1 + \csc x)$ y $y_2 = (1 - \operatorname{sen} x)/\operatorname{sen} x$ para diferentes valores de x, como se muestra en la Figura 5.5. En la tabla se puede ver que los valores son idénticos, de modo que $\cot^2 x/(1 + \csc x) = (1 - \operatorname{sen} x)/\operatorname{sen} x$ parece ser una identidad.

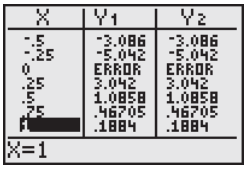


FIGURA 5.5

En el Ejemplo 7, las potencias de funciones trigonométricas se reescriben como sumas más complicadas de productos de funciones trigonométricas. Éste es un procedimiento común que se emplea en cálculo.

Ejemplo 7 Tres ejemplos de cálculo

Compruebe cada una de las identidades siguientes.

a. $\tan^4 x = \tan^2 x \sec^2 x - \tan^2 x$

b. $\operatorname{sen}^3 x \cos^4 x = (\cos^4 x - \cos^6 x) \operatorname{sen} x$

c. $\csc^4 x \cot x = \csc^2 x(\cot x + \cot^3 x)$

Solución

a. $\tan^4 x = (\tan^2 x)(\tan^2 x)$ Escribir como factores separados.

$= \tan^2 x(\sec^2 x - 1)$ Identidad pitagórica

$= \tan^2 x \sec^2 x - \tan^2 x$ Multiplicar.

b. $\operatorname{sen}^3 x \cos^4 x = \operatorname{sen}^2 x \cos^4 x \operatorname{sen} x$ Escribir como factores separados.

$= (1 - \cos^2 x) \cos^4 x \operatorname{sen} x$ Identidad pitagórica

$= (\cos^4 x - \cos^6 x) \operatorname{sen} x$ Multiplicar.

c. $\csc^4 x \cot x = \csc^2 x \csc^2 x \cot x$ Escribir como factores separados.

$= \csc^2 x(1 + \cot^2 x) \cot x$ Identidad pitagórica

$= \csc^2 x(\cot x + \cot^3 x)$ Multiplicar.

PUNTO *de repaso* Ahora trate de hacer el Ejercicio 63.

Discusión en clase

Análisis de error Usted está asesorando a un estudiante en trigonometría. Uno de los problemas de tarea que su estudiante encuentra es la pregunta sobre si las proposiciones siguientes son una identidad.

$$\tan^2 x \operatorname{sen}^2 x \stackrel{?}{=} \frac{5}{6} \tan^2 x$$

Su estudiante no trata de comprobar algebraicamente la equivalencia, sino que erróneamente usa sólo un método gráfico. Usando ajustes de variación de

Xmín $= -3\pi$	Ymín $= -20$
Xmáx $= 3\pi$	Ymáx $= 20$
Xscl $= \pi/2$	Yscl $= 1$

su estudiante grafica ambos lados de la expresión en una calculadora de gráficas y concluye que la expresión es una identidad.

¿Qué está mal en el razonamiento del estudiante? Discuta las limitaciones de verificar identidades gráficamente.

5.2 EJERCICIOS

En www.CalcChat.com vea las soluciones a los ejercicios impares.

VOCABULARIO:

En los Ejercicios 1 y 2, llene los espacios en blanco.

1. Una ecuación que es verdadera para todos los valores reales en su dominio recibe el nombre de _____.
2. Una ecuación que es verdadera sólo para algunos valores en su dominio se denomina _____ _____.

En los Ejercicios 3-8, llene los espacios en blanco para completar la identidad trigonométrica.

3. $\dfrac{1}{\cot u} =$ _____
4. $\dfrac{\cos u}{\operatorname{sen} u} =$ _____
5. $\operatorname{sen}^2 u +$ _____ $= 1$
6. $\cos\left(\dfrac{\pi}{2} - u\right) =$ _____
7. $\csc(-u) =$ _____
8. $\sec(-u) =$ _____

HABILIDADES Y APLICACIONES

En los Ejercicios 9-50, compruebe la identidad.

9. $\tan t \cot t = 1$
10. $\sec y \cos y = 1$
11. $\cot^2 y(\sec^2 y - 1) = 1$
12. $\cos x + \operatorname{sen} x \tan x = \sec x$
13. $(1 + \operatorname{sen} \alpha)(1 - \operatorname{sen} \alpha) = \cos^2 \alpha$
14. $\cos^2 \beta - \operatorname{sen}^2 \beta = 2\cos^2 \beta - 1$
15. $\cos^2 \beta - \operatorname{sen}^2 \beta = 1 - 2\operatorname{sen}^2 \beta$
16. $\operatorname{sen}^2 \alpha - \operatorname{sen}^4 \alpha = \cos^2 \alpha - \cos^4 \alpha$
17. $\dfrac{\tan^2 \theta}{\sec \theta} = \operatorname{sen} \theta \tan \theta$
18. $\dfrac{\cot^3 t}{\csc t} = \cos t(\csc^2 t - 1)$
19. $\dfrac{\cot^2 t}{\csc t} = \dfrac{1 - \operatorname{sen}^2 t}{\operatorname{sen} t}$
20. $\dfrac{1}{\tan \beta} + \tan \beta = \dfrac{\sec^2 \beta}{\tan \beta}$
21. $\operatorname{sen}^{1/2} x \cos x - \operatorname{sen}^{5/2} x \cos x = \cos^3 x \sqrt{\operatorname{sen} x}$
22. $\sec^6 x(\sec x \tan x) - \sec^4 x(\sec x \tan x) = \sec^5 x \tan^3 x$
23. $\dfrac{\cot x}{\sec x} = \csc x - \operatorname{sin} x$
24. $\dfrac{\sec \theta - 1}{1 - \cos \theta} = \sec \theta$
25. $\csc x - \operatorname{sen} x = \cos x \cot x$
26. $\sec x - \cos x = \operatorname{sen} x \tan x$
27. $\dfrac{1}{\tan x} + \dfrac{1}{\cot x} = \tan x + \cot x$
28. $\dfrac{1}{\operatorname{sen} x} - \dfrac{1}{\csc x} = \csc x - \operatorname{sen} x$
29. $\dfrac{1 + \operatorname{sen} \theta}{\cos \theta} + \dfrac{\cos \theta}{1 + \operatorname{sen} \theta} = 2\sec \theta$
30. $\dfrac{\cos \theta \cot \theta}{1 - \operatorname{sen} \theta} - 1 = \csc \theta$
31. $\dfrac{1}{\cos x + 1} + \dfrac{1}{\cos x - 1} = -2\csc x \cot x$
32. $\cos x - \dfrac{\cos x}{1 - \tan x} = \dfrac{\operatorname{sen} x \cos x}{\operatorname{sen} x - \cos x}$
33. $\tan\left(\dfrac{\pi}{2} - \theta\right)\tan \theta = 1$
34. $\dfrac{\cos[(\pi/2) - x]}{\operatorname{sen}[(\pi/2) - x]} = \tan x$
35. $\dfrac{\tan x \cot x}{\cos x} = \sec x$
36. $\dfrac{\csc(-x)}{\sec(-x)} = -\cot x$
37. $(1 + \operatorname{sen} y)[1 + \operatorname{sen}(-y)] = \cos^2 y$
38. $\dfrac{\tan x + \tan y}{1 - \tan x \tan y} = \dfrac{\cot x + \cot y}{\cot x \cot y - 1}$
39. $\dfrac{\tan x + \cot y}{\tan x \cot y} = \tan y + \cot x$
40. $\dfrac{\cos x - \cos y}{\operatorname{sen} x + \operatorname{sen} y} + \dfrac{\operatorname{sen} x - \operatorname{sen} y}{\cos x + \cos y} = 0$
41. $\sqrt{\dfrac{1 + \operatorname{sen} \theta}{1 - \operatorname{sen} \theta}} = \dfrac{1 + \operatorname{sen} \theta}{|\cos \theta|}$
42. $\sqrt{\dfrac{1 - \cos \theta}{1 + \cos \theta}} = \dfrac{1 - \cos \theta}{|\operatorname{sen} \theta|}$
43. $\cos^2 \beta + \cos^2\left(\dfrac{\pi}{2} - \beta\right) = 1$
44. $\sec^2 y - \cot^2\left(\dfrac{\pi}{2} - y\right) = 1$
45. $\operatorname{sen} t \csc\left(\dfrac{\pi}{2} - t\right) = \tan t$
46. $\sec^2\left(\dfrac{\pi}{2} - x\right) - 1 = \cot^2 x$
47. $\tan(\operatorname{sen}^{-1} x) = \dfrac{x}{\sqrt{1 - x^2}}$
48. $\cos(\operatorname{sen}^{-1} x) = \sqrt{1 - x^2}$
49. $\tan\left(\operatorname{sen}^{-1} \dfrac{x - 1}{4}\right) = \dfrac{x - 1}{\sqrt{16 - (x - 1)^2}}$
50. $\tan\left(\cos^{-1} \dfrac{x + 1}{2}\right) = \dfrac{\sqrt{4 - (x + 1)^2}}{x + 1}$

ANÁLISIS DE ERROR En los Ejercicios 51 y 52, describa el error (o errores).

51.
$$\begin{aligned}(1 + \tan x)[1 + \cot(-x)] &= (1 + \tan x)(1 + \cot x)\\ &= 1 + \cot x + \tan x + \tan x \cot x\\ &= 1 + \cot x + \tan x + 1\\ &= 2 + \cot x + \tan x\end{aligned}$$

52.
$$\begin{aligned}\frac{1 + \sec(-\theta)}{\operatorname{sen}(-\theta) + \tan(-\theta)} &= \frac{1 - \sec\theta}{\operatorname{sen}\theta - \tan\theta}\\ &= \frac{1 - \sec\theta}{(\operatorname{sen}\theta)[1 - (1/\cos\theta)]}\\ &= \frac{1 - \sec\theta}{\operatorname{sen}\theta(1 - \sec\theta)}\\ &= \frac{1}{\operatorname{sen}\theta} = \csc\theta\end{aligned}$$

En los Ejercicios 53-60, (a) use una calculadora de gráficas para graficar cada lado de la ecuación a fin de determinar si es una identidad, (b) use el comando *table* de una calculadora de gráficas para determinar si la ecuación es una identidad, y (c) confirme algebraicamente los resultados de los incisos (a) y (b) .

53. $(1 + \cot^2 x)(\cos^2 x) = \cot^2 x$

54. $\csc x(\csc x - \operatorname{sen} x) + \dfrac{\operatorname{sen} x - \cos x}{\operatorname{sen} x} + \cot x = \csc^2 x$

55. $2 + \cos^2 x - 3\cos^4 x = \operatorname{sen}^2 x(3 + 2\cos^2 x)$

56. $\tan^4 x + \tan^2 x - 3 = \sec^2 x(4\tan^2 x - 3)$

57. $\csc^4 x - 2\csc^2 x + 1 = \cot^4 x$

58. $(\operatorname{sen}^4 \beta - 2\operatorname{sen}^2 \beta + 1)\cos\beta = \cos^5 \beta$

59. $\dfrac{1 + \cos x}{\operatorname{sen} x} = \dfrac{\operatorname{sen} x}{1 - \cos x}$ **60.** $\dfrac{\cot\alpha}{\csc\alpha + 1} = \dfrac{\csc\alpha + 1}{\cot\alpha}$

En los Ejercicios 61-64, compruebe la identidad.

61. $\tan^5 x = \tan^3 x \sec^2 x - \tan^3 x$

62. $\sec^4 x \tan^2 x = (\tan^2 x + \tan^4 x)\sec^2 x$

63. $\cos^3 x \operatorname{sen}^2 x = (\operatorname{sen}^2 x - \operatorname{sen}^4 x)\cos x$

64. $\operatorname{sen}^4 x + \cos^4 x = 1 - 2\cos^2 x + 2\cos^4 x$

En los Ejercicios 65-68, use las identidades de cofunción para evaluar la expresión sin usar calculadora.

65. $\operatorname{sen}^2 25° + \operatorname{sen}^2 65°$ **66.** $\cos^2 55° + \cos^2 35°$

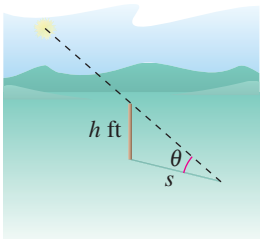
67. $\cos^2 20° + \cos^2 52° + \cos^2 38° + \cos^2 70°$

68. $\tan^2 63° + \cot^2 16° - \sec^2 74° - \csc^2 27°$

69. RAZÓN DE CAMBIO La razón de cambio de la función $f(x) = \operatorname{sen} x + \csc x$ respecto al cambio en la variable x, está dada por la expresión $\cos x - \csc x \cot x$. Demuestre que la expresión para la razón de cambio también puede ser $-\cos x \cot^2 x$.

70. LONGITUD DE UNA SOMBRA La longitud s de una sombra proyectada por un gnomon vertical (aparato usado para indicar la hora) de altura h, cuando el ángulo del Sol sobre el horizonte es θ (vea figura), se puede modelar con la ecuación

$$s = \frac{h\operatorname{sen}(90° - \theta)}{\operatorname{sen}\theta}.$$



(a) Compruebe que la ecuación para s sea igual a $h\cot\theta$.

(b) Use una calculadora de gráficas para completar la tabla. Sea $h = 5$ pies.

θ	15°	30°	45°	60°	75°	90°
s						

(c) Use la tabla del inciso (b) para determinar los ángulos del Sol que resultan en las longitudes máxima y mínima de la sombra.

(d) Con base en sus resultados del inciso (c), ¿qué hora del día piensa usted que es cuando el ángulo del Sol sobre el horizonte es 90°?

EXPLORACIÓN

¿VERDADERO O FALSO? En los Ejercicios 71 y 72, determine si la proposición es verdadera o falsa. Justifique su respuesta.

71. Puede haber más de una forma de verificar una identidad trigonométrica.

72. La ecuación $\operatorname{sen}^2\theta + \cos^2\theta = 1 + \tan^2\theta$ es una identidad porque $\operatorname{sen}^2(0) + \cos^2(0) = 1$ y $1 + \tan^2(0) = 1$.

PIÉNSELO En los Ejercicios 73-77, explique por qué la ecuación no es una identidad y encuentre un valor de la variable para la cual la ecuación no es verdadera.

73. $\operatorname{sen}\theta = \sqrt{1 - \cos^2\theta}$ **74.** $\tan\theta = \sqrt{\sec^2\theta - 1}$

75. $1 - \cos\theta = \operatorname{sen}\theta$ **76.** $\csc\theta - 1 = \cot\theta$

77. $1 + \tan\theta = \sec\theta$

78. TOQUE FINAL Escriba un breve ensayo que explique a un compañero de clase la diferencia entre una identidad trigonométrica y una ecuación condicional. Incluya sugerencias sobre cómo comprobar una identidad trigonométrica.

5.3 Solución de ecuaciones trigonométricas

Lo que debe aprender

- Usar técnicas algebraicas estándar para resolver ecuaciones trigonométricas.
- Resolver ecuaciones trigonométricas de tipo cuadrático.
- Resolver ecuaciones trigonométricas que contengan ángulos múltiples.
- Usar funciones trigonométricas inversas para resolver ecuaciones trigonométricas.

Por qué debe aprenderlo

Se pueden usar ecuaciones trigonométricas para resolver una amplia variedad de problemas de la vida real. Por ejemplo, en el Ejercicio 92 de la página 396 se puede resolver una ecuación trigonométrica para ayudar a contestar preguntas acerca de ventas mensuales de equipo para esquiar.

Tom Stillo/Index Stock Imagery/Photo Library

Introducción

Para resolver una ecuación trigonométrica utilice técnicas algebraicas estándar como reunir términos semejantes y factorizar. Su objetivo preliminar para resolver una ecuación trigonométrica es *aislar* la función trigonométrica en la ecuación. Por ejemplo, para resolver la ecuación $2 \operatorname{sen} x = 1$ divida cada lado entre 2 para obtener

$$\operatorname{sen} x = \frac{1}{2}.$$

Para despejar x, observe en la Figura 5.6 que la ecuación $\operatorname{sen} x = \frac{1}{2}$ tiene soluciones $x = \pi/6$ y $x = 5\pi/6$ en el intervalo $[0, 2\pi)$. Además, como $\operatorname{sen} x$ tiene un periodo de 2π, hay un número infinito de otras soluciones, que se pueden escribir como

$$x = \frac{\pi}{6} + 2n\pi \quad \text{y} \quad x = \frac{5\pi}{6} + 2n\pi \qquad \text{Solución general}$$

donde n es un entero, como se ve en la Figura 5.6.

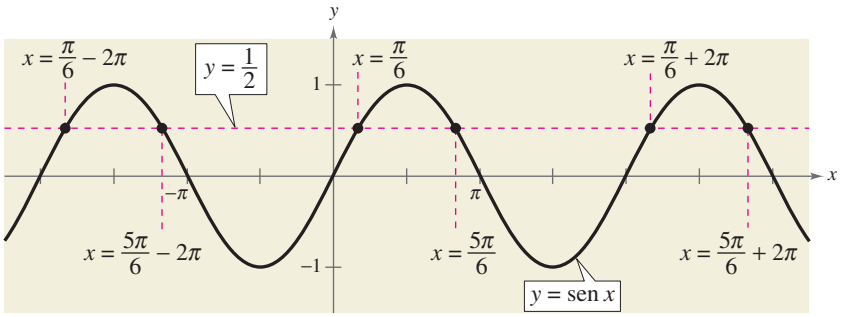


FIGURA 5.6

Otra forma de demostrar que la ecuación $\operatorname{sen} x = \frac{1}{2}$ tiene un número infinito de soluciones está indicada en la Figura 5.7. Cualesquier ángulos que sean coterminales con $\pi/6$ y $5\pi/6$ también serán soluciones de la ecuación.

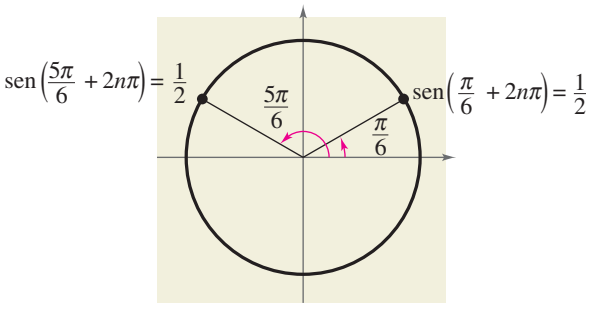


FIGURA 5.7

Cuando resuelva ecuaciones trigonométricas debe escribir su(s) respuesta(s) usando valores exactos en lugar de aproximaciones decimales.

Ejemplo 1 Reunir términos semejantes

Resuelva $\operatorname{sen} x + \sqrt{2} = -\operatorname{sen} x$.

Solución

Empiece por reescribir la ecuación para que sen x quede aislado en un lado.

$$\operatorname{sen} x + \sqrt{2} = -\operatorname{sen} x$$ Escribir la ecuación original.

$$\operatorname{sen} x + \operatorname{sen} x + \sqrt{2} = 0$$ Sumar sen x a cada lado.

$$\operatorname{sen} x + \operatorname{sen} x = -\sqrt{2}$$ Restar $\sqrt{2}$ de cada lado.

$$2 \operatorname{sen} x = -\sqrt{2}$$ Combinar términos semejantes.

$$\operatorname{sen} x = -\frac{\sqrt{2}}{2}$$ Dividir cada lado entre 2.

Como sen x tiene un periodo de 2π, primero encuentre todas las soluciones en el intervalo $[0, 2\pi)$. Estas soluciones son $x = 5\pi/4$ y $x = 7\pi/4$. Finalmente, sume múltiplos de 2π a cada una de estas soluciones para obtener la forma general

$$x = \frac{5\pi}{4} + 2n\pi \quad \text{y} \quad x = \frac{7\pi}{4} + 2n\pi$$ Solución general

donde n es un entero.

PUNTO *de repaso* Ahora trate de hacer el Ejercicio 11.

Ejemplo 2 Obtener raíces cuadradas

Resuelva $3 \tan^2 x - 1 = 0$.

Solución

Empiece por reescribir la ecuación de modo que tan x quede aislada en un lado.

$$3 \tan^2 x - 1 = 0$$ Escribir la ecuación original.

$$3 \tan^2 x = 1$$ Sumar 1 a cada lado.

$$\tan^2 x = \frac{1}{3}$$ Dividir cada lado entre 3.

$$\tan x = \pm\frac{1}{\sqrt{3}} = \pm\frac{\sqrt{3}}{3}$$ Obtener raíces cuadradas.

Como tan x tiene un periodo de π, primero encuentre todas las soluciones en el intervalo $[0, \pi)$. Estas soluciones son $x = \pi/6$ y $x = 5\pi/6$. Finalmente, sume múltiplos de π a cada una de estas soluciones para obtener la forma general

$$x = \frac{\pi}{6} + n\pi \quad \text{y} \quad x = \frac{5\pi}{6} + n\pi$$ Solución general

donde n es un entero.

PUNTO *de repaso* Ahora trate de hacer el Ejercicio 15.

ATENCIÓN

Cuando extraiga raíces cuadradas, asegúrese de considerar soluciones tanto positivas como negativas.

Las ecuaciones de los ejemplos 1 y 2 contenían sólo una función trigonométrica. Cuando se presentan dos o más funciones en la misma ecuación, reúna todos los términos en un lado e intente separar las funciones mediante factorización o con el uso de identidades apropiadas. Esto puede producir factores que no dan soluciones, como se ilustra en el Ejemplo 3.

Ejemplo 3 Factorización

Resuelva $\cot x \cos^2 x = 2 \cot x$.

Solución

Empiece por reescribir la ecuación de modo que todos los términos queden en un lado.

$$\cot x \cos^2 x = 2 \cot x \qquad \text{Escribir la ecuación original.}$$

$$\cot x \cos^2 x - 2 \cot x = 0 \qquad \text{Restar } 2 \cot x \text{ de cada lado.}$$

$$\cot x(\cos^2 x - 2) = 0 \qquad \text{Factorizar.}$$

Al igualar a cero cada uno de estos factores resulta

$$\cot x = 0 \quad \text{o} \quad \cos^2 x - 2 = 0$$

$$x = \frac{\pi}{2} \qquad \cos^2 x = 2$$

$$\cos x = \pm\sqrt{2}.$$

La ecuación $\cot x = 0$ tiene la solución $x = \pi/2$ [en el intervalo $(0, \pi)$]. No se obtiene solución para $\cos x = \pm\sqrt{2}$ porque $\pm\sqrt{2}$ están fuera del rango de la función coseno. Como $\cot x$ tiene un periodo de π, la forma general de la solución se obtiene al sumar múltiplos de π a $x = \pi/2$ para obtener

$$x = \frac{\pi}{2} + n\pi \qquad \text{Solución general}$$

donde n es un entero. Se puede confirmar esto gráficamente si se traza la gráfica de $y = \cot x \cos^2 x - 2 \cot x$, como se muestra en la Figura 5.8. En la gráfica se puede ver que las intersecciones con el eje x se presentan en $-3\pi/2$, $-\pi/2$, $\pi/2$, $3\pi/2$, etcétera. Estas intersecciones corresponden a las soluciones de $\cot x \cos^2 x - 2 \cot x = 0$.

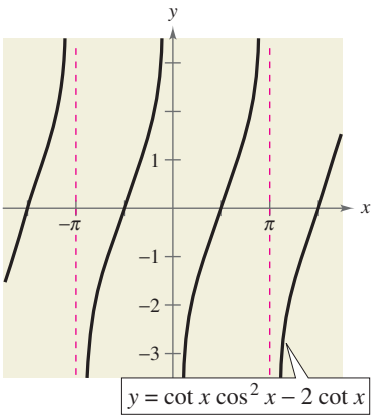


FIGURA 5.8

PUNTO de repaso Ahora trate de hacer el Ejercicio 19.

Ecuaciones de tipo cuadrático

Muchas ecuaciones trigonométricas son de tipo cuadrático $ax^2 + bx + c = 0$. A continuación veamos un par de ejemplos.

Cuadrática con sen x	*Cuadrática con sec x*
$2 \operatorname{sen}^2 x - \operatorname{sen} x - 1 = 0$	$\sec^2 x - 3 \sec x - 2 = 0$
$2(\operatorname{sen} x)^2 - \operatorname{sen} x - 1 = 0$	$(\sec x)^2 - 3(\sec x) - 2 = 0$

Para resolver ecuaciones de este tipo, factorice la cuadrática; si esto no es posible, use la fórmula cuadrática.

Ayuda de álgebra

En el Apéndice A.5 puede repasar las técnicas para resolver ecuaciones cuadráticas.

Ejemplo 4 Factorizar una ecuación de tipo cuadrático

Encuentre todas las soluciones de $2 \operatorname{sen}^2 x - \operatorname{sen} x - 1 = 0$ en el intervalo $[0, 2\pi)$.

Solución algebraica

Empiece por tratar la ecuación como cuadrática en sen x y factorizar.

$$2 \operatorname{sen}^2 x - \operatorname{sen} x - 1 = 0 \quad \text{Escribir la ecuación original.}$$

$$(2 \operatorname{sen} x + 1)(\operatorname{sen} x - 1) = 0 \quad \text{Factorizar.}$$

Igualando a cero cada factor se obtienen las siguientes soluciones en el intervalo $[0, 2\pi)$.

$$2 \operatorname{sen} x + 1 = 0 \quad \text{o} \quad \operatorname{sen} x - 1 = 0$$

$$\operatorname{sen} x = -\frac{1}{2} \qquad \operatorname{sen} x = 1$$

$$x = \frac{7\pi}{6}, \frac{11\pi}{6} \qquad x = \frac{\pi}{2}$$

PUNTO *de repaso* Ahora trate de hacer el Ejercicio 33.

Solución gráfica

Use una calculadora de gráficas puesta en el modo *radian* para graficar $y = 2 \operatorname{sen}^2 x - \operatorname{sen} x - 1$ para $0 \le x < 2\pi$, como se ve en la Figura 5.9. Use el comando *zero* o *root* o los comandos *zoom* y *trace* para aproximar las intersecciones con el eje x para que sean

$$x \approx 1.571 \approx \frac{\pi}{2}, \quad x \approx 3.665 \approx \frac{7\pi}{6} \quad \text{y} \quad x \approx 5.760 \approx \frac{11\pi}{6}.$$

Estos valores son las soluciones aproximadas de $2 \operatorname{sen}^2 x - \operatorname{sen} x - 1 = 0$ en el intervalo $[0, 2\pi)$.

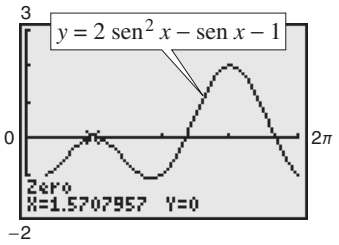


FIGURA 5.9

Ejemplo 5 Reescribir con una sola función trigonométrica

Resuelva $2 \operatorname{sen}^2 x + 3 \cos x - 3 = 0$.

Solución

Esta ecuación contiene funciones seno y coseno. Se puede reescribir para que sólo tenga funciones coseno si se usa la identidad $\operatorname{sen}^2 x = 1 - \cos^2 x$.

$$2 \operatorname{sen}^2 x + 3 \cos x - 3 = 0 \quad \text{Escribir la ecuación original.}$$

$$2(1 - \cos^2 x) + 3 \cos x - 3 = 0 \quad \text{Identidad pitagórica}$$

$$2 \cos^2 x - 3 \cos x + 1 = 0 \quad \text{Multiplicar cada lado por } -1.$$

$$(2 \cos x - 1)(\cos x - 1) = 0 \quad \text{Factorizar.}$$

Iguale a cero cada factor para hallar las soluciones en el intervalo $[0, 2\pi)$.

$$2 \cos x - 1 = 0 \Rightarrow \cos x = \frac{1}{2} \Rightarrow x = \frac{\pi}{3}, \frac{5\pi}{3}$$

$$\cos x - 1 = 0 \Rightarrow \cos x = 1 \Rightarrow x = 0$$

Como cos x tiene un periodo de 2π, la forma general de la solución se obtiene al sumar múltiplos de 2π para obtener

$$x = 2n\pi, \quad x = \frac{\pi}{3} + 2n\pi, \quad x = \frac{5\pi}{3} + 2n\pi \quad \text{Solución general}$$

donde n es un entero.

PUNTO *de repaso* Ahora trate de hacer el Ejercicio 35.

A veces se debe elevar al cuadrado cada lado (miembro) de una ecuación para obtener una cuadrática, como se demuestra en el siguiente ejemplo. Como este procedimiento puede introducir soluciones extrañas, se deben verificar cualesquiera soluciones de la ecuación original para ver si son válidas o extrañas.

Ejemplo 6 Elevar al cuadrado y convertir a tipo cuadrático

Encuentre todas las soluciones de $\cos x + 1 = \operatorname{sen} x$ en el intervalo $[0, 2\pi)$.

Solución

No está claro cómo reescribir esta ecuación en términos de una sola función trigonométrica. Observe lo que pasa cuando se eleva al cuadrado cada lado de la ecuación.

$$\cos x + 1 = \operatorname{sen} x \qquad \text{Escribir la ecuación original.}$$

$$\cos^2 x + 2\cos x + 1 = \operatorname{sen}^2 x \qquad \text{Elevar al cuadrado cada lado.}$$

$$\cos^2 x + 2\cos x + 1 = 1 - \cos^2 x \qquad \text{Identidad pitagórica}$$

$$\cos^2 x + \cos^2 x + 2\cos x + 1 - 1 = 0 \qquad \text{Reescribir la ecuación.}$$

$$2\cos^2 x + 2\cos x = 0 \qquad \text{Combinar términos semejantes.}$$

$$2\cos x(\cos x + 1) = 0 \qquad \text{Factorizar.}$$

Igualando a cero cada factor resulta

$$2\cos x = 0 \quad \text{o} \quad \cos x + 1 = 0$$

$$\cos x = 0 \qquad\qquad \cos x = -1$$

$$x = \frac{\pi}{2}, \frac{3\pi}{2} \qquad\qquad x = \pi.$$

Como elevamos al cuadrado la ecuación original, verifiquemos que no haya soluciones extrañas.

Pruebe $x = \pi/2$

$$\cos\frac{\pi}{2} + 1 \stackrel{?}{=} \operatorname{sen}\frac{\pi}{2} \qquad \text{Sustituir } \pi/2 \text{ por } x.$$

$$0 + 1 = 1 \qquad \text{La solución es buena. } \checkmark$$

Pruebe $x = 3\pi/2$

$$\cos\frac{3\pi}{2} + 1 \stackrel{?}{=} \operatorname{sen}\frac{3\pi}{2} \qquad \text{Sustituir } 3\pi/2 \text{ por } x.$$

$$0 + 1 \neq -1 \qquad \text{La solución no es buena.}$$

Pruebe $x = \pi$

$$\cos\pi + 1 \stackrel{?}{=} \operatorname{sen}\pi \qquad \text{Sustituir } \pi \text{ por } x.$$

$$-1 + 1 = 0 \qquad \text{La solución es buena. } \checkmark$$

De las tres soluciones posibles, $x = 3\pi/2$ es extraña. Entonces, en el intervalo $[0, 2\pi)$, las únicas dos soluciones son $x = \pi/2$ y $x = \pi$.

PUNTO *de repaso* Ahora trate de hacer el Ejercicio 37.

Tip de estudio

Se eleva al cuadrado cada lado de la ecuación del Ejemplo 6 porque los cuadrados de las funciones seno y coseno están relacionados por una identidad pitagórica. Lo mismo es cierto para los cuadrados de las funciones secante y tangente y para los cuadrados de las funciones cosecante y cotangente.

Funciones que contienen ángulos múltiples

Los dos ejemplos siguientes contienen funciones trigonométricas de ángulos múltiples de las formas sen ku y cos ku. Para resolver ecuaciones de estas formas, primero despeje ku de la ecuación y, a continuación, divida su resultado entre k.

Ejemplo 7 Funciones de ángulos múltiples.

Resuelva $2 \cos 3t - 1 = 0$.

Solución

$$2 \cos 3t - 1 = 0$$ Escribir la ecuación original.

$$2 \cos 3t = 1$$ Sumar 1 a cada lado.

$$\cos 3t = \frac{1}{2}$$ Dividir cada lado entre 2.

En el intervalo $[0, 2\pi)$, usted sabe que $3t = \pi/3$ y que $3t = 5\pi/3$ son las únicas soluciones, de manera que, en general, se tiene

$$3t = \frac{\pi}{3} + 2n\pi \quad \text{y} \quad 3t = \frac{5\pi}{3} + 2n\pi.$$

Dividiendo estos resultados entre 3 se obtiene la solución general

$$t = \frac{\pi}{9} + \frac{2n\pi}{3} \quad \text{y} \quad t = \frac{5\pi}{9} + \frac{2n\pi}{3}$$ Solución general

donde n es un entero.

PUNTO *de repaso* Ahora trate de hacer el Ejercicio 39.

Ejemplo 8 Funciones de ángulos múltiples

Resuelva $3 \tan \frac{x}{2} + 3 = 0$.

Solución

$$3 \tan \frac{x}{2} + 3 = 0$$ Escribir la ecuación original.

$$3 \tan \frac{x}{2} = -3$$ Restar 3 de cada lado.

$$\tan \frac{x}{2} = -1$$ Dividir cada lado entre 3.

En el intervalo $[0, \pi)$, usted sabe que $x/2 = 3\pi/4$ es la única solución, por lo que, en general, se tiene

$$\frac{x}{2} = \frac{3\pi}{4} + n\pi.$$

Multiplicando este resultado por 2 se obtiene la solución general

$$x = \frac{3\pi}{2} + 2n\pi$$ Solución general

donde n es un entero.

PUNTO *de repaso* Ahora trate de hacer el Ejercicio 43.

Uso de funciones inversas

En el siguiente ejemplo, usted verá la forma en que se pueden usar funciones trigonométricas inversas para resolver una ecuación.

Ejemplo 9 Usar funciones inversas

Resuelva $\sec^2 x - 2 \tan x = 4$.

Solución

$$\sec^2 x - 2 \tan x = 4 \qquad \text{Escribir la ecuación original.}$$

$$1 + \tan^2 x - 2 \tan x - 4 = 0 \qquad \text{Identidad pitagórica}$$

$$\tan^2 x - 2 \tan x - 3 = 0 \qquad \text{Combinar términos semejantes.}$$

$$(\tan x - 3)(\tan x + 1) = 0 \qquad \text{Factorizar.}$$

Igualando a cero cada factor se obtienen dos soluciones en el intervalo $(-\pi/2, \pi/2)$. [Recuerde que el rango de la función tangente inversa es $(-\pi/2, \pi/2)$.]

$$\tan x - 3 = 0 \quad \text{o} \quad \tan x + 1 = 0$$

$$\tan x = 3 \qquad \tan x = -1$$

$$x = \arctan 3 \qquad x = -\frac{\pi}{4}$$

Finalmente, como $\tan x$ tiene un periodo de π, se obtiene la solución general al sumar múltiplos de π.

$$x = \arctan 3 + n\pi \quad \text{y} \quad x = -\frac{\pi}{4} + n\pi \qquad \text{Solución general}$$

donde n es un entero. Se puede usar una calculadora para aproximar el valor de arctan 3.

PUNTO *de repaso* Ahora trate de hacer el Ejercicio 63.

Discusión en clase

Ecuaciones sin soluciones Una de las siguientes ecuaciones tiene soluciones y la otra no. ¿Cuáles dos ecuaciones no tienen soluciones?

a. $\operatorname{sen}^2 x - 5 \operatorname{sen} x + 6 = 0$

b. $\operatorname{sen}^2 x - 4 \operatorname{sen} x + 6 = 0$

c. $\operatorname{sen}^2 x - 5 \operatorname{sen} x - 6 = 0$

Encuentre condiciones que contengan las constantes b y c que garantizarán que la ecuación

$$\operatorname{sen}^2 x + b \operatorname{sen} x + c = 0$$

tiene al menos una solución en algún intervalo de longitud 2π.

5.3 EJERCICIOS

En www.CalcChat.com vea las soluciones a los ejercicios impares.

VOCABULARIO: Llene los espacios en blanco.

1. Cuando resuelve una ecuación trigonométrica, el objetivo preliminar es _____ la función trigonométrica implicada en la ecuación.
2. La ecuación $2 \operatorname{sen} \theta + 1 = 0$ tiene las soluciones $\theta = \frac{7\pi}{6} + 2n\pi$ y $\theta = \frac{11\pi}{6} + 2n\pi$, que se denominan soluciones _____.
3. La ecuación $2 \tan^2 x - 3 \tan x + 1 = 0$ es una ecuación trigonométrica que es de tipo _____.
4. Una solución de una ecuación que no satisface la ecuación original recibe el nombre de solución _____.

HABILIDADES Y APLICACIONES

En los Ejercicios 5-10, verifique que los valores de *x* sean soluciones de la ecuación.

5. $2 \cos x - 1 = 0$

   (a) $x = \frac{\pi}{3}$ (b) $x = \frac{5\pi}{3}$

6. $\sec x - 2 = 0$

   (a) $x = \frac{\pi}{3}$ (b) $x = \frac{5\pi}{3}$

7. $3 \tan^2 2x - 1 = 0$

   (a) $x = \frac{\pi}{12}$ (b) $x = \frac{5\pi}{12}$

8. $2 \cos^2 4x - 1 = 0$

   (a) $x = \frac{\pi}{16}$ (b) $x = \frac{3\pi}{16}$

9. $2 \operatorname{sen}^2 x - \operatorname{sen} x - 1 = 0$

   (a) $x = \frac{\pi}{2}$ (b) $x = \frac{7\pi}{6}$

10. $\csc^4 x - 4 \csc^2 x = 0$

    (a) $x = \frac{\pi}{6}$ (b) $x = \frac{5\pi}{6}$

En los Ejercicios 11-24, resuelva la ecuación.

11. $2 \cos x + 1 = 0$
12. $2 \operatorname{sen} x + 1 = 0$
13. $\sqrt{3} \csc x - 2 = 0$
14. $\tan x + \sqrt{3} = 0$
15. $3 \sec^2 x - 4 = 0$
16. $3 \cot^2 x - 1 = 0$
17. $\operatorname{sen} x(\operatorname{sen} x + 1) = 0$
18. $(3 \tan^2 x - 1)(\tan^2 x - 3) = 0$
19. $4 \cos^2 x - 1 = 0$
20. $\operatorname{sen}^2 x = 3 \cos^2 x$
21. $2 \operatorname{sen}^2 2x = 1$
22. $\tan^2 3x = 3$
23. $\tan 3x(\tan x - 1) = 0$
24. $\cos 2x(2 \cos x + 1) = 0$

En los Ejercicios 25-38, encuentre todas las soluciones de la ecuación en el intervalo $[0, 2\pi)$.

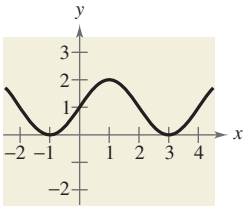
25. $\cos^3 x = \cos x$
26. $\sec^2 x - 1 = 0$
27. $3 \tan^3 x = \tan x$
28. $2 \operatorname{sen}^2 x = 2 + \cos x$
29. $\sec^2 x - \sec x = 2$
30. $\sec x \csc x = 2 \csc x$
31. $2 \operatorname{sen} x + \csc x = 0$
32. $\sec x + \tan x = 1$
33. $2 \cos^2 x + \cos x - 1 = 0$
34. $2 \operatorname{sen}^2 x + 3 \operatorname{sen} x + 1 = 0$
35. $2 \sec^2 x + \tan^2 x - 3 = 0$
36. $\cos x + \operatorname{sen} x \tan x = 2$
37. $\csc x + \cot x = 1$
38. $\operatorname{sen} x - 2 = \cos x - 2$

En los Ejercicios 39-44, resuelva la ecuación de ángulos múltiples.

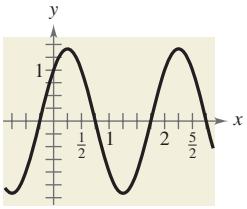
39. $\cos 2x = \frac{1}{2}$
40. $\operatorname{sen} 2x = -\frac{\sqrt{3}}{2}$
41. $\tan 3x = 1$
42. $\sec 4x = 2$
43. $\cos \frac{x}{2} = \frac{\sqrt{2}}{2}$
44. $\operatorname{sen} \frac{x}{2} = -\frac{\sqrt{3}}{2}$

En los ejercicios 45-48, encuentre las intersecciones de la gráfica con el eje *x*.

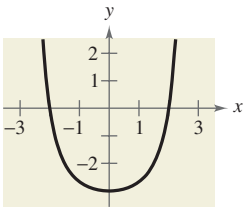
45. $y = \operatorname{sen} \frac{\pi x}{2} + 1$



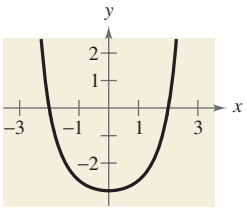
46. $y = \operatorname{sen} \pi x + \cos \pi x$



47. $y = \tan^2\left(\frac{\pi x}{6}\right) - 3$



48. $y = \sec^4\left(\frac{\pi x}{8}\right) - 4$



En los Ejercicios 49-58, use una calculadora de gráficas para aproximar las soluciones (a tres lugares decimales) de la ecuación en el intervalo $[0, 2\pi)$.

49. $2 \operatorname{sen} x + \cos x = 0$

50. $4 \operatorname{sen}^3 x + 2 \operatorname{sen}^2 x - 2 \operatorname{sen} x - 1 = 0$

51. $\dfrac{1 + \operatorname{sen} x}{\cos x} + \dfrac{\cos x}{1 + \operatorname{sen} x} = 4$

52. $\dfrac{\cos x \cot x}{1 - \operatorname{sen} x} = 3$

53. $x \tan x - 1 = 0$

54. $x \cos x - 1 = 0$

55. $\sec^2 x + 0.5 \tan x - 1 = 0$

56. $\csc^2 x + 0.5 \cot x - 5 = 0$

57. $2 \tan^2 x + 7 \tan x - 15 = 0$

58. $6 \operatorname{sen}^2 x - 7 \operatorname{sen} x + 2 = 0$

En los Ejercicios 59-62, use la fórmula cuadrática para resolver la ecuación en el intervalo $[0, 2\pi)$. A continuación, use una calculadora de gráficas para aproximar el ángulo x.

59. $12 \operatorname{sen}^2 x - 13 \operatorname{sen} x + 3 = 0$

60. $3 \tan^2 x + 4 \tan x - 4 = 0$

61. $\tan^2 x + 3 \tan x + 1 = 0$

62. $4 \cos^2 x - 4 \cos x - 1 = 0$

En los Ejercicios 63-74, use funciones inversas donde sea necesario para hallar todas las soluciones de la ecuación en el intervalo $[0, 2\pi)$.

63. $\tan^2 x + \tan x - 12 = 0$

64. $\tan^2 x - \tan x - 2 = 0$

65. $\tan^2 x - 6 \tan x + 5 = 0$

66. $\sec^2 x + \tan x - 3 = 0$

67. $2 \cos^2 x - 5 \cos x + 2 = 0$

68. $2 \operatorname{sen}^2 x - 7 \operatorname{sen} x + 3 = 0$

69. $\cot^2 x - 9 = 0$

70. $\cot^2 x - 6 \cot x + 5 = 0$

71. $\sec^2 x - 4 \sec x = 0$

72. $\sec^2 x + 2 \sec x - 8 = 0$

73. $\csc^2 x + 3 \csc x - 4 = 0$

74. $\csc^2 x - 5 \csc x = 0$

En los Ejercicios 75-78, use una calculadora de gráficas para aproximar las soluciones (a tres lugares decimales) de la ecuación en el intervalo dado.

75. $3 \tan^2 x + 5 \tan x - 4 = 0, \quad \left[-\dfrac{\pi}{2}, \dfrac{\pi}{2}\right]$

76. $\cos^2 x - 2 \cos x - 1 = 0, \quad [0, \pi]$

77. $4 \cos^2 x - 2 \operatorname{sen} x + 1 = 0, \quad \left[-\dfrac{\pi}{2}, \dfrac{\pi}{2}\right]$

78. $2 \sec^2 x + \tan x - 6 = 0, \quad \left[-\dfrac{\pi}{2}, \dfrac{\pi}{2}\right]$

En los Ejercicios 79-84, (a) use una calculadora de gráficas para graficar la función y aproximar los puntos máximo y mínimo sobre la gráfica en el intervalo $[0, 2\pi)$, y (b) resuelva la ecuación trigonométrica y demuestre que sus soluciones son las coordenadas x de los puntos máximo y mínimo de f. (Se requiere cálculo para hallar la ecuación trigonométrica.)

	Función	*Ecuación trigonométrica*
79.	$f(x) = \operatorname{sen}^2 x + \cos x$	$2 \operatorname{sen} x \cos x - \operatorname{sen} x = 0$
80.	$f(x) = \cos^2 x - \operatorname{sen} x$	$-2 \operatorname{sen} x \cos x - \cos x = 0$
81.	$f(x) = \operatorname{sen} x + \cos x$	$\cos x - \operatorname{sen} x = 0$
82.	$f(x) = 2 \operatorname{sen} x + \cos 2x$	$2 \cos x - 4 \operatorname{sen} x \cos x = 0$
83.	$f(x) = \operatorname{sen} x \cos x$	$-\operatorname{sen}^2 x + \cos^2 x = 0$
84.	$f(x) = \sec x + \tan x - x$	$\sec x \tan x + \sec^2 x - 1 = 0$

PUNTO FIJO En los Ejercicios 85 y 86, encuentre el mínimo *punto fijo* positivo de la función f. [Un punto fijo de una función f es un número real c tal que $f(c) = c$.]

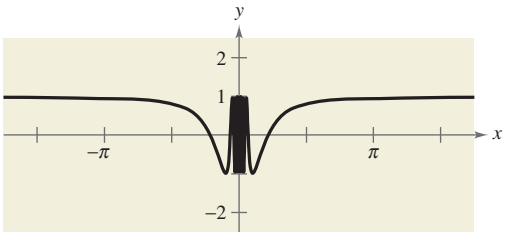
85. $f(x) = \tan \dfrac{\pi x}{4}$

86. $f(x) = \cos x$

87. RAZONAMIENTO GRÁFICO Considere la función dada por

$$f(x) = \cos \frac{1}{x}$$

y su gráfica mostrada en la figura.



(a) ¿Cuál es el dominio de la función?

(b) Identifique cualquier simetría y cualesquiera asíntotas de la gráfica.

(c) Describa el comportamiento de la función cuando $x \to 0$.

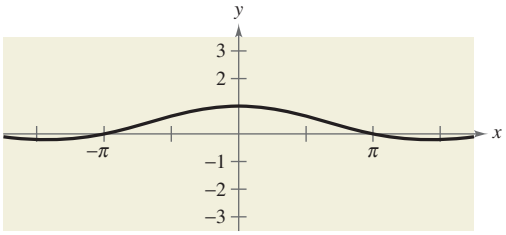
(d) ¿Cuántas soluciones tiene la ecuación

$$\cos \frac{1}{x} = 0$$

en el intervalo $[-1, 1]$? Encuéntrelas.

(e) ¿La ecuación $\cos(1/x) = 0$ tiene máxima solución? Si es así, aproxímela; si no es así, explique por qué.

88. RAZONAMIENTO GRÁFICO Considere la función dada por $f(x) = (\operatorname{sen} x)/x$ y su gráfica mostrada en la figura.



(a) ¿Cuál es el dominio de la función?

(b) Identifique cualquier simetría y cualesquiera asíntotas de la gráfica.

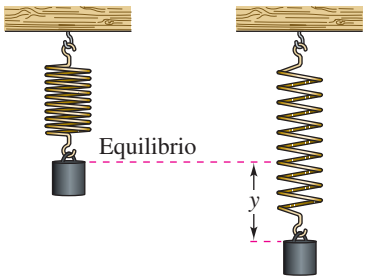
(c) Describa el comportamiento de la función cuando $x \to 0$.

(d) ¿Cuántas soluciones tiene la ecuación

$$\frac{\operatorname{sen} x}{x} = 0$$

en el intervalo $[-8, 8]$? Encuéntrelas.

89. MOVIMIENTO ARMÓNICO Una pesa está oscilando en el extremo de un resorte (vea figura). La posición de la pesa respecto al punto de equilibrio está dada por $y = \frac{1}{12}(\cos 8t - 3 \operatorname{sen} 8t)$, donde y es el desplazamiento (en metros) y t es el tiempo (en segundos). Encuentre los tiempos cuando la pesa se encuentre en el punto de equilibrio ($y = 0$) para $0 \le t \le 1$.



90. MOVIMIENTO ARMÓNICO AMORTIGUADO El desplazamiento desde el equilibrio de una pesa que oscila en el extremo de un resorte está dado por $y = 1.56e^{-0.22t}\cos 4.9t$, donde y es el desplazamiento (en pies) y t es el tiempo (en segundos). Use una calculadora de gráficas para graficar la función de desplazamiento para $0 \le t \le 10$. Encuentre el tiempo más allá del cual el desplazamiento no excede de 1 pie a partir del equilibrio.

91. VENTAS Las ventas mensuales S (en miles de unidades) de un producto estacional están aproximadas por

$$S = 74.50 + 43.75 \operatorname{sen} \frac{\pi t}{6}$$

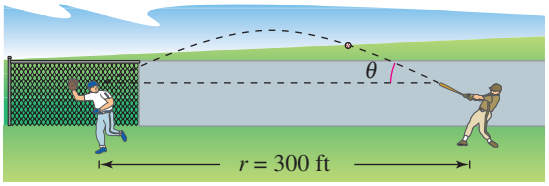
donde t es el tiempo (en meses), con $t = 1$ correspondiente a enero. Determine los meses en los que las ventas pasaron de 100 000 unidades.

92. VENTAS Las ventas mensuales S (en cientos de unidades) de equipo para esquiar, en una tienda de artículos deportivos, están aproximadas por

$$S = 58.3 + 32.5 \cos \frac{\pi t}{6}$$

donde t es el tiempo (en meses), con $t = 1$ correspondiente a enero. Determine los meses en los que las ventas pasaron de 7500 unidades.

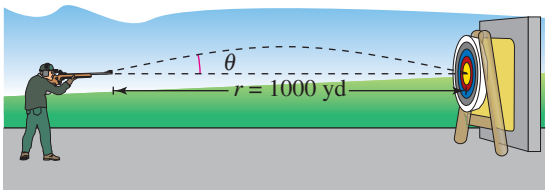
93. MOVIMIENTO DE UN PROYECTIL Una pelota de béisbol que ha sido bateada pierde contacto con el bate a un ángulo de θ con la horizontal y a una velocidad inicial de $v_0 = 100$ pies por segundo. La pelota es atrapada por un jardinero a 300 pies del *home* (vea figura). Encuentre θ si el alcance r del proyectil está dado por $r = \frac{1}{32}v_0^2 \operatorname{sen} 2\theta$.



No a escala

94. MOVIMIENTO DE UN PROYECTIL Un tirador trata de acertar en un blanco situado a una distancia de 1000 yardas, con un fusil que dispara a 1200 pies por segundo en la boca del cañón (vea figura). Despreciando la resistencia del aire, determine el ángulo mínimo de elevación θ del fusil si el alcance r está dado por

$$r = \frac{1}{32}v_0^2 \operatorname{sen} 2\theta.$$



No a escala

95. RUEDA DE LA FORTUNA Una rueda de la fortuna se construye de modo que la altura h (en pies) sobre el suelo, en un asiento en ese juego mecánico en el tiempo t (en minutos), se puede modelar con

$$h(t) = 53 + 50 \operatorname{sen}\left(\frac{\pi}{16}t - \frac{\pi}{2}\right).$$

La rueda hace una revolución cada 32 segundos, y empieza a funcionar cuando $t = 0$.

(a) Durante los primeros 32 segundos del viaje, ¿cuándo estará a 53 pies sobre el suelo una persona en la rueda de la fortuna?

(b) ¿Cuándo estará la persona en lo más alto de la rueda por primera vez durante el viaje? Si el viaje dura 160 segundos, ¿cuántas veces estará la persona en lo más alto de la rueda y en qué momentos?

96. ANÁLISIS DE DATOS: METEOROLOGÍA La tabla siguiente muestra el promedio diario de temperaturas altas en Houston H (en grados Fahrenheit) para el mes t, con $t = 1$ correspondiente a enero. (Fuente: National Climatic Data Center)

Mes, t	Houston, H
1	62.3
2	66.5
3	73.3
4	79.1
5	85.5
6	90.7
7	93.6
8	93.5
9	89.3
10	82.0
11	72.0
12	64.6

(a) Genere una gráfica de dispersión de los datos.

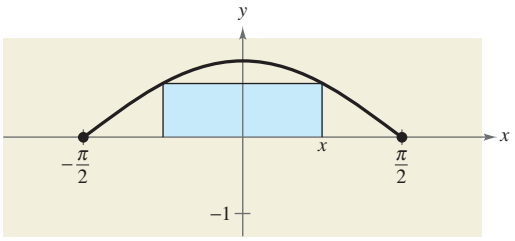
(b) Encuentre un modelo de coseno para las temperaturas en Houston.

(c) Use una calculadora de gráficas para graficar los puntos de datos y el modelo para las temperaturas en Houston. ¿Qué tan bien se ajusta el modelo a los datos?

(d) ¿Cuál es el promedio general diario de alta temperatura en Houston?

(e) Use una calculadora de gráficas para describir los meses durante los cuales el promedio diario de alta temperatura sea arriba de 86° F y debajo de 86° F?

97. GEOMETRÍA El área de un rectángulo (vea figura) inscrito en un arco de la gráfica de $y = \cos x$ está dada por $A = 2x \cos x$, $0 < x < \pi/2$.



(a) Use una calculadora de gráficas para graficar la función de área, y aproxime el área del máximo rectángulo inscrito.

(b) Determine los valores de x para los cuales $A \geq 1$.

98. APROXIMACIÓN CUADRÁTICA Considere la función dada por $f(x) = 3 \operatorname{sen}(0.6x - 2)$.

(a) Aproxime el cero de la función en el intervalo $[0, 6]$.

(b) Una aproximación cuadrática acorde con f en $x = 5$ es $g(x) = -0.45x^2 + 5.52x - 13.70$. Use una calculadora de gráficas para graficar f y g en la misma pantalla. Describa el resultado.

(c) Use la fórmula cuadrática para hallar los ceros de g. Compare el cero en el intervalo $[0, 6]$ con el resultado del inciso (a).

EXPLORACIÓN

¿VERDADERO O FALSO? En los Ejercicios 99 y 100, determine si la proposición es verdadera o falsa. Justifique su respuesta.

99. La ecuación $2 \operatorname{sen} 4t - 1 = 0$ tiene cuatro veces el número de soluciones en el intervalo $[0, 2\pi)$ que la ecuación $2 \operatorname{sen} t - 1 = 0$.

100. Si usted resuelve correctamente una ecuación trigonométrica para la proposición $\operatorname{sen} x = 3.4$, entonces puede terminar resolviendo la ecuación usando una función inversa.

101. PIÉNSELO Explique qué pasaría si divide cada lado de la ecuación $\cot x \cos^2 x = 2 \cot x$ entre $\cot x$. ¿Es éste un método correcto a usar cuando se resuelvan ecuaciones?

102. RAZONAMIENTO GRÁFICO Use una calculadora de gráficas para confirmar las soluciones halladas en el ejemplo 6 en dos formas diferentes.

(a) Grafique ambos lados de la ecuación y encuentre las coordenadas x de los puntos en los que las gráficas se intersecan.

Lado izquierdo: $y = \cos x + 1$

Lado derecho: $y = \operatorname{sen} x$

(b) Grafique la ecuación $y = \cos x + 1 - \operatorname{sen} x$ y encuentre las intersecciones de la gráfica con el eje x. ¿Ambos métodos producen los mismos valores de x? ¿Cuál método prefiere usted? Explique.

103. Explique verbalmente la forma en que el álgebra es importante para resolver ecuaciones trigonométricas.

104. TOQUE FINAL Considere la ecuación $2 \operatorname{sen} x - 1 = 0$. Explique las similitudes y diferencias entre hallar todas las soluciones del intervalo $\left[0, \frac{\pi}{2}\right)$, hallar todas las soluciones del intervalo $[0, 2\pi)$ y hallar la solución general.

PROYECTO: METEOROLOGÍA Para trabajar una aplicación extendida que analice las altas temperaturas diarias normales en Phoenix y en Seattle, visite el sitio web de este texto en *academic.cengage.com*. (Fuente de Datos: NOAA)

5.4 Fórmulas de suma y diferencia

Lo que debe aprender

- Usar fórmulas de suma y diferencia para evaluar funciones trigonométricas, verificar identidades y resolver ecuaciones trigonométricas.

Por qué debe aprenderlo

Se pueden usar identidades para reescribir expresiones trigonométricas. Por ejemplo, en el Ejercicio 89 de la página 403 se puede usar una identidad para reescribir una expresión trigonométrica en una forma que ayude a analizar una ecuación de movimiento armónico.

Richard Megna/Fundamental Photographs

Uso de fórmulas de suma y diferencia

En esta sección y en la siguiente estudiaremos los usos de varias identidades y fórmulas trigonométricas.

Fórmulas de suma y diferencia

$$\operatorname{sen}(u + v) = \operatorname{sen} u \cos v + \cos u \operatorname{sen} v$$

$$\operatorname{sen}(u - v) = \operatorname{sen} u \cos v - \cos u \operatorname{sen} v$$

$$\cos(u + v) = \cos u \cos v - \operatorname{sen} u \operatorname{sen} v$$

$$\cos(u - v) = \cos u \cos v + \operatorname{sen} u \operatorname{sen} v$$

$$\tan(u + v) = \frac{\tan u + \tan v}{1 - \tan u \tan v} \qquad \tan(u - v) = \frac{\tan u - \tan v}{1 + \tan u \tan v}$$

Para una demostración de las fórmulas de suma y diferencia, vea la página 422.

Los ejemplos 1 y 2 muestran el modo en que se pueden usar **fórmulas de suma y diferencia** para hallar valores exactos de funciones trigonométricas que contengan sumas y diferencias de ángulos especiales.

Ejemplo 1 Evaluar una función trigonométrica

Encuentre el valor exacto de $\operatorname{sen}\frac{\pi}{12}$.

Solución

Para hallar el valor *exacto* de $\operatorname{sen}\frac{\pi}{12}$, use el hecho de que

$$\frac{\pi}{12} = \frac{\pi}{3} - \frac{\pi}{4}.$$

En consecuencia, la fórmula para $\operatorname{sen}(u - v)$ dará

$$\begin{aligned}
\operatorname{sen}\frac{\pi}{12} &= \operatorname{sen}\left(\frac{\pi}{3} - \frac{\pi}{4}\right) \\
&= \operatorname{sen}\frac{\pi}{3}\cos\frac{\pi}{4} - \cos\frac{\pi}{3}\operatorname{sen}\frac{\pi}{4} \\
&= \frac{\sqrt{3}}{2}\left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right) - \frac{1}{2}\left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right) \\
&= \frac{\sqrt{6} - \sqrt{2}}{4}.
\end{aligned}$$

Trate de verificar este resultado en su calculadora. Encontrará que $\operatorname{sen}\frac{\pi}{12} \approx 0.259$.

PUNTO *de repaso* Ahora trate de hacer el Ejercicio 7.

Tip de estudio

Otra forma de resolver el Ejemplo 2 es usar el hecho de que $75° = 120° - 45°$ junto con la fórmula para $\cos(u - v)$.

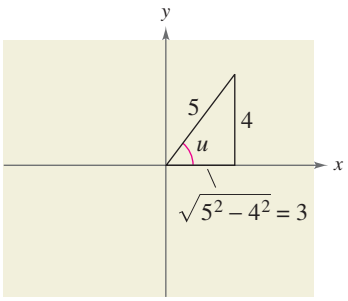


FIGURA 5.10

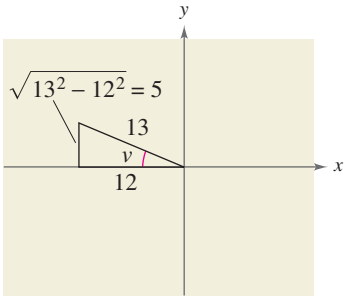
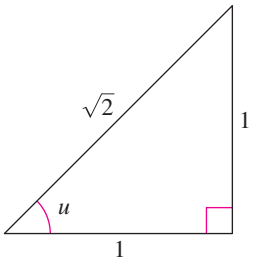


FIGURA 5.11



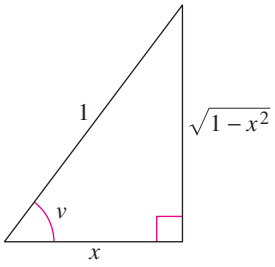


FIGURA 5.12

Ejemplo 2 Evaluar una función trigonométrica

Encuentre el valor exacto de $\cos 75°$.

Solución

Usando el hecho de que $75° = 30° + 45°$, junto con la fórmula para $\cos(u + v)$, se obtiene

$$\begin{aligned}\cos 75° &= \cos(30° + 45°)\\ &= \cos 30° \cos 45° - \operatorname{sen} 30° \operatorname{sen} 45°\\ &= \frac{\sqrt{3}}{2}\left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right) - \frac{1}{2}\left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right) = \frac{\sqrt{6} - \sqrt{2}}{4}.\end{aligned}$$

PUNTO *de repaso* Ahora trate de hacer el Ejercicio 11.

Ejemplo 3 Evaluar una expresión trigonométrica

Encuentre el valor exacto de $\operatorname{sen}(u + v)$ dado

$$\operatorname{sen} u = \frac{4}{5}, \text{ donde } 0 < u < \frac{\pi}{2} \quad \text{y} \quad \cos v = -\frac{12}{13}, \text{ donde } \frac{\pi}{2} < v < \pi.$$

Solución

Como $\operatorname{sen} u = 4/5$ y u está en el primer cuadrante, $\cos u = 3/5$, como se ve en la Figura 5.10. Como $\cos v = -12/13$ y v está en el segundo cuadrante, $\operatorname{sen} v = 5/13$, como se ve en la Figura 5.11. Se puede hallar $\operatorname{sen}(u + v)$ como sigue.

$$\begin{aligned}\operatorname{sen}(u + v) &= \operatorname{sen} u \cos v + \cos u \operatorname{sen} v\\ &= \left(\frac{4}{5}\right)\left(-\frac{12}{13}\right) + \left(\frac{3}{5}\right)\left(\frac{5}{13}\right)\\ &= -\frac{48}{65} + \frac{15}{65}\\ &= -\frac{33}{65}\end{aligned}$$

PUNTO *de repaso* Ahora trate de hacer el Ejercicio 43.

Ejemplo 4 Aplicar una fórmula para suma

Escriba $\cos(\arctan 1 + \arccos x)$ como expresión algebraica.

Solución

Esta expresión se ajusta a la fórmula para $\cos(u + v)$. Los ángulos $u = \arctan 1$ y $v = \arccos x$ se muestran en la Figura 5.12. Entonces,

$$\begin{aligned}\cos(u + v) &= \cos(\arctan 1)\cos(\arccos x) - \operatorname{sen}(\arctan 1)\operatorname{sen}(\arccos x)\\ &= \frac{1}{\sqrt{2}} \cdot x - \frac{1}{\sqrt{2}} \cdot \sqrt{1 - x^2}\\ &= \frac{x - \sqrt{1 - x^2}}{\sqrt{2}}.\end{aligned}$$

PUNTO *de repaso* Ahora trate de hacer el Ejercicio 57.

NOTA HISTÓRICA

The Granger Collection, New York

Hiparco, considerado el más eminente de los astrónomos griegos, nació hacia el año 190 d.C. en Nicea. Se le considera inventor de la trigonometría. También dedujo las fórmulas de suma y resta para sen$(A \pm B)$ y cos$(A \pm B)$.

El ejemplo 5 muestra cómo usar una fórmula de diferencia para demostrar la identidad de cofunción

$$\cos\left(\frac{\pi}{2} - x\right) = \operatorname{sen} x.$$

Ejemplo 5 Demostrar una identidad de confunción

Demuestre la identidad de cofunción $\cos\left(\frac{\pi}{2} - x\right) = \operatorname{sen} x$.

Solución

Usando la fórmula para $\cos(u - v)$, tenemos

$$\begin{aligned}\cos\left(\frac{\pi}{2} - x\right) &= \cos\frac{\pi}{2}\cos x + \operatorname{sen}\frac{\pi}{2}\operatorname{sen} x \\ &= (0)(\cos x) + (1)(\operatorname{sen} x) \\ &= \operatorname{sen} x.\end{aligned}$$

PUNTO *de repaso* Ahora trate de hacer el Ejercicio 61.

Se pueden usar las fórmulas de suma y diferencia para reescribir expresiones como

$$\operatorname{sen}\left(\theta + \frac{n\pi}{2}\right) \quad \text{y} \quad \cos\left(\theta + \frac{n\pi}{2}\right), \quad \text{donde } n \text{ es un entero}$$

como expresiones que contienen sólo sen θ o cos θ. Las fórmulas resultantes se denominan **fórmulas de reducción.**

Ejemplo 6 Deducir fórmulas de reducción

Simplifique cada una de las expresiones siguientes.

a. $\cos\left(\theta - \frac{3\pi}{2}\right)$ **b.** $\tan(\theta + 3\pi)$

Solución

a. Usando la fórmula para $\cos(u - v)$, tenemos

$$\begin{aligned}\cos\left(\theta - \frac{3\pi}{2}\right) &= \cos\theta\cos\frac{3\pi}{2} + \operatorname{sen}\theta\operatorname{sen}\frac{3\pi}{2} \\ &= (\cos\theta)(0) + (\operatorname{sen}\theta)(-1) \\ &= -\operatorname{sen}\theta.\end{aligned}$$

b. Usando la fórmula para $\tan(u + v)$, tenemos

$$\begin{aligned}\tan(\theta + 3\pi) &= \frac{\tan\theta + \tan 3\pi}{1 - \tan\theta\tan 3\pi} \\ &= \frac{\tan\theta + 0}{1 - (\tan\theta)(0)} \\ &= \tan\theta.\end{aligned}$$

PUNTO *de repaso* Ahora trate de hacer el Ejercicio 73.

Ejemplo 7 Resolver una ecuación trigonométrica

Encuentre todas las soluciones de $\operatorname{sen}\left(x + \frac{\pi}{4}\right) + \operatorname{sen}\left(x - \frac{\pi}{4}\right) = -1$ en el intervalo $[0, 2\pi)$.

Solución algebraica

Usando fórmulas de suma y resta, reescriba la ecuación como

$$\operatorname{sen} x \cos\frac{\pi}{4} + \cos x \operatorname{sen}\frac{\pi}{4} + \operatorname{sen} x \cos\frac{\pi}{4} - \cos x \operatorname{sen}\frac{\pi}{4} = -1$$

$$2 \operatorname{sen} x \cos\frac{\pi}{4} = -1$$

$$2(\operatorname{sen} x)\left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right) = \frac{1}{2}$$

$$\operatorname{sen} x = -\frac{1}{\sqrt{2}}$$

$$\operatorname{sen} x = -\frac{\sqrt{2}}{2}.$$

Entonces, las únicas soluciones en el intervalo $[0, 2\pi)$ son

$$x = \frac{5\pi}{4} \quad \text{y} \quad x = \frac{7\pi}{4}.$$

Solución gráfica

Trace la gráfica de

$$y = \operatorname{sen}\left(x + \frac{\pi}{4}\right) + \operatorname{sen}\left(x - \frac{\pi}{4}\right) + 1 \text{ para } 0 \le x < 2\pi$$

como se muestra en la Figura 5.13. En la gráfica se puede ver que las intersecciones con el eje x son $5\pi/4$ y $7\pi/4$. Entonces, las soluciones en el intervalo $[0, 2\pi)$ son

$$x = \frac{5\pi}{4} \quad \text{y} \quad x = \frac{7\pi}{4}.$$

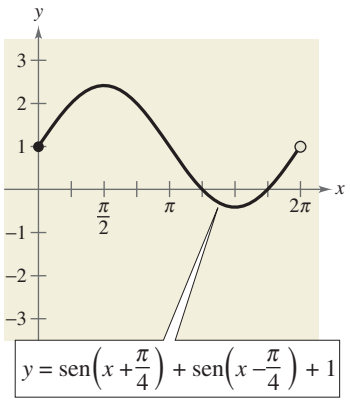


FIGURA 5.13

PUNTO *de repaso* Ahora trate de hacer el Ejercicio 79.

El siguiente ejemplo fue tomado del cálculo. Se usa para derivar la derivada de la función seno.

Ejemplo 8 Una aplicación al cálculo

Compruebe que $\dfrac{\operatorname{sen}(x + h) - \operatorname{sen} x}{h} = (\cos x)\left(\dfrac{\operatorname{sen} h}{h}\right) - (\operatorname{sen} x)\left(\dfrac{1 - \cos h}{h}\right)$, donde $h \neq 0$.

Solución

Usando la fórmula para $\operatorname{sen}(u + v)$, se tiene

$$\frac{\operatorname{sen}(x + h) - \operatorname{sen} x}{h} = \frac{\operatorname{sen} x \cos h + \cos x \operatorname{sen} h - \operatorname{sen} x}{h}$$

$$= \frac{\cos x \operatorname{sen} h - \operatorname{sen} x(1 - \cos h)}{h}$$

$$= (\cos x)\left(\frac{\operatorname{sen} h}{h}\right) - (\operatorname{sen} x)\left(\frac{1 - \cos h}{h}\right).$$

PUNTO *de repaso* Ahora trate de hacer el Ejercicio 105.

5.4 EJERCICIOS

En www.CalcChat.com vea las soluciones a los ejercicios impares.

VOCABULARIO: Llene los espacios en blanco.

1. $\operatorname{sen}(u - v) =$ _____
2. $\cos(u + v) =$ _____
3. $\tan(u + v) =$ _____
4. $\operatorname{sen}(u + v) =$ _____
5. $\cos(u - v) =$ _____
6. $\tan(u - v) =$ _____

HABILIDADES Y APLICACIONES

En los Ejercicios 7-12, encuentre el valor exacto de cada expresión.

7. (a) $\cos\left(\frac{\pi}{4} + \frac{\pi}{3}\right)$ (b) $\cos\frac{\pi}{4} + \cos\frac{\pi}{3}$
8. (a) $\operatorname{sen}\left(\frac{3\pi}{4} + \frac{5\pi}{6}\right)$ (b) $\operatorname{sen}\frac{3\pi}{4} + \operatorname{sen}\frac{5\pi}{6}$
9. (a) $\operatorname{sen}\left(\frac{7\pi}{6} - \frac{\pi}{3}\right)$ (b) $\operatorname{sen}\frac{7\pi}{6} - \operatorname{sen}\frac{\pi}{3}$
10. (a) $\cos(120° + 45°)$ (b) $\cos 120° + \cos 45°$
11. (a) $\operatorname{sen}(135° - 30°)$ (b) $\operatorname{sen} 135° - \cos 30°$
12. (a) $\operatorname{sen}(315° - 60°)$ (b) $\operatorname{sen} 315° - \operatorname{sen} 60°$

En los Ejercicios 13-28, encuentre los valores exactos del seno, coseno y tangente del ángulo.

13. $\frac{11\pi}{12} = \frac{3\pi}{4} + \frac{\pi}{6}$
14. $\frac{7\pi}{12} = \frac{\pi}{3} + \frac{\pi}{4}$
15. $\frac{17\pi}{12} = \frac{9\pi}{4} - \frac{5\pi}{6}$
16. $-\frac{\pi}{12} = \frac{\pi}{6} - \frac{\pi}{4}$
17. $105° = 60° + 45°$
18. $165° = 135° + 30°$
19. $195° = 225° - 30°$
20. $255° = 300° - 45°$
21. $\frac{13\pi}{12}$
22. $-\frac{7\pi}{12}$
23. $-\frac{13\pi}{12}$
24. $\frac{5\pi}{12}$
25. $285°$
26. $-105°$
27. $-165°$
28. $15°$

En los Ejercicios 29-36, escriba la expresión como el seno, coseno o tangente de un ángulo.

29. $\operatorname{sen} 3 \cos 1.2 - \cos 3 \operatorname{sen} 1.2$
30. $\cos\frac{\pi}{7}\cos\frac{\pi}{5} - \operatorname{sen}\frac{\pi}{7}\operatorname{sen}\frac{\pi}{5}$
31. $\operatorname{sen} 60° \cos 15° + \cos 60° \operatorname{sen} 15°$
32. $\cos 130° \cos 40° - \operatorname{sen} 130° \operatorname{sen} 40°$
33. $\frac{\tan 45° - \tan 30°}{1 + \tan 45° \tan 30°}$
34. $\frac{\tan 140° - \tan 60°}{1 + \tan 140° \tan 60°}$
35. $\frac{\tan 2x + \tan x}{1 - \tan 2x \tan x}$
36. $\cos 3x \cos 2y + \operatorname{sen} 3x \operatorname{sen} 2y$

En los Ejercicios 37-42, encuentre el valor exacto de la expresión.

37. $\operatorname{sen}\frac{\pi}{12}\cos\frac{\pi}{4} + \cos\frac{\pi}{12}\operatorname{sen}\frac{\pi}{4}$
38. $\cos\frac{\pi}{16}\cos\frac{3\pi}{16} - \operatorname{sen}\frac{\pi}{16}\operatorname{sen}\frac{3\pi}{16}$
39. $\operatorname{sen} 120° \cos 60° - \cos 120° \operatorname{sen} 60°$
40. $\cos 120° \cos 30° + \operatorname{sen} 120° \operatorname{sen} 30°$
41. $\frac{\tan(5\pi/6) - \tan(\pi/6)}{1 + \tan(5\pi/6)\tan(\pi/6)}$
42. $\frac{\tan 25° + \tan 110°}{1 - \tan 25° \tan 110°}$

En los Ejercicios 43-50, encuentre el valor exacto de la función trigonométrica dado que $\operatorname{sen} u = \frac{5}{13}$ y $\cos v = -\frac{3}{5}$. (Tanto u como v están en el segundo cuadrante.)

43. $\operatorname{sen}(u + v)$
44. $\cos(u - v)$
45. $\cos(u + v)$
46. $\operatorname{sen}(v - u)$
47. $\tan(u + v)$
48. $\csc(u - v)$
49. $\sec(v - u)$
50. $\cot(u + v)$

En los Ejercicios 51-56, encuentre el valor exacto de la función trigonométrica dado que $\operatorname{sen} u = -\frac{7}{25}$ y $\cos v = -\frac{4}{5}$. (Tanto u como v están en el tercer cuadrante.)

51. $\cos(u + v)$
52. $\operatorname{sen}(u + v)$
53. $\tan(u - v)$
54. $\cot(v - u)$
55. $\csc(u - v)$
56. $\sec(v - u)$

En los Ejercicios 57-60, escriba la expresión trigonométrica como expresión algebraica.

57. $\operatorname{sen}(\operatorname{arcsen} x + \arccos x)$
58. $\operatorname{sen}(\arctan 2x - \arccos x)$
59. $\cos(\arccos x + \operatorname{arcsen} x)$
60. $\cos(\arccos x - \arctan x)$

En los Ejercicios 61-70, demuestre la identidad.

61. $\operatorname{sen}\left(\frac{\pi}{2} - x\right) = \cos x$

62. $\operatorname{sen}\left(\frac{\pi}{2} + x\right) = \cos x$

63. $\operatorname{sen}\left(\frac{\pi}{6} + x\right) = \frac{1}{2}(\cos x + \sqrt{3}\operatorname{sen} x)$

64. $\cos\left(\frac{5\pi}{4} - x\right) = -\frac{\sqrt{2}}{2}(\cos x + \operatorname{sen} x)$

65. $\cos(\pi - \theta) + \operatorname{sen}\left(\frac{\pi}{2} + \theta\right) = 0$

66. $\tan\left(\frac{\pi}{4} - \theta\right) = \frac{1 - \tan\theta}{1 + \tan\theta}$

67. $\cos(x + y)\cos(x - y) = \cos^2 x - \operatorname{sen}^2 y$

68. $\operatorname{sen}(x + y)\operatorname{sen}(x - y) = \operatorname{sen}^2 x - \operatorname{sen}^2 y$

69. $\operatorname{sen}(x + y) + \operatorname{sen}(x - y) = 2\operatorname{sen} x \cos y$

70. $\cos(x + y) + \cos(x - y) = 2\cos x \cos y$

En los Ejercicios 71-74, simplifique algebraicamente la expresión y use una calculadora de gráficas para confirmar gráficamente su respuesta.

71. $\cos\left(\frac{3\pi}{2} - x\right)$

72. $\cos(\pi + x)$

73. $\operatorname{sen}\left(\frac{3\pi}{2} + \theta\right)$

74. $\tan(\pi + \theta)$

En los Ejercicios 75-84, encuentre todas las soluciones de la ecuación en el intervalo $[0, 2\pi)$.

75. $\operatorname{sen}(x + \pi) - \operatorname{sen} x + 1 = 0$

76. $\operatorname{sen}(x + \pi) - \operatorname{sen} x - 1 = 0$

77. $\cos(x + \pi) - \cos x - 1 = 0$

78. $\cos(x + \pi) - \cos x + 1 = 0$

79. $\operatorname{sen}\left(x + \frac{\pi}{6}\right) - \operatorname{sen}\left(x - \frac{\pi}{6}\right) = \frac{1}{2}$

80. $\operatorname{sen}\left(x + \frac{\pi}{3}\right) + \operatorname{sen}\left(x - \frac{\pi}{3}\right) = 1$

81. $\cos\left(x + \frac{\pi}{4}\right) - \cos\left(x - \frac{\pi}{4}\right) = 1$

82. $\tan(x + \pi) + 2\operatorname{sen}(x + \pi) = 0$

83. $\operatorname{sen}\left(x + \frac{\pi}{2}\right) - \cos^2 x = 0$

84. $\cos\left(x - \frac{\pi}{2}\right) + \operatorname{sen}^2 x = 0$

En los Ejercicios 85-88, use una calculadora de gráficas para aproximar las soluciones en el intervalo $[0, 2\pi)$.

85. $\cos\left(x + \frac{\pi}{4}\right) + \cos\left(x - \frac{\pi}{4}\right) = 1$

86. $\tan(x + \pi) - \cos\left(x + \frac{\pi}{2}\right) = 0$

87. $\operatorname{sen}\left(x + \frac{\pi}{2}\right) + \cos^2 x = 0$

88. $\cos\left(x - \frac{\pi}{2}\right) - \operatorname{sen}^2 x = 0$

89. MOVIMIENTO ARMÓNICO Una pesa se fija a un resorte suspendido verticalmente del cielo raso de una casa. Cuando se aplica una fuerza motriz al sistema, la pesa se mueve verticalmente desde su posición de equilibrio y su movimiento está modelado por

$$y = \frac{1}{3}\operatorname{sen} 2t + \frac{1}{4}\cos 2t$$

donde y es la distancia desde el equilibrio (en pies) y t es el tiempo (en segundos).

(a) Use la identidad

$$a\operatorname{sen} B\theta + b\cos B\theta = \sqrt{a^2 + b^2}\operatorname{sen}(B\theta + C)$$

donde $C = \arctan(b/a)$, $a > 0$, para escribir el modelo en la forma $y = \sqrt{a^2 + b^2}\operatorname{sen}(Bt + C)$.

(b) Encuentre la amplitud de las oscilaciones de la pesa.

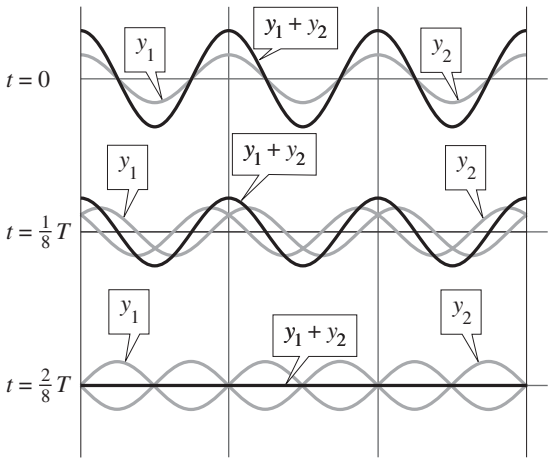
(c) Encuentre la frecuencia de las oscilaciones de la pesa.

90. ONDAS ESTACIONARIAS La ecuación de una onda estacionaria se obtiene al sumar los desplazamientos de dos ondas viajeras en direcciones opuestas (vea figura). Suponga que cada una de las ondas tiene amplitud A, periodo T y longitud de onda λ. Si los modelos para estas ondas son

$$y_1 = A\cos 2\pi\left(\frac{t}{T} - \frac{x}{\lambda}\right) \quad \text{y} \quad y_2 = A\cos 2\pi\left(\frac{t}{T} + \frac{x}{\lambda}\right)$$

demuestre que

$$y_1 + y_2 = 2A\cos\frac{2\pi t}{T}\cos\frac{2\pi x}{\lambda}.$$



EXPLORACIÓN

¿VERDADERO O FALSO? En los Ejercicios 91-94, determine si la proposición es verdadera o falsa. Justifique su respuesta.

91. $\operatorname{sen}(u \pm v) = \operatorname{sen} u \cos v \pm \cos u \operatorname{sen} v$

92. $\cos(u \pm v) = \cos u \cos v \pm \operatorname{sen} u \operatorname{sen} v$

93. $\tan\left(x - \frac{\pi}{4}\right) = \frac{\tan x + 1}{1 - \tan x}$

94. $\operatorname{sen}\left(x - \frac{\pi}{2}\right) = -\cos x$

En los Ejercicios 95-98, compruebe la identidad.

95. $\cos(n\pi + \theta) = (-1)^n \cos\theta$, n es un entero

96. $\operatorname{sen}(n\pi + \theta) = (-1)^n \operatorname{sen}\theta$, n es un entero

97. $a \operatorname{sen} B\theta + b \cos B\theta = \sqrt{a^2 + b^2}\operatorname{sen}(B\theta + C)$, donde $C = \arctan(b/a)$ y $a > 0$

98. $a \operatorname{sen} B\theta + b \cos B\theta = \sqrt{a^2 + b^2}\cos(B\theta - C)$, donde $C = \arctan(a/b)$ y $b > 0$

En los Ejercicios 99-102, use las fórmulas dadas en los ejercicios 97 y 98 para escribir la expresión trigonométrica en las formas siguientes.

(a) $\sqrt{a^2 + b^2}\operatorname{sen}(B\theta + C)$ (b) $\sqrt{a^2 + b^2}\cos(B\theta - C)$

99. $\operatorname{sen}\theta + \cos\theta$

100. $3 \operatorname{sen} 2\theta + 4 \cos 2\theta$

101. $12 \operatorname{sen} 3\theta + 5 \cos 3\theta$

102. $\operatorname{sen} 2\theta + \cos 2\theta$

En los Ejercicios 103 y 104, use las fórmulas dadas en los ejercicios 97 y 98 para escribir la expresión trigonométrica en la forma $a \operatorname{sen} B\theta + b \cos B\theta$.

103. $2 \operatorname{sen}\left(\theta + \frac{\pi}{4}\right)$

104. $5 \cos\left(\theta - \frac{\pi}{4}\right)$

105. Compruebe la siguiente identidad usada en cálculo.

$$\frac{\cos(x + h) - \cos x}{h} = \frac{\cos x(\cos h - 1)}{h} - \frac{\operatorname{sen} x \operatorname{sen} h}{h}$$

106. Sea $x = \pi/6$ en la identidad del Ejercicio 105 y defina las funciones f y g como sigue.

$$f(h) = \frac{\cos[(\pi/6) + h] - \cos(\pi/6)}{h}$$

$$g(h) = \cos\frac{\pi}{6}\left(\frac{\cos h - 1}{h}\right) - \operatorname{sen}\frac{\pi}{6}\left(\frac{\operatorname{sen} h}{h}\right)$$

(a) ¿Cuáles son los dominios de las funciones f y g?

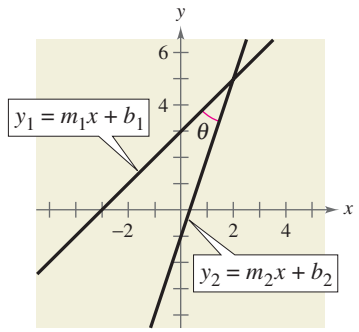
(b) Use una calculadora de gráficas para completar la tabla.

h	0.5	0.2	0.1	0.05	0.02	0.01
$f(h)$						
$g(h)$						

(c) Use una calculadora de gráficas para graficar las funciones f y g.

(d) Use la tabla y las gráficas para hacer una conjetura acerca de los valores de las funciones f y g cuando $h \to 0$.

En los Ejercicios 107 y 108, use la figura, que muestra dos rectas cuyas ecuaciones son $y_1 = m_1x + b_1$ y $y_2 = m_2x + b_2$. Suponga que ambas rectas tienen pendientes positivas. Deduzca una fórmula para el ángulo entre las dos rectas y, a continuación, úsela para hallar el ángulo entre el par de rectas dadas.



107. $y = x$ y $y = \sqrt{3}x$

108. $y = x$ y $y = \frac{1}{\sqrt{3}}x$

En los Ejercicios 109 y 110, use una calculadora de gráficas para graficar y_1 y y_2 en la misma pantalla. Use las gráficas para determinar si $y_1 = y_2$. Explique su razonamiento.

109. $y_1 = \cos(x + 2)$, $y_2 = \cos x + \cos 2$

110. $y_1 = \operatorname{sen}(x + 4)$, $y_2 = \operatorname{sen} x + \operatorname{sen} 4$

111. DEMOSTRACIÓN

(a) Escriba una demostración de la fórmula para $\operatorname{sen}(u + v)$.

(b) Escriba una demostración de la fórmula para $\operatorname{sen}(u - v)$.

112. TOQUE FINAL Dé un ejemplo para justificar cada proposición.

(a) $\operatorname{sen}(u + v) \neq \operatorname{sen} u + \operatorname{sen} v$

(b) $\operatorname{sen}(u - v) \neq \operatorname{sen} u - \operatorname{sen} v$

(c) $\cos(u + v) \neq \cos u + \cos v$

(d) $\cos(u - v) \neq \cos u - \cos v$

(e) $\tan(u + v) \neq \tan u + \tan v$

(f) $\tan(u - v) \neq \tan u - \tan v$

5.5 Fórmulas de ángulos múltiples y de producto a suma

Lo que debe aprender

- Usar fórmulas de ángulos múltiples para reescribir y evaluar funciones trigonométricas.
- Usar fórmulas de reducción de potencia para reescribir y evaluar funciones trigonométricas.
- Usar fórmulas de semiángulos para reescribir y evaluar funciones trigonométricas.
- Usar fórmulas de producto a suma y de suma a producto para reescribir y evaluar funciones trigonométricas.
- Usar fórmulas trigonométricas para reescribir modelos de la vida real.

Por qué debe aprenderlo

Se puede usar una variedad de fórmulas trigonométricas para reescribir funciones trigonométricas en formas más prácticas. Por ejemplo, en el Ejercicio 135 de la página 415 se puede usar una fórmula de doble ángulo para determinar a qué ángulo una atleta debe lanzar una jabalina.

Mark Dadswell/Getty Images

Fórmulas de ángulos múltiples

En esta sección estudiará otras cuatro categorías de identidades trigonométricas.

1. La primera comprende *funciones de ángulos múltiples,* como sen ku y cos ku.
2. La segunda abarca *cuadrados de funciones trigonométricas,* como $\text{sen}^2 u$.
3. La tercera supone *funciones de semiángulos,* como $\text{sen}(u/2)$.
4. La cuarta implica productos de funciones trigonométricas, como sen u cos v.

Usted debe aprender las **fórmulas de ángulos dobles** porque se usan con frecuencia en trigonometría y cálculo. Para demostraciones de estas fórmulas, vea la página 423.

Fórmulas de ángulos dobles

$$\text{sen } 2u = 2 \text{ sen } u \cos u$$

$$\tan 2u = \frac{2 \tan u}{1 - \tan^2 u}$$

$$\cos 2u = \cos^2 u - \text{sen}^2 u$$
$$= 2\cos^2 u - 1$$
$$= 1 - 2\,\text{sen}^2 u$$

Ejemplo 1 Resolver una ecuación de ángulo múltiple

Resuelva $2 \cos x + \text{sen } 2x = 0$.

Solución

Empiece por reescribir la ecuación para que contenga funciones de x (en lugar de $2x$). A continuación factorice y resuelva.

$$2 \cos x + \text{sen } 2x = 0 \qquad \text{Escribir la ecuación original.}$$

$$2 \cos x + 2 \text{ sen } x \cos x = 0 \qquad \text{Fórmula de ángulo doble}$$

$$2 \cos x(1 + \text{sen } x) = 0 \qquad \text{Factorizar.}$$

$$2 \cos x = 0 \quad \text{y} \quad 1 + \text{sen } x = 0 \qquad \text{Igualar a cero los factores.}$$

$$x = \frac{\pi}{2}, \frac{3\pi}{2} \qquad x = \frac{3\pi}{2} \qquad \text{Soluciones en } [0, 2\pi)$$

En consecuencia, la solución general es

$$x = \frac{\pi}{2} + 2n\pi \quad \text{y} \quad x = \frac{3\pi}{2} + 2n\pi$$

donde n es un entero. Trate de verificar estas soluciones en forma gráfica.

PUNTO *de repaso* Ahora trate de hacer el Ejercicio 19.

Ejemplo 2 Usar fórmulas de ángulo doble para analizar gráficas

Use una fórmula de ángulo doble para reescribir la ecuación

$$y = 4\cos^2 x - 2.$$

A continuación trace la gráfica de la ecuación sobre el intervalo $[0, 2\pi]$.

Solución

Usando la fórmula de ángulo doble para cos $2u$, se puede reescribir la ecuación original como

$$\begin{aligned} y &= 4\cos^2 x - 2 && \text{Escribir la ecuación original.} \\ &= 2(2\cos^2 x - 1) && \text{Factorizar.} \\ &= 2\cos 2x. && \text{Usar fórmula de ángulo doble.} \end{aligned}$$

Usando las técnicas estudiadas en la sección 4.5, se puede reconocer que la gráfica de esta función tiene una amplitud de 2 y un periodo de π. Los puntos clave en el intervalo $[0, \pi]$ son como sigue.

Máximo	Intersección con el eje x	Mínimo	Intersección con el eje x	Máximo
$(0, 2)$	$\left(\frac{\pi}{4}, 0\right)$	$\left(\frac{\pi}{2}, -2\right)$	$\left(\frac{3\pi}{4}, 0\right)$	$(\pi, 2)$

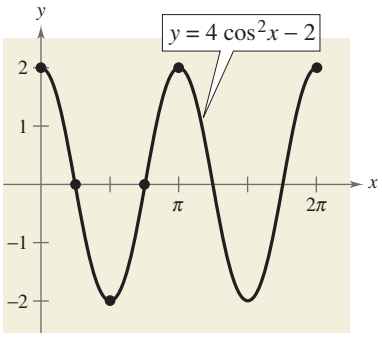


FIGURA 5.14

En la Figura 5.14 se ilustran dos ciclos de la gráfica.

PUNTO *de repaso* Ahora trate de hacer el Ejercicio 33.

Ejemplo 3 Evaluar funciones que contienen ángulos dobles

Use lo siguiente para hallar sen 2θ, cos 2θ y tan 2θ.

$$\cos\theta = \frac{5}{13}, \qquad \frac{3\pi}{2} < \theta < 2\pi$$

Solución

En la Figura 5.15 se puede ver que sen $\theta = y/r = -12/13$. En consecuencia, usando cada una de las fórmulas de ángulo doble, se puede escribir

$$\operatorname{sen} 2\theta = 2\operatorname{sen}\theta\cos\theta = 2\left(-\frac{12}{13}\right)\left(\frac{5}{13}\right) = -\frac{120}{169}$$

$$\cos 2\theta = 2\cos^2\theta - 1 = 2\left(\frac{25}{169}\right) - 1 = -\frac{119}{169}$$

$$\tan 2\theta = \frac{\operatorname{sen} 2\theta}{\cos 2\theta} = \frac{120}{119}.$$

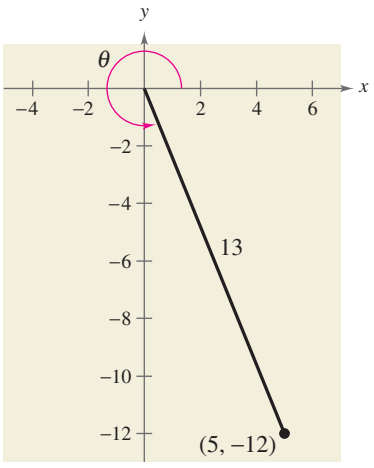


FIGURA 5.15

PUNTO *de repaso* Ahora trate de hacer el Ejercicio 37.

Las fórmulas de ángulo doble no están restringidas a ángulos 2θ y θ. También son válidas otras combinaciones *dobles*, como 4θ y 2θ o 6θ y 3θ. A continuación veamos dos ejemplos.

$$\operatorname{sen} 4\theta = 2\operatorname{sen} 2\theta\cos 2\theta \qquad \text{y} \qquad \cos 6\theta = \cos^2 3\theta - \operatorname{sen}^2 3\theta$$

Con el uso de fórmulas de ángulo doble, junto con las fórmulas de suma dadas en la sección precedente, se pueden formar otras fórmulas de ángulo múltiple.

Ejemplo 4 Deducir una fórmula de triple ángulo

$$\begin{aligned}
\operatorname{sen} 3x &= \operatorname{sen}(2x + x) \\
&= \operatorname{sen} 2x \cos x + \cos 2x \operatorname{sen} x \\
&= 2 \operatorname{sen} x \cos x \cos x + (1 - 2 \operatorname{sen}^2 x) \operatorname{sen} x \\
&= 2 \operatorname{sen} x \cos^2 x + \operatorname{sen} x - 2 \operatorname{sen}^3 x \\
&= 2 \operatorname{sen} x(1 - \operatorname{sen}^2 x) + \operatorname{sen} x - 2 \operatorname{sen}^3 x \\
&= 2 \operatorname{sen} x - 2 \operatorname{sen}^3 x + \operatorname{sen} x - 2 \operatorname{sen}^3 x \\
&= 3 \operatorname{sen} x - 4 \operatorname{sen}^3 x
\end{aligned}$$

PUNTO *de repaso* Ahora trate de hacer el Ejercicio 117.

Fórmulas de reducción de potencias

Las fórmulas de ángulos dobles pueden emplearse para obtener las fórmulas de reducción de potencias expuestas a continuación. En el Ejemplo 5 se muestra una reducción de potencias clásica que se usa en cálculo.

Fórmulas de reducción de potencias

$$\operatorname{sen}^2 u = \frac{1 - \cos 2u}{2} \qquad \cos^2 u = \frac{1 + \cos 2u}{2} \qquad \tan^2 u = \frac{1 - \cos 2u}{1 + \cos 2u}$$

Para una demostración de las fórmulas de reducción de potencias, vea la página 423.

Ejemplo 5 Reducir una potencia

Reescriba $\operatorname{sen}^4 x$ como una suma de primeras potencias de los cosenos de ángulos múltiples.

Solución

Observe el uso repetido de fórmulas de reducción de potencias.

$$\begin{aligned}
\operatorname{sen}^4 x &= (\operatorname{sen}^2 x)^2 && \text{Propiedad de exponentes} \\
&= \left(\frac{1 - \cos 2x}{2}\right)^2 && \text{Fórmula de reducción de potencias} \\
&= \frac{1}{4}(1 - 2 \cos 2x + \cos^2 2x) && \text{Expandir.} \\
&= \frac{1}{4}\left(1 - 2 \cos 2x + \frac{1 + \cos 4x}{2}\right) && \text{Fórmula de reducción de potencias} \\
&= \frac{1}{4} - \frac{1}{2} \cos 2x + \frac{1}{8} + \frac{1}{8} \cos 4x && \text{Propiedad distributiva} \\
&= \frac{1}{8}(3 - 4 \cos 2x + \cos 4x) && \text{Factorizar el factor común.}
\end{aligned}$$

PUNTO *de repaso* Ahora trate de hacer el Ejercicio 43.

Fórmulas para semiángulos

Se pueden deducir algunas formas alternativas útiles de fórmulas de reducción de potencias si se sustituye u con $u/2$. Los resultados reciben el nombre de **fórmulas para semiángulos.**

Fórmulas para semiángulos

$$\operatorname{sen}\frac{u}{2} = \pm\sqrt{\frac{1-\cos u}{2}}$$

$$\cos\frac{u}{2} = \pm\sqrt{\frac{1+\cos u}{2}}$$

$$\tan\frac{u}{2} = \frac{1-\cos u}{\operatorname{sen} u} = \frac{\operatorname{sen} u}{1+\cos u}$$

Los signos de $\operatorname{sen}\frac{u}{2}$ y $\cos\frac{u}{2}$ dependen del cuadrante en que se encuentre $\frac{u}{2}$.

Ejemplo 6 Usar una fórmula de semiángulo

Encuentre el valor exacto de sen 105°.

Solución

Empiece por observar que 105° es la mitad de 210°. Entonces, usando la fórmula de semiángulo para sen$(u/2)$ y el hecho de que 105° está en el segundo cuadrante, tenemos

$$\begin{aligned}\operatorname{sen} 105° &= \sqrt{\frac{1-\cos 210°}{2}}\\ &= \sqrt{\frac{1-(-\cos 30°)}{2}}\\ &= \sqrt{\frac{1+\left(\sqrt{3}/2\right)}{2}}\\ &= \frac{\sqrt{2+\sqrt{3}}}{2}.\end{aligned}$$

Se escoge la raíz cuadrada positiva porque sen θ es positivo en el segundo cuadrante.

PUNTO *de repaso* Ahora trate de hacer el Ejercicio 59.

Tip de estudio

Para hallar el valor exacto de una función trigonométrica con una medida de ángulo en forma de G°M′S″ usando una fórmula de semiángulo, primero convierta la medida del ángulo a forma decimal de grado. A continuación multiplique por 2 la medida del ángulo resultante.

Use su calculadora para verificar el resultado obtenido en el ejemplo 6. Esto es, evalúe sen 105° y $\left(\sqrt{2+\sqrt{3}}\right)/2$.

$$\operatorname{sen} 105° \approx 0.9659258$$

$$\frac{\sqrt{2+\sqrt{3}}}{2} \approx 0.9659258$$

Se puede ver que ambos valores son aproximadamente 0.9659258.

Ejemplo 7 Resolver una ecuación trigonométrica

Encuentre todas las soluciones de $2 - \operatorname{sen}^2 x = 2\cos^2 \frac{x}{2}$ en el intervalo $[0, 2\pi)$.

Solución algebraica

$$2 - \operatorname{sen}^2 x = 2\cos^2 \frac{x}{2}$$ Escribir la ecuación original.

$$2 - \operatorname{sen}^2 x = 2\left(\pm\sqrt{\frac{1 + \cos x}{2}}\right)^2$$ Fórmula de semiángulo

$$2 - \operatorname{sen}^2 x = 2\left(\frac{1 + \cos x}{2}\right)$$ Simplificar.

$$2 - \operatorname{sen}^2 x = 1 + \cos x$$ Simplificar.

$$2 - (1 - \cos^2 x) = 1 + \cos x$$ Identidad pitagórica

$$\cos^2 x - \cos x = 0$$ Simplificar.

$$\cos x(\cos x - 1) = 0$$ Factorizar.

Igualando a cero los factores $\cos x$ y $\cos x - 1$ se encuentra que las soluciones en el intervalo $[0, 2\pi)$ son

$$x = \frac{\pi}{2}, \quad x = \frac{3\pi}{2} \quad \text{y} \quad x = 0.$$

Solución gráfica

Use una calculadora de gráficas puesta en el modo *radian* para graficar $y = 2 - \operatorname{sen}^2 x - 2\cos^2(x/2)$, como se ve en la Figura 5.16. Use el comando *zero* o *root* o los comandos *zoom* y *trace* para aproximar las intersecciones con el eje x en el intervalo $[0, 2\pi)$ para que sean

$$x = 0, x \approx 1.571 \approx \frac{\pi}{2} \text{ y } x \approx 4.712 \approx \frac{3\pi}{2}.$$

Estos valores son las soluciones aproximadas de $2 - \operatorname{sen}^2 x - 2\cos^2(x/2) = 0$ en el intervalo $[0, 2\pi)$.

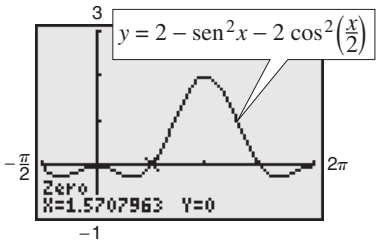


FIGURA 5.16

PUNTO *de repaso* Ahora trate de hacer el Ejercicio 77.

Fórmulas de producto a suma

Cada una de las siguientes **fórmulas de producto a suma** se pueden comprobar usando las fórmulas de suma y resta estudiadas en la sección anterior.

Fórmulas de producto a suma

$$\operatorname{sen} u \operatorname{sen} v = \frac{1}{2}[\cos(u - v) - \cos(u + v)]$$

$$\cos u \cos v = \frac{1}{2}[\cos(u - v) + \cos(u + v)]$$

$$\operatorname{sen} u \cos v = \frac{1}{2}[\operatorname{sen}(u + v) + \operatorname{sen}(u - v)]$$

$$\cos u \operatorname{sen} v = \frac{1}{2}[\operatorname{sen}(u + v) - \operatorname{sen}(u - v)]$$

En cálculo se usan fórmulas de producto a suma para evaluar integrales que contengan los productos de senos y cosenos de dos ángulos diferentes.

Ejemplo 8 Escribir productos como sumas

Reescriba el producto de $\cos 5x \operatorname{sen} 4x$ como una suma o diferencia.

Solución

Usando la fórmula apropiada de producto a suma se obtiene

$$\begin{aligned}\cos 5x \operatorname{sen} 4x &= \tfrac{1}{2}[\operatorname{sen}(5x + 4x) - \operatorname{sen}(5x - 4x)] \\ &= \tfrac{1}{2}\operatorname{sen} 9x - \tfrac{1}{2}\operatorname{sen} x.\end{aligned}$$

PUNTO *de repaso* Ahora trate de hacer el Ejercicio 85.

Ocasionalmente, es útil invertir el procedimiento y escribir una suma de funciones trigonométricas como producto. Esto se puede lograr con las siguientes **fórmulas de suma a producto.**

Fórmulas de suma a producto

$$\operatorname{sen} u + \operatorname{sen} v = 2 \operatorname{sen}\left(\frac{u + v}{2}\right) \cos\left(\frac{u - v}{2}\right)$$

$$\operatorname{sen} u - \operatorname{sen} v = 2 \cos\left(\frac{u + v}{2}\right) \operatorname{sen}\left(\frac{u - v}{2}\right)$$

$$\cos u + \cos v = 2 \cos\left(\frac{u + v}{2}\right) \cos\left(\frac{u - v}{2}\right)$$

$$\cos u - \cos v = -2 \operatorname{sen}\left(\frac{u + v}{2}\right) \operatorname{sen}\left(\frac{u - v}{2}\right)$$

Para una demostración de las fórmulas de suma a producto, vea la página 424.

Ejemplo 9 Usar una fórmula de suma a producto

Encuentre el valor exacto de $\cos 195° + \cos 105°$.

Solución

Usando la fórmula apropiada de suma a producto se obtiene

$$\begin{aligned}\cos 195° + \cos 105° &= 2 \cos\left(\frac{195° + 105°}{2}\right) \cos\left(\frac{195° - 105°}{2}\right) \\ &= 2 \cos 150° \cos 45° \\ &= 2\left(-\frac{\sqrt{3}}{2}\right)\left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right) \\ &= -\frac{\sqrt{6}}{2}.\end{aligned}$$

PUNTO *de repaso* Ahora trate de hacer el Ejercicio 99.

Ejemplo 10 Resolver una ecuación trigonométrica

Resuelva $\operatorname{sen} 5x + \operatorname{sen} 3x = 0$.

Solución algebraica

$$\operatorname{sen} 5x + \operatorname{sen} 3x = 0 \qquad \text{Escribir la ecuación original.}$$

$$2 \operatorname{sen}\left(\frac{5x + 3x}{2}\right) \cos\left(\frac{5x - 3x}{2}\right) = 0 \qquad \text{Fórmula de suma a producto}$$

$$2 \operatorname{sen} 4x \cos x = 0 \qquad \text{Simplificar.}$$

Igualando a cero el factor $2 \operatorname{sen} 4x$ se puede hallar que las soluciones en el intervalo $[0, 2\pi)$ son

$$x = 0, \frac{\pi}{4}, \frac{\pi}{2}, \frac{3\pi}{4}, \pi, \frac{5\pi}{4}, \frac{3\pi}{2}, \frac{7\pi}{4}.$$

La ecuación $\cos x = 0$ no da soluciones adicionales, de modo que se puede concluir que las soluciones son de la forma

$$x = \frac{n\pi}{4}$$

donde n es un entero.

Solución gráfica

Trace la gráfica de

$$y = \operatorname{sen} 5x + \operatorname{sen} 3x,$$

como se muestra en la Figura 5.17. En la gráfica se puede ver que las intersecciones con el eje x se presentan en múltiplos de $\pi/4$. Entonces, se puede concluir que las soluciones son de la forma

$$x = \frac{n\pi}{4}$$

donde n es un entero.

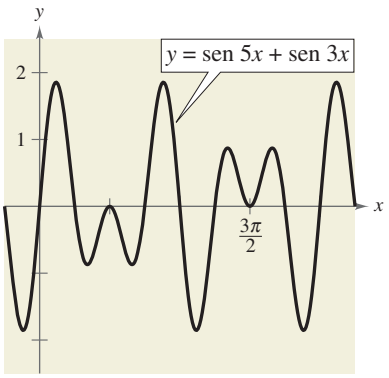


FIGURA 5.17

PUNTO *de repaso* Ahora trate de hacer el Ejercicio 103.

Ejemplo 11 Comprobar una identidad trigonométrica

Compruebe la identidad $\dfrac{\operatorname{sen} 3x - \operatorname{sen} x}{\cos x + \cos 3x} = \tan x$.

Solución

Usando fórmulas apropiadas de suma a producto tenemos

$$\frac{\operatorname{sen} 3x - \operatorname{sen} x}{\cos x + \cos 3x} = \frac{2 \cos\left(\dfrac{3x + x}{2}\right) \operatorname{sen}\left(\dfrac{3x - x}{2}\right)}{2 \cos\left(\dfrac{x + 3x}{2}\right) \cos\left(\dfrac{x - 3x}{2}\right)}$$

$$= \frac{2 \cos(2x) \operatorname{sen} x}{2 \cos(2x) \cos(-x)}$$

$$= \frac{\operatorname{sen} x}{\cos(-x)}$$

$$= \frac{\operatorname{sen} x}{\cos x} = \tan x.$$

PUNTO *de repaso* Ahora trate de hacer el Ejercicio 121.

Aplicación

Ejemplo 12 Movimiento de un proyectil

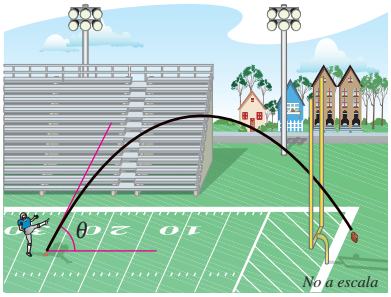


FIGURA 5.18

Ignorando la resistencia del aire, el alcance de un proyectil disparado a un ángulo θ con la horizontal, y con una velocidad inicial de v_0 pies por segundo, está dado por

$$r = \frac{1}{16} v_0^2 \operatorname{sen} \theta \cos \theta$$

donde r es la distancia horizontal (en pies) que el proyectil recorrerá. Un pateador de un equipo de fútbol puede patear un balón desde el nivel del suelo con una velocidad inicial de 80 pies por segundo (vea Figura 5.18).

a. Escriba el modelo del movimiento del proyectil en una forma más sencilla.

b. ¿A qué ángulo debe patear el balón para que éste recorra 200 pies?

c. ¿Para qué ángulo es máxima la distancia horizontal que recorre el balón?

Solución

a. Se puede usar una fórmula de ángulo doble para reescribir el modelo de movimiento del proyectil como

$$r = \frac{1}{32} v_0^2 (2 \operatorname{sen} \theta \cos \theta)$$ Reescribir el modelo original del movimiento del proyectil.

$$= \frac{1}{32} v_0^2 \operatorname{sen} 2\theta.$$ Reescribir el modelo usando una fórmula de ángulo doble.

b. $$r = \frac{1}{32} v_0^2 \operatorname{sen} 2\theta$$ Escribir el modelo del movimiento del proyectil.

$$200 = \frac{1}{32} (80)^2 \operatorname{sen} 2\theta$$ Sustituir 200 por r y 80 por v_0.

$$200 = 200 \operatorname{sen} 2\theta$$ Simplificar.

$$1 = \operatorname{sen} 2\theta$$ Dividir cada lado entre 200.

Sabemos que $2\theta = \pi/2$, por lo que si dividimos este resultado entre 2 resulta $\theta = \pi/4$. Como $\pi/4 = 45°$, se puede concluir que el jugador debe patear el balón a un ángulo de 45° para que el balón recorra 200 pies.

c. Del modelo $r = 200 \operatorname{sen} 2\theta$ se puede ver que la amplitud es 200. Entonces, el alcance máximo es $r = 200$ pies. Del inciso (b) sabemos que esto corresponde a un ángulo de 45°. Por tanto, patear el balón a un ángulo de 45° producirá una distancia máxima horizontal de 200 pies.

PUNTO *de repaso* Ahora trate de hacer el Ejercicio 135.

Discusión en clase

Deducción de una fórmula de área Describa la forma en que se pueda usar una fórmula de ángulo doble o una fórmula de semiángulo para deducir una fórmula para obtener el área de un triángulo isósceles. Use un dibujo con leyendas para ilustrar su deducción. A continuación escriba dos ejemplos que muestren cómo se pueda usar su fórmula.

5.5 EJERCICIOS

En www.CalcChat.com vea las soluciones a los ejercicios impares.

VOCABULARIO: Llene los espacios en blanco para completar la fórmula trigonométrica.

1. $\operatorname{sen} 2u =$ _____

2. $\dfrac{1 + \cos 2u}{2} =$ _____

3. $\cos 2u =$ _____

4. $\dfrac{1 - \cos 2u}{1 + \cos 2u} =$ _____

5. $\operatorname{sen} \dfrac{u}{2} =$ _____

6. $\tan \dfrac{u}{2} =$ _____

7. $\cos u \cos v =$ _____

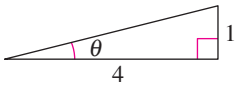
8. $\operatorname{sen} u \cos v =$ _____

9. $\operatorname{sen} u + \operatorname{sen} v =$ _____

10. $\cos u - \cos v =$ _____

HABILIDADES Y APLICACIONES

En los Ejercicios 11-18, use la figura para hallar el valor exacto de la función trigonométrica.



11. $\cos 2\theta$

12. $\operatorname{sen} 2\theta$

13. $\tan 2\theta$

14. $\sec 2\theta$

15. $\csc 2\theta$

16. $\cot 2\theta$

17. $\operatorname{sen} 4\theta$

18. $\tan 4\theta$

En los Ejercicios 19-28, encuentre las soluciones exactas de la ecuación en el intervalo $[0, 2\pi)$.

19. $\operatorname{sen} 2x - \operatorname{sen} x = 0$

20. $\operatorname{sen} 2x + \cos x = 0$

21. $4 \operatorname{sen} x \cos x = 1$

22. $\operatorname{sen} 2x \operatorname{sen} x = \cos x$

23. $\cos 2x - \cos x = 0$

24. $\cos 2x + \operatorname{sen} x = 0$

25. $\operatorname{sen} 4x = -2 \operatorname{sen} 2x$

26. $(\operatorname{sen} 2x + \cos 2x)^2 = 1$

27. $\tan 2x - \cot x = 0$

28. $\tan 2x - 2 \cos x = 0$

En los Ejercicios 29-36, use una fórmula de ángulo doble para reescribir la expresión.

29. $6 \operatorname{sen} x \cos x$

30. $\operatorname{sen} x \cos x$

31. $6 \cos^2 x - 3$

32. $\cos^2 x - \frac{1}{2}$

33. $4 - 8 \operatorname{sen}^2 x$

34. $10 \operatorname{sen}^2 x - 5$

35. $(\cos x + \operatorname{sen} x)(\cos x - \operatorname{sen} x)$

36. $(\operatorname{sen} x - \cos x)(\operatorname{sen} x + \cos x)$

En los Ejercicios 37-42, encuentre los valores exactos de $\operatorname{sen} 2u$, $\cos 2u$ y $\tan 2u$ usando las fórmulas de ángulo doble.

37. $\operatorname{sen} u = -\dfrac{3}{5}, \quad \dfrac{3\pi}{2} < u < 2\pi$

38. $\cos u = -\dfrac{4}{5}, \quad \dfrac{\pi}{2} < u < \pi$

39. $\tan u = \dfrac{3}{5}, \quad 0 < u < \dfrac{\pi}{2}$

40. $\cot u = \sqrt{2}, \quad \pi < u < \dfrac{3\pi}{2}$

41. $\sec u = -2, \quad \dfrac{\pi}{2} < u < \pi$

42. $\csc u = 3, \quad \dfrac{\pi}{2} < u < \pi$

En los Ejercicios 43-52, use las fórmulas de reducción de potencias para reescribir la expresión en términos de la primera potencia del coseno.

43. $\cos^4 x$

44. $\operatorname{sen}^4 2x$

45. $\cos^4 2x$

46. $\operatorname{sen}^8 x$

47. $\tan^4 2x$

48. $\operatorname{sen}^2 x \cos^4 x$

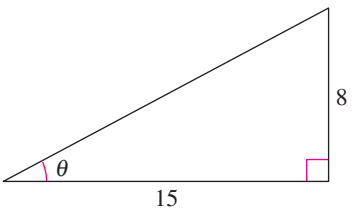
49. $\operatorname{sen}^2 2x \cos^2 2x$

50. $\tan^2 2x \cos^4 2x$

51. $\operatorname{sen}^4 x \cos^2 x$

52. $\operatorname{sen}^4 x \cos^4 x$

En los Ejercicios 53-58, use la figura para hallar el valor exacto de la función trigonométrica.



53. $\cos \dfrac{\theta}{2}$

54. $\operatorname{sen} \dfrac{\theta}{2}$

55. $\tan \dfrac{\theta}{2}$

56. $\sec \dfrac{\theta}{2}$

57. $\csc \dfrac{\theta}{2}$

58. $\cot \dfrac{\theta}{2}$

En los Ejercicios 59-66, use las fórmulas de semiángulo para determinar los valores exactos del seno, coseno y tangente del ángulo.

59. $75°$ **60.** $165°$

61. $112° 30'$ **62.** $67° 30'$

63. $\pi/8$ **64.** $\pi/12$

65. $3\pi/8$ **66.** $7\pi/12$

En los Ejercicios 67-72, (a) determine el cuadrante en el que se encuentre $u/2$ y (b) encuentre los valores exactos de $\operatorname{sen}(u/2)$, $\cos(u/2)$ y $\tan(u/2)$ usando las fórmulas de semiángulos.

67. $\cos u = \frac{7}{25}, \quad 0 < u < \frac{\pi}{2}$

68. $\operatorname{sen} u = \frac{5}{13}, \quad \frac{\pi}{2} < u < \pi$

69. $\tan u = -\frac{5}{12}, \quad \frac{3\pi}{2} < u < 2\pi$

70. $\cot u = 3, \quad \pi < u < \frac{3\pi}{2}$

71. $\csc u = -\frac{5}{3}, \quad \pi < u < \frac{3\pi}{2}$

72. $\sec u = \frac{7}{2}, \quad \frac{3\pi}{2} < u < 2\pi$

En los Ejercicios 73-76, use las fórmulas de semiángulos para simplificar la expresión.

73. $\sqrt{\frac{1 - \cos 6x}{2}}$ **74.** $\sqrt{\frac{1 + \cos 4x}{2}}$

75. $-\sqrt{\frac{1 - \cos 8x}{1 + \cos 8x}}$ **76.** $-\sqrt{\frac{1 - \cos(x - 1)}{2}}$

En los Ejercicios 77-80, encuentre todas las soluciones de la ecuación en el intervalo $[0, 2\pi)$. Use una calculadora de gráficas para graficar la ecuación y verificar las soluciones.

77. $\operatorname{sen}\frac{x}{2} + \cos x = 0$ **78.** $\operatorname{sen}\frac{x}{2} + \cos x - 1 = 0$

79. $\cos\frac{x}{2} - \operatorname{sen} x = 0$ **80.** $\tan\frac{x}{2} - \operatorname{sen} x = 0$

En los Ejercicios 81-90, use las fórmulas de producto a suma para escribir el producto como una suma o diferencia.

81. $\operatorname{sen}\frac{\pi}{3}\cos\frac{\pi}{6}$ **82.** $4\cos\frac{\pi}{3}\operatorname{sen}\frac{5\pi}{6}$

83. $10\cos 75°\cos 15°$ **84.** $6\operatorname{sen} 45°\cos 15°$

85. $\operatorname{sen} 5\theta \operatorname{sen} 3\theta$ **86.** $3\operatorname{sen}(-4\alpha)\operatorname{sen} 6\alpha$

87. $7\cos(-5\beta)\operatorname{sen} 3\beta$ **88.** $\cos 2\theta \cos 4\theta$

89. $\operatorname{sen}(x + y)\operatorname{sen}(x - y)$ **90.** $\operatorname{sen}(x + y)\cos(x - y)$

En los Ejercicios 91-98, use las fórmulas de suma a producto para escribir la suma o diferencia como producto.

91. $\operatorname{sen} 3\theta + \operatorname{sen}\theta$ **92.** $\operatorname{sen} 5\theta - \operatorname{sen} 3\theta$

93. $\cos 6x + \cos 2x$ **94.** $\cos x + \cos 4x$

95. $\operatorname{sen}(\alpha + \beta) - \operatorname{sen}(\alpha - \beta)$ **96.** $\cos(\phi + 2\pi) + \cos\phi$

97. $\cos\left(\theta + \frac{\pi}{2}\right) - \cos\left(\theta - \frac{\pi}{2}\right)$

98. $\operatorname{sen}\left(x + \frac{\pi}{2}\right) + \operatorname{sen}\left(x - \frac{\pi}{2}\right)$

En los Ejercicios 99-102, use las fórmulas de suma a producto para hallar el valor exacto de la expresión.

99. $\operatorname{sen} 75° + \operatorname{sen} 15°$ **100.** $\cos 120° + \cos 60°$

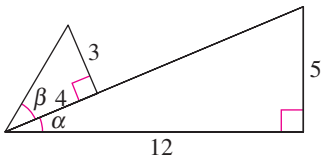
101. $\cos\frac{3\pi}{4} - \cos\frac{\pi}{4}$ **102.** $\operatorname{sen}\frac{5\pi}{4} - \operatorname{sen}\frac{3\pi}{4}$

En los Ejercicios 103-106, encuentre todas las soluciones de la ecuación en el intervalo $[0, 2\pi)$. Use una calculadora de gráficas para graficar la ecuación y verificar las soluciones.

103. $\operatorname{sen} 6x + \operatorname{sen} 2x = 0$ **104.** $\cos 2x - \cos 6x = 0$

105. $\frac{\cos 2x}{\operatorname{sen} 3x - \operatorname{sen} x} - 1 = 0$ **106.** $\operatorname{sen}^2 3x - \operatorname{sen}^2 x = 0$

En los Ejercicios 107-110, use la figura para hallar el valor exacto de la función trigonométrica.



107. $\operatorname{sen} 2\alpha$ **108.** $\cos 2\beta$

109. $\cos(\beta/2)$ **110.** $\operatorname{sen}(\alpha + \beta)$

En los Ejercicios 111-124, compruebe la identidad.

111. $\csc 2\theta = \frac{\csc\theta}{2\cos\theta}$ **112.** $\sec 2\theta = \frac{\sec^2\theta}{2 - \sec^2\theta}$

113. $\operatorname{sen}\frac{\alpha}{3}\cos\frac{\alpha}{3} = \frac{1}{2}\operatorname{sen}\frac{2\alpha}{3}$ **114.** $\frac{\cos 3\beta}{\cos\beta} = 1 - 4\operatorname{sen}^2\beta$

115. $1 + \cos 10y = 2\cos^2 5y$

116. $\cos^4 x - \operatorname{sen}^4 x = \cos 2x$

117. $\cos 4\alpha = \cos^2 2\alpha - \operatorname{sen}^2 2\alpha$

118. $(\operatorname{sen} x + \cos x)^2 = 1 + \operatorname{sen} 2x$

119. $\tan\frac{u}{2} = \csc u - \cot u$

120. $\sec\frac{u}{2} = \pm\sqrt{\frac{2\tan u}{\tan u + \operatorname{sen} u}}$

121. $\dfrac{\cos 4x + \cos 2x}{\operatorname{sen} 4x + \operatorname{sen} 2x} = \cot 3x$

122. $\dfrac{\operatorname{sen} x \pm \operatorname{sen} y}{\cos x + \cos y} = \tan \dfrac{x \pm y}{2}$

123. $\operatorname{sen}\left(\dfrac{\pi}{6} + x\right) + \operatorname{sen}\left(\dfrac{\pi}{6} - x\right) = \cos x$

124. $\cos\left(\dfrac{\pi}{3} + x\right) + \cos\left(\dfrac{\pi}{3} - x\right) = \cos x$

En los Ejercicios 125-128, use una calculadora de gráficas para verificar la identidad. Confirme algebraicamente que es una identidad.

125. $\cos 3\beta = \cos^3 \beta - 3 \operatorname{sen}^2 \beta \cos \beta$

126. $\operatorname{sen} 4\beta = 4 \operatorname{sen} \beta \cos \beta(1 - 2 \operatorname{sen}^2 \beta)$

127. $(\cos 4x - \cos 2x)/(2 \operatorname{sen} 3x) = -\operatorname{sen} x$

128. $(\cos 3x - \cos x)/(\operatorname{sen} 3x - \operatorname{sen} x) = -\tan 2x$

En los Ejercicios 129-130, grafique manualmente la función en el intervalo $[0, 2\pi]$ usando las fórmulas de reducción de potencias.

129. $f(x) = \operatorname{sen}^2 x$

130. $f(x) = \cos^2 x$

En los Ejercicios 131-134, escriba la expresión trigonométrica como expresión algebraica.

131. $\operatorname{sen}(2 \arcsen x)$

132. $\cos(2 \arccos x)$

133. $\cos(2 \arcsen x)$

134. $\operatorname{sen}(2 \arccos x)$

135. MOVIMIENTO DE UN PROYECTIL El alcance de un proyectil disparado a un ángulo θ con la horizontal, y con una velocidad inicial de v_0 pies por segundo, es

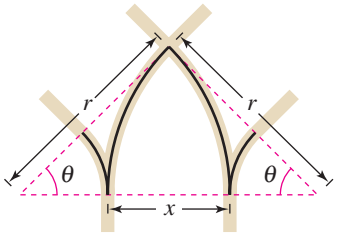
$$r = \frac{1}{32} v_0^2 \operatorname{sen} 2\theta$$

donde r se mide en pies. Una atleta lanza una jabalina a 75 pies por segundo. ¿A qué ángulo debe la atleta lanzar la jabalina para que ésta recorra 130 pies?

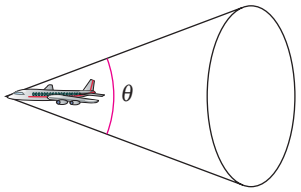
136. VÍA DE FERROCARRIL Cuando dos vías de ferrocarril se unen, las partes que se traslapan de las vías están en forma de arcos circulares (vea figura). El radio de cada arco r (en pies) y el ángulo θ están relacionados por

$$\frac{x}{2} = 2r \operatorname{sen}^2 \frac{\theta}{2}.$$

Escriba una fórmula para x en términos de $\cos \theta$.



137. NÚMERO MACH El número mach M de un avión es la relación entre su rapidez y la del sonido. Cuando un avión vuela más rápido que el sonido, las ondas sonoras forman un cono detrás de él (vea figura). El número mach está relacionado con el ángulo en el vértice θ del cono por $\operatorname{sen}(\theta/2) = 1/M$.



(a) Encuentre el ángulo θ que corresponda a un número mach de 1.

(b) Encuentre el ángulo θ que corresponda a un número mach de 4.5.

(c) La rapidez del sonido es de unas 760 millas por hora. Determine la rapidez de un objeto con los números mach de los incisos (a) y (b).

(d) Reescriba la ecuación en términos de θ.

EXPLORACIÓN

138. TOQUE FINAL Considere la función dada por $f(x) = \operatorname{sen}^4 x + \cos^4 x$.

(a) Use las fórmulas de reducción de potencias para escribir la función en términos de coseno de la primera potencia.

(b) Determina otra forma de reescribir la función. Use una calculadora de gráficas para desechar funciones escritas incorrectamente.

(c) Sume un término trigonométrico a la función, de modo que ésta se convierta en un trinomio cuadrado perfecto. Reescriba la función como un trinomio cuadrado perfecto menos el término que usted sumó. Use una calculadora de gráficas para desechar funciones escritas incorrectamente.

(d) Reescriba el resultado del inciso (c) en términos del seno de un ángulo doble. Use calculadora de gráficas para desechar funciones escritas incorrectamente.

(e) Cuando reescriba una expresión trigonométrica, el resultado puede no ser el mismo que el de un amigo. ¿Esto significa que uno de los dos está en error? Explique.

¿VERDADERO O FALSO? **En los Ejercicios 139 y 140, determine si la proposición es verdadera o falsa. Justifique su respuesta.**

139. Como la función seno es una función impar, para un número negativo u, $\operatorname{sen} 2u = -2 \operatorname{sen} u \cos u$.

140. $\operatorname{sen} \dfrac{u}{2} = -\sqrt{\dfrac{1 - \cos u}{2}}$ cuando u está en el segundo cuadrante.

5 Resumen del capítulo

	¿Qué aprendió?	Explicación/Ejemplos	Ejercicios de repaso
Sección 5.1	Reconocer y escribir las identidades trigonométricas fundamentales *(p. 372).*	**Identidades recíprocas** $\operatorname{sen} u = 1/\csc u \quad \cos u = 1/\sec u \quad \tan u = 1/\cot u$ $\csc u = 1/\operatorname{sen} u \quad \sec u = 1/\cos u \quad \cot u = 1/\tan u$ **Identidades cociente:** $\tan u = \dfrac{\operatorname{sen} u}{\cos u}, \quad \cot u = \dfrac{\cos u}{\operatorname{sen} u}$ **Identidades pitagóricas:** $\operatorname{sen}^2 u + \cos^2 u = 1,$ $1 + \tan^2 u = \sec^2 u, \quad 1 + \cot^2 u = \csc^2 u$ **Identidades de cofunción** $\operatorname{sen}[(\pi/2) - u] = \cos u \quad \cos[(\pi/2) - u] = \operatorname{sen} u$ $\tan[(\pi/2) - u] = \cot u \quad \cot[(\pi/2) - u] = \tan u$ $\sec[(\pi/2) - u] = \csc u \quad \csc[(\pi/2) - u] = \sec u$ **Identidades pares/impares** $\operatorname{sen}(-u) = -\operatorname{sen} u \quad \cos(-u) = \cos u \quad \tan(-u) = -\tan u$ $\csc(-u) = -\csc u \quad \sec(-u) = \sec u \quad \cot(-u) = -\cot u$	1–6
	Usar las identidades trigonométricas fundamentales para evaluar funciones trigonométricas, y simplificar y reescribir expresiones trigonométricas *(p. 373).*	En algunos casos, al factorizar o simplificar expresiones trigonométricas es útil reescribir la expresión en términos de sólo *una* función trigonométrica o en términos *sólo de seno y coseno.*	7–28
Sección 5.2	Comprobar identidades trigonométricas *(p. 380).*	**Guías para comprobar identidades trigonométricas** **1.** Trabajar con un lado de la ecuación a la vez. **2.** Cuidar de factorizar una expresión, sumar fracciones, elevar al cuadrado un binomio o crear un denominador monomio. **3.** Cuidar de usar las identidades fundamentales. Observe cuáles funciones están en la expresión final deseada. Senos y cosenos se parean bien, igual que secantes y tangentes, y cosecantes y cotangentes. **4.** Si las guías anteriores no ayudan, trate de convertir todos los términos a senos y cosenos. **5.** Siempre intente *algo*.	29–36
Sección 5.3	Usar técnicas algebraicas estándar para resolver ecuaciones trigonométricas *(p. 387).*	Use técnicas algebraicas estándar como reunir términos semejantes, extraer raíces cuadradas y factorizar para resolver ecuaciones trigonométricas.	37–42
	Resolver ecuaciones trigonométricas de tipo cuadrático *(p. 389).*	Para resolver ecuaciones trigonométricas de tipo cuadrático $ax^2 + bx + c = 0$, factorice la cuadrática o bien, si esto no es posible, use la fórmula cuadrática.	43–46
	Resolver ecuaciones trigonométricas que contengan ángulos múltiples *(p. 392).*	Para resolver ecuaciones que contengan formas como sen ku o cos ku, primero despeje ku de la ecuación y, a continuación, divida su resultado entre k.	47–52
	Usar funciones trigonométricas inversas para resolver ecuaciones trigonométricas *(p. 393).*	Después de factorizar una ecuación e igualar a cero los factores, se puede obtener una ecuación como $\tan x - 3 = 0$. En este caso, use funciones trigonométricas inversas para resolver. (Vea el Ejemplo 9.)	53–56

	¿Qué aprendió?	Explicación/Ejemplos	Ejercicios de repaso
Sección 5.4	Usar fórmulas de suma y diferencia para evaluar funciones trigonométricas, comprobar identidades y resolver ecuaciones trigonométricas *(p. 398)*.	**Fórmulas de suma y diferencia** $\operatorname{sen}(u + v) = \operatorname{sen} u \cos v + \cos u \operatorname{sen} v$ $\operatorname{sen}(u - v) = \operatorname{sen} u \cos v - \cos u \operatorname{sen} v$ $\cos(u + v) = \cos u \cos v - \operatorname{sen} u \operatorname{sen} v$ $\cos(u - v) = \cos u \cos v + \operatorname{sen} u \operatorname{sen} v$ $\tan(u + v) = \dfrac{\tan u + \tan v}{1 - \tan u \tan v}$ $\tan(u - v) = \dfrac{\tan u - \tan v}{1 + \tan u \tan v}$	57–80
Sección 5.5	Usar fórmulas de ángulos múltiples para reescribir y evaluar funciones trigonométricas *(p. 405)*.	**Fórmulas de ángulos dobles** $\operatorname{sen} 2u = 2 \operatorname{sen} u \cos u$ $\cos 2u = \cos^2 u - \operatorname{sen}^2 u = 2\cos^2 u - 1 = 1 - 2\operatorname{sen}^2 u$ $\tan 2u = \dfrac{2 \tan u}{1 - \tan^2 u}$	81–86
	Usar fórmulas de reducción de potencias para reescribir y evaluar funciones trigonométricas *(p. 407)*.	**Fórmulas de reducción de potencias** $\operatorname{sen}^2 u = \dfrac{1 - \cos 2u}{2}, \quad \cos^2 u = \dfrac{1 + \cos 2u}{2}$ $\tan^2 u = \dfrac{1 - \cos 2u}{1 + \cos 2u}$	87–90
	Usar fórmulas de semiángulos para reescribir y evaluar funciones trigonométricas *(p. 408)*.	**Fórmulas de semiángulos** $\operatorname{sen} \dfrac{u}{2} = \pm\sqrt{\dfrac{1 - \cos u}{2}}, \quad \cos \dfrac{u}{2} = \pm\sqrt{\dfrac{1 + \cos u}{2}}$ $\tan \dfrac{u}{2} = \dfrac{1 - \cos u}{\operatorname{sen} u} = \dfrac{\operatorname{sen} u}{1 + \cos u}$ Los signos de $\operatorname{sen}(u/2)$ y $\cos(u/2)$ dependen del cuadrante en que se encuentre $u/2$.	91–100
	Usar fórmulas de producto a suma *(p. 409)* y fórmulas de suma a producto *(p. 410)* para reescribir y evaluar funciones trigonométricas.	**Fórmulas de producto a suma** $\operatorname{sen} u \operatorname{sen} v = (1/2)[\cos(u - v) - \cos(u + v)]$ $\cos u \cos v = (1/2)[\cos(u - v) + \cos(u + v)]$ $\operatorname{sen} u \cos v = (1/2)[\operatorname{sen}(u + v) + \operatorname{sen}(u - v)]$ $\cos u \operatorname{sen} v = (1/2)[\operatorname{sen}(u + v) - \operatorname{sen}(u - v)]$ **Fórmulas de suma a producto** $\operatorname{sen} u + \operatorname{sen} v = 2 \operatorname{sen}\left(\dfrac{u + v}{2}\right)\cos\left(\dfrac{u - v}{2}\right)$ $\operatorname{sen} u - \operatorname{sen} v = 2 \cos\left(\dfrac{u + v}{2}\right)\operatorname{sen}\left(\dfrac{u - v}{2}\right)$ $\cos u + \cos v = 2 \cos\left(\dfrac{u + v}{2}\right)\cos\left(\dfrac{u - v}{2}\right)$ $\cos u - \cos v = -2 \operatorname{sen}\left(\dfrac{u + v}{2}\right)\operatorname{sen}\left(\dfrac{u - v}{2}\right)$	101–108
	Usar fórmulas trigonométricas para reescribir modelos reales *(p. 412)*.	Se puede usar una fórmula trigonométrica para reescribir el modelo del movimiento de un proyectil $r = (1/16)v_0^2 \operatorname{sen} \theta \cos \theta$. (Vea ejemplo 12.)	109–114

5 EJERCICIOS DE REPASO

En www.CalcChat.com vea las soluciones a los ejercicios impares.

5.1 En los Ejercicios 1-6, dé nombre a la función trigonométrica equivalente a la expresión.

1. $\dfrac{\operatorname{sen} x}{\cos x}$ **2.** $\dfrac{1}{\operatorname{sen} x}$

3. $\dfrac{1}{\sec x}$ **4.** $\dfrac{1}{\tan x}$

5. $\sqrt{\cot^2 x + 1}$ **6.** $\sqrt{1 + \tan^2 x}$

En los Ejercicios 7-10, use los valores dados e identidades trigonométricas para evaluar (si es posible) las seis funciones trigonométricas.

7. $\operatorname{sen} x = \frac{5}{13}, \quad \cos x = \frac{12}{13}$

8. $\tan\theta = \dfrac{2}{3}, \quad \sec\theta = \dfrac{\sqrt{13}}{3}$

9. $\operatorname{sen}\left(\dfrac{\pi}{2} - x\right) = \dfrac{\sqrt{2}}{2}, \quad \operatorname{sen} x = -\dfrac{\sqrt{2}}{2}$

10. $\csc\left(\dfrac{\pi}{2} - \theta\right) = 9, \quad \operatorname{sen}\theta = \dfrac{4\sqrt{5}}{9}$

En los Ejercicios 11-24, use las identidades trigonométricas fundamentales para simplificar la expresión.

11. $\dfrac{1}{\cot^2 x + 1}$ **12.** $\dfrac{\tan\theta}{1 - \cos^2\theta}$

13. $\tan^2 x(\csc^2 x - 1)$ **14.** $\cot^2 x(\operatorname{sen}^2 x)$

15. $\dfrac{\operatorname{sen}\left(\dfrac{\pi}{2} - \theta\right)}{\operatorname{sen}\theta}$ **16.** $\dfrac{\cot\left(\dfrac{\pi}{2} - u\right)}{\cos u}$

17. $\dfrac{\operatorname{sen}^2\theta + \cos^2\theta}{\operatorname{sen}\theta}$ **18.** $\dfrac{\sec^2(-\theta)}{\csc^2\theta}$

19. $\cos^2 x + \cos^2 x \cot^2 x$ **20.** $\tan^2\theta \csc^2\theta - \tan^2\theta$

21. $(\tan x + 1)^2 \cos x$ **22.** $(\sec x - \tan x)^2$

23. $\dfrac{1}{\csc\theta + 1} - \dfrac{1}{\csc\theta - 1}$ **24.** $\dfrac{\tan^2 x}{1 + \sec x}$

En los Ejercicios 25 y 26, use la sustitución trigonométrica para escribir la expresión algebraica como una función trigonométrica de θ, donde $0 < \theta < \pi/2$.

25. $\sqrt{25 - x^2}, \; x = 5\operatorname{sen}\theta$ **26.** $\sqrt{x^2 - 16}, \; x = 4\sec\theta$

27. RAZÓN DE CAMBIO La razón de cambio de la función $f(x) = \csc x - \cot x$ está dada por la expresión $\csc^2 x - \csc x \cot x$. Demuestre que esta expresión también se puede escribir como

$$\frac{1 - \cos x}{\operatorname{sen}^2 x}.$$

28. RAZÓN DE CAMBIO La razón de cambio de la función $f(x) = 2\sqrt{\operatorname{sen} x}$ está dada por la expresión $\operatorname{sen}^{-1/2} x \cos x$. Demuestre que esta expresión también se puede escribir como $\cot x\sqrt{\operatorname{sen} x}$.

5.2 En los Ejercicios 29-36, compruebe la identidad.

29. $\cos x(\tan^2 x + 1) = \sec x$

30. $\sec^2 x \cot x - \cot x = \tan x$

31. $\sec\left(\dfrac{\pi}{2} - \theta\right) = \csc\theta$ **32.** $\cot\left(\dfrac{\pi}{2} - x\right) = \tan x$

33. $\dfrac{1}{\tan\theta \csc\theta} = \cos\theta$ **34.** $\dfrac{1}{\tan x \csc x \operatorname{sen} x} = \cot x$

35. $\operatorname{sen}^5 x \cos^2 x = (\cos^2 x - 2\cos^4 x + \cos^6 x)\operatorname{sen} x$

36. $\cos^3 x \operatorname{sen}^2 x = (\operatorname{sen}^2 x - \operatorname{sen}^4 x)\cos x$

5.3 En los Ejercicios 37-42, resuelva la ecuación.

37. $\operatorname{sen} x = \sqrt{3} - \operatorname{sen} x$ **38.** $4\cos\theta = 1 + 2\cos\theta$

39. $3\sqrt{3}\tan u = 3$ **40.** $\frac{1}{2}\sec x - 1 = 0$

41. $3\csc^2 x = 4$ **42.** $4\tan^2 u - 1 = \tan^2 u$

En los Ejercicios 43-52, encuentre todas las soluciones de la ecuación en el intervalo $[0, 2\pi)$.

43. $2\cos^2 x - \cos x = 1$ **44.** $2\operatorname{sen}^2 x - 3\operatorname{sen} x = -1$

45. $\cos^2 x + \operatorname{sen} x = 1$ **46.** $\operatorname{sen}^2 x + 2\cos x = 2$

47. $2\operatorname{sen} 2x - \sqrt{2} = 0$ **48.** $2\cos\dfrac{x}{2} + 1 = 0$

49. $3\tan^2\left(\dfrac{x}{3}\right) - 1 = 0$ **50.** $\sqrt{3}\tan 3x = 0$

51. $\cos 4x(\cos x - 1) = 0$ **52.** $3\csc^2 5x = -4$

En los Ejercicios 53-56, use funciones inversas donde sea necesario para hallar todas las soluciones de la ecuación en el intervalo $[0, 2\pi)$.

53. $\operatorname{sen}^2 x - 2\operatorname{sen} x = 0$

54. $2\cos^2 x + 3\cos x = 0$

55. $\tan^2\theta + \tan\theta - 6 = 0$

56. $\sec^2 x + 6\tan x + 4 = 0$

5.4 En los Ejercicios 57-60, encuentre los valores exactos del seno, coseno y tangente del ángulo.

57. $285° = 315° - 30°$ **58.** $345° = 300° + 45°$

59. $\dfrac{25\pi}{12} = \dfrac{11\pi}{6} + \dfrac{\pi}{4}$ **60.** $\dfrac{19\pi}{12} = \dfrac{11\pi}{6} - \dfrac{\pi}{4}$

En los Ejercicios 61-64, escriba la expresión como el seno, coseno o tangente de un ángulo.

61. $\operatorname{sen} 60^\circ \cos 45^\circ - \cos 60^\circ \operatorname{sen} 45^\circ$

62. $\cos 45^\circ \cos 120^\circ - \operatorname{sen} 45^\circ \operatorname{sen} 120^\circ$

63. $\dfrac{\tan 25^\circ + \tan 10^\circ}{1 - \tan 25^\circ \tan 10^\circ}$

64. $\dfrac{\tan 68^\circ - \tan 115^\circ}{1 + \tan 68^\circ \tan 115^\circ}$

En los Ejercicios 65-70, encuentre el valor exacto de la función trigonométrica dado que $\tan u = \frac{3}{4}$ y $\cos v = -\frac{4}{5}$. (u está en el primer cuadrante y v en el tercero.)

65. $\operatorname{sen}(u + v)$

66. $\tan(u + v)$

67. $\cos(u - v)$

68. $\operatorname{sen}(u - v)$

69. $\cos(u + v)$

70. $\tan(u - v)$

En los Ejercicios 71-76, compruebe la identidad.

71. $\cos\left(x + \dfrac{\pi}{2}\right) = -\operatorname{sen} x$

72. $\operatorname{sen}\left(x - \dfrac{3\pi}{2}\right) = \cos x$

73. $\tan\left(x - \dfrac{\pi}{2}\right) = -\cot x$

74. $\tan(\pi - x) = -\tan x$

75. $\cos 3x = 4\cos^3 x - 3\cos x$

76. $\dfrac{\operatorname{sen}(\alpha - \beta)}{\operatorname{sen}(\alpha + \beta)} = \dfrac{\tan\alpha - \tan\beta}{\tan\alpha + \tan\beta}$

En los Ejercicios 77-80, encuentre todas las soluciones de la ecuación en el intervalo $[0, 2\pi)$.

77. $\operatorname{sen}\left(x + \dfrac{\pi}{4}\right) - \operatorname{sen}\left(x - \dfrac{\pi}{4}\right) = 1$

78. $\cos\left(x + \dfrac{\pi}{6}\right) - \cos\left(x - \dfrac{\pi}{6}\right) = 1$

79. $\operatorname{sen}\left(x + \dfrac{\pi}{2}\right) - \operatorname{sen}\left(x - \dfrac{\pi}{2}\right) = \sqrt{3}$

80. $\cos\left(x + \dfrac{3\pi}{4}\right) - \cos\left(x - \dfrac{3\pi}{4}\right) = 0$

5.5 En los Ejercicios 81-84, encuentre los valores exactos de $\operatorname{sen} 2u$, $\cos 2u$ y $\tan 2u$ usando las fórmulas de ángulo doble.

81. $\operatorname{sen} u = -\dfrac{4}{5}, \quad \pi < u < \dfrac{3\pi}{2}$

82. $\cos u = -\dfrac{2}{\sqrt{5}}, \quad \dfrac{\pi}{2} < u < \pi$

83. $\sec u = -3, \quad \dfrac{\pi}{2} < u < \pi$

84. $\cot u = 2, \quad \pi < u < \dfrac{3\pi}{2}$

En los Ejercicios 85 y 86, use fórmulas de ángulo doble para comprobar algebraicamente la identidad y use una calculadora de gráficas para confirmar gráficamente el resultado.

85. $\operatorname{sen} 4x = 8\cos^3 x \operatorname{sen} x - 4\cos x \operatorname{sen} x$

86. $\tan^2 x = \dfrac{1 - \cos 2x}{1 + \cos 2x}$

En los Ejercicios 87-90, use las fórmulas de reducción de potencias para reescribir la expresión en términos de la primera potencia del coseno.

87. $\tan^2 2x$

88. $\cos^2 3x$

89. $\operatorname{sen}^2 x \tan^2 x$

90. $\cos^2 x \tan^2 x$

En los Ejercicios 91-94, use las fórmulas de semiángulo para determinar los valores exactos del seno, coseno y tangente del ángulo.

91. -75°

92. 15°

93. $\dfrac{19\pi}{12}$

94. $-\dfrac{17\pi}{12}$

En los Ejercicios 95-98, (a) determine el cuadrante en el que se encuentra $u/2$ y (b) encuentre los valores exactos de $\operatorname{sen}(u/2)$, $\cos(u/2)$ y $\tan(u/2)$ usando las fórmulas de semiángulo.

95. $\operatorname{sen} u = \frac{7}{25}, \ 0 < u < \pi/2$

96. $\tan u = \frac{4}{3}, \ \pi < u < 3\pi/2$

97. $\cos u = -\frac{2}{7}, \ \pi/2 < u < \pi$

98. $\sec u = -6, \ \pi/2 < u < \pi$

En los Ejercicios 99 y 100, use las fórmulas de semiángulo para simplificar la expresión.

99. $-\sqrt{\dfrac{1 + \cos 10x}{2}}$

100. $\dfrac{\operatorname{sen} 6x}{1 + \cos 6x}$

En los Ejercicios 101-104, use las fórmulas de producto a suma para escribir el producto como una suma o diferencia.

101. $\cos\dfrac{\pi}{6}\operatorname{sen}\dfrac{\pi}{6}$

102. $6\operatorname{sen} 15^\circ \operatorname{sen} 45^\circ$

103. $\cos 4\theta \operatorname{sen} 6\theta$

104. $2\operatorname{sen} 7\theta \cos 3\theta$

En los Ejercicios 105-108, use las fórmulas de suma a producto para escribir la suma o diferencia como producto.

105. $\operatorname{sen} 4\theta - \operatorname{sen} 8\theta$

106. $\cos 6\theta + \cos 5\theta$

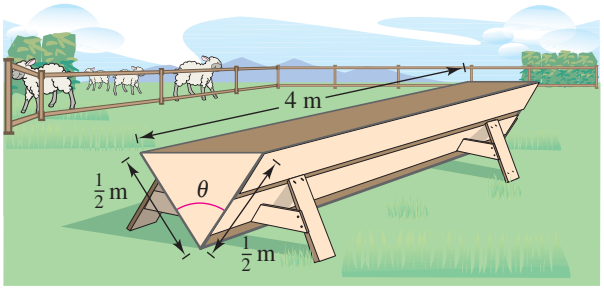
107. $\cos\left(x + \dfrac{\pi}{6}\right) - \cos\left(x - \dfrac{\pi}{6}\right)$

108. $\operatorname{sen}\left(x + \dfrac{\pi}{4}\right) - \operatorname{sen}\left(x - \dfrac{\pi}{4}\right)$

109. MOVIMIENTO DE UN PROYECTIL Una pelota de béisbol pierde contacto con la mano del jugador de primera base, a un ángulo de θ con la horizontal y a una velocidad inicial de $v_0 = 80$ pies por segundo. La pelota es atrapada por el jugador de segunda base a 100 pies de distancia. Encuentre θ si la variación r de un proyectil es

$$r = \frac{1}{32} v_0^2 \operatorname{sen} 2\theta.$$

110. GEOMETRÍA Una zanja para alimentar ganado mide 4 metros de largo y sus secciones transversales son triángulos isósceles, siendo de $\frac{1}{2}$ metro los dos lados iguales (vea figura). El ángulo entre los dos lados es θ.



(a) Escriba el volumen de la zanja como función de $\theta/2$.

(b) Escriba el volumen de la zanja como función de θ y determine el valor de θ en forma tal que el volumen sea máximo.

MOVIMIENTO ARMÓNICO En los Ejercicios 111-114, use la siguiente información. Una pesa está unida a un resorte suspendido verticalmente del cielo raso de una casa. Cuando se aplica una fuerza motriz al sistema, la pesa se mueve verticalmente desde su posición de equilibrio, y su movimiento está descrito por el modelo $y = 1.5 \operatorname{sen} 8t - 0.5 \cos 8t$, donde y es la distancia desde el equilibrio (en pies) y t es el tiempo (en segundos).

111. Use una calculadora de gráficas para graficar el modelo.

112. Escriba el modelo en la forma

$$y = \sqrt{a^2 + b^2} \operatorname{sen}(Bt + C).$$

113. Encuentre la amplitud de las oscilaciones de la pesa.

114. Encuentre la frecuencia de las oscilaciones de la pesa.

EXPLORACIÓN

¿VERDADERO O FALSO? En los Ejercicios 115-118, determine si la proposición es verdadera o falsa. Justifique su respuesta.

115. Si $\frac{\pi}{2} < \theta < \pi$, entonces $\cos\frac{\theta}{2} < 0$.

116. $\operatorname{sen}(x + y) = \operatorname{sen} x + \operatorname{sen} y$

117. $4 \operatorname{sen}(-x)\cos(-x) = -2 \operatorname{sen} 2x$

118. $4 \operatorname{sen} 45° \cos 15° = 1 + \sqrt{3}$

119. Haga de memoria una lista de identidades recíprocas, identidades cociente e identidades pitagóricas.

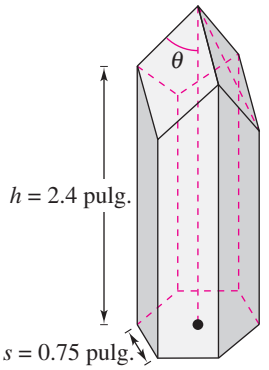
120. PIÉNSELO Si una ecuación trigonométrica tiene un número infinito de soluciones, ¿es cierto que la ecuación es una identidad? Explique.

121. PIÉNSELO Explique por qué usted sabe por observación que la ecuación $a \operatorname{sen} x - b = 0$ no tiene solución si $|a| < |b|$.

122. ÁREA SUPERFICIAL El área superficial de una colmena está dada por la ecuación

$$S = 6hs + \frac{3}{2}s^2\left(\frac{\sqrt{3} - \cos\theta}{\operatorname{sen}\theta}\right), \quad 0 < \theta \leq 90°$$

donde $h = 2.4$ pulgadas, $s = 0.75$ pulgadas y θ es el ángulo mostrado en la figura.



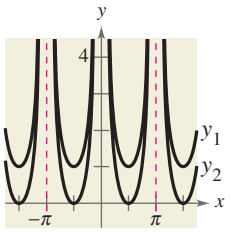
(a) ¿Para qué valor(es) de θ es de 12 pulgadas cuadradas el área superficial?

(b) ¿Qué valor de θ da la mínima área superficial?

En los Ejercicios 123 y 124, use las gráficas de y_1 y y_2 para determinar cómo cambiar una función para formar la identidad $y_1 = y_2$.

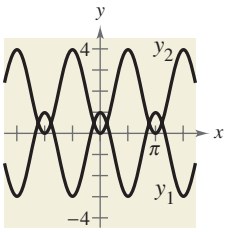
123. $y_1 = \sec^2\left(\frac{\pi}{2} - x\right)$

$y_2 = \cot^2 x$



124. $y_1 = \frac{\cos 3x}{\cos x}$

$y_2 = (2 \operatorname{sen} x)^2$



En los Ejercicios 125 y 126, use la función *zero* o *root* de una calculadora de gráficas para aproximar los ceros de la función.

125. $y = \sqrt{x + 3} + 4 \cos x$

126. $y = 2 - \frac{1}{2}x^2 + 3 \operatorname{sen}\frac{\pi x}{2}$

5 EXAMEN DEL CAPÍTULO

En www.CalcChat.com vea las soluciones a los ejercicios impares.

Tome este examen como lo haría en clase. Cuando termine, verifique su trabajo contra las respuestas dadas al final del libro.

1. Si $\tan\theta = \frac{6}{5}$ y $\cos\theta < 0$, use las identidades fundamentales para evaluar las seis funciones trigonométricas de θ.

2. Use las identidades fundamentales para simplificar $\csc^2\beta(1 - \cos^2\beta)$.

3. Factorice y simplifique $\dfrac{\sec^4 x - \tan^4 x}{\sec^2 x + \tan^2 x}$.

4. Sume y simplifique $\dfrac{\cos\theta}{\operatorname{sen}\theta} + \dfrac{\operatorname{sen}\theta}{\cos\theta}$.

5. Determine los valores de θ, $0 \le \theta < 2\pi$ para los cuales $\tan\theta = -\sqrt{\sec^2\theta - 1}$ es verdadero.

6. Use una calculadora de gráficas para graficar las funciones $y_1 = \cos x + \operatorname{sen} x \tan x$ y $y_2 = \sec x$. Haga una conjetura acerca de y_1 y y_2. Verifique algebraicamente el resultado.

En los Ejercicios 7-12, compruebe la identidad.

7. $\operatorname{sen}\theta \sec\theta = \tan\theta$

8. $\sec^2 x \tan^2 x + \sec^2 x = \sec^4 x$

9. $\dfrac{\csc\alpha + \sec\alpha}{\operatorname{sen}\alpha + \cos\alpha} = \cot\alpha + \tan\alpha$

10. $\tan\left(x + \dfrac{\pi}{2}\right) = -\cot x$

11. $\operatorname{sen}(n\pi + \theta) = (-1)^n \operatorname{sen}\theta$, n es un entero.

12. $(\operatorname{sen} x + \cos x)^2 = 1 + \operatorname{sen} 2x$

13. Reescriba $\operatorname{sen}^4 \dfrac{x}{2}$ en términos de la primera potencia del coseno.

14. Use una fórmula de semiángulo para simplificar la expresión $\operatorname{sen} 4\theta/(1 + \cos 4\theta)$.

15. Escriba $4 \operatorname{sen} 3\theta \cos 2\theta$ como una suma o diferencia.

16. Escriba $\cos 3\theta - \cos\theta$ como un producto.

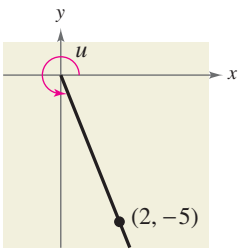


FIGURA PARA LA PREGUNTA 23

En los Ejercicios 17-20, encuentre todas las soluciones de la ecuación en el intervalo $[0, 2\pi)$.

17. $\tan^2 x + \tan x = 0$

18. $\operatorname{sen} 2\alpha - \cos\alpha = 0$

19. $4\cos^2 x - 3 = 0$

20. $\csc^2 x - \csc x - 2 = 0$

21. Use una calculadora de gráficas para aproximar las soluciones de la ecuación $5 \operatorname{sen} x - x = 0$ precisas a tres lugares decimales.

22. Encuentre el valor exacto de $\cos 105°$ usando el hecho de que $105° = 135° - 30°$.

23. Use la figura para hallar los valores exactos de $\operatorname{sen} 2u$, $\cos 2u$ y $\tan 2u$.

24. Cheyenne, Wyoming tiene una latitud de 41° N. A esta latitud, la posición del Sol al amanecer se puede modelar con

$$D = 31 \operatorname{sen}\left(\frac{2\pi}{365}t - 1.4\right)$$

donde t es el tiempo (en días) y $t = 1$ representa el 1 de enero. En este modelo, D representa el número de grados al Norte o al Sur de la dirección al Este en que se levanta el Sol. Use una calculadora de gráficas para determinar los días en los que el Sol está a más de 20° al Norte de la dirección al Este al amanecer.

25. Las alturas h (en pies) de dos personas en diferentes asientos de una rueda de la fortuna se pueden modelar con

$$h_1 = 28\cos 10t + 38 \quad \text{y} \quad h_2 = 28\cos\left[10\left(t - \frac{\pi}{6}\right)\right] + 38, \quad 0 \le t \le 2$$

donde t es el tiempo (en minutos). ¿Cuándo están las dos personas a la misma altura?

DEMOSTRACIONES EN MATEMÁTICAS

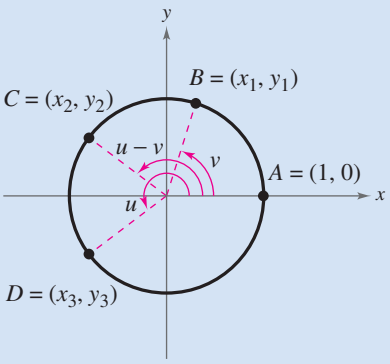
Fórmulas de suma y resta *(p. 398)*

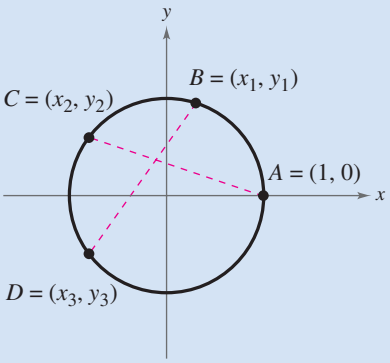
$$\operatorname{sen}(u + v) = \operatorname{sen} u \cos v + \cos u \operatorname{sen} v \qquad \tan(u + v) = \frac{\tan u + \tan v}{1 - \tan u \tan v}$$

$$\operatorname{sen}(u - v) = \operatorname{sen} u \cos v - \cos u \operatorname{sen} v$$

$$\cos(u + v) = \cos u \cos v - \operatorname{sen} u \operatorname{sen} v \qquad \tan(u - v) = \frac{\tan u - \tan v}{1 + \tan u \tan v}$$

$$\cos(u - v) = \cos u \cos v + \operatorname{sen} u \operatorname{sen} v$$





Demostración

Se pueden usar las figuras de la izquierda para las demostraciones de las fórmulas para $\cos(u \pm v)$. En la figura superior, sea A el punto $(1, 0)$ y luego use u y v para localizar los puntos $B = (x_1, y_1)$, $C = (x_2, y_2)$ y $D = (x_3, y_3)$ en la circunferencia unitaria. Entonces, $x_i^2 + y_i^2 = 1$ para $i = 1, 2$ y 3. Por comodidad, suponga que $0 < v < u < 2\pi$. En la figura inferior, observe que los arcos AC y BD tienen la misma longitud. Entonces, los segmentos de recta AC y BD también iguales en longitud, lo cual implica que

$$\sqrt{(x_2 - 1)^2 + (y_2 - 0)^2} = \sqrt{(x_3 - x_1)^2 + (y_3 - y_1)^2}$$

$$x_2^2 - 2x_2 + 1 + y_2^2 = x_3^2 - 2x_1x_3 + x_1^2 + y_3^2 - 2y_1y_3 + y_1^2$$

$$(x_2^2 + y_2^2) + 1 - 2x_2 = (x_3^2 + y_3^2) + (x_1^2 + y_1^2) - 2x_1x_3 - 2y_1y_3$$

$$1 + 1 - 2x_2 = 1 + 1 - 2x_1x_3 - 2y_1y_3$$

$$x_2 = x_3x_1 + y_3y_1.$$

Finalmente, sustituyendo los valores $x_2 = \cos(u - v)$, $x_3 = \cos u$, $x_1 = \cos v$, $y_3 = \operatorname{sen} u$ y $y_1 = \operatorname{sen} v$ se obtiene $\cos(u - v) = \cos u \cos v + \operatorname{sen} u \operatorname{sen} v$. La fórmula para $\cos(u + v)$ se puede establecer al considerar $u + v = u - (-v)$ y usando la fórmula que acabamos de deducir para obtener

$$\cos(u + v) = \cos[u - (-v)] = \cos u \cos(-v) + \operatorname{sen} u \operatorname{sen}(-v)$$

$$= \cos u \cos v - \operatorname{sen} u \operatorname{sen} v.$$

Usted puede usar las fórmulas de suma y resta para seno y coseno para demostrar las fórmulas para $\tan(u \pm v)$.

$$\tan(u \pm v) = \frac{\operatorname{sen}(u \pm v)}{\cos(u \pm v)}$$ Identidad cociente

$$= \frac{\operatorname{sen} u \cos v \pm \cos u \operatorname{sen} v}{\cos u \cos v \mp \operatorname{sen} u \operatorname{sen} v}$$ Fórmulas de suma y resta

$$= \frac{\dfrac{\operatorname{sen} u \cos v \pm \cos u \operatorname{sen} v}{\cos u \cos v}}{\dfrac{\cos u \cos v \mp \operatorname{sen} u \operatorname{sen} v}{\cos u \cos v}}$$ Dividir numerador y denominador entre $\cos u \cos v$.

$$= \frac{\dfrac{\operatorname{sen} u \cos v}{\cos u \cos v} \pm \dfrac{\cos u \operatorname{sen} v}{\cos u \cos v}}{\dfrac{\cos u \cos v}{\cos u \cos v} \mp \dfrac{\operatorname{sen} u \operatorname{sen} v}{\cos u \cos v}}$$

Escribir como fracciones separadas.

$$= \frac{\dfrac{\operatorname{sen} u}{\cos u} \pm \dfrac{\operatorname{sen} v}{\cos v}}{1 \mp \dfrac{\operatorname{sen} u}{\cos u} \cdot \dfrac{\operatorname{sen} v}{\cos v}}$$

Producto de fracciones

$$= \frac{\tan u \pm \tan v}{1 \mp \tan u \tan v}$$

Identidad cociente

Trigonometría y astronomía

Los primeros astrónomos utilizaron trigonometría para calcular mediciones en el universo. Se usó trigonometría para calcular la circunferencia de la Tierra y la distancia de la Tierra a la Luna. Otro avance importante en astronomía usando trigonometría fue calcular distancias a estrellas.

Fórmulas de ángulo doble *(p. 405)*

$$\operatorname{sen} 2u = 2 \operatorname{sen} u \cos u \qquad \cos 2u = \cos^2 u - \operatorname{sen}^2 u$$

$$\tan 2u = \frac{2 \tan u}{1 - \tan^2 u} \qquad = 2 \cos^2 u - 1 = 1 - 2 \operatorname{sen}^2 u$$

Demostración

Para demostrar las tres fórmulas, sea $v = u$ en las correspondientes fórmulas de suma.

$$\operatorname{sen} 2u = \operatorname{sen}(u + u) = \operatorname{sen} u \cos u + \cos u \operatorname{sen} u = 2 \operatorname{sen} u \cos u$$

$$\cos 2u = \cos(u + u) = \cos u \cos u - \operatorname{sen} u \operatorname{sen} u = \cos^2 u - \operatorname{sen}^2 u$$

$$\tan 2u = \tan(u + u) = \frac{\tan u + \tan u}{1 - \tan u \tan u} = \frac{2 \tan u}{1 - \tan^2 u}$$

Fórmulas de reducción de potencias *(p. 407)*

$$\operatorname{sen}^2 u = \frac{1 - \cos 2u}{2} \qquad \cos^2 u = \frac{1 + \cos 2u}{2} \qquad \tan^2 u = \frac{1 - \cos 2u}{1 + \cos 2u}$$

Demostración

Para demostrar la primera fórmula, despeje $\operatorname{sen}^2 u$ en la fórmula de ángulo doble $\cos 2u = 1 - 2 \operatorname{sen}^2 u$, como sigue.

$$\cos 2u = 1 - 2 \operatorname{sen}^2 u$$

Escribir la fórmula de ángulo doble.

$$2 \operatorname{sen}^2 u = 1 - \cos 2u$$

Restar $\cos 2u$ de cada lado y sume $2 \operatorname{sen}^2 u$.

$$\operatorname{sen}^2 u = \frac{1 - \cos 2u}{2}$$

Dividir cada lado entre 2.

De un modo semejante, se puede demostrar la segunda fórmula al despejar $\cos^2 u$ en la fórmula de ángulo doble

$$\cos 2u = 2\cos^2 u - 1.$$

Para demostrar la tercera fórmula, use una identidad cociente, como sigue.

$$\tan^2 u = \frac{\operatorname{sen}^2 u}{\cos^2 u}$$

$$= \frac{\dfrac{1 - \cos 2u}{2}}{\dfrac{1 + \cos 2u}{2}}$$

$$= \frac{1 - \cos 2u}{1 + \cos 2u}$$

Fórmulas de suma a producto *(p. 410)*

$$\operatorname{sen} u + \operatorname{sen} v = 2\operatorname{sen}\left(\frac{u + v}{2}\right)\cos\left(\frac{u - v}{2}\right)$$

$$\operatorname{sen} u - \operatorname{sen} v = 2\cos\left(\frac{u + v}{2}\right)\operatorname{sen}\left(\frac{u - v}{2}\right)$$

$$\cos u + \cos v = 2\cos\left(\frac{u + v}{2}\right)\cos\left(\frac{u - v}{2}\right)$$

$$\cos u - \cos v = -2\operatorname{sen}\left(\frac{u + v}{2}\right)\operatorname{sen}\left(\frac{u - v}{2}\right)$$

Demostración

Para demostrar la primera fórmula, sea $x = u + v$ y $y = u - v$. A continuación sustituya $u = (x + y)/2$ y $v = (x - y)/2$ en la fórmula de producto a suma.

$$\operatorname{sen} u \cos v = \frac{1}{2}[\operatorname{sen}(u + v) + \operatorname{sen}(u - v)]$$

$$\operatorname{sen}\left(\frac{x + y}{2}\right)\cos\left(\frac{x - y}{2}\right) = \frac{1}{2}(\operatorname{sen} x + \operatorname{sen} y)$$

$$2\operatorname{sen}\left(\frac{x + y}{2}\right)\cos\left(\frac{x - y}{2}\right) = \operatorname{sen} x + \operatorname{sen} y$$

Las otras fórmulas de suma a producto se pueden demostrar de un modo semejante.

RESOLUCIÓN DE PROBLEMAS

Este conjunto de ejercicios, difíciles y que invitan a meditar, amplía y explora más a fondo los conceptos aprendidos en este capítulo.

1. (a) Escriba cada una de las otras funciones trigonométricas de θ en términos de sen θ.

(b) Escriba cada una de las otras funciones trigonométricas de θ en términos de cos θ.

2. Verifique que para todos los enteros n,

$$\cos\left[\frac{(2n+1)\pi}{2}\right] = 0.$$

3. Verifique que para todos los enteros n,

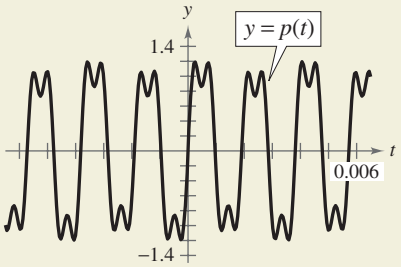
$$\operatorname{sen}\left[\frac{(12n+1)\pi}{6}\right] = \frac{1}{2}.$$

4. Una onda sonora específica está modelada por

$$p(t) = \frac{1}{4\pi}\left(p_1(t) + 30p_2(t) + p_3(t) + p_5(t) + 30p_6(t)\right)$$

donde $p_n(t) = \frac{1}{n}\operatorname{sen}(524n\pi t)$ y t es el tiempo (en segundos).

(a) Encuentre las componentes de seno $p_n(t)$ y use una calculadora de gráficas para graficar cada componente. A continuación, verifique la gráfica de p que se muestra.



(b) Encuentre el periodo de cada componente de seno de p. ¿p es periódica? Si es así, ¿cuál es el periodo?

(c) Use el comando *zero* o *root* o los comandos *zoom* y *trace* de una calculadora de gráficas para hallar las intersecciones con t de la gráfica y p en un ciclo.

(d) Use los comandos *maximum* y *minimum* de una calculadora de gráficas para aproximar el valor absoluto máximo y el valor absoluto mínimo de p en un ciclo.

5. Tres cuadrados del lado s se colocan uno al lado del otro (vea figura). Haga una conjetura acerca de la relación entre la suma $u + v$ y w. Pruebe su conjetura usando para ello la identidad para la tangente de la suma de dos ángulos.

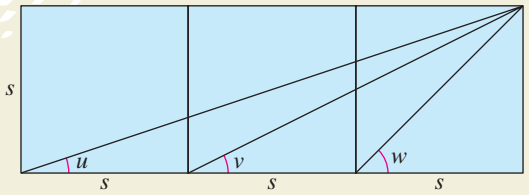


FIGURA PARA EJERCICIO 5

6. La trayectoria recorrida por un objeto (despreciando la resistencia del aire) que se proyecta a una altura inicial de h_0 pies, una velocidad inicial de v_0 pies por segundo y un ángulo inicial θ está dada por

$$y = -\frac{16}{v_0^2 \cos^2\theta}x^2 + (\tan\theta)x + h_0$$

donde x y y se miden en pies. Encuentre una fórmula para la altura máxima de un objeto proyectado desde el nivel del suelo a una velocidad v_0 y ángulo θ. Para hacer esto, encuentre la mitad de la distancia horizontal

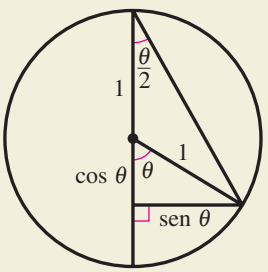
$$\frac{1}{32}v_0^2 \operatorname{sen} 2\theta$$

y a continuación sustitúyala por x en el modelo general para la trayectoria de un proyectil (donde $h_0 = 0$).

7. Use la figura para deducir las fórmulas para

$$\operatorname{sen}\frac{\theta}{2},\ \cos\frac{\theta}{2} \text{ y } \tan\frac{\theta}{2}$$

donde θ es un ángulo agudo.



8. La fuerza F (en libras) en la espalda de una persona cuando se dobla a un ángulo θ está modelada por

$$F = \frac{0.6W\operatorname{sen}(\theta + 90^\circ)}{\operatorname{sen} 12^\circ}$$

donde W es el peso de la persona (en libras).

(a) Simplifique el modelo.

(b) Use una calculadora de gráficas para graficar el modelo, donde $W = 185$ y $0^\circ < \theta < 90^\circ$.

(c) ¿A qué ángulo es máxima la fuerza? ¿A qué ángulo la fuerza es mínima?

9. El número de horas de luz diurna que hay en cualquier lugar de la Tierra depende de la estación del año y de la latitud del lugar. Las siguientes ecuaciones modelan el número de horas de luz diurna en Seward, Alaska (latitud 60°) y Nueva Orleans, Louisiana (latitud 30°).

$$D = 12.2 - 6.4 \cos\left[\frac{\pi(t + 0.2)}{182.6}\right] \quad \text{Seward}$$

$$D = 12.2 - 1.9 \cos\left[\frac{\pi(t + 0.2)}{182.6}\right] \quad \text{Nueva Orleans}$$

En estos modelos, D representa el número de horas de luz diurna y t representa el día, con $t = 0$ correspondiente al 1 de enero.

(a) Use una calculadora de gráficas para graficar ambos modelos en la misma pantalla. Use una pantalla de $0 \le t \le 365$.

(b) Encuentre los días del año en los que ambas ciudades reciben la misma cantidad de luz diurna.

(c) ¿Cuál ciudad tiene la mayor variación en el número de horas de luz diurna? ¿Cuál constante en cada modelo usaría usted para determinar la diferencia entre los números máximo y mínimo de horas de luz diurna?

(d) Determine el periodo de cada modelo.

10. La marea, o profundidad del océano cerca de la orilla, cambia en todo el día. La profundidad d del agua (en pies) de una bahía puede modelarse con

$$d = 35 - 28 \cos\frac{\pi}{6.2}t$$

donde t es el tiempo en horas, con $t = 0$ correspondiente a las 12:00 A.M.

(a) Algebraicamente encuentre el tiempo en el que se presentan las mareas alta y baja.

(b) Algebraicamente encuentre el tiempo(s) en que la profundidad del agua es de 3.5 pies.

(c) Use una calculadora de gráficas para verificar sus resultados de los incisos (a) y (b).

11. Encuentre la solución de cada desigualdad en el intervalo $[0, 2\pi]$.

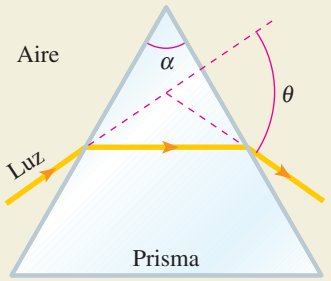
(a) $\operatorname{sen} x \ge 0.5$ (b) $\cos x \le -0.5$

(c) $\tan x < \operatorname{sen} x$ (d) $\cos x \ge \operatorname{sen} x$

12. El índice de refracción n de un material transparente es la razón entre la velocidad de la luz en el vacío y la velocidad de la luz en el material. Algunos materiales comunes y sus índices son aire (1.00), agua (1.33) y vidrio (1.50). A veces se usan prismas triangulares para medir el índice de refracción con base en la fórmula

$$n = \frac{\operatorname{sen}\left(\frac{\theta}{2} + \frac{\alpha}{2}\right)}{\operatorname{sen}\frac{\theta}{2}}.$$

Para el prisma que se ilustra en la figura, $\alpha = 60°$.



(a) Escriba el índice de refracción como función de $\cot(\theta/2)$.

(b) Encuentre θ para un prisma hecho de vidrio.

13. (a) Escriba una fórmula de suma para $\operatorname{sen}(u + v + w)$.

(b) Escriba una fórmula de suma para $\tan(u + v + w)$.

14. (a) Deduzca una fórmula por $\cos 3\theta$.

(b) Deduzca una fórmula por $\cos 4\theta$.

15. Las alturas h (en pulgadas) de los pistones 1 y 2 en un motor de automóvil pueden modelarse con

$$h_1 = 3.75 \operatorname{sen} 733t + 7.5$$

y

$$h_2 = 3.75 \operatorname{sen} 733\left(t + \frac{4\pi}{3}\right) + 7.5$$

donde t se mide en segundos.

(a) Use una calculadora de gráficas para graficar las alturas de estos dos pistones en la misma pantalla para $0 \le t \le 1$.

(b) ¿Con qué frecuencia están los pistones a la misma altura?

Temas adicionales de trigonometría

6

6.1 Ley de los senos

6.2 Ley de los cosenos

6.3 Vectores en el plano

6.4 Vectores y producto punto

6.5 Forma trigonométrica de un número complejo

En matemáticas

Se usa trigonometría para resolver triángulos, representar vectores y escribir formas trigonométricas de números complejos

En la vida real

Se usa trigonometría para hallar áreas, estimar alturas y representar vectores que impliquen fuerza, velocidad y otras cantidades. Por ejemplo, se pueden usar trigonometría y vectores para hallar la tracción en cuerdas de remolque cuando una barcaza cargada es remolcada por dos remolcadores. (Vea Ejercicio 93, página 456.)

Luca Tettoni/Terra/Corbis

EN CARRERAS

Hay numerosas carreras que usan trigonometría. A continuación veamos varias de ellas.

- Piloto
  Ejercicio 51, página 435
- Ingeniero civil
  Ejercicio 55, página 443
- Diseñador de marquesinas
  Ejercicio 58, página 443
- Paisajista
  Ejercicio 4, página 491

6.1 Ley de los senos

Lo que debe aprender

- Usar la ley de los senos para resolver triángulos oblicuángulos (AAL o ALA).
- Usar la ley de los senos para resolver triángulos oblicuángulos (LLA).
- Hallar las áreas de triángulos oblicuángulos.
- Usar la ley de los senos para modelar y resolver problemas de la vida real.

Por qué debe aprenderlo

Se puede usar la ley de los senos para resolver problemas reales que impliquen triángulos oblicuángulos. Por ejemplo, en el Ejercicio 53 de la página 436 se puede usar la ley de los senos para determinar la distancia de un bote a la orilla.

© Owen Franken/Corbis

Introducción

En el capítulo 4 estudió técnicas para resolver triángulos rectángulos. En esta sección y la siguiente resolverá **triángulos oblicuángulos**, es decir, aquellos que no tienen ángulos rectos. Como notación estándar, los ángulos de un triángulo se marcan como A, B y C, y sus lados opuestos se marcan como a, b y c, como se ve en la Figura 6.1.

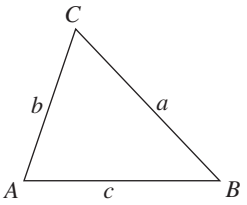


FIGURA 6.1

Para resolver un triángulo oblicuángulo es necesario saber la medida de al menos un lado y cualesquiera otras dos medidas del triángulo, ya sean dos lados, dos ángulos y un ángulo y un lado. Esto se desglosa en los siguientes cuatro casos.

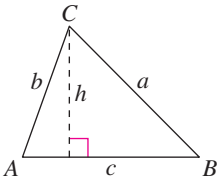
1. Dos ángulos y cualquier lado (AAL o ALA)
2. Dos lados y un ángulo opuesto a uno de ellos (LLA)
3. Tres lados (LLL)
4. Dos lados y su ángulo incluido (LAL)

Los primeros dos casos se pueden resolver usando la **ley de los senos**, mientras que los últimos dos casos requieren la ley de los cosenos (vea Sección 6.2).

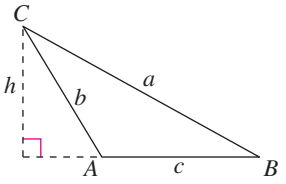
Ley de los senos

Si ABC es un triángulo con lados a, b y c, entonces

$$\frac{a}{\operatorname{sen} A} = \frac{b}{\operatorname{sen} B} = \frac{c}{\operatorname{sen} C}.$$



A es agudo.



A es obtuso.

La ley de los senos también se puede escribir en la forma recíproca

$$\frac{\operatorname{sen} A}{a} = \frac{\operatorname{sen} B}{b} = \frac{\operatorname{sen} C}{c}.$$

Para una demostración de la ley de los senos, vea la página 487.

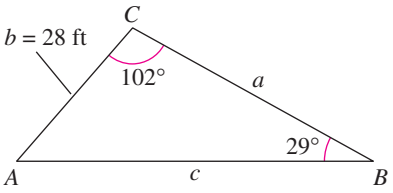


FIGURA 6.2

Ejemplo 1 Dados dos ángulos y un lado—AAL

Para el triángulo de la Figura 6.2, $C = 102°$, $B = 29°$ y $b = 28$ pies. Encuentre el ángulo y los lados restantes.

Solución

El tercer ángulo del triángulo es

$$\begin{aligned} A &= 180° - B - C \\ &= 180° - 29° - 102° \\ &= 49°. \end{aligned}$$

Por la ley de los senos, tenemos

$$\frac{a}{\operatorname{sen} A} = \frac{b}{\operatorname{sen} B} = \frac{c}{\operatorname{sen} C}.$$

Usando $b = 28$ produce

$$a = \frac{b}{\operatorname{sen} B}(\operatorname{sen} A) = \frac{28}{\operatorname{sen} 29°}(\operatorname{sen} 49°) \approx 43.59 \text{ pies}$$

y

$$c = \frac{b}{\operatorname{sen} B}(\operatorname{sen} C) = \frac{28}{\operatorname{sen} 29°}(\operatorname{sen} 102°) \approx 56.49 \text{ pies.}$$

PUNTO *de repaso* Ahora trate de hacer el Ejercicio 5.

Tip de estudio

Cuando resuelva triángulos, un dibujo cuidadoso es útil como rápida prueba para la factibilidad de la respuesta. Recuerde que el lado más largo es opuesto al ángulo más grande, y el lado más corto es opuesto al ángulo más pequeño

Ejemplo 2 Dados dos ángulos y un lado—ALA

Un poste se inclina *hacia* el Sol a un ángulo de 8° a partir de la vertical, y proyecta una sombra de 22 pies. El ángulo de elevación desde la punta de la sombra a lo alto del poste es 43º. ¿Cuál es la altura del poste?

Solución

En la Figura 6.3, observe que $A = 43°$ y $B = 90° + 8° = 98°$. Entonces, el tercer ángulo es

$$\begin{aligned} C &= 180° - A - B \\ &= 180° - 43° - 98° \\ &= 39°. \end{aligned}$$

Por la ley de los senos, tenemos

$$\frac{a}{\operatorname{sen} A} = \frac{c}{\operatorname{sen} C}.$$

Como $c = 22$ pies, la longitud del poste es

$$a = \frac{c}{\operatorname{sen} C}(\operatorname{sen} A) = \frac{22}{\operatorname{sen} 39°}(\operatorname{sen} 43°) \approx 23.84 \text{ pies.}$$

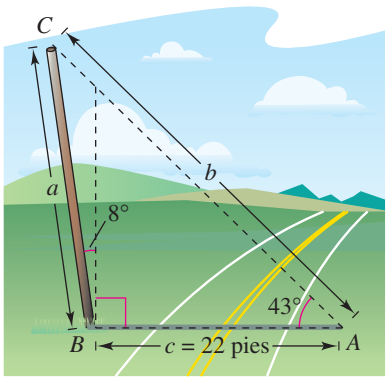


FIGURA 6.3

PUNTO *de repaso* Ahora trate de hacer el Ejercicio 45.

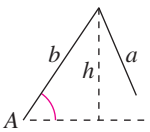
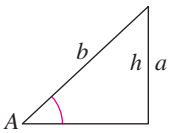
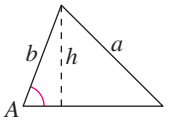
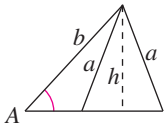
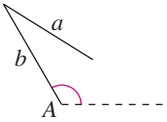
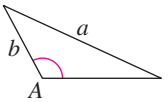
Como práctica, trate de trabajar de nuevo el Ejemplo 2 para un poste que se inclina *alejándose del* Sol bajo las mismas condiciones.

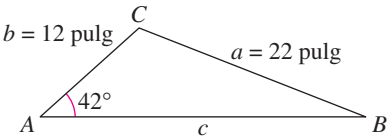
El caso ambiguo (LLA)

En los ejemplos 1 y 2 ya vio que dos ángulos y un lado determinan un triángulo de características únicas. No obstante, si se dan dos lados y un ángulo opuesto pueden ocurrir tres posibles situaciones: (1) no existe ese triángulo, (2) existe un triángulo, o (3) dos triángulos distintos pueden satisfacer las condiciones.

El caso ambiguo (LLA)

Considere un triángulo en el que nos dan a, b y A. $(h = b \operatorname{sen} A)$

	A es agudo.	A es agudo.	2 es agudo.	A es agudo.	A es obtuso.	A es obtuso.
Trace						
Condición necesaria	$a < h$	$a = h$	$a \geq b$	$h < a < b$	$a \leq b$	$a > b$
Triángulos posibles	Ninguno	Uno	Uno	Dos	Ninguno	Uno



Una solución: $a \geq b$

FIGURA 6.4

Ejemplo 3 Caso de una sola solución—LLA

Para el triángulo de la Figura 6.4, $a = 22$ pulgadas, $b = 12$ pulgadas y $A = 42°$. Encuentre los lados y ángulos restantes.

Solución

Por la ley de los senos, tenemos

$$\frac{\operatorname{sen} B}{b} = \frac{\operatorname{sen} A}{a} \qquad \text{Forma recíproca}$$

$$\operatorname{sen} B = b\left(\frac{\operatorname{sen} A}{a}\right) \qquad \text{Multiplicar cada lado por } b.$$

$$\operatorname{sen} B = 12\left(\frac{\operatorname{sen} 42°}{22}\right) \qquad \text{Sustituir por } A, a \text{ y } b.$$

$$B \approx 21.41°. \qquad B \text{ es agudo.}$$

Ahora podemos determinar que

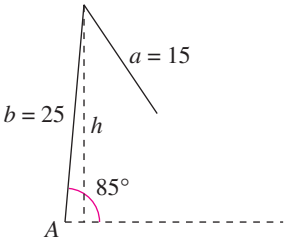
$$C \approx 180° - 42° - 21.41° = 116.59°.$$

Entonces, el lado restante es

$$\frac{c}{\operatorname{sen} C} = \frac{a}{\operatorname{sen} A}$$

$$c = \frac{a}{\operatorname{sen} A}(\operatorname{sen} C) = \frac{22}{\operatorname{sen} 42°}(\operatorname{sen} 116.59°) \approx 29.40 \text{ pulgadas.}$$

PUNTO *de repaso* Ahora trate de hacer el Ejercicio 25.



No hay solución: $a < h$
FIGURA 6.5

Ejemplo 4 Caso sin solución—LLA

Demuestre que no hay triángulo para el que $a = 15$, $b = 25$ y $A = 85°$.

Solución

Empiece por hacer el dibujo que se ilustra en la Figura 6.5. En ese trazo se ve que no se forma ningún triángulo. Se puede verificar esto si se usa la ley de los senos.

$$\frac{\operatorname{sen} B}{b} = \frac{\operatorname{sen} A}{a}$$ Forma recíproca

$$\operatorname{sen} B = b\left(\frac{\operatorname{sen} A}{a}\right)$$ Multiplicar cada lado por b.

$$\operatorname{sen} B = 25\left(\frac{\operatorname{sen} 85°}{15}\right) \approx 1.660 > 1$$

Esto contradice el hecho de que $|\operatorname{sen} B| \leq 1$. Entonces, no se puede formar ningún triángulo que tenga lados $a = 15$ y $b = 25$ y un ángulo de $A = 85°$.

PUNTO *de repaso* Ahora trate de hacer el Ejercicio 27.

Ejemplo 5 Caso de dos soluciones—LLA

Encuentre dos triángulos para los que $a = 12$ metros, $b = 31$ metros y $A = 20.5°$.

Solución

Por la ley de los senos, tenemos

$$\frac{\operatorname{sen} B}{b} = \frac{\operatorname{sen} A}{a}$$ Forma recíproca

$$\operatorname{sen} B = b\left(\frac{\operatorname{sen} A}{a}\right) = 31\left(\frac{\operatorname{sen} 20.5°}{12}\right) \approx 0.9047.$$

Hay dos ángulos, $B_1 \approx 64.8°$ y $B_2 \approx 180° - 64.8° = 115.2°$, entre 0° y 180° cuyo seno es 0.9047. Para $B_1 \approx 64.8°$, se obtiene

$$C \approx 180° - 20.5° - 64.8° = 94.7°$$

$$c = \frac{a}{\operatorname{sen} A}(\operatorname{sen} C) = \frac{12}{\operatorname{sen} 20.5°}(\operatorname{sen} 94.7°) \approx 34.15 \text{ metros.}$$

Para $B_2 \approx 115.2°$, se obtiene

$$C \approx 180° - 20.5° - 115.2° = 44.3°$$

$$c = \frac{a}{\operatorname{sen} A}(\operatorname{sen} C) = \frac{12}{\operatorname{sen} 20.5°}(\operatorname{sen} 44.3°) \approx 23.93 \text{ metros.}$$

Los triángulos resultantes se muestran en la Figura 6.6.

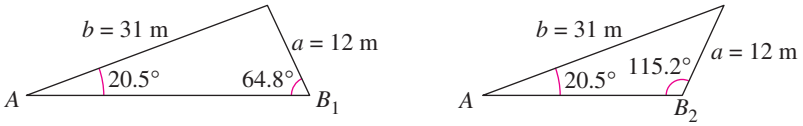


FIGURA 6.6

PUNTO *de repaso* Ahora trate de hacer el Ejercicio 29.

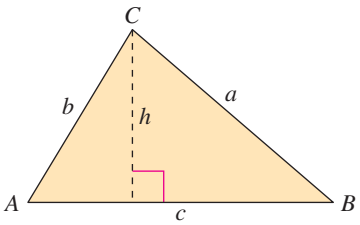
Área de un triángulo oblicuángulo

El procedimiento que se sigue para demostrar la ley de los senos lleva a una sencilla fórmula para el área de un triángulo oblicuángulo. Consultando la Figura 6.7, observe que cada triángulo tiene una altura de $h = b \operatorname{sen} A$. En consecuencia, el área de cada triángulo es

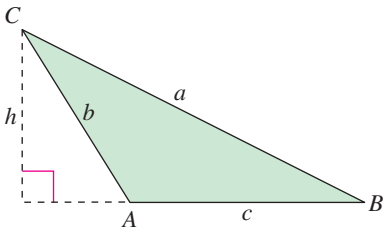
$$\text{Área} = \frac{1}{2}(\text{base})(\text{altura}) = \frac{1}{2}(c)(b \operatorname{sen} A) = \frac{1}{2}bc \operatorname{sen} A.$$

Por argumentos similares, se pueden desarrollar las fórmulas

$$\text{Área} = \frac{1}{2}ab \operatorname{sen} C = \frac{1}{2}ac \operatorname{sen} B.$$



A es agudo.



A es obtuso.

FIGURA 6.7

Tip de estudio

Para ver cómo obtener la altura del triángulo obtuso de la Figura 6.7, nótese el uso del ángulo de referencia $180° - A$ y la fórmula de la diferencia para el seno, como sigue.

$$\begin{aligned} h &= b \operatorname{sen}(180° - A) \\ &= b(\operatorname{sen} 180° \cos A \\ &\quad - \cos 180° \operatorname{sen} A) \\ &= b[0 \cdot \cos A - (-1) \cdot \operatorname{sen} A] \\ &= b \operatorname{sen} A \end{aligned}$$

Área de un triángulo oblicuángulo

El área de cualquier triángulo es la mitad del producto de las longitudes de dos lados por el seno de su ángulo incluido. Esto es,

$$\text{Área} = \frac{1}{2}bc \operatorname{sen} A = \frac{1}{2}ab \operatorname{sen} C = \frac{1}{2}ac \operatorname{sen} B.$$

Observe que si el ángulo A es de 90°, la fórmula da el área para un triángulo rectángulo:

$$\text{Área} = \frac{1}{2}bc(\operatorname{sen} 90°) = \frac{1}{2}bc = \frac{1}{2}(\text{base})(\text{altura}). \qquad \operatorname{sen} 90° = 1$$

Se obtienen resultados similares para los ángulos C y B iguales a 90°.

Ejemplo 6 Hallar el área de un lote triangular

Encuentre el área de un lote triangular que tiene dos lados de longitudes 90 metros y 52 metros y el ángulo incluido es 102°.

Solución

Considere $a = 90$ metros, $b = 52$ metros y ángulo $C = 102°$, como se ve en la Figura 6.8. Entonces, el área del triángulo es

$$\text{Área} = \frac{1}{2}ab \operatorname{sen} C = \frac{1}{2}(90)(52)(\operatorname{sen} 102°) \approx 2289 \text{ metros cuadrados.}$$

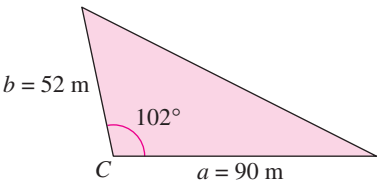


FIGURA 6.8

PUNTO *de repaso* Ahora trate de hacer el Ejercicio 39.

Aplicación

Ejemplo 7 Una aplicación de la ley de los senos

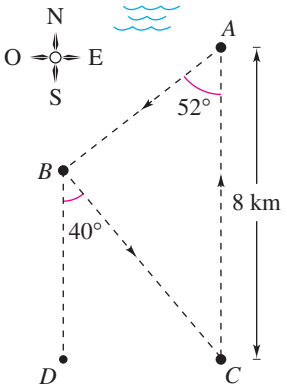


FIGURA 6.9

El curso para un bote empieza en el punto A en la Figura 6.9 y continúa en la dirección S 52° O al punto B, a continuación en la dirección S 40° E al punto C y, finalmente, regresa a A. El punto C se encuentra a 8 kilómetros directamente al sur del punto A. Aproxime la distancia total del curso de la carrera.

Solución

Como las rectas BD y AC son paralelas, se sigue que $\angle BCA \cong \angle CBD$. En consecuencia, el triángulo ABC tiene las medidas que se muestran en la Figura 6.10. La medida del ángulo B es $180° - 52° - 40° = 88°$. Usando la ley de los senos,

$$\frac{a}{\text{sen } 52°} = \frac{b}{\text{sen } 88°} = \frac{c}{\text{sen } 40°}.$$

Como $b = 8$,

$$a = \frac{8}{\text{sen } 88°}(\text{sen } 52°) \approx 6.308$$

y

$$c = \frac{8}{\text{sen } 88°}(\text{sen } 40°) \approx 5.145.$$

La longitud total del curso es aproximadamente

$$\text{Longitud} \approx 8 + 6.308 + 5.145$$
$$= 19.453 \text{ kilómetros.}$$

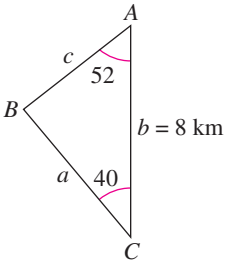


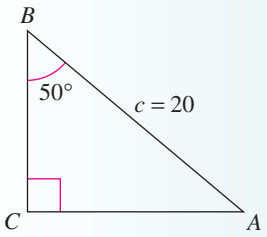
FIGURA 6.10

PUNTO *de repaso* Ahora trate de hacer el Ejercicio 49.

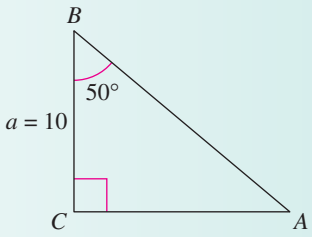
Discusión en clase

Uso de la ley de los senos En esta sección hemos usado la ley de los senos para resolver triángulos *oblicuángulos*. ¿Se puede usar la ley de los senos para resolver un triángulo rectángulo? Si es así, escriba un breve párrafo que explique cómo emplearla para resolver cada uno de los triángulos siguientes. ¿Hay un modo más fácil de resolver estos triángulos?

a. (AAL)



b. (ALA)



6.1 EJERCICIOS

En www.CalcChat.com vea las soluciones a los ejercicios impares.

VOCABULARIO: Llene los espacios en blanco.

1. Un triángulo _____ es el que no tiene ángulo recto.

2. Para un triángulo ABC, la ley de los senos está dado por $\dfrac{a}{\operatorname{sen} A} = \_\_\_\_\_ = \dfrac{c}{\operatorname{sen} C}$.

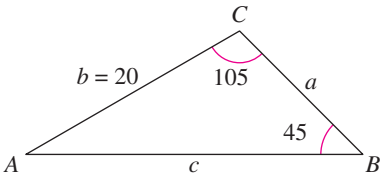
3. Dos _____ y un _____ determinan un triángulo único.

4. El área de un triángulo oblicuángulo está dada por $\frac{1}{2}bc \operatorname{sen} A = \frac{1}{2}ab \operatorname{sen} C =$ _____ .

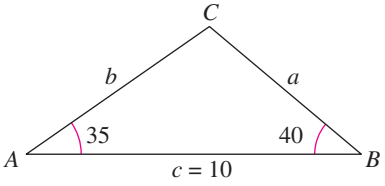
HABILIDADES Y APLICACIONES

En los Ejercicios 5-24, use la ley de los senos para resolver el triángulo. Redondee sus respuestas a dos lugares decimales.

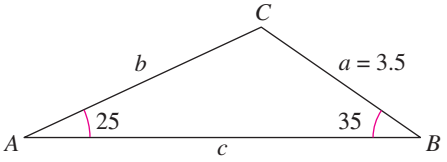
5.



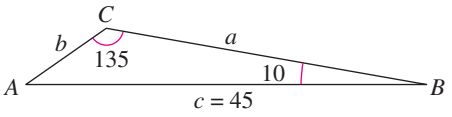
6.



7.



8.



9. $A = 102.4°, \quad C = 16.7°, \quad a = 21.6$

10. $A = 24.3°, \quad C = 54.6°, \quad c = 2.68$

11. $A = 83° 20', \quad C = 54.6°, \quad c = 18.1$

12. $A = 5° 40', \quad B = 8° 15', \quad b = 4.8$

13. $A = 35°, \quad B = 65°, \quad c = 10$

14. $A = 120°, \quad B = 45°, \quad c = 16$

15. $A = 55°, \quad B = 42°, \quad c = \frac{3}{4}$

16. $B = 28°, \quad C = 104°, \quad a = 3\frac{5}{8}$

17. $A = 36°, \quad a = 8, \quad b = 5$

18. $A = 60°, \quad a = 9, \quad c = 10$

19. $B = 15° 30', \quad a = 4.5, \quad b = 6.8$

20. $B = 2° 45', \quad b = 6.2, \quad c = 5.8$

21. $A = 145°, \quad a = 14, \quad b = 4$

22. $A = 100°, \quad a = 125, \quad c = 10$

23. $A = 110° 15', \quad a = 48, \quad b = 16$

24. $C = 95.20°, \quad a = 35, \quad c = 50$

En los Ejercicios 25-34, use la ley de los senos para resolver (si es posible) el triángulo. Si existen dos soluciones, encuentre ambas. Redondee sus respuestas a dos lugares decimales.

25. $A = 110°, \quad a = 125, \quad b = 100$

26. $A = 110°, \quad a = 125, \quad b = 200$

27. $A = 76°, \quad a = 18, \quad b = 20$

28. $A = 76°, \quad a = 34, \quad b = 21$

29. $A = 58°, \quad a = 11.4, \quad b = 12.8$

30. $A = 58°, \quad a = 4.5, \quad b = 12.8$

31. $A = 120°, \quad a = b = 25$

32. $A = 120°, \quad a = 25, \quad b = 24$

33. $A = 45°, \quad a = b = 1$

34. $A = 25° 4', \quad a = 9.5, \quad b = 22$

En los Ejercicios 35-38, encuentre valores para b tales que el triángulo tenga (a) una solución, (b) dos soluciones y (c) no tenga solución.

35. $A = 36°, \quad a = 5$

36. $A = 60°, \quad a = 10$

37. $A = 10°, \quad a = 10.8$

38. $A = 88°, \quad a = 315.6$

En los Ejercicios 39–44, encuentre el área del triángulo que tiene el ángulo y los lados indicados.

39. $C = 120°, \quad a = 4, \quad b = 6$

40. $B = 130°, \quad a = 62, \quad c = 20$

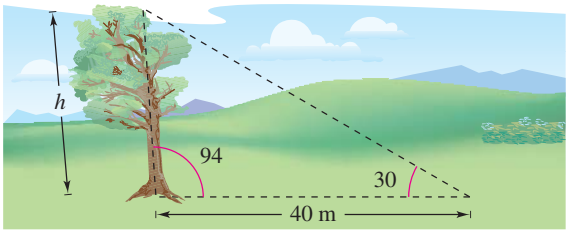
41. $A = 43° 45', \quad b = 57, \quad c = 85$

42. $A = 5° 15', \quad b = 4.5, \quad c = 22$

43. $B = 72° 30', \quad a = 105, \quad c = 64$

44. $C = 84° 30', \quad a = 16, \quad b = 20$

45. ALTURA Debido a los vientos prevalecientes, un árbol creció de modo que se estaba inclinando 4° respecto a la vertical. En un punto a 40 metros del árbol, el ángulo de elevación a lo alto del árbol es 30° (vea figura). Encuentre la altura h del árbol.



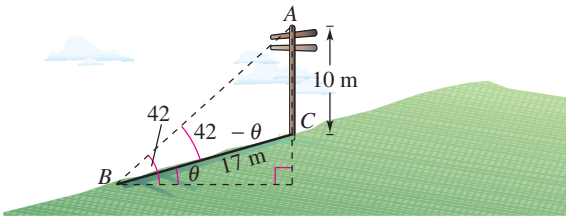
46. ALTURA Una asta, que está a un ángulo recto con la horizontal, está situada en una pendiente que forma un ángulo de 12° con la horizontal. La sombra del asta mide 16 metros de largo y apunta directamente hacia la pendiente. El ángulo de elevación desde la punta de la sombra al Sol es 20°.

(a) Trace un triángulo para representar la situación. Muestre las cantidades conocidas en el triángulo y use una variable para indicar la altura del asta.

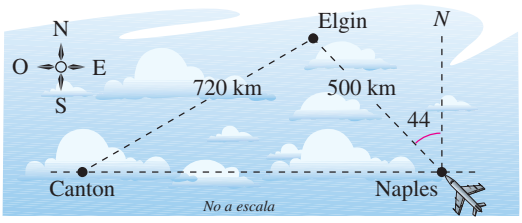
(b) Escriba una ecuación que se pueda usar para hallar la altura del asta.

(c) Encuentre la altura del asta.

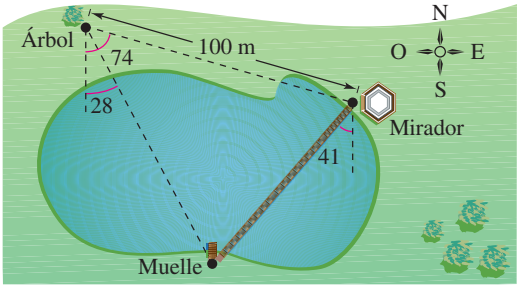
47. ÁNGULO DE ELEVACIÓN Un poste de 10 metros de una red eléctrica proyecta una sombra de 17 metros directamente hacia abajo de una pendiente, cuando el ángulo de elevación del Sol es 42° (vea figura). Encuentre θ, el ángulo de elevación del suelo.



48. TRAYECTORIA DE VUELO Un avión vuela 500 kilómetros con un rumbo de 316° desde Naples a Elgin (vea figura). El avión entonces vuela 720 kilómetros de Elgin a Canton (Canton está al Oeste de Naples). Encuentre el rumbo del vuelo de Elgin a Canton.



49. DISEÑO DE PUENTE Se ha de construir un puente que cruce un pequeño lago desde un mirador a un muelle (vea figura). El rumbo del mirador al muelle es S 41° O. Desde un árbol que está a 100 metros del mirador, los rumbos al mirador y al muelle son S 74° E y S 28° E, respectivamente. Encuentre la distancia del mirador al muelle.



50. DISEÑO DE UNA VÍA DE FERROCARRIL El arco de circunferencia de una curva de ferrocarril tiene una cuerda de 3000 pies de longitud correspondiente a un ángulo central de 40°.

(a) Trace un diagrama que visualmente represente la situación. Muestre las cantidades conocidas en el diagrama y use las variables r y s para representar los radios del arco y la longitud del arco, respectivamente.

(b) Encuentre el radio r de circunferencia.

(c) Encuentre la longitud s de circunferencia.

51. TRAYECTORIA DE PLANEO Un piloto acaba de entrar en la trayectoria de planeo para aterrizar en un aeropuerto con pista de 9000 pies de longitud. Los ángulos de depresión desde el avión a los extremos de la pista son 17.5° y 18.8°.

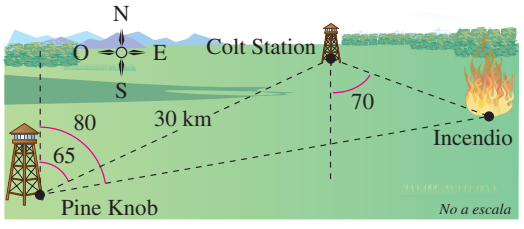
(a) Trace un diagrama que visualmente represente la situación.

(b) Encuentre la distancia en línea recta que el avión debe recorrer hasta tocar tierra en el extremo cercano de la pista.

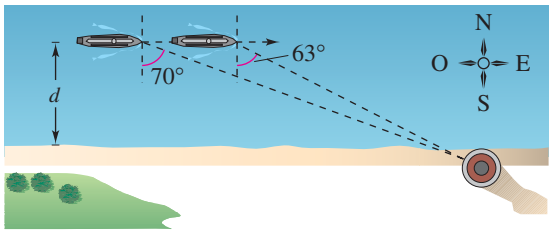
(c) Encuentre la distancia topográfica (en recta) que el avión debe recorrer hasta tocar tierra.

(d) Encuentre la altitud del avión cuando el piloto empieza el descenso.

52. LOCALIZAR UN INCENDIO El rumbo desde la torre de observación de Pine Knob a la torre de observación de Colt Station es N 65° E, y las dos torres están a 30 kilómetros entre sí. Un incendio divisado por guardias rurales en cada una de las torres tiene un rumbo de N 80° E desde Pine Knob y S 70° E desde Colt Station (vea figura). Encuentre la distancia desde el incendio a cada una de las torres.



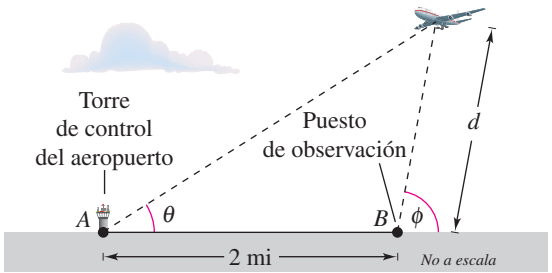
53. DISTANCIA Un bote está navegando al Este paralelo a la orilla, con una rapidez de 10 millas por hora. En un momento determinado, el rumbo al faro es S 70° E, 15 minutos después el rumbo es S 63° E (vea figura). El faro está ubicado en la orilla. ¿Cuál es la distancia del bote a la orilla?



54. DISTANCIA Una familia está viajando hacia el Oeste en una carretera que pasa por un famoso lugar de interés. En un momento determinado, el rumbo hacia ese lugar es N 62° O, y después que la familia viaja 5 millas más el rumbo es N 38° O. ¿Cuánto es lo más cerca que la familia se aproximará a ese lugar de interés en la carretera?

55. ALTITUD Los ángulos de elevación a un avión desde dos puntos A y B al nivel del suelo son 55° y 72°, respectivamente. Los puntos A y B están a 2.2 millas entre sí, y el avión está al Este de ambos puntos en el mismo plano vertical. Encuentre la altitud del avión.

56. DISTANCIA Los ángulos de elevación θ y ϕ a un avión desde la torre de control del aeropuerto, y desde un puesto de observación a 2 millas de distancia, están continuamente vigilados (vea la figura). Escriba una ecuación que dé la distancia d entre el avión y el puesto de observación en términos de θ y ϕ.



EXPLORACIÓN

¿VERDADERO O FALSO? En los Ejercicios 57-59, determine si la proposición es verdadera o falsa. Justifique su respuesta.

57. Si un triángulo contiene un ángulo obtuso, entonces debe ser oblicuángulo.

58. Dos ángulos y un lado de un triángulo no necesariamente determinan un triángulo único.

59. Si se conocen tres lados o tres ángulos de un triángulo oblicuángulo, entonces el triángulo puede resolverse.

60. ANÁLISIS GRÁFICO Y NUMÉRICO En la figura, α y β son ángulos positivos.

(a) Escriba α como función de β.

(b) Use una calculadora de gráficas para graficar la función del inciso (a). Determine su dominio y variación.

(c) Use el resultado del inciso (a) para escribir c como función de β.

(d) Use una calculadora de gráficas para graficar la función del inciso (c). Determine su dominio y rango.

(e) Complete la tabla. ¿Qué se puede inferir?

β	0.4	0.8	1.2	1.6	2.0	2.4	2.8
α							
c							

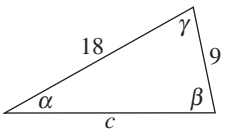


FIGURA PARA EJERCICIO 60

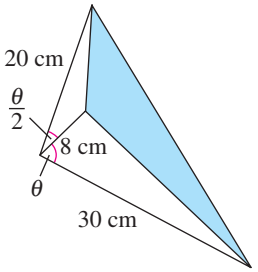


FIGURA PARA EJERCICIO 61

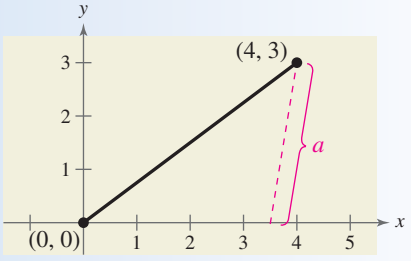
61. ANÁLISIS GRÁFICO

(a) Escriba el área A de la región sombreada en la figura como función de θ.

(b) Use una calculadora de gráficas para graficar la función.

(c) Determine el dominio de la función. Explique en qué forma cambiará el área de la región y el dominio de la función, si el segmento de recta de ocho centímetros se redujera en longitud.

62. TOQUE FINAL En la figura, se ha de formar un triángulo al dibujar un segmento de recta de longitud a de (4, 3) al eje x positivo. ¿Para qué valor(es) de a puede usted formar (a) un triángulo, (b) dos triángulos y (c) ningún triángulo? Explique su razonamiento.



6.2 Ley de los cosenos

Lo que debe aprender

- Usar la ley de los cosenos para resolver triángulos oblicuángulos (LLL o LAL).
- Usar la ley de los cosenos para modelar y resolver problemas de la vida real.
- Usar la fórmula del área de Herón para hallar el área de un triángulo.

Por qué debe aprenderlo

Se puede usar la ley de los cosenos para resolver problemas de la vida real donde aparezcan triángulos oblicuángulos. Por ejemplo, en el Ejercicio 52 de la página 433 se puede usar la ley de los cosenos para aproximar la distancia que un jugador de béisbol debe correr para hacer una atrapada.

Daniel Bendjy/istockphoto.com

Introducción

Restan dos casos en la lista de las condiciones necesarias para resolver un triángulo oblicuángulo, LLL y LAL. Si nos dan tres lados (LLL), o dos lados y un ángulo incluido (LAL), ninguna de las relaciones de la ley de los senos estaría completa. En tales casos se puede usar la **ley de los cosenos.**

Ley de los cosenos

Forma estándar	*Forma alternativa*
$a^2 = b^2 + c^2 - 2bc \cos A$	$\cos A = \dfrac{b^2 + c^2 - a^2}{2bc}$
$b^2 = a^2 + c^2 - 2ac \cos B$	$\cos B = \dfrac{a^2 + c^2 - b^2}{2ac}$
$c^2 = a^2 + b^2 - 2ab \cos C$	$\cos C = \dfrac{a^2 + b^2 - c^2}{2ab}$

Para una demostración de la ley de los cosenos, vea la página 488.

Ejemplo 1 Tres lados de un triángulo—LLL

Encuentre los tres ángulos del triángulo en la Figura 6.11.

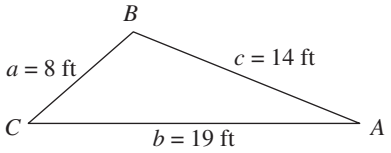


FIGURA 6.11

Solución

Es buena idea primero hallar el ángulo opuesto al lado más largo, el lado b en este caso. Usando la forma alternativa de la ley de los cosenos, podemos determinar que

$$\cos B = \frac{a^2 + c^2 - b^2}{2ac} = \frac{8^2 + 14^2 - 19^2}{2(8)(14)} \approx -0.45089.$$

Como cos B es negativo, sabemos que B es un ángulo *obtuso* dado por $B \approx 116.80°$. En este punto, es más sencillo usar la ley de los senos para determinar A.

$$\operatorname{sen} A = a\left(\frac{\operatorname{sen} B}{b}\right) \approx 8\left(\frac{\operatorname{sen} 116.80°}{19}\right) \approx 0.37583$$

Sabemos que A debe ser agudo porque B es obtuso y un triángulo puede tener, como máximo, un ángulo obtuso. Entonces, $A \approx 22.08°$ y $C \approx 180° - 22.08° - 116.80° = 41.12°$.

PUNTO *de repaso* Ahora trate de hacer el Ejercicio 5.

¿Ve usted por qué fue mejor hallar *primero* el ángulo mayor en el ejemplo 1? Si se conoce el coseno de un ángulo se puede determinar si éste es agudo u obtuso. Esto es,

$\cos\theta > 0$ para $0° < \theta < 90°$ Agudo

$\cos\theta < 0$ para $90° < \theta < 180°$. Obtuso

Entonces, en el ejemplo 1, una vez visto que el ángulo B es obtuso, reconocimos que los ángulos A y C eran agudos ambos. Si el ángulo mayor es agudo, los dos ángulos restantes también lo son.

Ejemplo 2 Dos lados y el ángulo incluido—LAL

Encuentre los ángulos restantes y lado del triángulo de la Figura 6.12.

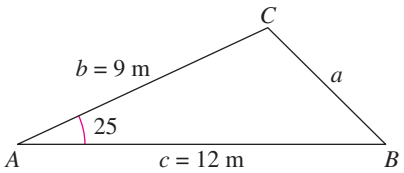


FIGURA 6.12

Tip de estudio

Cuando resuelva un triángulo oblicuángulo dados tres ángulos, use la forma alternativa de la ley de los cosenos para despejar un ángulo. Cuando resuelva un triángulo oblicuángulo dados dos ángulos y su ángulo incluido, use la forma normal de la ley de los cosenos para despejar una incógnita.

Solución

Use la ley de los cosenos para hallar el lado desconocido a en la figura.

$$a^2 = b^2 + c^2 - 2bc\cos A$$

$$a^2 = 9^2 + 12^2 - 2(9)(12)\cos 25°$$

$$a^2 \approx 29.2375$$

$$a \approx 5.4072$$

Como $a \approx 5.4072$ metros, sabemos la razón (sen A)/a y se puede usar la forma recíproca de la ley de los senos para despejar B.

$$\frac{\operatorname{sen} B}{b} = \frac{\operatorname{sen} A}{a}$$

$$\operatorname{sen} B = b\left(\frac{\operatorname{sen} A}{a}\right)$$

$$= 9\left(\frac{\operatorname{sen} 25}{5.4072}\right)$$

$$\approx 0.7034$$

Hay dos ángulos entre 0º y 180º cuyo seno es 0.7034, el primero es $B_1 \approx 44.7°$ y el otro es $B_2 \approx 180° - 44.7° = 135.3°$.

Para $B_1 \approx 44.7°$,

$$C_1 \approx 180° - 25° - 44.7° = 110.3°.$$

Para $B_2 \approx 135.3°$,

$$C_2 \approx 180° - 25° - 135.3° = 19.7°.$$

Como el lado c es el lado más largo del triángulo, C debe ser el ángulo más grande del triángulo. Entonces, $B \approx 44.7°$ y $C \approx 110.3°$.

PUNTO *de repaso* Ahora trate de hacer el Ejercicio 7.

Aplicaciones

Ejemplo 3 Una aplicación de la ley de los cosenos

El montículo de lanzamiento en un campo de *softbol* de mujeres está a 43 pies del *home* y la distancia entre las bases es 60 pies, como se ve en la Figura 6.13. (El montículo de lanzamiento no está a la mitad entre el *home* y la segunda base.) ¿A qué distancia está el montículo de la primera base?

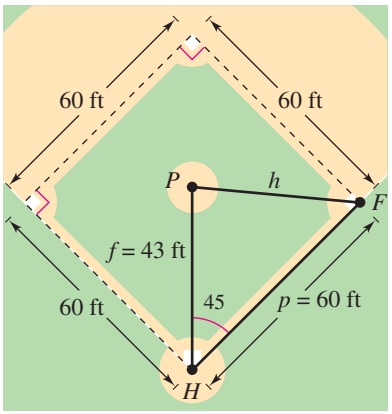


FIGURA 6.13

Solución

En el triángulo HPF, $H = 45°$ (la recta HP corta el ángulo recto en H), $f = 43$, y $p = 60$. Usando la ley de los cosenos para este caso de lado ángulo lado (LAL), tenemos

$$h^2 = f^2 + p^2 - 2fp\cos H$$
$$= 43^2 + 60^2 - 2(43)(60)\cos 45° \approx 1800.3.$$

Por tanto, la distancia aproximada del montículo de lanzamiento a la primera base es

$$h \approx \sqrt{1800.3} \approx 42.43 \text{ pies.}$$

PUNTO *de repaso* Ahora trate de hacer el Ejercicio 43.

Ejemplo 4 Una aplicación de la ley de los cosenos

Un barco navega 60 millas hacia el Este, luego ajusta su curso hacia el noreste, como se ve en la Figura 6.14. Después de navegar 80 millas en esa dirección, el barco se halla a 139 millas de su punto de salida. Describa el rumbo del punto B al punto C.

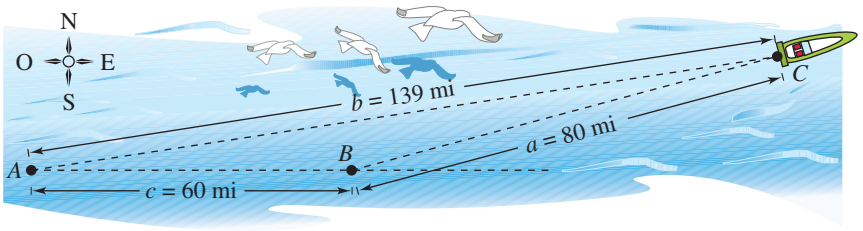


FIGURA 6.14

Solución

Tenemos $a = 80$, $b = 139$ y $c = 60$. Entonces, usando la forma alternativa de la ley de los cosenos, tenemos

$$\cos B = \frac{a^2 + c^2 - b^2}{2ac}$$
$$= \frac{80^2 + 60^2 - 139^2}{2(80)(60)}$$
$$\approx -0.97094.$$

Entonces, $B \approx \arccos(-0.97094) \approx 166.15°$, y entonces el rumbo medido hacia el Norte del punto B al punto C es

$$166.15° - 90° = 76.15°, \text{ o N } 76.15° \text{ E.}$$

PUNTO *de repaso* Ahora trate de hacer el Ejercicio 49.

Fórmula del área de Herón

NOTA HISTÓRICA

Herón de Alejandría (hacia el año 100 a.C.) fue un geómetra e inventor griego. Sus obras describen la forma de hallar las áreas de triángulos, cuadriláteros, polígonos regulares con 3 a 12 lados y círculos, así como las áreas superficiales y volúmenes de objetos tridimensionales.

La ley de los cosenos se puede usar para establecer la siguiente fórmula para el área de un triángulo. Esta fórmula recibe el nombre de **fórmula del área de Herón** en honor al matemático griego Herón (hacia el año 100 a.C.).

Fórmula del área de Herón

Dado cualquier triángulo con lados de longitudes a, b y c, el área del triángulo es

$$\text{Área} = \sqrt{s(s-a)(s-b)(s-c)}$$

donde $s = (a + b + c)/2$.

Para una demostración de la fórmula del área de Herón, vea la página 489.

Ejemplo 5 Uso de la fórmula del área de Herón

Encuentre el área de un triángulo que tenga lados de longitudes $a = 43$ metros, $b = 53$ metros y $c = 72$ metros.

Solución

Como $s = (a + b + c)/2 = 168/2 = 84$, la fórmula del área de Herón produce

$$\begin{aligned}\text{Área} &= \sqrt{s(s-a)(s-b)(s-c)} \\ &= \sqrt{84(41)(31)(12)} \\ &\approx 1131.89 \text{ metros cuadrados.}\end{aligned}$$

PUNTO *de repaso* Ahora trate de hacer el Ejercicio 59.

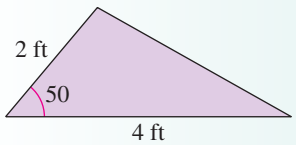
Hasta este punto el lector ha estudiado tres fórmulas para el área de un triángulo.

Fórmula normal:	$\text{Área} = \frac{1}{2}bh$
Triángulo oblicuángulo:	$\text{Área} = \frac{1}{2}bc \operatorname{sen} A = \frac{1}{2}ab \operatorname{sen} C = \frac{1}{2}ac \operatorname{sen} B$
Fórmula del área de Herón:	$\text{Área} = \sqrt{s(s-a)(s-b)(s-c)}$

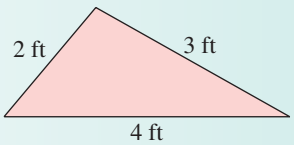
Discusión en clase

El área de un triángulo Use la fórmula más apropiada para hallar el área de cada uno de los triángulos siguientes. Demuestre su trabajo y dé sus razones para escoger cada fórmula.

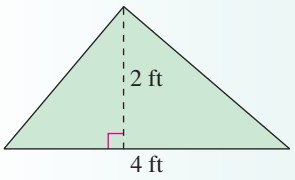
a.



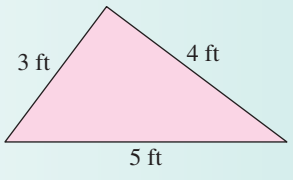
b.



c.



d.



6.2 EJERCICIOS

En www.CalcChat.com vea las soluciones a los ejercicios impares.

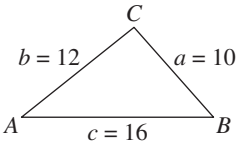
VOCABULARIO: Llene los espacios en blanco.

1. Si nos dan tres lados de un triángulo, usaríamos la ley de _____ para hallar los tres ángulos del triángulo.
2. Si nos dan dos ángulos y cualquier lado de un triángulo, usaríamos la ley de _____ para resolver el triángulo.
3. La forma estándar de la ley de los cosenos para $\cos B = \dfrac{a^2 + c^2 - b^2}{2ac}$ es _____ .
4. La ley de los cosenos se puede usar para establecer una fórmula para hallar el área de un triángulo llamada fórmula _____ _____ _____ _____.

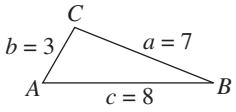
HABILIDADES Y APLICACIONES

En los Ejercicios 5-20, use la ley de cosenos para resolver el triángulo. Redondee sus respuestas a dos lugares decimales.

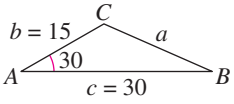
5.



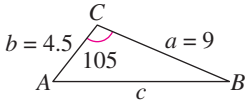
6.



7.



8.



9. $a = 11, \quad b = 15, \quad c = 21$

10. $a = 55, \quad b = 25, \quad c = 72$

11. $a = 75.4, \quad b = 52, \quad c = 52$

12. $a = 1.42, \quad b = 0.75, \quad c = 1.25$

13. $A = 120°, \quad b = 6, \quad c = 7$

14. $A = 48°, \quad b = 3, \quad c = 14$

15. $B = 10° \, 35', \quad a = 40, \quad c = 30$

16. $B = 75° \, 20', \quad a = 6.2, \quad c = 9.5$

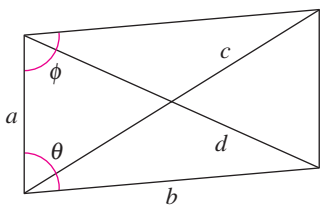
17. $B = 125° \, 40', \quad a = 37, \quad c = 37$

18. $C = 15° \, 15', \quad a = 7.45, \quad b = 2.15$

19. $C = 43°, \quad a = \frac{4}{9}, \quad b = \frac{7}{9}$

20. $C = 101°, \quad a = \frac{3}{8}, \quad b = \frac{3}{4}$

En los Ejercicios 21-26, complete la tabla al resolver el paralelogramo que se ve en la figura siguiente. (Las longitudes de las diagonales están dadas por c y d.)



	a	b	c	d	θ	ϕ
21.	5	8			45°	
22.	25	35				120°
23.	10	14	20			
24.	40	60		80		
25.	15		25	20		
26.		25	50	35		

En los Ejercicios 27-32, determine si es necesaria la ley de los senos o la de los cosenos para resolver el triángulo. A continuación resuelva el triángulo.

27. $a = 8, \quad c = 5, \quad B = 40°$

28. $a = 10, \quad b = 12, \quad C = 70°$

29. $A = 24°, \quad a = 4, \quad b = 18$

30. $a = 11, \quad b = 13, \quad c = 7$

31. $A = 42°, \quad B = 35°, \quad c = 1.2$

32. $a = 160, \quad B = 12°, \quad C = 7°$

En los Ejercicios 33-40, use la fórmula del área de Herón para hallar el área del triángulo.

33. $a = 8, \quad b = 12, \quad c = 17$

34. $a = 33, \quad b = 36, \quad c = 25$

35. $a = 2.5, \quad b = 10.2, \quad c = 9$

36. $a = 75.4, \quad b = 52, \quad c = 52$

37. $a = 12.32, \quad b = 8.46, \quad c = 15.05$

38. $a = 3.05, \quad b = 0.75, \quad c = 2.45$

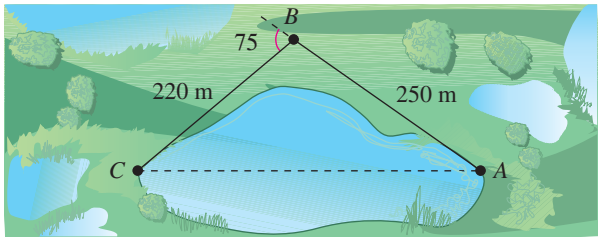
39. $a = 1, \quad b = \frac{1}{2}, \quad c = \frac{3}{4}$

40. $a = \frac{3}{5}, \quad b = \frac{5}{8}, \quad c = \frac{3}{8}$

41. NAVEGACIÓN Una carrera de botes corre a lo largo de un curso triangular marcado por las boyas A, B y C. La carrera se inicia con los botes dirigidos al Oeste por 3700 metros. Los otros dos lados del curso están al Norte del primer lado, y sus longitudes son 1700 metros y 3000 metros. Trace una figura que dé una representación visual de la situación y encuentre los rumbos para los dos últimos tramos de la carrera.

42. NAVEGACIÓN Un avión vuela 810 millas de Franklin a Centerville con un rumbo de 75º. A continuación vuela 648 millas de Centerville a Rosemount con un rumbo de 32º. Trace una figura que visualmente represente la situación, y encuentre la distancia en línea recta y rumbo de Franklin a Rosemount.

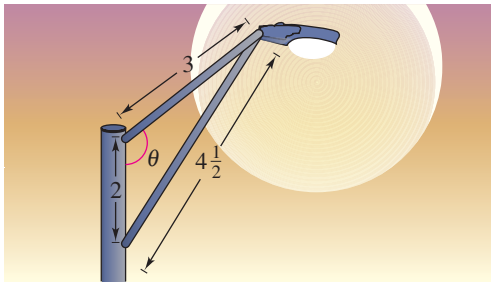
43. TOPOGRAFÍA Para aproximar la longitud de un pantano, un topógrafo camina 250 metros del punto A al punto B, luego gira 75º y camina 220 metros al punto C (vea figura). Aproxime la longitud AC del pantano.



44. TOPOGRAFÍA Un lote de terreno triangular tiene 115 metros de frente y los otros límites tienen longitudes de 76 metros y 92 metros. ¿Qué ángulos forma el frente con los otros dos límites?

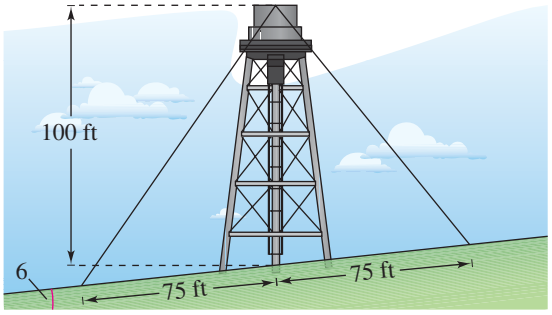
45. TOPOGRAFÍA Un lote de terrero triangular tiene lados de longitudes 725 pies, 650 pies y 575 pies. Encuentre la medida del ángulo más grande.

46. DISEÑO DE UN FAROL DE ALUMBRADO PÚBLICO Determine el ángulo θ en el diseño del farol de alumbrado que se ve en la figura.



47. DISTANCIA Dos barcos salen de puerto a las 9:00 A.M. Uno de ellos navega con rumbo N 53º O a 12 millas por hora y el otro navega con rumbo S 67º O a 16 millas por hora. Aproxime a qué distancia estarán entre sí al mediodía de ese día.

48. LONGITUD Una torre vertical de 100 pies ha de erigirse en el costado de una colina que forma un ángulo de 6º con la horizontal (vea figura). Encuentre la longitud de cada uno de los cables llamados "vientos" que estarán anclados a 75 pies cuesta arriba y cuesta abajo de la base de la torre.

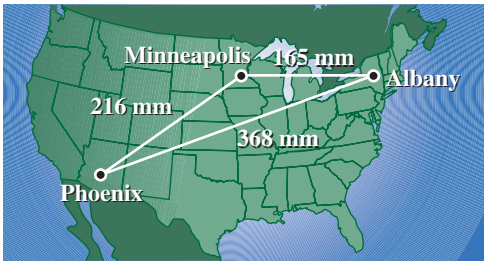


49. NAVEGACIÓN En un mapa, Orlando está a 178 milímetros al sur de Niagara Falls, Denver está a 273 milímetros de Orlando y Denver está a 235 milímetros de Niagara Falls (vea figura).

(a) Encuentre el rumbo de Denver desde Orlando.

(b) Encuentre el rumbo de Denver desde Niágara Falls.

50. NAVEGACIÓN En un mapa, Minneapolis está a 165 milímetros al Oeste de Albany, Phoenix está a 216 milímetros de Minneapolis, y Phoenix está a 368 milímetros de Albany (vea figura).

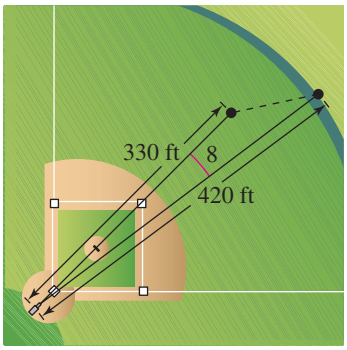


(a) Encuentre el rumbo de Minneapolis desde Phoenix.

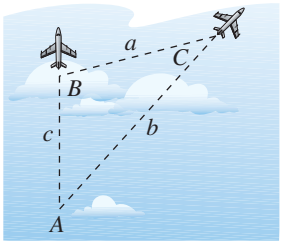
(b) Encuentre el rumbo de Albany desde Phoenix.

51. BÉISBOL En un "diamante" de béisbol con 90 pies por lado, el montículo del lanzador está a 60.5 pies del home. ¿Cuál es la distancia del montículo del lanzador a la tercera base?

52. BÉISBOL Un jugador situado en el campo central está jugando a aproximadamente 330 pies de la cámara de TV que está detrás del *home*. Un bateador conecta un elevado que va a la barda que está a 420 pies de la cámara (vea figura). La cámara gira 8° para seguir la jugada. ¿Aproximadamente cuánto debe correr el jardinero central para hacer la atrapada?

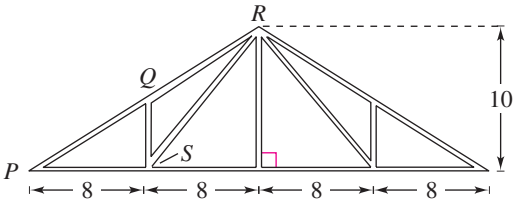


53. RASTREO DE AVIONES Para determinar la distancia entre dos aviones, una estación de rastreo continuamente determina la distancia a cada avión y el ángulo A entre ellos (vea figura). Determine la distancia a entre los aviones cuando $A = 42°$, $b = 35$ millas y $c = 20$ millas.



54. RASTREO DE AVIONES Use la figura para el Ejercicio 53 para determinar la distancia a entre los aviones cuando $A = 11°$, $b = 20$ millas y $c = 20$ millas.

55. ESTRUCTURAS Q es el punto medio del segmento de recta $\overline{PR}$ del travesaño de la estructura que se ve en la figura. ¿Cuáles son las longitudes de los segmentos de recta $\overline{PQ}$, $\overline{QS}$ y $\overline{RS}$?



56. DISEÑO DE MÁQUINAS Una máquina tiene una biela de 7 pulgadas conectada a un cigüeñal (vea figura).

(a) Use la ley de los cosenos para escribir una ecuación que dé la relación entre x y θ.

(b) Escriba x como función de θ. (Seleccione el signo que dé valores positivos de x.)

(c) Use una calculadora de gráficas para graficar la función del inciso (b).

(d) Use la gráfica del inciso (c) para determinar la distancia máxima que el pisón se mueve en un ciclo.

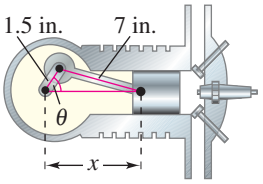


FIGURA PARA EJ. 56

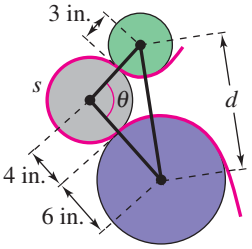
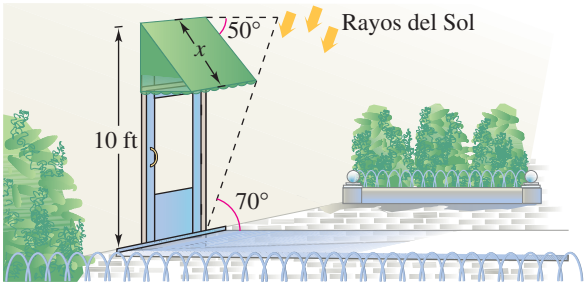


FIGURA PARA EJ. 57

57. MANUFACTURA DE PAPEL En un proceso con papel continuo, el papel pasa por tres rodillos con radios de 3 pulgadas, 4 pulgadas y 6 pulgadas (vea figura). Los centros de los rodillos de 3 pulgadas y de 6 pulgadas están a d pulgadas entre sí, y la longitud del arco en contacto con el papel en el rodillo de 4 pulgadas es s pulgadas. Complete la tabla.

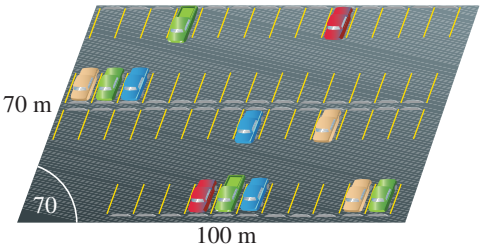
d (pulgadas)	9	10	12	13	14	15	16
θ (grados)							
s (pulgadas)							

58. DISEÑO DE TOLDOS Un toldo retráctil colocado arriba de una puerta de patio se baja a un ángulo de 50° desde la pared exterior a una altura de 10 pies sobre el suelo (vea figura). No debe incidir luz directa a la puerta cuando el ángulo de elevación del Sol sea mayor a 70°. ¿Cuál es la longitud x del toldo?



59. GEOMETRÍA Las longitudes de los lados de un lote de terreno triangular son aproximadamente 200 pies, 500 pies y 600 pies. Aproxime el área del terrero.

60. GEOMETRÍA Un lote de estacionamiento tiene la forma de un paralelogramo (vea figura). Las longitudes de dos lados adyacentes son 70 metros y 100 metros. El ángulo entre los dos lados es 70°. ¿Cuál es el área del lote de estacionamiento?



61. GEOMETRÍA Una persona desea comprar un lote triangular con medidas de 510 yardas por 840 yardas por 1120 yardas. El precio del terreno es de $2000 por acre. ¿Cuánto cuesta el terreno? (*Sugerencia:* 1 acre = 4840 yardas cuadradas.)

62. GEOMETRÍA Una persona desea comprar un lote triangular con medidas de 1350 pies por 1860 pies por 2490 pies. El precio del terreno es de $2200 por acre. ¿Cuánto cuesta el terreno? (*Sugerencia:* 1 acre = 43 560 pies cuadrados.)

EXPLORACIÓN

¿VERDADERO O FALSO? En los Ejercicios 63 y 64, determine si la proposición es verdadera o falsa. Justifique su respuesta.

63. En la fórmula del área de Herón, s es el promedio de las longitudes de los tres lados del triángulo.

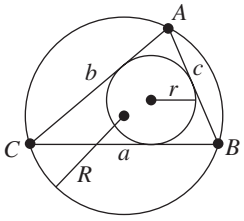
64. Además de LLL (lado lado lado) y LAL (lado ángulo lado), la ley de los cosenos se puede usar para resolver triángulos con condiciones LLA.

65. ESCRITURA Un triángulo tiene longitudes de lado de 10 centímetros, 16 centímetros y 5 centímetros. ¿Puede usarse la ley de los cosenos para resolver el triángulo? Explique.

66. ESCRITURA Dado un triángulo con $b = 47$ metros, $A = 87°$ y $C = 110°$, ¿puede usarse la ley de los cosenos para resolver el triángulo? Explique.

67. CÍRCULOS CIRCUNSCRITOS E INSCRITOS Sean R y r los radios de los círculos circunscritos e inscritos de un triángulo ABC, respectivamente (vea figura), y sea

$$s = \frac{a + b + c}{2}.$$



(a) Demuestre que $2R = \dfrac{a}{\operatorname{sen} A} = \dfrac{b}{\operatorname{sen} B} = \dfrac{c}{\operatorname{sen} C}$.

(b) Demuestre que $r = \sqrt{\dfrac{(s-a)(s-b)(s-c)}{s}}$.

CÍRCULOS CIRCUNSCRITOS E INSCRITOS En los Ejercicios 68 y 69, use los resultados del Ejercicio 67.

68. Dado un triángulo con $a = 25$, $b = 55$ y $c = 72$, encuentre las áreas de (a) el triángulo, (b) el círculo circunscrito y (c) el círculo inscrito.

69. Encuentre la longitud de la máxima pista de carreras circular que se pueda construir en una parte de propiedad con lados de longitudes de 200 pies, 250 pies y 325 pies.

70. PIÉNSELO ¿Qué conocida fórmula se obtiene cuando se usa la tercera forma de la ley de los cosenos $c^2 = a^2 + b^2 - 2ab \cos C$, y se hace $C = 90°$? ¿Cuál es la relación entre la ley de los cosenos y esta fórmula?

71. PIÉNSELO En el Ejemplo 2, suponga que $A = 115°$. Después de despejar a, ¿cuál ángulo resolvería a continuación, B o C? ¿Hay dos posibles soluciones para qué ángulo? Si es así, ¿cómo puede determinarse cuál ángulo es la solución correcta?

72. ESCRITURA Describa la forma en que se puede usar la ley de los cosenos para resolver el caso ambiguo del triángulo oblicuángulo ABC, donde $a = 12$ pies, $b = 30$ pies y $A = 20°$. ¿El resultado es igual que cuando se usa la ley de los senos para resolver el triángulo? Describa las ventajas y las desventajas de cada método.

73. ESCRITURA En el Ejercicio 72, la ley de los cosenos se utilizó para resolver un triángulo en el caso LLA (lado lado ángulo) de dos soluciones. ¿Se puede usar la ley de los cosenos para resolver casos sin solución y de una sola solución de LLA? Explique.

74. TOQUE FINAL Determine si es necesaria la ley de los senos o la ley de los cosenos para resolver el triángulo.

(a) A, C y a (b) a, c y C

(c) b, c y A (d) A, B y c

(e) b, c y C (f) a, b y c

75. DEMOSTRACIÓN Use la ley de los cosenos para demostrar que

$$\frac{1}{2}bc(1 + \cos A) = \frac{a + b + c}{2} \cdot \frac{-a + b + c}{2}.$$

76. DEMOSTRACIÓN Use la ley de los cosenos para demostrar que

$$\frac{1}{2}bc(1 - \cos A) = \frac{a - b + c}{2} \cdot \frac{a + b - c}{2}.$$

6.3 Vectores en el plano

Lo que debe aprender

- Representar vectores como segmentos de recta dirigida.
- Escribir las formas componentes vectoriales.
- Realizar operaciones básicas con vectores y representarlas gráficamente.
- Escribir vectores como combinaciones lineales de vectores unitarios.
- Hallar los ángulos directores de vectores.
- Usar vectores para modelar y resolver problemas de la vida real.

Por qué debe aprenderlo

El lector puede usar vectores para modelar y resolver problemas de la vida real donde intervengan magnitudes y direcciones. Por ejemplo, en el Ejercicio 102 de la página 457 se pueden usar vectores para determinar la verdadera dirección de un jet comercial.

Bill Bachman/Photo Researchers, Inc.

Introducción

Ciertas cantidades, como fuerza y velocidad, implican tanto *magnitud* como *dirección* y no pueden ser caracterizadas por un solo número real. Para representar esa cantidad, podemos usar un **segmento de recta dirigida,** como se ve en la Figura 6.15. El segmento de recta dirigida $\overrightarrow{PQ}$ tiene **punto inicial** P y **punto terminal** Q. Su magniud (o longitud) está denotada por $\|\overrightarrow{PQ}\|$ y se puede hallar usando la fórmula de la distancia.

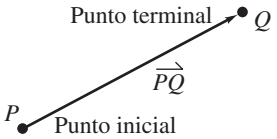


FIGURA 6.15

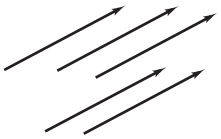


FIGURA 6.16

Se dice que dos segmentos de recta dirigida que tengan la misma magnitud y dirección son equivalentes. Por ejemplo, los segmentos de recta dirigida de la Figura 6.16 son todos ellos equivalentes. El conjunto de todos los segmentos de recta dirigida que son equivalentes al segmento de recta dirigida $\overrightarrow{PQ}$ es un **vector v en el plano,** escrito $\mathbf{v} = \overrightarrow{PQ}$. Los vectores están denotados en letras minúsculas, negritas, por ejemplo **u**, **v** y **w**.

Ejemplo 1 Representación vectorial por segmentos de recta dirigida

Representamos con **u** el segmento de recta dirigida de $P(0, 0)$ a $Q(3, 2)$, y con **v** el segmento de recta dirigido de $R(1, 2)$ a $S(4, 4)$, como se ve en la Figura 6.17. Demuestre que **u** y **v** son equivalentes.

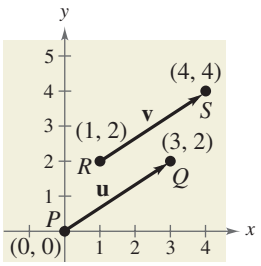


FIGURA 6.17

Solución

De la fórmula de la distancia, se deduce que $\overrightarrow{PQ}$ y $\overrightarrow{RS}$ tienen *la misma magnitud.*

$$\|\overrightarrow{PQ}\| = \sqrt{(3-0)^2 + (2-0)^2} = \sqrt{13} \qquad \|\overrightarrow{RS}\| = \sqrt{(4-1)^2 + (4-2)^2} = \sqrt{13}$$

Además, ambos segmentos de recta tienen la *misma dirección* porque ambos están dirigidos hacia arriba a la derecha en rectas que tienen una pendiente de

$$\frac{4-2}{4-1} = \frac{2-0}{3-0} = \frac{2}{3}.$$

Como $\overrightarrow{PQ}$ y $\overrightarrow{RS}$ tienen la misma magnitud y dirección, **u** y **v** son equivalentes.

PUNTO *de repaso* Ahora trate de hacer el Ejercicio 11.

Forma de componentes de un vector

El segmento de recta dirigido cuyo punto inicial es el origen suele ser el representante más práctico de un conjunto de segmentos de recta dirigida equivalente. Este representante del vector **v** está en **posición estándar.**

Un vector cuyo punto inicial es el origen $(0, 0)$ puede estar representado de manera única por las coordenadas de su punto terminal (v_1, v_2). Ésta es la **forma de componentes de un vector v,** escrita como $\mathbf{v} = \langle v_1, v_2 \rangle$. Las coordenadas v_1 y v_2 son las *componentes* de **v**. Si tanto el punto inicial como el punto terminal se encuentran en el origen, **v** es el **vector cero** y está denotado por $\mathbf{0} = \langle 0, 0 \rangle$.

Forma de componentes de un vector

La forma de componentes del vector con punto inicial $P(p_1, p_2)$ y punto terminal $Q(q_1, q_2)$ está dada por

$$\overrightarrow{PQ} = \langle q_1 - p_1, q_2 - p_2 \rangle = \langle v_1, v_2 \rangle = \mathbf{v}.$$

La **magnitud** (o longitud) de **v** está dada por

$$\|\mathbf{v}\| = \sqrt{(q_1 - p_1)^2 + (q_2 - p_2)^2} = \sqrt{v_1^2 + v_2^2}.$$

Si $\|\mathbf{v}\| = 1$, **v** es un **vector unitario.** Además, $\|\mathbf{v}\| = 0$ si y sólo si **v** es el vector cero **0**.

TECNOLOGÍA

Se pueden graficar vectores con una calculadora de gráficas al graficar segmentos de recta dirigida. Consulte instrucciones específicas en la guía del usuario.

Dos vectores $\mathbf{u} = \langle u_1, u_2 \rangle$ y $\mathbf{v} = \langle v_1, v_2 \rangle$ son *iguales* si y sólo si $u_1 = v_1$ y $u_2 = v_2$. En el Ejemplo 1, el vector **u** de $P(0, 0)$ a $Q(3, 2)$ es $\mathbf{u} = \overrightarrow{PQ} = \langle 3 - 0, 2 - 0 \rangle = \langle 3, 2 \rangle$, y el vector **v** de $R(1, 2)$ a $S(4, 4)$ es $\mathbf{v} = \overrightarrow{RS} = \langle 4 - 1, 4 - 2 \rangle = \langle 3, 2 \rangle$.

Ejemplo 2 Hallar la forma de componente de un vector

Encuentre la forma de componentes y la magnitud de un vector **v** que tiene punto inicial $(4, -7)$ y punto terminal $(-1, 5)$.

Solución algebraica

Sea

$$P(4, -7) = (p_1, p_2)$$

y además

$$Q(-1, 5) = (q_1, q_2).$$

Entonces, las componentes de $\mathbf{v} = \langle v_1, v_2 \rangle$ son

$$v_1 = q_1 - p_1 = -1 - 4 = -5$$

$$v_2 = q_2 - p_2 = 5 - (-7) = 12.$$

Por tanto, $\mathbf{v} = \langle -5, 12 \rangle$ y la magnitud de **v** es

$$\|\mathbf{v}\| = \sqrt{(-5)^2 + 12^2} = \sqrt{169} = 13.$$

PUNTO *de repaso* Ahora trate de hacer el Ejercicio 77.

Solución gráfica

Use papel cuadriculado en centímetros para graficar los puntos $P(4, -7)$ y $Q(-1, 5)$. Con todo cuidado trace el vector **v**. Use el dibujo para hallar las componentes de $\mathbf{v} = \langle v_1, v_2 \rangle$. A continuación use una regla graduada en centímetros para hallar la magnitud de **v**.

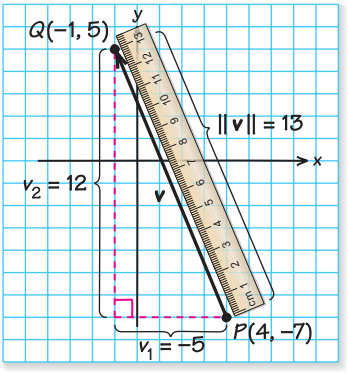


FIGURA 6.18

La Figura 6.18 muestra que las componentes de **v** son $v_1 = -5$ y $v_2 = 12$, por lo que $\mathbf{v} = \langle -5, 12 \rangle$. La Figura 18 también muestra que la magnitud de **v** es $\|\mathbf{v}\| = 13$.

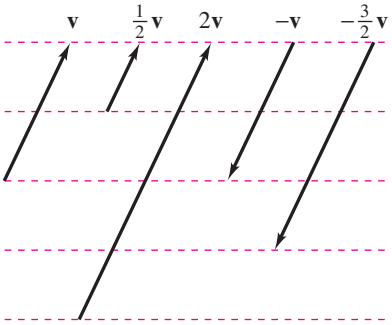


FIGURA 6.19

Operaciones con vectores

Las dos operaciones básicas con vectores son **multiplicación por un escalar** y **suma de vectores.** En operaciones con vectores, los números suelen recibir el nombre de **escalares.** En este texto, los escalares siempre serán números reales. Geométricamente, el producto de un vector $\mathbf{v}$ y un escalar k es el vector que es $|k|$ veces la longitud de $\mathbf{v}$. Si k es positivo, $k\mathbf{v}$ tiene la misma dirección que $\mathbf{v}$, y si k es negativo, $k\mathbf{v}$ tiene la dirección opuesta a la de $\mathbf{v}$, como se ve en la Figura 6.19.

Para sumar dos vectores $\mathbf{u}$ y $\mathbf{v}$ geométricamente, primero se ponen ambos (sin cambiar sus longitudes ni direcciones) de modo que el punto inicial del segundo vector $\mathbf{v}$ coincida con el punto terminal del primer vector $\mathbf{u}$. La suma $\mathbf{u} + \mathbf{v}$ es el vector formado al unir el punto inicial del primer vector $\mathbf{u}$ con el punto terminal del segundo vector $\mathbf{v}$, como se ve en la Figura 6.20. Esta técnica se llama **ley del paralelogramo** para la suma de vectores porque el vector $\mathbf{u} + \mathbf{v}$, a menudo llamado **resultante** de la suma de vectores, es la diagonal de un paralelogramo que tiene lados adyacentes $\mathbf{u}$ y $\mathbf{v}$.

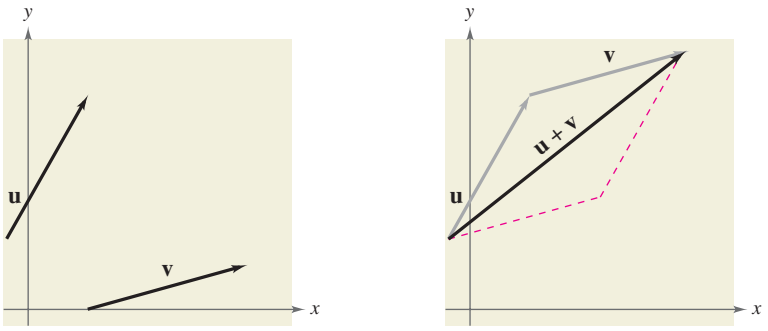


FIGURA 6.20

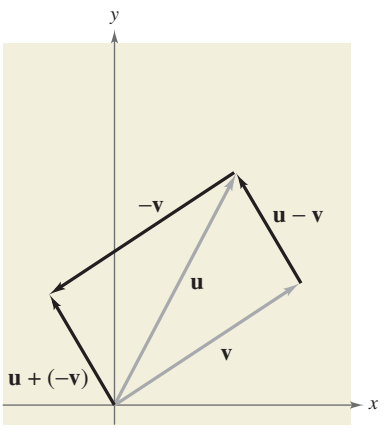
Definiciones de suma de vectores y multiplicación por un escalar

Sean $\mathbf{u} = \langle u_1, u_2 \rangle$ y $\mathbf{v} = \langle v_1, v_2 \rangle$ vectores y sea k un escalar (un número real). Entonces la *suma* de $\mathbf{u}$ y $\mathbf{v}$ es el vector

$$\mathbf{u} + \mathbf{v} = \langle u_1 + v_1, u_2 + v_2 \rangle \qquad \text{Suma}$$

y el *múltiplo escalar* de k veces $\mathbf{u}$ es el vector

$$k\mathbf{u} = k\langle u_1, u_2 \rangle = \langle ku_1, ku_2 \rangle. \qquad \text{Múltiplo escalar}$$



$\mathbf{u} - \mathbf{v} = \mathbf{u} + (-\mathbf{v})$

FIGURA 6.21

El **negativo** de $\mathbf{v} = \langle v_1, v_2 \rangle$ es

$$-\mathbf{v} = (-1)\mathbf{v}$$
$$= \langle -v_1, -v_2 \rangle \qquad \text{Negativo}$$

y la **diferencia** de $\mathbf{u}$ y $\mathbf{v}$ es

$$\mathbf{u} - \mathbf{v} = \mathbf{u} + (-\mathbf{v}) \qquad \text{Sumar } (-\mathbf{v}). \text{ Vea Figura 6.21.}$$
$$= \langle u_1 - v_1, u_2 - v_2 \rangle. \qquad \text{Diferencia}$$

Para representar $\mathbf{u} - \mathbf{v}$ geométricamente, se pueden usar segmentos de recta dirigida con el *mismo* punto inicial. La diferencia $\mathbf{u} - \mathbf{v}$ es el vector del punto terminal de $\mathbf{v}$ al punto terminal de $\mathbf{u}$, que es igual a $\mathbf{u} + (-\mathbf{v})$, como se ve en la Figura 6.21.

Las definiciones de componentes de suma de vectores y multiplicación por un escalar se ilustran en el ejemplo 3. En este ejemplo, observe que cada una de las operaciones con vectores se pueden interpretar geométricamente.

Ejemplo 3 Operaciones con vectores

Sea $\mathbf{v} = \langle -2, 5\rangle$ y $\mathbf{w} = \langle 3, 4\rangle$, y encuentre cada uno de los siguientes vectores.

a. $2\mathbf{v}$ **b.** $\mathbf{w} - \mathbf{v}$ **c.** $\mathbf{v} + 2\mathbf{w}$

Solución

a. Como $\mathbf{v} = \langle -2, 5\rangle$, tenemos

$$\begin{aligned} 2\mathbf{v} &= 2\langle -2, 5\rangle \\ &= \langle 2(-2), 2(5)\rangle \\ &= \langle -4, 10\rangle. \end{aligned}$$

En la Figura 6.22 se ilustra un dibujo de $2\mathbf{v}$.

b. La diferencia de $\mathbf{w}$ y $\mathbf{v}$ es

$$\begin{aligned} \mathbf{w} - \mathbf{v} &= \langle 3, 4\rangle - \langle -2, 5\rangle \\ &= \langle 3 - (-2), 4 - 5\rangle \\ &= \langle 5, -1\rangle. \end{aligned}$$

En la Figura 6.23 se ilustra un dibujo de $\mathbf{w} - \mathbf{v}$. Nótese que la figura muestra la diferencia vectorial $\mathbf{w} - \mathbf{v}$ como la suma $\mathbf{w} + (-\mathbf{v})$.

c. La suma de $\mathbf{v}$ y $2\mathbf{w}$ es

$$\begin{aligned} \mathbf{v} + 2\mathbf{w} &= \langle -2, 5\rangle + 2\langle 3, 4\rangle \\ &= \langle -2, 5\rangle + \langle 2(3), 2(4)\rangle \\ &= \langle -2, 5\rangle + \langle 6, 8\rangle \\ &= \langle -2 + 6, 5 + 8\rangle \\ &= \langle 4, 13\rangle. \end{aligned}$$

En la Figura 6.24 se muestra un dibujo de $\mathbf{v} + 2\mathbf{w}$.

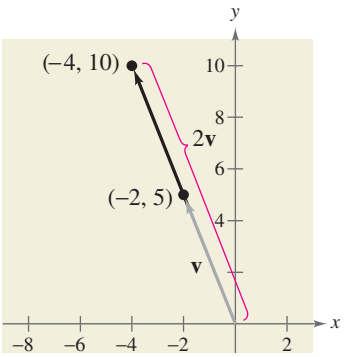


FIGURA 6.22

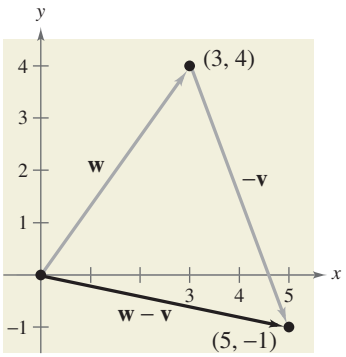


FIGURA 6.23

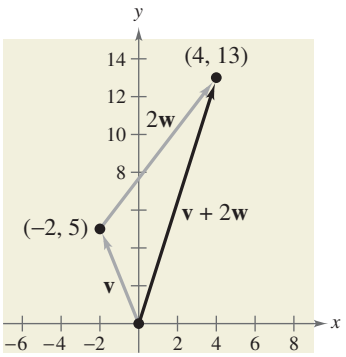


FIGURA 6.24

PUNTO *de repaso* Ahora trate de hacer el Ejercicio 31.

La suma de vectores y la multiplicación por un escalar comparten muchas de las propiedades de la aritmética ordinaria.

Propiedades de la suma de vectores y multiplicación por un escalar

Sean $\mathbf{u}$, $\mathbf{v}$ y $\mathbf{w}$ vectores y sean c y d escalares. Entonces son verdaderas las siguientes propiedades.

1. $\mathbf{u} + \mathbf{v} = \mathbf{v} + \mathbf{u}$
2. $(\mathbf{u} + \mathbf{v}) + \mathbf{w} = \mathbf{u} + (\mathbf{v} + \mathbf{w})$
3. $\mathbf{u} + \mathbf{0} = \mathbf{u}$
4. $\mathbf{u} + (-\mathbf{u}) = \mathbf{0}$
5. $c(d\mathbf{u}) = (cd)\mathbf{u}$
6. $(c + d)\mathbf{u} = c\mathbf{u} + d\mathbf{u}$
7. $c(\mathbf{u} + \mathbf{v}) = c\mathbf{u} + c\mathbf{v}$
8. $1(\mathbf{u}) = \mathbf{u}, \quad 0(\mathbf{u}) = \mathbf{0}$
9. $\|c\mathbf{v}\| = |c|\,\|\mathbf{v}\|$

La propiedad 9 se puede expresar como sigue: la magnitud del vector $c\mathbf{v}$ es el valor absoluto de c por la magnitud de $\mathbf{v}$.

Vectores unitarios

En numerosas aplicaciones de vectores es útil hallar un vector unitario que tenga la misma dirección que un vector determinado $\mathbf{v}$ diferente de cero. Para hacer esto se puede dividir $\mathbf{v}$ entre su magnitud para obtener

$$\mathbf{u} = \text{vector unitario} = \frac{\mathbf{v}}{\|\mathbf{v}\|} = \left(\frac{1}{\|\mathbf{v}\|}\right)\mathbf{v}.$$

Vector unitario en la dirección de $\mathbf{v}$

Observe que $\mathbf{u}$ es un múltiplo escalar de $\mathbf{v}$. El vector $\mathbf{u}$ tiene una magnitud de 1 y la misma dirección que $\mathbf{v}$. El vector $\mathbf{u}$ recibe el nombre de **vector unitario en la dirección de $\mathbf{v}$**.

Ejemplo 4 Hallar un vector unitario

Encuentre un vector unitario en la dirección de $\mathbf{v} = \langle -2, 5\rangle$ y verifique que el resultado tenga una magnitud de 1.

Solución

El vector unitario en la dirección de $\mathbf{v}$ es

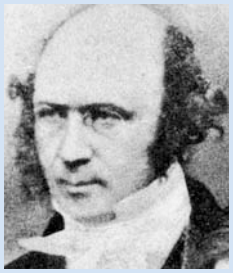
$$\begin{aligned}\frac{\mathbf{v}}{\|\mathbf{v}\|} &= \frac{\langle -2, 5\rangle}{\sqrt{(-2)^2 + (5)^2}} \\ &= \frac{1}{\sqrt{29}}\langle -2, 5\rangle \\ &= \left\langle \frac{-2}{\sqrt{29}}, \frac{5}{\sqrt{29}} \right\rangle.\end{aligned}$$

Este vector tiene una magnitud de 1 porque

$$\sqrt{\left(\frac{-2}{\sqrt{29}}\right)^2 + \left(\frac{5}{\sqrt{29}}\right)^2} = \sqrt{\frac{4}{29} + \frac{25}{29}} = \sqrt{\frac{29}{29}} = 1.$$

PUNTO *de repaso* Ahora trate de hacer el Ejercicio 41.

NOTA HISTÓRICA



The Granger Collection

William Rowan Hamilton (1805-1865), matemático irlandés, hizo algunos de los primeros trabajos con vectores. Hamilton pasó muchos años perfeccionando un sistema de cantidades semejantes a vectores llamadas cuaterniones. Aunque Hamilton estaba convencido de los beneficios de los cuaterniones, las operaciones que definió no producían buenos modelos para fenómenos físicos. No fue sino hasta la segunda mitad del siglo XIX en que el físico escocés James Maxwell (1831-1879) reestructuró los cuaterniones de Hamilton en una forma útil para representar cantidades físicas como la fuerza, velocidad y aceleración.

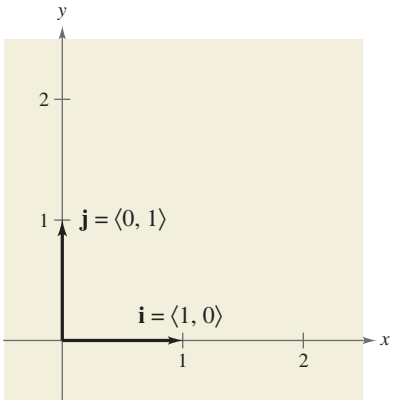


FIGURA 6.25

Los vectores unitarios $\langle 1, 0\rangle$ y $\langle 0, 1\rangle$ se denominan **vectores unitarios canónicos** y están denotados por

$$\mathbf{i} = \langle 1, 0\rangle \qquad \text{y} \qquad \mathbf{j} = \langle 0, 1\rangle$$

como se ve en la Figura 6.25. (Nótese que la letra minúscula **i** se escribe en negritas para distinguirla del número imaginario $i = \sqrt{-1}$.) Estos vectores se pueden usar para representar cualquier vector $\mathbf{v} = \langle v_1, v_2\rangle$, como sigue.

$$\begin{aligned}\mathbf{v} &= \langle v_1, v_2\rangle \\ &= v_1\langle 1, 0\rangle + v_2\langle 0, 1\rangle \\ &= v_1\mathbf{i} + v_2\mathbf{j}\end{aligned}$$

Los escalares v_1 y v_2 se llaman **componente horizontal** y **componente vertical de v,** respectivamente. La suma vectorial

$$v_1\mathbf{i} + v_2\mathbf{j}$$

recibe el nombre de **combinación lineal** de los vectores **i** y **j**. Cualquier vector en el plano se puede escribir como una combinación lineal de los vectores unitarios canónicos **i** y **j**.

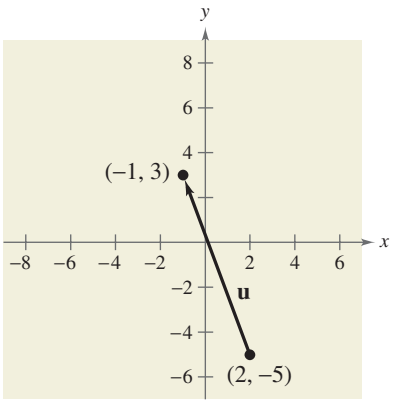


FIGURA 6.26

Ejemplo 5 Escribir una combinación lineal de vectores unitarios

Sea **u** el vector con punto inicial $(2, -5)$ y punto terminal $(-1, 3)$. Escriba **u** como combinación lineal de los vectores unitarios canónicos **i** y **j**.

Solución

Empiece por escribir la forma de componente del vector **u**.

$$\begin{aligned}\mathbf{u} &= \langle -1 - 2, 3 - (-5)\rangle \\ &= \langle -3, 8\rangle \\ &= -3\mathbf{i} + 8\mathbf{j}\end{aligned}$$

Este resultado se muestra gráficamente en la Figura 6.26.

PUNTO *de repaso* Ahora trate de hacer el Ejercicio 53.

Ejemplo 6 Operaciones con vectores

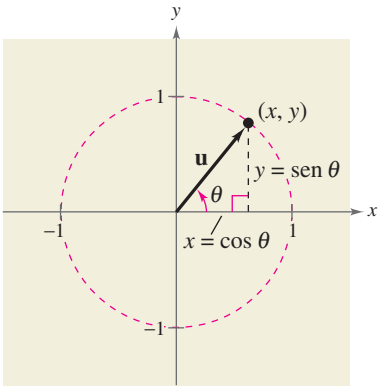
Sea $\mathbf{u} = -3\mathbf{i} + 8\mathbf{j}$ y sea $\mathbf{v} = 2\mathbf{i} - \mathbf{j}$. Encuentre $2\mathbf{u} - 3\mathbf{v}$.

Solución

Usted podría resolver este problema si convierte **u** y **v** a la forma de componentes. Esto, sin embargo, no es necesario. Es igualmente fácil efectuar las operaciones en forma de vectores unitarios.

$$\begin{aligned}2\mathbf{u} - 3\mathbf{v} &= 2(-3\mathbf{i} + 8\mathbf{j}) - 3(2\mathbf{i} - \mathbf{j}) \\ &= -6\mathbf{i} + 16\mathbf{j} - 6\mathbf{i} + 3\mathbf{j} \\ &= -12\mathbf{i} + 19\mathbf{j}\end{aligned}$$

PUNTO *de repaso* Ahora trate de hacer el Ejercicio 59.



$\|\mathbf{u}\| = 1$

FIGURA 6.27

Ángulos directores

Si $\mathbf{u}$ es un *vector unitario* tal que θ es el ángulo (medido en sentido contrario al giro de las manecillas de un reloj) desde el eje x positivo a $\mathbf{u}$, el punto terminal de $\mathbf{u}$ está en la circunferencia unitaria y tenemos

$$\mathbf{u} = \langle x, y \rangle = \langle \cos\theta, \operatorname{sen}\theta \rangle = (\cos\theta)\mathbf{i} + (\operatorname{sen}\theta)\mathbf{j}$$

como se ve en la Figura 6.27. El ángulo θ es el **ángulo director** del vector $\mathbf{u}$.

Suponga que $\mathbf{u}$ es un vector unitario con ángulo director θ. Si $\mathbf{v} = a\mathbf{i} + b\mathbf{j}$ es cualquier vector que forme un ángulo θ con el eje x positivo, tiene la misma dirección que $\mathbf{u}$ y se puede escribir

$$\begin{aligned}\mathbf{v} &= \|\mathbf{v}\|\langle \cos\theta, \operatorname{sen}\theta \rangle \\ &= \|\mathbf{v}\|(\cos\theta)\mathbf{i} + \|\mathbf{v}\|(\operatorname{sen}\theta)\mathbf{j}.\end{aligned}$$

Como $\mathbf{v} = a\mathbf{i} + b\mathbf{j} = \|\mathbf{v}\|(\cos\theta)\mathbf{i} + \|\mathbf{v}\|(\operatorname{sen}\theta)\mathbf{j}$, se deduce que el ángulo director θ para $\mathbf{v}$ está determinado a partir de

$$\begin{aligned}\tan\theta &= \frac{\operatorname{sen}\theta}{\cos\theta} && \text{Cociente identidad} \\ &= \frac{\|\mathbf{v}\|\operatorname{sen}\theta}{\|\mathbf{v}\|\cos\theta} && \text{Multiplicar numerador y denominador por } \|\mathbf{v}\|. \\ &= \frac{b}{a}. && \text{Simplificar.}\end{aligned}$$

Ejemplo 7 Hallar ángulos directores de vectores

Encuentre el ángulo director de cada vector.

a. $\mathbf{u} = 3\mathbf{i} + 3\mathbf{j}$

b. $\mathbf{v} = 3\mathbf{i} - 4\mathbf{j}$

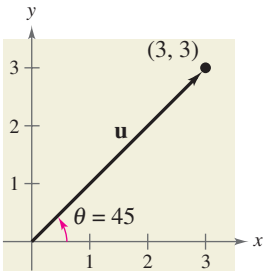


FIGURA 6.28

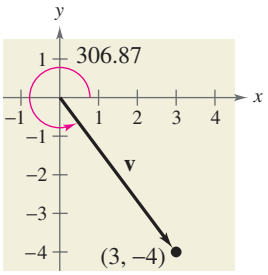


FIGURA 6.29

Solución

a. El ángulo director es

$$\tan\theta = \frac{b}{a} = \frac{3}{3} = 1.$$

Entonces, $\theta = 45°$, como se ve en la Figura 6.28.

b. El ángulo director es

$$\tan\theta = \frac{b}{a} = \frac{-4}{3}.$$

Además, como $\mathbf{v} = 3\mathbf{i} - 4\mathbf{j}$ está en el cuarto cuadrante, θ está en el cuarto cuadrante y su ángulo de referencia es

$$\theta = \left|\arctan\left(-\frac{4}{3}\right)\right| \approx |-53.13°| = 53.13°.$$

Por tanto, se deduce que $\theta \approx 360° - 53.13° = 306.87°$, como se muestra en la Figura 6.29.

PUNTO *de repaso* Ahora trate de hacer el Ejercicio 63.

Aplicaciones de vectores

Ejemplo 8 Hallar la forma de componentes de un vector

Encuentre la forma de componentes del vector que representa la velocidad de un avión que desciende a una rapidez de 150 millas por hora a un ángulo de 20° debajo de la horizontal, como se ve en la Figura 6.30.

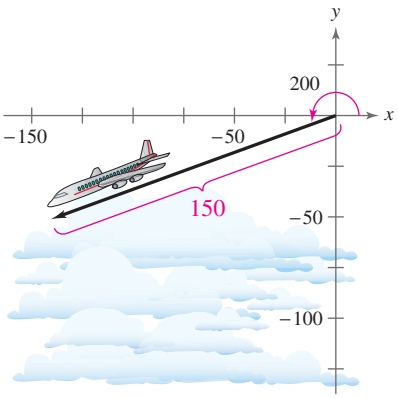


FIGURA 6.30

Solución

El vector velocidad $\mathbf{v}$ tiene una magnitud de 150 y un ángulo director de $\theta = 200°$.

$$\begin{aligned}\mathbf{v} &= \|\mathbf{v}\|(\cos\theta)\mathbf{i} + \|\mathbf{v}\|(\text{sen }\theta)\mathbf{j}\\ &= 150(\cos 200°)\mathbf{i} + 150(\text{sen } 200°)\mathbf{j}\\ &\approx 150(-0.9397)\mathbf{i} + 150(-0.3420)\mathbf{j}\\ &\approx -140.96\mathbf{i} - 51.30\mathbf{j}\\ &= \langle -140.96, -51.30\rangle\end{aligned}$$

Se puede verificar que $\mathbf{v}$ tiene una magnitud de 150, como sigue.

$$\begin{aligned}\|\mathbf{v}\| &\approx \sqrt{(-140.96)^2 + (-51.30)^2}\\ &\approx \sqrt{19869.72 + 2631.69}\\ &= \sqrt{22501.41} \approx 150\end{aligned}$$

PUNTO *de repaso* Ahora trate de hacer el Ejercicio 83.

Ejemplo 9 Usar vectores para determinar un peso

Se requiere una fuerza de 600 libras para jalar un bote y remolque hacia arriba de una rampa inclinada a 15° desde la horizontal. Encuentre el peso combinado del bote y el remolque.

Solución

Con base en la Figura 6.31, se pueden hacer las siguientes observaciones.

$\|\overrightarrow{BA}\|$ = fuerza de gravedad = peso combinado de bote y remolque

$\|\overrightarrow{BC}\|$ = fuerza contra la rampa

$\|\overrightarrow{AC}\|$ = fuerza requerida para subir el bote a la rampa = 600 libras

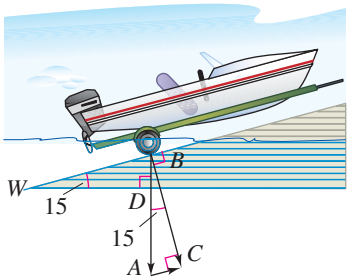


FIGURA 6.31

Por construcción, los triángulos BWD y ABC son semejantes. Por tanto, el ángulo ABC es 15°. Entonces, en el triángulo ABC tenemos

$$\text{sen } 15° = \frac{\|\overrightarrow{AC}\|}{\|\overrightarrow{BA}\|}$$

$$\text{sen } 15° = \frac{600}{\|\overrightarrow{BA}\|}$$

$$\|\overrightarrow{BA}\| = \frac{600}{\text{sen } 15°}$$

$$\|\overrightarrow{BA}\| \approx 2318.$$

En consecuencia, el peso combinado es aproximadamente de 2318 libras. (En la Figura 6.31, nótese que $\overrightarrow{AC}$ es paralela a la rampa.)

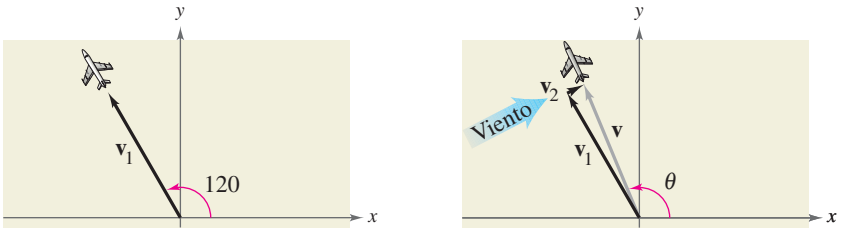
PUNTO *de repaso* Ahora trate de hacer el Ejercicio 95.

Tip de estudio

Recuerde de la Sección 4.8 que en navegación aérea, los rumbos se pueden medir en grados en el sentido de giro de las manecillas de un reloj desde el Norte.

Ejemplo 10 Usar vectores para hallar rapidez y dirección

Un avión está volando a una rapidez de 500 millas por hora con rumbo de 330° a una altitud fija, con una insignificante velocidad del viento, como se muestra en la figura 6.32(a). Cuando el avión llega a cierto punto, encuentra un viento con velocidad de 70 millas por hora en la dirección N 45° E, como se muestra en la Figura 6.32(b). ¿Cuáles son la rapidez y dirección resultantes del avión?



(a) **(b)**

FIGURA 6.32

Solución

Usando la Figura 6.32, la velocidad del avión (solo) es

$$\begin{aligned}\mathbf{v}_1 &= 500\langle \cos 120°, \operatorname{sen} 120° \rangle \\ &= \langle -250, 250\sqrt{3} \rangle\end{aligned}$$

y la velocidad del viento es

$$\begin{aligned}\mathbf{v}_2 &= 70\langle \cos 45°, \operatorname{sen} 45° \rangle \\ &= \langle 35\sqrt{2}, 35\sqrt{2} \rangle.\end{aligned}$$

Por tanto, la velocidad del avión (en el viento) es

$$\begin{aligned}\mathbf{v} &= \mathbf{v}_1 + \mathbf{v}_2 \\ &= \langle -250 + 35\sqrt{2}, 250\sqrt{3} + 35\sqrt{2} \rangle \\ &\approx \langle -200.5, 482.5 \rangle\end{aligned}$$

y la rapidez resultante del avión es

$$\begin{aligned}\|\mathbf{v}\| &\approx \sqrt{(-200.5)^2 + (482.5)^2} \\ &\approx 522.5 \text{ millas por hora.}\end{aligned}$$

Finalmente, si θ es el ángulo director de la trayectoria de vuelo, tenemos

$$\begin{aligned}\tan\theta &\approx \frac{482.5}{-200.5} \\ &\approx -2.4065\end{aligned}$$

lo cual implica que

$$\theta \approx 180° + \arctan(-2.4065) \approx 180° - 67.4° = 112.6°.$$

Entonces, la verdadera dirección del avión es aproximadamente

$$270° + (180° - 112.6°) = 337.4°.$$

PUNTO *de repaso* Ahora trate de hacer el Ejercicio 101.

6.3 EJERCICIOS

En www.CalcChat.com vea las soluciones a los ejercicios impares.

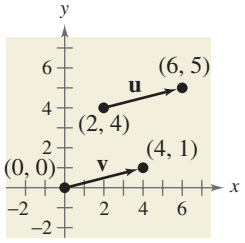
VOCABULARIO: Llene los espacios en blanco.

1. Se puede usar un _____ _____ _____ _____ para representar una cantidad que contenga magnitud y dirección.
2. El segmento de recta dirigida $\overrightarrow{PQ}$ tiene punto _____ P y punto _____ Q.
3. La _____ del segmento de recta dirigido $\overrightarrow{PQ}$ se denota con $\|\overrightarrow{PQ}\|$.
4. El conjunto de todos los segmentos de recta dirigidos equivalentes a un determinado segmento de recta dirigido $\overrightarrow{PQ}$ es un _____ **v** en el plano.
5. Para demostrar que dos vectores son equivalentes, se debe demostrar que tienen la misma _____ y la misma _____ .
6. Se dice que el segmento de recta dirigido cuyo punto inicial es el origen está en _____ _____ .
7. Un vector que tiene una magnitud de 1 se llama _____ _____ .
8. Las dos operaciones básicas con vectores son _____ escalar y _____ de vectores.
9. El vector $\mathbf{u} + \mathbf{v}$ recibe el nombre de _____ de la suma de vectores.
10. La suma de vectores $v_1\mathbf{i} + v_2\mathbf{j}$ se denomina _____ _____ de los vectores **i** y **j**, y los escalares v_1 y v_2 se llaman componentes _____ y _____ de **v**, respectivamente.

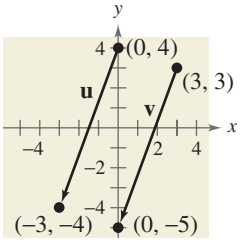
HABILIDADES Y APLICACIONES

En los Ejercicios 11 y 12, demuestre que **u** y **v** son equivalentes.

11.

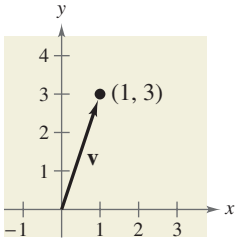


12.

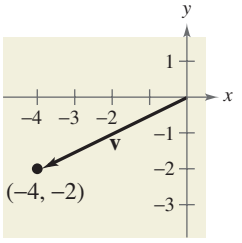


En los Ejercicios 13-24, encuentre la forma de componentes y la magnitud del vector **v**.

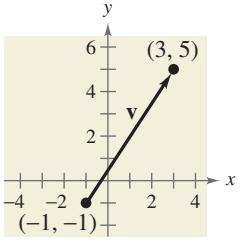
13.



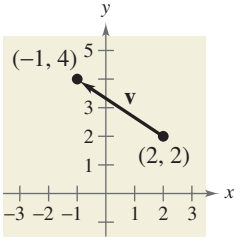
14.



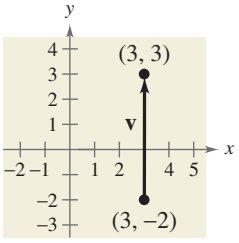
15.



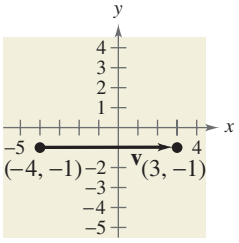
16.



17.

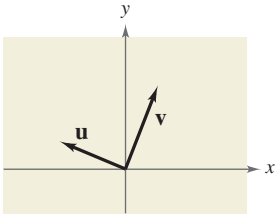


18.



	Punto inicial	*Punto terminal*
19.	$(-3, -5)$	$(5, 1)$
20.	$(-2, 7)$	$(5, -17)$
21.	$(1, 3)$	$(-8, -9)$
22.	$(1, 11)$	$(9, 3)$
23.	$(-1, 5)$	$(15, 12)$
24.	$(-3, 11)$	$(9, 40)$

En los Ejercicios 25-30, use la figura para trazar una gráfica del vector especificado. Para imprimir una copia amplificada de la gráfica, visite el sitio *www.mathgraphs.com*.



25. $-\mathbf{v}$ **26.** $5\mathbf{v}$

27. $\mathbf{u} + \mathbf{v}$ **28.** $\mathbf{u} + 2\mathbf{v}$

29. $\mathbf{u} - \mathbf{v}$ **30.** $\mathbf{v} - \frac{1}{2}\mathbf{u}$

En los Ejercicios 31-38, encuentre (a) $\mathbf{u} + \mathbf{v}$, (b) $\mathbf{u} - \mathbf{v}$ y (c) $2\mathbf{u} - 3\mathbf{v}$. A continuación trace cada uno de los vectores resultantes.

31. $\mathbf{u} = \langle 2, 1\rangle,\ \mathbf{v} = \langle 1, 3\rangle$

32. $\mathbf{u} = \langle 2, 3\rangle,\ \mathbf{v} = \langle 4, 0\rangle$

33. $\mathbf{u} = \langle -5, 3\rangle,\ \mathbf{v} = \langle 0, 0\rangle$

34. $\mathbf{u} = \langle 0, 0\rangle,\ \mathbf{v} = \langle 2, 1\rangle$

35. $\mathbf{u} = \mathbf{i} + \mathbf{j},\ \mathbf{v} = 2\mathbf{i} - 3\mathbf{j}$

36. $\mathbf{u} = -2\mathbf{i} + \mathbf{j},\ \mathbf{v} = 3\mathbf{j}$

37. $\mathbf{u} = 2\mathbf{i},\ \mathbf{v} = \mathbf{j}$

38. $\mathbf{u} = 2\mathbf{j},\ \mathbf{v} = 3\mathbf{i}$

En los Ejercicios 39-48, encuentre un vector unitario en la dirección del vector dado. Verifique que el resultado tenga una magnitud de 1.

39. $\mathbf{u} = \langle 3, 0\rangle$

40. $\mathbf{u} = \langle 0, -2\rangle$

41. $\mathbf{v} = \langle -2, 2\rangle$

42. $\mathbf{v} = \langle 5, -12\rangle$

43. $\mathbf{v} = \mathbf{i} + \mathbf{j}$

44. $\mathbf{v} = 6\mathbf{i} - 2\mathbf{j}$

45. $\mathbf{w} = 4\mathbf{j}$

46. $\mathbf{w} = -6\mathbf{i}$

47. $\mathbf{w} = \mathbf{i} - 2\mathbf{j}$

48. $\mathbf{w} = 7\mathbf{j} - 3\mathbf{i}$

En los Ejercicios 49-52, encuentre el vector v con la magnitud dada y la misma dirección que **u**.

	Magnitud	*Dirección*
49.	$\|\mathbf{v}\| = 10$	$\mathbf{u} = \langle -3, 4\rangle$
50.	$\|\mathbf{v}\| = 3$	$\mathbf{u} = \langle -12, -5\rangle$
51.	$\|\mathbf{v}\| = 9$	$\mathbf{u} = \langle 2, 5\rangle$
52.	$\|\mathbf{v}\| = 8$	$\mathbf{u} = \langle 3, 3\rangle$

En los Ejercicios 53-56, se dan los puntos inicial y terminal de un vector. Escriba una combinación lineal de los vectores normales unitarios **i** y **j**.

	Punto inicial	*Punto terminal*
53.	$(-2, 1)$	$(3, -2)$
54.	$(0, -2)$	$(3, 6)$
55.	$(-6, 4)$	$(0, 1)$
56.	$(-1, -5)$	$(2, 3)$

En los Ejercicios 57-62, encuentre la forma de componente de v y trace geométricamente las operaciones especificadas con vectores, donde $\mathbf{u} = 2\mathbf{i} - \mathbf{j}$ y $\mathbf{w} = \mathbf{i} + 2\mathbf{j}$.

57. $\mathbf{v} = \frac{3}{2}\mathbf{u}$

58. $\mathbf{v} = \frac{3}{4}\mathbf{w}$

59. $\mathbf{v} = \mathbf{u} + 2\mathbf{w}$

60. $\mathbf{v} = -\mathbf{u} + \mathbf{w}$

61. $\mathbf{v} = \frac{1}{2}(3\mathbf{u} + \mathbf{w})$

62. $\mathbf{v} = \mathbf{u} - 2\mathbf{w}$

En Ejercicios 63-66, encuentre la magnitud y ángulo director del vector v.

63. $\mathbf{v} = 6\mathbf{i} - 6\mathbf{j}$

64. $\mathbf{v} = -5\mathbf{i} + 4\mathbf{j}$

65. $\mathbf{v} = 3(\cos 60°\mathbf{i} + \operatorname{sen} 60°\mathbf{j})$

66. $\mathbf{v} = 8(\cos 135°\mathbf{i} + \operatorname{sen} 135°\mathbf{j})$

En los Ejercicios 67-74, encuentre la forma de componentes de v dados su magnitud y el ángulo que forma con el eje *x* positivo. Trace **v**.

	Magnitud	*Ángulo*
67.	$\|\mathbf{v}\| = 3$	$\theta = 0°$
68.	$\|\mathbf{v}\| = 1$	$\theta = 45°$
69.	$\|\mathbf{v}\| = \frac{7}{2}$	$\theta = 150°$
70.	$\|\mathbf{v}\| = \frac{3}{4}$	$\theta = 150°$
71.	$\|\mathbf{v}\| = 2\sqrt{3}$	$\theta = 45°$
72.	$\|\mathbf{v}\| = 4\sqrt{3}$	$\theta = 90°$
73.	$\|\mathbf{v}\| = 3$	**v** en la dirección $3\mathbf{i} + 4\mathbf{j}$
74.	$\|\mathbf{v}\| = 2$	**v** en la dirección $\mathbf{i} + 3\mathbf{j}$

En los Ejercicios 75-78, encuentre la forma de componentes de la suma de **u** y **v** con ángulos directores $\theta_{\mathbf{u}}$ y $\theta_{\mathbf{v}}$.

	Magnitud	*Ángulo*
75.	$\|\mathbf{u}\| = 5$	$\theta_{\mathbf{u}} = 0°$
	$\|\mathbf{v}\| = 5$	$\theta_{\mathbf{v}} = 90°$
76.	$\|\mathbf{u}\| = 4$	$\theta_{\mathbf{u}} = 60°$
	$\|\mathbf{v}\| = 4$	$\theta_{\mathbf{v}} = 90°$
77.	$\|\mathbf{u}\| = 20$	$\theta_{\mathbf{u}} = 45°$
	$\|\mathbf{v}\| = 50$	$\theta_{\mathbf{v}} = 180°$
78.	$\|\mathbf{u}\| = 50$	$\theta_{\mathbf{u}} = 30°$
	$\|\mathbf{v}\| = 30$	$\theta_{\mathbf{v}} = 110°$

En los Ejercicios 79-80, use la ley de los cosenos para hallar el ángulo α entre los vectores. (Suponga que $0° \leq \alpha \leq 180°$.)

79. $\mathbf{v} = \mathbf{i} + \mathbf{j},\quad \mathbf{w} = 2\mathbf{i} - 2\mathbf{j}$

80. $\mathbf{v} = \mathbf{i} + 2\mathbf{j},\quad \mathbf{w} = 2\mathbf{i} - \mathbf{j}$

FUERZA RESULTANTE En los Ejercicios 81 y 82, encuentre el ángulo entre las fuerzas dada la magnitud de su resultante. (*Sugerencia:* escriba la fuerza 1 como un vector en la dirección del eje *x* positivo y la fuerza 2 como un vector a un ángulo θ con el eje *x* positivo.)

	Fuerza 1	*Fuerza 2*	*Fuerza resultante*
81.	45 libras	60 libras	90 libras
82.	3000 libras	1000 libras	3750 libras

83. VELOCIDAD Un cañón de cuya boca sale una granada que es expulsada a 1200 pies por segundo es disparado a un ángulo de 6° arriba de la horizontal. Encuentre las componentes vertical y horizontal de la velocidad.

84. El *pitcher* Joel Zumaya, de los Tigres de Detroit, ha lanzado una pelota a una velocidad récord de 104 millas por hora. Si la lanzara a un ángulo de 35° debajo de la horizontal, halle las componentes vertical y horizontal de la velocidad. (Fuente: Damon Lichtenwalner, Baseball Info Solutions)

85. FUERZA RESULTANTE Unas fuerzas con magnitudes de 125 newtons y 300 newtons actúan sobre un gancho (vea figura). El ángulo entre las dos fuerzas es 45°. Encuentre la dirección y magnitud de la resultante de estas fuerzas.

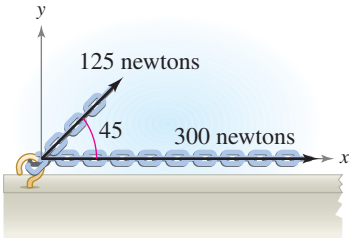


FIGURA PARA EJERCICIO 85

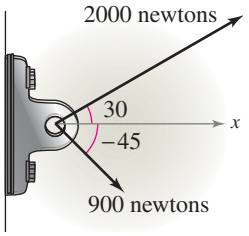


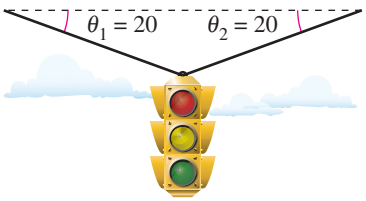
FIGURA PARA EJERCICIO 86

86. FUERZA RESULTANTE Unas fuerzas con magnitudes de 2000 newtons y 900 newtons actúan sobre una pieza mecánica a ángulos de 30° y −45°, respectivamente, con el eje x (vea figura). Encuentre la dirección y magnitud de la resultante de estas fuerzas.

87. FUERZA RESULTANTE Tres fuerzas con magnitudes de 75 libras, 100 libras y 125 libras actúan sobre un objeto a ángulos de 30°, 45° y 120°, respectivamente, con el eje x positivo. Encuentre la dirección y magnitud de la resultante de estas fuerzas.

88. FUERZA RESULTANTE Tres fuerzas con magnitudes de 70 libras, 40 libras y 60 libras actúan sobre un objeto a ángulos de −30°, 45° y 135°, respectivamente, con el eje x positivo. Encuentre la dirección y magnitud de la resultante de estas fuerzas.

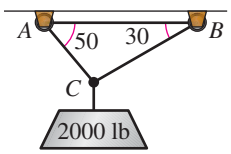
89. Un semáforo que pesa 12 libras está suspendido por dos cables (vea figura). Encuentre la tensión en cada uno de los cables.



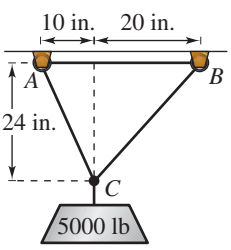
90. Repita el Ejercicio 89 si $\theta_1 = 40°$ y $\theta_2 = 35°$.

TENSIÓN EN UN CABLE En los Ejercicios 91 y 92, use la figura para determinar la tensión en cada uno de los cables que sostienen la carga.

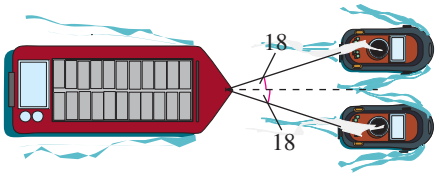
91.



92.



93. TENSIÓN EN UN CABLE DE REMOLQUE Una barcaza cargada está siendo jalada por dos remolcadores, y la magnitud de la resultante es 6000 libras dirigida a lo largo del eje de la barcaza (vea figura). Encuentre la tensión en las dos líneas si cada una de ellas forma un ángulo de 18° con el eje de la barcaza.



94. TENSIÓN EN UNA CUERDA Para transportar un peso cilíndrico de 100 libras, dos personas levantan los extremos de cuerdas cortas atadas a una argolla situada en el centro superior del cilindro. Cada una de las cuerdas forma un ángulo de 20° con la vertical. Trace una figura que dé una representación visual de la situación, y encuentre la tensión en las cuerdas.

En los Ejercicios 95-98, se requiere una fuerza de F libras para jalar un objeto que pesa W libras hacia una rampa inclinada a θ grados respecto a la horizontal.

95. Encuentre F si $W = 100$ libras y $\theta = 12°$.

96. Encuentre W si $F = 600$ libras y $\theta = 14°$.

97. Encuentre θ si $F = 5000$ libras y $W = 15\,000$ libras.

98. Encuentre F si $W = 5000$ libras y $\theta = 26°$.

99. TRABAJO Un objeto pesado es jalado 30 pies en un piso, usando una fuerza de 100 libras. La fuerza es ejercida a un ángulo de 50° sobre la horizontal (vea figura). Encuentre el trabajo realizado. (Use la fórmula para trabajo, $W = FD$, donde F es la componente de la fuerza en la dirección de movimiento y D es la distancia.)

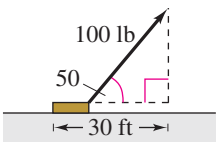


FIGURA PARA EJERCICIO 99

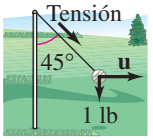
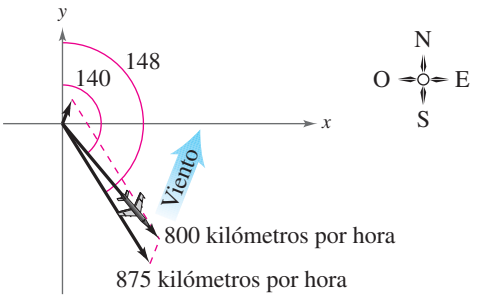


FIGURA PARA EJERCICIO 100

100. TENSIÓN EN UNA CUERDA Una pelota suspendida de una cuerda y que pesa 1 libra es jalada, alejándola del poste, por una fuerza horizontal **u** hasta que la cuerda forma un ángulo de 45° con el poste (vea figura). Determine la tensión resultante en la cuerda y la magnitud de **u**.

101. NAVEGACIÓN Un avión vuela en la dirección de 148°, con una rapidez relativa de 875 kilómetros por hora respecto a tierra. Debido al viento, su velocidad absoluta y dirección son 800 kilómetros por hora y 140°, respectivamente (vea figura). Encuentre la dirección y rapidez del viento.



102. NAVEGACIÓN Un jet comercial está volando de Miami a Seattle. La rapidez del jet respecto al aire es 580 millas por hora, y su rumbo es 332°. El viento, a la altitud del avión, está soplando del Sudoeste con una velocidad de 60 millas por hora.

(a) Trace una figura que dé una representación visual de la situación.

(b) Escriba la velocidad del viento como vector en forma de componente.

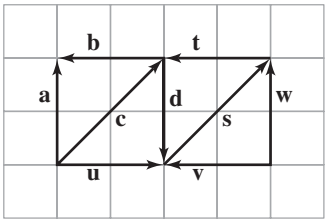
(c) Escriba la velocidad del jet respecto al viento en forma de componente.

(d) ¿Cuál es la rapidez del jet respecto al suelo?

(e) ¿Cuál es la verdadera dirección del jet?

EXPLORACIÓN

¿VERDADERO O FALSO? En los Ejercicios 103-110, use la figura para determinar si la proposición es verdadera o falsa. Justifique su respuesta.



103. $\mathbf{a} = -\mathbf{d}$

104. $\mathbf{c} = \mathbf{s}$

105. $\mathbf{a} + \mathbf{u} = \mathbf{c}$

106. $\mathbf{v} + \mathbf{w} = -\mathbf{s}$

107. $\mathbf{a} + \mathbf{w} = -2\mathbf{d}$

108. $\mathbf{a} + \mathbf{d} = \mathbf{0}$

109. $\mathbf{u} - \mathbf{v} = -2(\mathbf{b} + \mathbf{t})$

110. $\mathbf{t} - \mathbf{w} = \mathbf{b} - \mathbf{a}$

111. DEMOSTRACIÓN Demuestre que $(\cos\theta)\mathbf{i} + (\operatorname{sen}\theta)\mathbf{j}$ es un vector unitario para cualquier valor de θ.

112. TOQUE FINAL Los puntos inicial y final del vector $\mathbf{v}$ son $(3, -4)$ y $(9, 1)$, respectivamente.

(a) Escriba $\mathbf{v}$ en forma de componentes.

(b) Escriba $\mathbf{v}$ como combinación lineal de los vectores unitarios normales $\mathbf{i}$ y $\mathbf{j}$.

(c) Trace $\mathbf{v}$ con su punto inicial en el origen.

(d) Encuentre la magnitud de $\mathbf{v}$.

113. RAZONAMIENTO GRÁFICO Considere dos fuerzas $\mathbf{F}_1 = \langle 10, 0\rangle$ y $\mathbf{F}_2 = 5\langle\cos\theta, \operatorname{sen}\theta\rangle$.

(a) Encuentre $\|\mathbf{F}_1 + \mathbf{F}_2\|$ como función de θ.

(b) Use una calculadora de gráficas para graficar la función del inciso (a) para $0 \le \theta < 2\pi$.

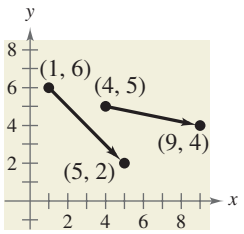
(c) Use la gráfica del inciso (b) para determinar el rango de la función. ¿Cuál es su máximo y para qué valor de θ se presenta? ¿Cuál es su mínimo y para qué valor de θ se presenta?

(d) Explique por qué la magnitud de la resultante nunca es 0.

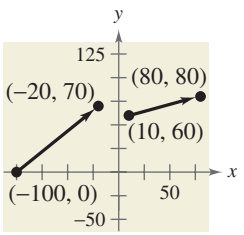
114. TECNOLOGÍA Escriba un programa para su calculadora de gráficas que grafique dos vectores y su diferencia dada en vectores en forma de componente.

En los Ejercicios 115 y 116, use el programa del Ejercicio 114 para hallar la diferencia de los vectores mostrados en la figura.

115.



116.



117. ESCRITURA Con sus propias palabras, exprese la diferencia entre un escalar y un vector. Dé ejemplos de cada uno.

118. ESCRITURA Proporcione descripciones geométricas de las operaciones de suma de vectores y multiplicación de un vector por un escalar.

119. ESCRITURA Identifique la cantidad como escalar o como vector. Explique su razonamiento.

(a) La velocidad de una bala en la boca de un arma de fuego

(b) El precio de la acción de una compañía

(c) La temperatura del aire en un cuarto

(d) El peso de un automóvil

6.4 Vectores y productos punto

Lo que debe aprender

- Hallar el producto punto de dos vectores y usar las propiedades del producto punto.
- Hallar el ángulo entre dos vectores y determinar si éstos son ortogonales.
- Escribir un vector como la suma de dos componentes vectoriales.
- Usar vectores para hallar el trabajo realizado por una fuerza.

Por qué debe aprenderlo

Se puede usar el producto punto de dos vectores para resolver problemas de la vida real que contengan dos cantidades vectoriales. Por ejemplo, en el Ejercicio 76 de la página 466 se puede usar el producto punto para hallar la fuerza necesaria para impedir que un auto monovolumen se desplace hacia abajo por una pendiente.

Joe Raedle/Getty Images

El producto punto de dos vectores

Hasta ahora usted ha estudiado dos operaciones con vectores: la suma y multiplicación de vectores por un escalar, cada una de las cuales da otro vector. En esta sección aprenderá una tercera operación con vectores, el **producto punto**. Este producto da como resultado un escalar en vez de un vector.

Definición del producto punto

El **producto punto** de $\mathbf{u} = \langle u_1, u_2 \rangle$ y $\mathbf{v} = \langle v_1, v_2 \rangle$ es

$$\mathbf{u} \cdot \mathbf{v} = u_1 v_1 + u_2 v_2.$$

Propiedades del producto punto

Sean $\mathbf{u}$, $\mathbf{v}$ y $\mathbf{w}$ vectores en el plano o en el espacio y sea c un escalar.

1. $\mathbf{u} \cdot \mathbf{v} = \mathbf{v} \cdot \mathbf{u}$
2. $\mathbf{0} \cdot \mathbf{v} = 0$
3. $\mathbf{u} \cdot (\mathbf{v} + \mathbf{w}) = \mathbf{u} \cdot \mathbf{v} + \mathbf{u} \cdot \mathbf{w}$
4. $\mathbf{v} \cdot \mathbf{v} = \|\mathbf{v}\|^2$
5. $c(\mathbf{u} \cdot \mathbf{v}) = c\mathbf{u} \cdot \mathbf{v} = \mathbf{u} \cdot c\mathbf{v}$

Para demostraciones de las propiedades del producto punto, vea la página 490.

Ejemplo 1 Hallar productos punto

Encuentre cada producto punto siguiente.

a. $\langle 4, 5 \rangle \cdot \langle 2, 3 \rangle$ **b.** $\langle 2, -1 \rangle \cdot \langle 1, 2 \rangle$ **c.** $\langle 0, 3 \rangle \cdot \langle 4, -2 \rangle$

Solución

a. $\langle 4, 5 \rangle \cdot \langle 2, 3 \rangle = 4(2) + 5(3)$
$= 8 + 15$
$= 23$

b. $\langle 2, -1 \rangle \cdot \langle 1, 2 \rangle = 2(1) + (-1)(2)$
$= 2 - 2 = 0$

c. $\langle 0, 3 \rangle \cdot \langle 4, -2 \rangle = 0(4) + 3(-2)$
$= 0 - 6 = -6$

PUNTO *de repaso* Ahora trate de hacer el Ejercicio 7.

En el ejemplo 1, asegúrese de ver que el producto punto de dos vectores es un escalar (un número real), no un vector. Además, observe que el producto punto puede ser positivo, cero o negativo.

Ejemplo 2 Uso de propiedades de productos punto

Sea $\mathbf{u} = \langle -1, 3\rangle$, $\mathbf{v} = \langle 2, -4\rangle$ y $\mathbf{w} = \langle 1, -2\rangle$. Encuentre cada producto punto.

a. $(\mathbf{u} \cdot \mathbf{v})\mathbf{w}$

b. $\mathbf{u} \cdot 2\mathbf{v}$

Solución

Empiece por hallar el producto punto de $\mathbf{u}$ y $\mathbf{v}$.

$$\begin{aligned}\mathbf{u} \cdot \mathbf{v} &= \langle -1, 3\rangle \cdot \langle 2, -4\rangle \\ &= (-1)(2) + 3(-4) \\ &= -14\end{aligned}$$

a. $(\mathbf{u} \cdot \mathbf{v})\mathbf{w} = -14\langle 1, -2\rangle$

$$= \langle -14, 28\rangle$$

b. $\mathbf{u} \cdot 2\mathbf{v} = 2(\mathbf{u} \cdot \mathbf{v})$

$$\begin{aligned}&= 2(-14) \\ &= -28\end{aligned}$$

Nótese que el producto del inciso (a) es un vector, mientras que el producto del inciso (b) es un escalar. ¿Puede usted ver por qué?

PUNTO *de repaso* Ahora trate de hacer el Ejercicio 17.

Ejemplo 3 Producto punto y magnitud

El producto punto de $\mathbf{u}$ por sí mismo es 5. ¿Cuál es la magnitud de $\mathbf{u}$?

Solución

Como $\|\mathbf{u}\|^2 = \mathbf{u} \cdot \mathbf{u}$ y $\mathbf{u} \cdot \mathbf{u} = 5$, se deduce que

$$\begin{aligned}\|\mathbf{u}\| &= \sqrt{\mathbf{u} \cdot \mathbf{u}} \\ &= \sqrt{5}.\end{aligned}$$

PUNTO *de repaso* Ahora trate de hacer el Ejercicio 25.

El ángulo entre dos vectores

El **ángulo entre dos vectores diferentes de cero** es el ángulo θ, $0 \le \theta \le \pi$, entre sus respectivos vectores de posición estándar, como se ve en la Figura 6.33. Este ángulo se puede hallar usando el producto punto.

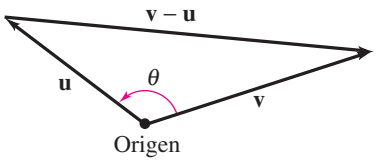


FIGURA 6.33

Ángulo entre dos vectores

Si θ es el ángulo entre dos vectores $\mathbf{u}$ y $\mathbf{v}$ diferentes de cero, entonces

$$\cos\theta = \frac{\mathbf{u} \cdot \mathbf{v}}{\|\mathbf{u}\|\,\|\mathbf{v}\|}.$$

Para una demostración del ángulo entre dos vectores, vea la página 490.

Ejemplo 4 Hallar el ángulo entre dos vectores

Encuentre el ángulo θ entre $\mathbf{u} = \langle 4, 3\rangle$ y $\mathbf{v} = \langle 3, 5\rangle$.

Solución

Los dos vectores y θ se muestran en la Figura 6.34.

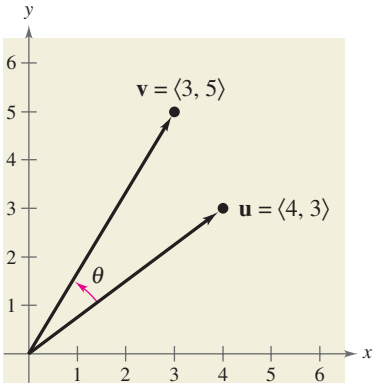


FIGURA 6.34

$$\cos\theta = \frac{\mathbf{u}\cdot\mathbf{v}}{\|\mathbf{u}\|\,\|\mathbf{v}\|}$$
$$= \frac{\langle 4, 3\rangle \cdot \langle 3, 5\rangle}{\|\langle 4, 3\rangle\|\,\|\langle 3, 5\rangle\|}$$
$$= \frac{27}{5\sqrt{34}}$$

Esto implica que el ángulo entre los dos vectores es

$$\theta = \arccos\frac{27}{5\sqrt{34}} \approx 22.2°.$$

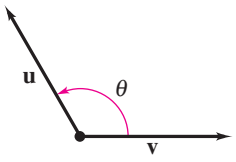
PUNTO *de repaso* Ahora trate de hacer el Ejercicio 35.

Reescribir la expresión para el ángulo entre dos vectores en la forma

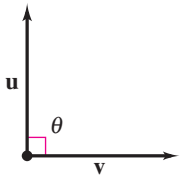
$$\mathbf{u}\cdot\mathbf{v} = \|\mathbf{u}\|\,\|\mathbf{v}\|\cos\theta \qquad \text{Forma alternativa de producto punto}$$

produce una forma alternativa para calcular el producto punto. De esta forma, se puede ver que como $\|\mathbf{u}\|$ y $\|\mathbf{v}\|$ son siempre positivos, $\mathbf{u}\cdot\mathbf{v}$ y $\cos\theta$ siempre tendrán el mismo signo. La Figura 6.35 muestra las cinco orientaciones posibles de dos vectores.

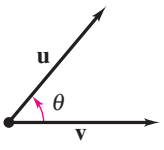
$\theta = \pi$
$\cos\theta = -1$
Dirección opuesta



$\frac{\pi}{2} < \theta < \pi$
$-1 < \cos\theta < 0$
Ángulo obtuso



$\theta = \frac{\pi}{2}$
$\cos\theta = 0$
Ángulo de 90°



$0 < \theta < \frac{\pi}{2}$
$0 < \cos\theta < 1$
Ángulo agudo

$\theta = 0$
$\cos\theta = 1$
Misma dirección

FIGURA 6.35

Definición de vectores ortogonales

Los vectores $\mathbf{u}$ y $\mathbf{v}$ son **ortogonales** si $\mathbf{u}\cdot\mathbf{v} = 0$.

Los términos *ortogonal* y *perpendicular* significan esencialmente lo mismo, se satisfacen en ángulos rectos. Nótese que el vector cero es ortogonal a todo vector $\mathbf{u}$ porque $\mathbf{0}\cdot\mathbf{u} = 0$.

TECNOLOGÍA

El programa para calculadora de gráficas, Finding the Angle Between Two Vectors, que se encuentra en el sitio web para este texto en *academic.cengage.com*, grafica dos vectores $\mathbf{u} = \langle a, b \rangle$ y $\mathbf{v} = \langle c, d \rangle$ en posición estándar y encuentra la medida del ángulo entre ellos. Úselo para verificar las soluciones de los Ejemplos 4 y 5.

Ejemplo 5 Determinar vectores ortogonales

¿Son ortogonales los vectores $\mathbf{u} = \langle 2, -3 \rangle$ y $\mathbf{v} = \langle 6, 4 \rangle$?

Solución

Encuentre el producto punto de los dos vectores.

$$\mathbf{u} \cdot \mathbf{v} = \langle 2, -3 \rangle \cdot \langle 6, 4 \rangle = 2(6) + (-3)(4) = 0$$

Como el producto punto es 0, los dos vectores son ortogonales (vea la Figura 6.36).

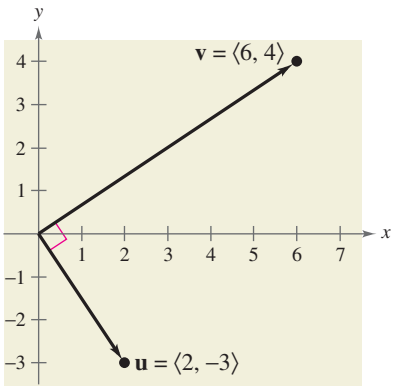


FIGURA 6.36

PUNTO *de repaso* Ahora trate de hacer el Ejercicio 53.

Hallar componentes vectoriales

Ya ha visto usted aplicaciones en las que dos vectores se suman para producir un vector resultante. Muchas aplicaciones en física e ingeniería plantean el problema inverso: descomponer un vector determinado en la suma de dos **componentes vectoriales.**

Considere un bote en una rampa inclinada, como se muestra en la Figura 6.37. La fuerza $\mathbf{F}$ debida a la gravedad jala al bote *hacia abajo* de la rampa y *contra* la rampa. Estas dos fuerzas ortogonales, $\mathbf{w}_1$ y $\mathbf{w}_2$, son componentes vectoriales de $\mathbf{F}$. Esto es,

$$\mathbf{F} = \mathbf{w}_1 + \mathbf{w}_2. \qquad \text{Componentes vectoriales de } \mathbf{F}$$

El negativo de la componente $\mathbf{w}_1$ representa la fuerza necesaria para evitar que el bote se corra hacia debajo por la rampa, mientras que $\mathbf{w}_2$ representa la fuerza que las llantas deben resistir contra la rampa. Un procedimiento para hallar $\mathbf{w}_1$ y $\mathbf{w}_2$ se muestra en la siguiente página.

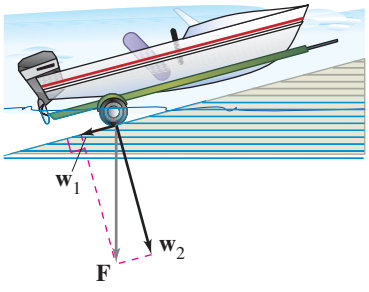


FIGURA 6.37

Definición de componentes vectoriales

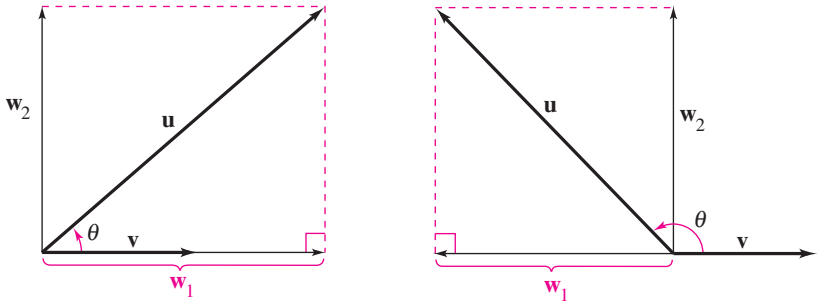
Sean $\mathbf{u}$ y $\mathbf{v}$ vectores diferentes de cero tales que

$$\mathbf{u} = \mathbf{w}_1 + \mathbf{w}_2$$

donde $\mathbf{w}_1$ y $\mathbf{w}_2$ son ortogonales y $\mathbf{w}_1$ es paralelo a (o a un múltiplo escalar de) $\mathbf{v}$, como se muestra en la Figura 6.38. Los vectores $\mathbf{w}_1$ y $\mathbf{w}_2$ se denominan **componentes vectoriales** de $\mathbf{u}$. El vector $\mathbf{w}_1$ es la **proyección** de $\mathbf{u}$ sobre $\mathbf{v}$ y está denotado por

$$\mathbf{w}_1 = \text{proy}_{\mathbf{v}}\mathbf{u}.$$

El vector $\mathbf{w}_2$ está dado por $\mathbf{w}_2 = \mathbf{u} - \mathbf{w}_1$.



θ es agudo. θ es obtuso.

FIGURA 6.38

De la definición de componentes vectoriales se puede ver que es fácil hallar la componente $\mathbf{w}_2$ una vez que se encuentre la proyección de $\mathbf{u}$ sobre $\mathbf{v}$. Para determinar la proyección se puede usar el producto punto, como sigue.

$$\mathbf{u} = \mathbf{w}_1 + \mathbf{w}_2 = c\mathbf{v} + \mathbf{w}_2 \qquad \mathbf{w}_1 \text{ es múltiplo escalar de } \mathbf{v}.$$

$$\mathbf{u} \cdot \mathbf{v} = (c\mathbf{v} + \mathbf{w}_2) \cdot \mathbf{v} \qquad \text{Obtener el producto punto de cada lado con } \mathbf{v}.$$

$$= c\mathbf{v} \cdot \mathbf{v} + \mathbf{w}_2 \cdot \mathbf{v}$$

$$= c\|\mathbf{v}\|^2 + 0 \qquad \mathbf{w}_2 \text{ y } \mathbf{v} \text{ son ortogonales.}$$

Por tanto,

$$c = \frac{\mathbf{u} \cdot \mathbf{v}}{\|\mathbf{v}\|^2}$$

y

$$\mathbf{w}_1 = \text{proy}_{\mathbf{v}}\mathbf{u} = c\mathbf{v} = \frac{\mathbf{u} \cdot \mathbf{v}}{\|\mathbf{v}\|^2}\mathbf{v}.$$

Proyección de u sobre v

Sean $\mathbf{u}$ y $\mathbf{v}$ vectores diferentes de cero. La proyección de $\mathbf{u}$ sobre $\mathbf{v}$ es

$$\text{proy}_{\mathbf{v}}\mathbf{u} = \left(\frac{\mathbf{u} \cdot \mathbf{v}}{\|\mathbf{v}\|^2}\right)\mathbf{v}.$$

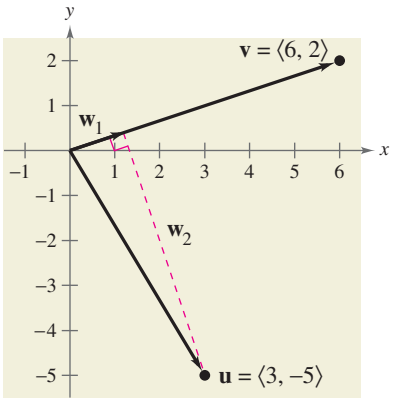


FIGURA 6.39

Ejemplo 6 Descomponer un vector en componentes

Encuentre la proyección de $\mathbf{u} = \langle 3, -5 \rangle$ sobre $\mathbf{v} = \langle 6, 2 \rangle$. Después escriba $\mathbf{u}$ como la suma de dos vectores ortogonales, uno de los cuales es $\text{proy}_{\mathbf{v}}\mathbf{u}$.

Solución

La proyección de $\mathbf{u}$ sobre $\mathbf{v}$ es

$$\mathbf{w}_1 = \text{proy}_{\mathbf{v}}\mathbf{u} = \left(\frac{\mathbf{u} \cdot \mathbf{v}}{\|\mathbf{v}\|^2}\right)\mathbf{v} = \left(\frac{8}{40}\right)\langle 6, 2 \rangle = \left\langle \frac{6}{5}, \frac{2}{5} \right\rangle$$

como se muestra en la Figura 6.39. La otra componente, $\mathbf{w}_2$, es

$$\mathbf{w}_2 = \mathbf{u} - \mathbf{w}_1 = \langle 3, -5 \rangle - \left\langle \frac{6}{5}, \frac{2}{5} \right\rangle = \left\langle \frac{9}{5}, -\frac{27}{5} \right\rangle.$$

Por tanto,

$$\mathbf{u} = \mathbf{w}_1 + \mathbf{w}_2 = \left\langle \frac{6}{5}, \frac{2}{5} \right\rangle + \left\langle \frac{9}{5}, -\frac{27}{5} \right\rangle = \langle 3, -5 \rangle.$$

PUNTO *de repaso* Ahora trate de hacer el Ejercicio 59.

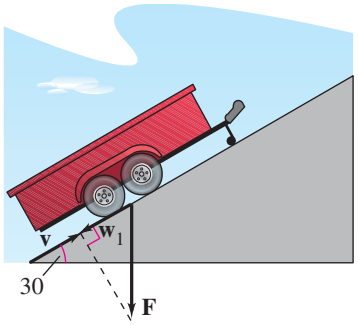


FIGURA 6.40

Ejemplo 7 Hallar una fuerza

Una carreta de 200 libras está sobre una rampa inclinada a 30°, como se ve en la Figura 6.40. ¿Qué fuerza se requiere para evitar que la carreta se desplace hacia abajo por la rampa?

Solución

Como la fuerza debida a la gravedad es vertical y hacia abajo, se puede representar la fuerza gravitacional con el vector

$$\mathbf{F} = -200\mathbf{j}.$$ Fuerza debida a la gravedad

Para hallar la fuerza requerida para evitar que la carreta se desplace hacia abajo por la rampa, proyecte $\mathbf{F}$ sobre un vector unitario $\mathbf{v}$ en la dirección de la rampa, como sigue.

$$\mathbf{v} = (\cos 30°)\mathbf{i} + (\text{sen } 30°)\mathbf{j} = \frac{\sqrt{3}}{2}\mathbf{i} + \frac{1}{2}\mathbf{j}$$ Vector unitario a lo largo de la rampa

Por tanto, la proyección de $\mathbf{F}$ sobre $\mathbf{v}$ es

$$\begin{aligned}
\mathbf{w}_1 &= \text{proy}_{\mathbf{v}}\mathbf{F} \\
&= \left(\frac{\mathbf{F} \cdot \mathbf{v}}{\|\mathbf{v}\|^2}\right)\mathbf{v} \\
&= (\mathbf{F} \cdot \mathbf{v})\mathbf{v} \\
&= (-200)\left(\frac{1}{2}\right)\mathbf{v} \\
&= -100\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\mathbf{i} + \frac{1}{2}\mathbf{j}\right).
\end{aligned}$$

La magnitud de esta fuerza es 100, y por tanto se requiere una fuerza de 100 libras para evitar que la carreta se desplace hacia abajo por la rampa.

PUNTO *de repaso* Ahora trate de hacer el Ejercicio 75.

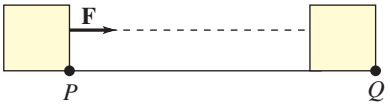
Trabajo

El trabajo W realizado por una fuerza $\mathbf{F}$ *constante* que actúe a lo largo de la recta de movimiento de un objeto está dado por

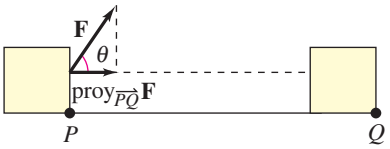
$$W = (\text{magnitud de fuerza})(\text{distancia}) = \|\mathbf{F}\|\,\|\overrightarrow{PQ}\|$$

como se ilustra en la Figura 6.41. Si la fuerza constante $\mathbf{F}$ no está dirigida a lo largo de la recta de movimiento, como se ve en la Figura 6.42, el trabajo W realizado por la fuerza está dado por

$$\begin{aligned} W &= \|\text{proy}_{\overrightarrow{PQ}}\mathbf{F}\|\,\|\overrightarrow{PQ}\| && \text{Forma de proyección para trabajo} \\ &= (\cos\theta)\|\mathbf{F}\|\,\|\overrightarrow{PQ}\| && \|\text{proy}_{\overrightarrow{PQ}}\mathbf{F}\| = (\cos\theta)\|\mathbf{F}\| \\ &= \mathbf{F}\cdot\overrightarrow{PQ}. && \text{Forma alternativa de producto punto} \end{aligned}$$



La fuerza actúa a lo largo de la recta de movimiento.
FIGURA 6.41



La fuerza actúa a un ángulo θ con la recta de movimiento.
FIGURA 6.42

Esta noción de trabajo se resume en la definición siguiente.

Definición de trabajo

El trabajo W realizado por una fuerza constante $\mathbf{F}$ cuando su punto de aplicación se mueve a lo largo del vector $\overrightarrow{PQ}$ está dado por cualquiera de lo que sigue.

1. $W = \|\text{proy}_{\overrightarrow{PQ}}\mathbf{F}\|\,\|\overrightarrow{PQ}\|$ Forma de proyección
2. $W = \mathbf{F}\cdot\overrightarrow{PQ}$ Forma de producto punto

Ejemplo 8 Hallar un trabajo

Para cerrar la puerta corrediza de un granero, una persona jala una cuerda con una fuerza constante de 50 libras a un ángulo constante de 60°, como se ve en la Figura 6.43. Encuentre el trabajo realizado al mover la puerta del granero 12 pies a su posición cerrada.

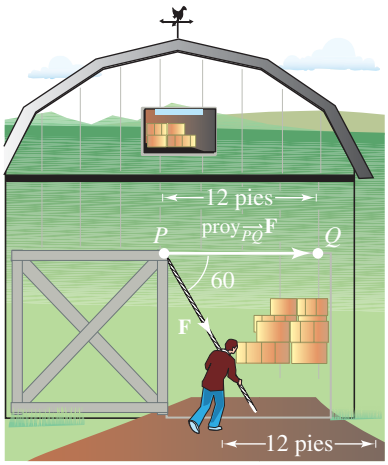


FIGURA 6.43

Solución

Usando una proyección, se puede calcular el trabajo como sigue.

$$\begin{aligned} W &= \|\text{proy}_{\overrightarrow{PQ}}\mathbf{F}\|\,\|\overrightarrow{PQ}\| && \text{Forma de proyección para trabajo} \\ &= (\cos 60°)\|\mathbf{F}\|\,\|\overrightarrow{PQ}\| \\ &= \frac{1}{2}(50)(12) = 300 \text{ pies-libra} \end{aligned}$$

Entonces, el trabajo realizado es de 300 pies-libra. Se puede verificar este resultado si se encuentran los vectores $\mathbf{F}$ y $\overrightarrow{PQ}$ y se calcula su producto punto.

PUNTO *de repaso* Ahora trate de hacer el Ejercicio 79.

6.4 EJERCICIOS

En www.CalcChat.com vea las soluciones a los ejercicios impares.

VOCABULARIO: Llene los espacios en blanco.

1. El _____ _____ de dos vectores da un escalar, en vez de un vector.
2. El producto punto de $\mathbf{u} = \langle u_1, u_2 \rangle$ y $\mathbf{v} = \langle v_1, v_2 \rangle$ es $\mathbf{u} \cdot \mathbf{v} =$ _____ .
3. Si θ es el ángulo entre dos vectores $\mathbf{u}$ y $\mathbf{v}$ diferentes de cero, entonces $\cos\theta =$ _____ .
4. Los vectores $\mathbf{u}$ y $\mathbf{v}$ son _____ si $\mathbf{u} \cdot \mathbf{v} = 0$.
5. La proyección de $\mathbf{u}$ sobre $\mathbf{v}$ está dada por $\text{proy}_{\mathbf{v}}\mathbf{u} =$ _____ .
6. El trabajo W realizado por una fuerza $\mathbf{F}$ constante, cuando su punto de aplicación se mueve a lo largo del vector $\overrightarrow{PQ}$ está dado por $W =$ _____ o por $W =$ _____ .

HABILIDADES Y APLICACIONES

En los Ejercicios 7-14, encuentre el producto punto de $\mathbf{u}$ y $\mathbf{v}$.

7. $\mathbf{u} = \langle 7, 1 \rangle$, $\mathbf{v} = \langle -3, 2 \rangle$
8. $\mathbf{u} = \langle 6, 10 \rangle$, $\mathbf{v} = \langle -2, 3 \rangle$
9. $\mathbf{u} = \langle -4, 1 \rangle$, $\mathbf{v} = \langle 2, -3 \rangle$
10. $\mathbf{u} = \langle -2, 5 \rangle$, $\mathbf{v} = \langle -1, -8 \rangle$
11. $\mathbf{u} = 4\mathbf{i} - 2\mathbf{j}$, $\mathbf{v} = \mathbf{i} - \mathbf{j}$
12. $\mathbf{u} = 3\mathbf{i} + 4\mathbf{j}$, $\mathbf{v} = 7\mathbf{i} - 2\mathbf{j}$
13. $\mathbf{u} = 3\mathbf{i} + 2\mathbf{j}$, $\mathbf{v} = -2\mathbf{i} - 3\mathbf{j}$
14. $\mathbf{u} = \mathbf{i} - 2\mathbf{j}$, $\mathbf{v} = -2\mathbf{i} + \mathbf{j}$

En los Ejercicios 15-24, use los vectores $\mathbf{u} = \langle 3, 3 \rangle$, $\mathbf{v} = \langle -4, 2 \rangle$ y $\mathbf{w} = \langle 3, -1 \rangle$ para hallar la cantidad indicada. Exprese si el resultado es un vector o un escalar.

15. $\mathbf{u} \cdot \mathbf{u}$
16. $3\mathbf{u} \cdot \mathbf{v}$
17. $(\mathbf{u} \cdot \mathbf{v})\mathbf{v}$
18. $(\mathbf{v} \cdot \mathbf{u})\mathbf{w}$
19. $(3\mathbf{w} \cdot \mathbf{v})\mathbf{u}$
20. $(\mathbf{u} \cdot 2\mathbf{v})\mathbf{w}$
21. $\|\mathbf{w}\| - 1$
22. $2 - \|\mathbf{u}\|$
23. $(\mathbf{u} \cdot \mathbf{v}) - (\mathbf{u} \cdot \mathbf{w})$
24. $(\mathbf{v} \cdot \mathbf{u}) - (\mathbf{w} \cdot \mathbf{v})$

En los Ejercicios 25-30, use el producto punto para hallar la magnitud de $\mathbf{u}$.

25. $\mathbf{u} = \langle -8, 15 \rangle$
26. $\mathbf{u} = \langle 4, -6 \rangle$
27. $\mathbf{u} = 20\mathbf{i} + 25\mathbf{j}$
28. $\mathbf{u} = 12\mathbf{i} - 16\mathbf{j}$
29. $\mathbf{u} = 6\mathbf{j}$
30. $\mathbf{u} = -21\mathbf{i}$

En los Ejercicios 31-40, encuentre el ángulo θ entre los vectores.

31. $\mathbf{u} = \langle 1, 0 \rangle$, $\mathbf{v} = \langle 0, -2 \rangle$
32. $\mathbf{u} = \langle 3, 2 \rangle$, $\mathbf{v} = \langle 4, 0 \rangle$
33. $\mathbf{u} = 3\mathbf{i} + 4\mathbf{j}$, $\mathbf{v} = -2\mathbf{j}$
34. $\mathbf{u} = 2\mathbf{i} - 3\mathbf{j}$, $\mathbf{v} = \mathbf{i} - 2\mathbf{j}$
35. $\mathbf{u} = 2\mathbf{i} - \mathbf{j}$, $\mathbf{v} = 6\mathbf{i} + 4\mathbf{j}$
36. $\mathbf{u} = -6\mathbf{i} - 3\mathbf{j}$, $\mathbf{v} = -8\mathbf{i} + 4\mathbf{j}$
37. $\mathbf{u} = 5\mathbf{i} + 5\mathbf{j}$, $\mathbf{v} = -6\mathbf{i} + 6\mathbf{j}$
38. $\mathbf{u} = 2\mathbf{i} - 3\mathbf{j}$, $\mathbf{v} = 4\mathbf{i} + 3\mathbf{j}$
39. $\mathbf{u} = \cos\left(\frac{\pi}{3}\right)\mathbf{i} + \text{sen}\left(\frac{\pi}{3}\right)\mathbf{j}$, $\mathbf{v} = \cos\left(\frac{3\pi}{4}\right)\mathbf{i} + \text{sen}\left(\frac{3\pi}{4}\right)\mathbf{j}$
40. $\mathbf{u} = \cos\left(\frac{\pi}{4}\right)\mathbf{i} + \text{sen}\left(\frac{\pi}{4}\right)\mathbf{j}$, $\mathbf{v} = \cos\left(\frac{\pi}{2}\right)\mathbf{i} + \text{sen}\left(\frac{\pi}{2}\right)\mathbf{j}$

En los Ejercicios 41-44, grafique los vectores y encuentre la medida en grados del ángulo θ entre los vectores.

41. $\mathbf{u} = 3\mathbf{i} + 4\mathbf{j}$, $\mathbf{v} = -7\mathbf{i} + 5\mathbf{j}$
42. $\mathbf{u} = 6\mathbf{i} + 3\mathbf{j}$, $\mathbf{v} = -4\mathbf{i} + 4\mathbf{j}$
43. $\mathbf{u} = 5\mathbf{i} + 5\mathbf{j}$, $\mathbf{v} = -8\mathbf{i} + 8\mathbf{j}$
44. $\mathbf{u} = 2\mathbf{i} - 3\mathbf{j}$, $\mathbf{v} = 8\mathbf{i} + 3\mathbf{j}$

En los Ejercicios 45-48, use vectores para hallar los ángulos interiores del triángulo con los vértices dados.

45. $(1, 2), (3, 4), (2, 5)$
46. $(-3, -4), (1, 7), (8, 2)$
47. $(-3, 0), (2, 2), (0, 6)$
48. $(-3, 5), (-1, 9), (7, 9)$

En los Ejercicios 49-52, encuentre $\mathbf{u} \cdot \mathbf{v}$, donde θ es el ángulo entre $\mathbf{u}$ y $\mathbf{v}$.

49. $\|\mathbf{u}\| = 4, \|\mathbf{v}\| = 10, \theta = \frac{2\pi}{3}$
50. $\|\mathbf{u}\| = 100, \|\mathbf{v}\| = 250, \theta = \frac{\pi}{6}$
51. $\|\mathbf{u}\| = 9, \|\mathbf{v}\| = 36, \theta = \frac{3\pi}{4}$
52. $\|\mathbf{u}\| = 4, \|\mathbf{v}\| = 12, \theta = \frac{\pi}{3}$

En los Ejercicios 53-58, determine si **u** y **v** son ortogonales, paralelos o ninguno de éstos.

53. $\mathbf{u} = \langle -12, 30\rangle$
$\mathbf{v} = \langle \frac{1}{2}, -\frac{5}{4}\rangle$

54. $\mathbf{u} = \langle 3, 15\rangle$
$\mathbf{v} = \langle -1, 5\rangle$

55. $\mathbf{u} = \frac{1}{4}(3\mathbf{i} - \mathbf{j})$
$\mathbf{v} = 5\mathbf{i} + 6\mathbf{j}$

56. $\mathbf{u} = \mathbf{i}$
$\mathbf{v} = -2\mathbf{i} + 2\mathbf{j}$

57. $\mathbf{u} = 2\mathbf{i} - 2\mathbf{j}$
$\mathbf{v} = -\mathbf{i} - \mathbf{j}$

58. $\mathbf{u} = \langle \cos\theta, \operatorname{sen}\theta\rangle$
$\mathbf{v} = \langle \operatorname{sen}\theta, -\cos\theta\rangle$.

En los Ejercicios 59-62, encuentre la proyección de **u** sobre **v**. A continuación escriba **u** como la suma de dos vectores ortogonales, uno de los cuales es $\text{proy}_{\mathbf{v}}\mathbf{u}$.

59. $\mathbf{u} = \langle 2, 2\rangle$
$\mathbf{v} = \langle 6, 1\rangle$

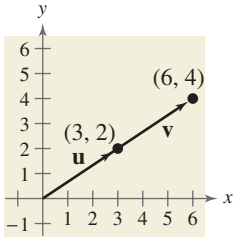
60. $\mathbf{u} = \langle 4, 2\rangle$
$\mathbf{v} = \langle 1, -2\rangle$

61. $\mathbf{u} = \langle 0, 3\rangle$
$\mathbf{v} = \langle 2, 15\rangle$

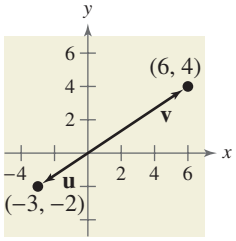
62. $\mathbf{u} = \langle -3, -2\rangle$
$\mathbf{v} = \langle -4, -1\rangle$

En los Ejercicios 63-66, use la gráfica para determinar mentalmente la proyección de **u** sobre **v**. (Se dan las coordenadas de los puntos terminales de los vectores en posición estándar.) Use la fórmula para la proyección de u sobre v para verificar su resultado.

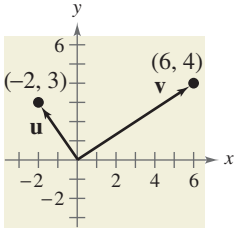
63.



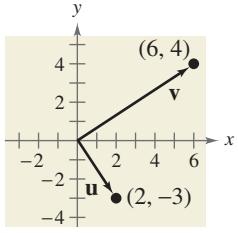
64.



65.



66.



En los Ejercicios 67-70, encuentre dos vectores en direcciones opuestas que sean ortogonales al vector **u**. (Hay numerosas respuestas correctas.)

67. $\mathbf{u} = \langle 3, 5\rangle$

68. $\mathbf{u} = \langle -8, 3\rangle$

69. $\mathbf{u} = \frac{1}{2}\mathbf{i} - \frac{2}{3}\mathbf{j}$

70. $\mathbf{u} = -\frac{5}{2}\mathbf{i} - 3\mathbf{j}$

TRABAJO En los Ejercicios 71-72, encuentre el trabajo realizado al mover una partícula de P a Q si la magnitud y dirección de la fuerza están dadas por **v**.

71. $P(0, 0)$, $Q(4, 7)$, $\mathbf{v} = \langle 1, 4\rangle$

72. $P(1, 3)$, $Q(-3, 5)$, $\mathbf{v} = -2\mathbf{i} + 3\mathbf{j}$

73. INGRESOS El vector $\mathbf{u} = \langle 4600, 5250\rangle$ da el número de unidades de dos modelos de teléfono celular producido por una compañía de telecomunicaciones. El vector $\mathbf{v} = \langle 79.99, 99.99\rangle$ da los precios (en dólares) de los dos modelos de teléfonos celulares, respectivamente.

(a) Encuentre el producto punto $\mathbf{u} \cdot \mathbf{v}$ e interprete el resultado en el contexto del problema.

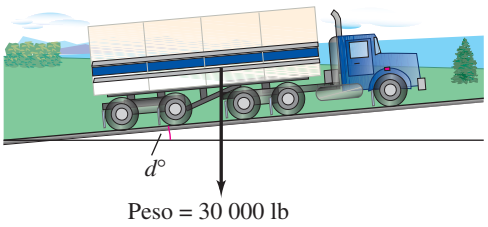
(b) Identifique la operación vectorial empleada para aumentar los precios en 5%.

74. INGRESOS El vector $\mathbf{u} = \langle 3140, 2750\rangle$ da el número de hamburguesas y "perros calientes", respectivamente, vendidos en un puesto de comida rápida en un mes. El vector $\mathbf{v} = \langle 2.25, 1.75\rangle$ da los precios (en dólares) de esos alimentos.

(a) Encuentre el producto punto $\mathbf{u} \cdot \mathbf{v}$ e interprete el resultado en el contexto del problema.

(b) Identifique la operación vectorial empleada para aumentar los precios en 2.5%.

75. FRENAR UNA CARGA Un camión con peso bruto de 30 000 libras está estacionado en una pendiente de $d°$ (vea figura). Suponga que la única fuerza por vencer es la de gravedad.



(a) Encuentre la fuerza necesaria para impedir que el camión se desplace hacia abajo por la cuesta en términos de la pendiente d.

(b) Use una calculadora de gráficas para completar la tabla.

d	0°	1°	2°	3°	4°	5°
Fuerza						

d	6°	7°	8°	9°	10°
Fuerza					

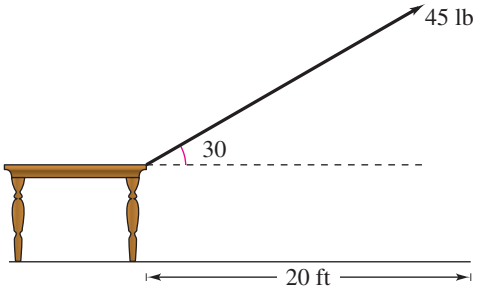
(c) Encuentre la fuerza perpendicular a la cuesta cuando $d = 5°$.

76. FRENAR UNA CARGA Un vehículo monovolumen (SUV) con peso bruto de 5400 libras está estacionado en una pendiente de 10°. Suponga que la única fuerza por vencer es la fuerza de gravedad. Encuentre la fuerza necesaria para impedir que el vehículo se desplace hacia abajo por la pendiente. Encuentre la fuerza perpendicular a la pendiente.

77. TRABAJO Determine el trabajo realizado por una persona que levanta una bolsa de azúcar de 245 newtons a una altura de 3 metros.

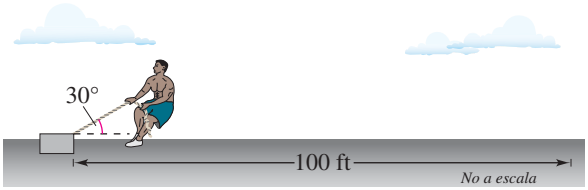
78. TRABAJO Determine el trabajo realizado por una grúa que levanta un auto de 2400 libras a una altura de 5 pies.

79. TRABAJO Se necesita una fuerza de 45 libras, ejercida a un ángulo de 30° arriba de la horizontal, para deslizar una mesa en un piso (vea figura). La mesa es arrastrada 20 pies. Determine el trabajo realizado al deslizar la mesa.

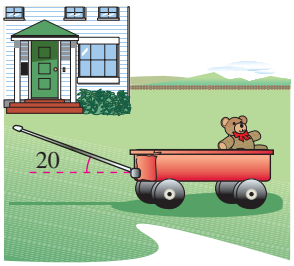


80. TRABAJO Un tractor jala 800 metros un tronco, y la tensión en el cable que conecta tractor y tronco es aproximadamente de 15 691 newtons. La dirección de la fuerza es 35° arriba de la horizontal. Aproxime el trabajo realizado al jalar el tronco.

81. TRABAJO Uno de los eventos en un concurso del hombre más fuerte de una población es jalar 100 pies un bloque de cemento. Un competidor jala el bloque al ejercer una fuerza de 250 libras sobre una cuerda unida al bloque a un ángulo de 30° con la horizontal (vea figura). Encuentre el trabajo realizado al jalar el bloque.



82. TRABAJO Un carrito de juguete es jalado al ejercer una fuerza de 25 libras en una barra que forma un ángulo de 20° con la horizontal (vea figura). Encuentre el trabajo realizado al jalar 50 pies el carrito.



83. PROGRAMACIÓN Dados los vectores $\mathbf{u}$ y $\mathbf{v}$ en forma de componentes, escriba un programa para su calculadora de gráficas en el que la salida sea $\|\mathbf{u}\|$, (b) $\|\mathbf{v}\|$ y (c) el ángulo entre $\mathbf{u}$ y $\mathbf{v}$.

84. PROGRAMACIÓN Use el programa que escribió en el Ejercicio 83 para hallar el ángulo entre los vectores dados.

(a) $\mathbf{u} = \langle 8, -4 \rangle$ y $\mathbf{v} = \langle 2, 5 \rangle$

(b) $\mathbf{u} = \langle 2, -6 \rangle$ y $\mathbf{v} = \langle 4, 1 \rangle$

85. PROGRAMACIÓN Dados los vectores $\mathbf{u}$ y $\mathbf{v}$ en forma de componentes, escriba un programa para su calculadora de gráficas en el que la salida sea la forma componente de la proyección de $\mathbf{u}$ sobre $\mathbf{v}$.

86. PROGRAMACIÓN Use el programa que escribió en el Ejercicio 85 para hallar la proyección de $\mathbf{u}$ sobre $\mathbf{v}$ para los vectores dados.

(a) $\mathbf{u} = \langle 5, 6 \rangle$ y $\mathbf{v} = \langle -1, 3 \rangle$

(b) $\mathbf{u} = \langle 3, -2 \rangle$ y $\mathbf{v} = \langle -2, 1 \rangle$

EXPLORACIÓN

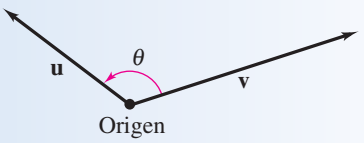
¿VERDADERO O FALSO? En los Ejercicios 87 y 88, determine si la proposición es verdadera o falsa. Justifique su respuesta.

87. El trabajo W realizado por una fuerza constante $\mathbf{F}$, que actúa a lo largo de una recta de movimiento de un objeto, está representado por un vector.

88. Una puerta corrediza se mueve a lo largo de la recta del vector $\overrightarrow{PQ}$. Si se aplica una fuerza a la puerta a lo largo de un vector que sea ortogonal a $\overrightarrow{PQ}$, entonces no se realiza trabajo.

89. DEMOSTRACIÓN Use vectores para demostrar que las diagonales de un rombo son perpendiculares.

90. TOQUE FINAL ¿Qué se sabe acerca de θ, que es el ángulo entre dos vectores $\mathbf{u}$ y $\mathbf{v}$ diferentes de cero, bajo cada condición (vea figura)?



(a) $\mathbf{u} \cdot \mathbf{v} = 0$ (b) $\mathbf{u} \cdot \mathbf{v} > 0$ (c) $\mathbf{u} \cdot \mathbf{v} < 0$

91. PIÉNSELO ¿Qué se puede decir acerca de los vectores $\mathbf{u}$ y $\mathbf{v}$ bajo cada condición?

(a) La proyección de $\mathbf{u}$ sobre $\mathbf{v}$ es igual a $\mathbf{u}$.

(b) La proyección de $\mathbf{u}$ sobre $\mathbf{v}$ es igual a $\mathbf{0}$.

92. DEMOSTRACIÓN Demuestre lo siguiente.

$$\|\mathbf{u} - \mathbf{v}\|^2 = \|\mathbf{u}\|^2 + \|\mathbf{v}\|^2 - 2\mathbf{u} \cdot \mathbf{v}$$

93. DEMOSTRACIÓN Demuestre que si $\mathbf{u}$ es un vector unitario y θ es el ángulo entre $\mathbf{u}$ e $\mathbf{i}$, entonces $\mathbf{u} = \cos\theta\mathbf{i} + \operatorname{sen}\theta\mathbf{j}$.

94. DEMOSTRACIÓN Demuestre que si $\mathbf{u}$ es un vector unitario y θ es el ángulo entre $\mathbf{u}$ y $\mathbf{j}$, entonces

$$\mathbf{u} = \cos\left(\frac{\pi}{2} - \theta\right)\mathbf{i} + \operatorname{sen}\left(\frac{\pi}{2} - \theta\right)\mathbf{j}.$$

6.5 Forma trigonométrica de un número complejo

Lo que debe aprender

- Localizar números complejos en el plano complejo y hallar valores absolutos de números complejos.
- Escribir las formas trigonométricas de números complejos.
- Multiplicar y dividir números complejos escritos en forma trigonométrica.
- Usar el teorema de DeMoivre para hallar potencias de números complejos.
- Hallar las raíces n-ésimas de números complejos.

Por qué debe aprenderlo

Se puede usar la forma trigonométrica de un número complejo para realizar operaciones con números complejos. Por ejemplo, en los Ejercicios 99-106 de la página 477 se pueden usar formas trigonométricas de números complejos para ayudar a resolver ecuaciones polinomiales.

El plano complejo

En la misma forma en que se pueden representar números reales por medio de puntos en la recta de números reales, se puede representar un número complejo

$$z = a + bi$$

como el punto (a, b) en un plano de coordenadas (el **plano complejo**). El eje horizontal se denomina **eje real** y el eje vertical recibe el nombre de **eje imaginario,** como se muestra en la Figura 6.44.

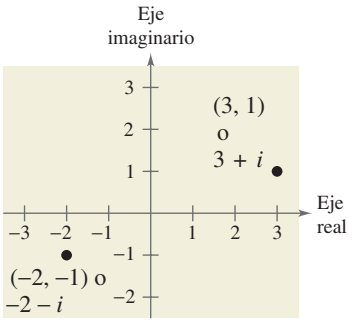


FIGURA 6.44

El **valor absoluto** del número complejo $a + bi$ se define como la distancia entre el origen $(0, 0)$ y el punto (a, b)

Definición del valor absoluto de un número complejo

El **valor absoluto** del número complejo $z = a + bi$ es

$$|a + bi| = \sqrt{a^2 + b^2}.$$

Si el número complejo $a + bi$ es un número real (esto es, si $b = 0$), entonces esta definición concuerda con la dada para el valor absoluto de un número real

$$|a + 0i| = \sqrt{a^2 + 0^2} = |a|.$$

Ejemplo 1 Hallar el valor absoluto de un número complejo

Localice $z = -2 + 5i$ y encuentre su valor absoluto.

Solución

El número está localizado en la Figura 6.45. Tiene un valor absoluto de

$$|z| = \sqrt{(-2)^2 + 5^2}$$
$$= \sqrt{29}.$$

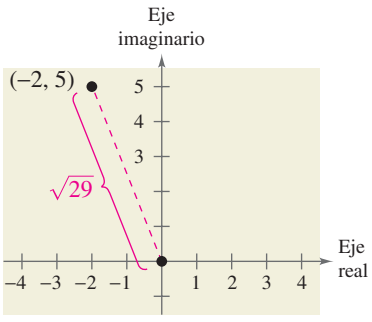


FIGURA 6.45

PUNTO *de repaso* Ahora trate de hacer el Ejercicio 9.

Forma trigonométrica de un número complejo

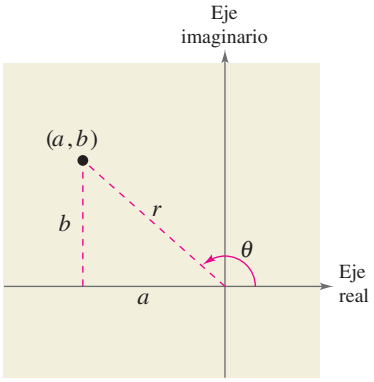


FIGURA 6.46

En la Sección 2.4 aprendió a sumar, restar, multiplicar y dividir números complejos. Para trabajar de manera eficiente con *potencias* y *raíces* de números complejos es útil escribir éstos en forma trigonométrica. En la Figura 6.46, considere el número complejo diferente de cero $a + bi$. Si hacemos que θ sea el ángulo desde el eje real positivo (medido en sentido contrario al movimiento de las manecillas de un reloj) al segmento de recta que enlaza el origen y el punto (a, b), se puede escribir

$$a = r\cos\theta \qquad \text{y} \qquad b = r\,\text{sen}\,\theta$$

donde $r = \sqrt{a^2 + b^2}$. En consecuencia, tenemos

$$a + bi = (r\cos\theta) + (r\,\text{sen}\,\theta)i$$

de la cual se puede obtener la **forma trigonométrica de un número complejo.**

Forma trigonométrica de un número complejo

La **forma trigonométrica** del número complejo $z = a + bi$ es

$$z = r(\cos\theta + i\,\text{sen}\,\theta)$$

donde $a = r\cos\theta$, $b = r\,\text{sen}\,\theta$, $r = \sqrt{a^2 + b^2}$, y $\tan\theta = b/a$. El número r es el **módulo** de z y θ recibe el nombre de **argumento** de z.

La forma trigonométrica de un número complejo también se denomina *forma polar*. Como hay un número infinito de opciones para θ, la forma trigonométrica de un número complejo no es única. Normalmente, θ está restringido al intervalo $0 \le \theta < 2\pi$, aunque en ocasiones es conveniente usar $\theta < 0$.

Ejemplo 2 Escribir un número complejo en forma trigonométrica

Escriba el número complejo $z = -2 - 2\sqrt{3}i$ en forma trigonométrica.

Solución

El valor absoluto de z es

$$r = \left|-2 - 2\sqrt{3}i\right| = \sqrt{(-2)^2 + \left(-2\sqrt{3}\right)^2} = \sqrt{16} = 4$$

y el ángulo de referencia θ' está dado por

$$\tan\theta' = \frac{b}{a} = \frac{-2\sqrt{3}}{-2} = \sqrt{3}.$$

Como $\tan(\pi/3) = \sqrt{3}$ y como $z = -2 - 2\sqrt{3}i$ está en el tercer cuadrante, se escoge que θ sea $\theta = \pi + \pi/3 = 4\pi/3$. Entonces, la forma trigonométrica es

$$z = r(\cos\theta + i\,\text{sen}\,\theta)$$

$$= 4\left(\cos\frac{4\pi}{3} + i\,\text{sen}\,\frac{4\pi}{3}\right).$$

Vea la Figura 6.47.

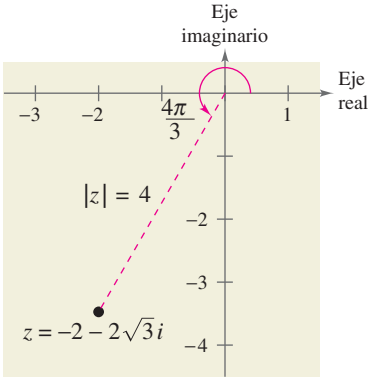


FIGURA 6.47

PUNTO *de repaso* Ahora trate de hacer el Ejercicio 17.

Ejemplo 3 Escribir un número complejo en forma estándar

Escriba el número complejo en forma estándar $a + bi$.

$$z = \sqrt{8}\left[\cos\left(-\frac{\pi}{3}\right) + i\,\text{sen}\left(-\frac{\pi}{3}\right)\right]$$

Solución

Como $\cos\left(-\frac{\pi}{3}\right) = \frac{1}{2}$ y $\text{sen}\left(-\frac{\pi}{3}\right) = -\frac{\sqrt{3}}{2}$, se puede escribir

$$\begin{aligned} z &= \sqrt{8}\left[\cos\left(-\frac{\pi}{3}\right) + i\,\text{sen}\left(-\frac{\pi}{3}\right)\right] \\ &= 2\sqrt{2}\left(\frac{1}{2} - \frac{\sqrt{3}}{2}i\right) \\ &= \sqrt{2} - \sqrt{6}i. \end{aligned}$$

PUNTO *de repaso* Ahora trate de hacer el Ejercicio 35.

TECNOLOGÍA

Se puede usar una calculadora de gráficas para convertir un número complejo en forma trigonométrica (o polar) a forma estándar. Para secuencias específicas de tecleo, vea el manual del usuario de su calculadora.

Multiplicación y división de números complejos

La forma trigonométrica se adapta muy bien a la multiplicación y división de números complejos. Supongamos que nos dan dos números complejos

$$z_1 = r_1(\cos\theta_1 + i\,\text{sen}\,\theta_1) \quad \text{y} \quad z_2 = r_2(\cos\theta_2 + i\,\text{sen}\,\theta_2).$$

El producto de z_1 y z_2 está dado por

$$\begin{aligned} z_1z_2 &= r_1r_2(\cos\theta_1 + i\,\text{sen}\,\theta_1)(\cos\theta_2 + i\,\text{sen}\,\theta_2) \\ &= r_1r_2[(\cos\theta_1\cos\theta_2 - \text{sen}\,\theta_1\,\text{sen}\,\theta_2) + i(\text{sen}\,\theta_1\cos\theta_2 + \cos\theta_1\,\text{sen}\,\theta_2)] \end{aligned}$$

Usando las fórmulas de suma y diferencia para coseno y seno, se puede reescribir esta ecuación como

$$z_1z_2 = r_1r_2[\cos(\theta_1 + \theta_2) + i\,\text{sen}(\theta_1 + \theta_2)].$$

Esto establece la primera parte de la regla siguiente. La segunda parte se deja al lector para que la compruebe (vea el Ejercicio 109).

Producto y cociente de dos números complejos

Sean $z_1 = r_1(\cos\theta_1 + i\,\text{sen}\,\theta_1)$ y $z_2 = r_2(\cos\theta_2 + i\,\text{sen}\,\theta_2)$ números complejos.

$$z_1z_2 = r_1r_2[\cos(\theta_1 + \theta_2) + i\,\text{sen}(\theta_1 + \theta_2)] \qquad \text{Producto}$$

$$\frac{z_1}{z_2} = \frac{r_1}{r_2}[\cos(\theta_1 - \theta_2) + i\,\text{sen}(\theta_1 - \theta_2)],\ z_2 \neq 0 \qquad \text{Cociente}$$

Nótese que esta regla dice que para *multiplicar* dos números complejos se multiplican los módulos y se suman argumentos, mientras que para *dividir* dos números complejos se dividen los módulos y se restan los argumentos.

Ejemplo 4 Multiplicar números complejos

Encuentre el producto z_1z_2 de los números complejos.

$$z_1 = 2\left(\cos\frac{2\pi}{3} + i\,\text{sen}\,\frac{2\pi}{3}\right) \qquad z_2 = 8\left(\cos\frac{11\pi}{6} + i\,\text{sen}\,\frac{11\pi}{6}\right)$$

Solución

$$\begin{aligned} z_1z_2 &= 2\left(\cos\frac{2\pi}{3} + i\,\text{sen}\,\frac{2\pi}{3}\right)\cdot 8\left(\cos\frac{11\pi}{6} + i\,\text{sen}\,\frac{11\pi}{6}\right) \\ &= 16\left[\cos\left(\frac{2\pi}{3} + \frac{11\pi}{6}\right) + i\,\text{sen}\left(\frac{2\pi}{3} + \frac{11\pi}{6}\right)\right] && \text{Multiplicar módulos y sumar argumentos.} \\ &= 16\left(\cos\frac{5\pi}{2} + i\,\text{sen}\,\frac{5\pi}{2}\right) \\ &= 16\left(\cos\frac{\pi}{2} + i\,\text{sen}\,\frac{\pi}{2}\right) && \frac{5\pi}{2}\text{ y }\frac{\pi}{2}\text{ son coterminales} \\ &= 16[0 + i(1)] \\ &= 16i \end{aligned}$$

Se puede verificar este resultado si primero se convierten los números complejos a formas estándar $z_1 = -1 + \sqrt{3}i$ y $z_2 = 4\sqrt{3} - 4i$ y luego se multiplica algebraicamente, como en la Sección 2.4.

$$\begin{aligned} z_1z_2 &= \left(-1 + \sqrt{3}i\right)\left(4\sqrt{3} - 4i\right) \\ &= -4\sqrt{3} + 4i + 12i + 4\sqrt{3} \\ &= 16i \end{aligned}$$

PUNTO *de repaso* Ahora trate de hacer el Ejercicio 47.

TECNOLOGÍA

Algunas calculadoras de gráficas pueden multiplicar y dividir números complejos en forma trigonométrica. Si tiene acceso a una de estas calculadoras, úsela para hallar z_1z_2 y z_1/z_2 en los Ejemplos 4 y 5.

Ejemplo 5 Dividir números complejos

Encuentre el cociente z_1/z_2 de los números complejos.

$$z_1 = 24(\cos 300^\circ + i\,\text{sen}\,300^\circ) \qquad z_2 = 8(\cos 75^\circ + i\,\text{sen}\,75^\circ)$$

Solución

$$\begin{aligned} \frac{z_1}{z_2} &= \frac{24(\cos 300^\circ + i\,\text{sen}\,300^\circ)}{8(\cos 75^\circ + i\,\text{sen}\,75^\circ)} \\ &= \frac{24}{8}[\cos(300^\circ - 75^\circ) + i\,\text{sen}(300^\circ - 75^\circ)] && \text{Dividir módulos y restar argumentos.} \\ &= 3(\cos 225^\circ + i\,\text{sen}\,225^\circ) \\ &= 3\left[\left(-\frac{\sqrt{2}}{2}\right) + i\left(-\frac{\sqrt{2}}{2}\right)\right] \\ &= -\frac{3\sqrt{2}}{2} - \frac{3\sqrt{2}}{2}i \end{aligned}$$

PUNTO *de repaso* Ahora trate de hacer el Ejercicio 53.

Potencias de números complejos

Se utiliza la forma trigonométrica de un número complejo para elevar un número complejo a una potencia. Para lograr esto, considere el uso repetido de la regla de la multiplicación.

$$z = r(\cos\theta + i\,\text{sen}\,\theta)$$
$$z^2 = r(\cos\theta + i\,\text{sen}\,\theta)r(\cos\theta + i\,\text{sen}\,\theta) = r^2(\cos 2\theta + i\,\text{sen}\,2\theta)$$
$$z^3 = r^2(\cos 2\theta + i\,\text{sen}\,2\theta)r(\cos\theta + i\,\text{sen}\,\theta) = r^3(\cos 3\theta + i\,\text{sen}\,3\theta)$$
$$z^4 = r^4(\cos 4\theta + i\,\text{sen}\,4\theta)$$
$$z^5 = r^5(\cos 5\theta + i\,\text{sen}\,5\theta)$$
$$\vdots$$

Este patrón lleva al teorema de DeMoivre, que recibe ese nombre en honor al matemático francés Abraham DeMoivre (1667-1754).

NOTA HISTÓRICA

The Granger Collection

Abraham DeMoivre (1667-1754) es recordado por su trabajo de teoría de probabilidad y el teorema que lleva su nombre. Su libro *La doctrina de probabilidades* (publicado en 1718) incluye la teoría de series recursivas y la teoría de fracciones parciales.

Teorema de DeMoivre

Si $z = r(\cos\theta + i\,\text{sen}\,\theta)$ es un número complejo y n es un entero positivo, entonces

$$z^n = [r(\cos\theta + i\,\text{sen}\,\theta)]^n$$
$$= r^n(\cos n\theta + i\,\text{sen}\,n\theta).$$

Ejemplo 6 Hallar potencias de un número complejo

Use el teorema de DeMoivre para hallar $(-1 + \sqrt{3}i)^{12}$.

Solución

Primero convierta el número complejo a forma trigonométrica usando

$$r = \sqrt{(-1)^2 + (\sqrt{3})^2} = 2 \quad \text{y} \quad \theta = \arctan\frac{\sqrt{3}}{-1} = \frac{2\pi}{3}.$$

Por tanto, la forma trigonométrica es

$$z = -1 + \sqrt{3}i = 2\left(\cos\frac{2\pi}{3} + i\,\text{sen}\,\frac{2\pi}{3}\right).$$

Entonces, por el teorema de DeMoivre, tenemos

$$(-1 + \sqrt{3}i)^{12} = \left[2\left(\cos\frac{2\pi}{3} + i\,\text{sen}\,\frac{2\pi}{3}\right)\right]^{12}$$
$$= 2^{12}\left[\cos\frac{12(2\pi)}{3} + i\,\text{sen}\,\frac{12(2\pi)}{3}\right]$$
$$= 4096(\cos 8\pi + i\,\text{sen}\,8\pi)$$
$$= 4096(1 + 0)$$
$$= 4096.$$

PUNTO *de repaso* Ahora trate de hacer el Ejercicio 69.

Raíces de números complejos

Recuerde que una consecuencia del teorema fundamental del álgebra es que una ecuación polinomial de grado n tiene n soluciones en el sistema de números complejos. Por tanto, la ecuación $x^6 = 1$ tiene seis soluciones, y en este caso particular se pueden hallar seis soluciones al factorizar y usar la fórmula cuadrática.

$$x^6 - 1 = (x^3 - 1)(x^3 + 1)$$
$$= (x - 1)(x^2 + x + 1)(x + 1)(x^2 - x + 1) = 0$$

En consecuencia, las soluciones son

$$x = \pm 1, \qquad x = \frac{-1 \pm \sqrt{3}i}{2} \qquad \text{y} \qquad x = \frac{1 \pm \sqrt{3}i}{2}.$$

Cada uno de estos números es la raíz sexta de 1. En general, la **raíz *n*-ésima de un número complejo** se define como sigue:

Definición de la raíz *n*-ésima de un número complejo

El número complejo $u = a + bi$ es la raíz n-ésima del número complejo z si

$$z = u^n = (a + bi)^n.$$

Para hallar una fórmula para la raíz n-ésima de un número complejo, sea u la raíz n-ésima de z, donde

$$u = s(\cos \beta + i \operatorname{sen} \beta)$$

y

$$z = r(\cos \theta + i \operatorname{sen} \theta).$$

Por el teorema de DeMoivre y el hecho de que $u^n = z$, tenemos

$$s^n(\cos n\beta + i \operatorname{sen} n\beta) = r(\cos \theta + i \operatorname{sen} \theta).$$

Tomando el valor absoluto de cada lado de esta ecuación se deduce que $s^n = r$. Sustituyendo de nuevo en la ecuación previa y dividiendo entre r se obtiene

$$\cos n\beta + i \operatorname{sen} n\beta = \cos \theta + i \operatorname{sen} \theta.$$

Por tanto, se deduce que

$$\cos n\beta = \cos \theta \qquad \text{y} \qquad \operatorname{sen} n\beta = \operatorname{sen} \theta.$$

Como tanto el seno como el coseno tienen un periodo de 2π, estas dos últimas ecuaciones tienen soluciones si y sólo si los ángulos difieren en un múltiplo de 2π. En consecuencia, debe existir un entero k tal que

$$n\beta = \theta + 2\pi k$$
$$\beta = \frac{\theta + 2\pi k}{n}.$$

Al sustituir este valor de β en la forma trigonométrica de u se obtiene el resultado expresado en la página siguiente.

Hallar raíces *n*-ésimas de un número complejo

Para un número n entero positivo, el número complejo $z = r(\cos\theta + i\,\text{sen}\,\theta)$ tiene exactamente n raíces n-ésimas distintas dadas por

$$\sqrt[n]{r}\left(\cos\frac{\theta + 2\pi k}{n} + i\,\text{sen}\,\frac{\theta + 2\pi k}{n}\right)$$

donde $k = 0, 1, 2, \ldots, n - 1$.

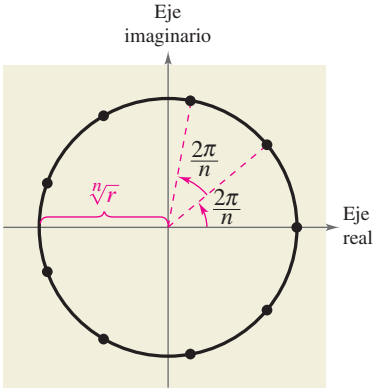


FIGURA 6.48

Cuando k excede de $n - 1$, las raíces empiezan a repetirse. Por ejemplo, si $k = n$, el ángulo

$$\frac{\theta + 2\pi n}{n} = \frac{\theta}{n} + 2\pi$$

es coterminal con θ/n, que también se obtiene cuando $k = 0$.

La fórmula para las raíces n-ésimas de un número complejo z tiene una interpretación geométrica exacta, como se muestra en la Figura 6.48. Observe que como las raíces n-ésimas de z tienen todas ellas la misma magnitud $\sqrt[n]{r}$, todas están en una circunferencia de radio $\sqrt[n]{r}$ con centro en el origen. Además, como las sucesivas raíces n-ésimas tienen argumentos que difieren en $2\pi/n$, las raíces n-ésimas están igualmente espaciadas alrededor de la circunferencia.

Usted ya ha encontrado las raíces sextas de 1 al factorizar y usar la fórmula cuadrática. El Ejemplo 7 muestra la forma en que puede resolver el mismo problema con la fórmula para las raíces n-ésimas.

Ejemplo 7 Hallar las raíces *n*-ésimas de un número real

Encuentre todas las raíces sextas de 1.

Solución

Primero escriba 1 en forma trigonométrica $1 = 1(\cos 0 + i\,\text{sen}\,0)$. A continuación, por la fórmula de la raíz n-ésima, con $n = 6$ y $r = 1$, las raíces tienen la forma

$$\sqrt[6]{1}\left(\cos\frac{0 + 2\pi k}{6} + i\,\text{sen}\,\frac{0 + 2\pi k}{6}\right) = \cos\frac{\pi k}{3} + i\,\text{sen}\,\frac{\pi k}{3}.$$

Por tanto, para $k = 0, 1, 2, 3, 4$ y 5, las raíces sextas son como sigue. (Vea Figura 6.49.)

$$\cos 0 + i\,\text{sen}\,0 = 1$$

$$\cos\frac{\pi}{3} + i\,\text{sen}\,\frac{\pi}{3} = \frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2}i \qquad \text{Incremento por } \frac{2\pi}{n} = \frac{2\pi}{6} = \frac{\pi}{3}$$

$$\cos\frac{2\pi}{3} + i\,\text{sen}\,\frac{2\pi}{3} = -\frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2}i$$

$$\cos\pi + i\,\text{sen}\,\pi = -1$$

$$\cos\frac{4\pi}{3} + i\,\text{sen}\,\frac{4\pi}{3} = -\frac{1}{2} - \frac{\sqrt{3}}{2}i$$

$$\cos\frac{5\pi}{3} + i\,\text{sen}\,\frac{5\pi}{3} = \frac{1}{2} - \frac{\sqrt{3}}{2}i$$

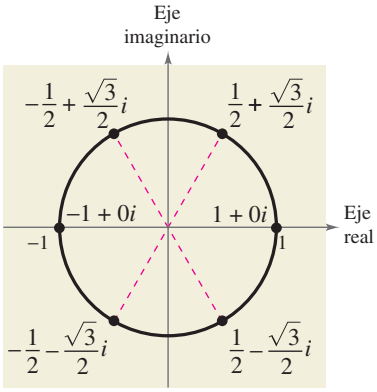


FIGURA 6.49

PUNTO *de repaso* Ahora trate de hacer el Ejercicio 91.

En la Figura 6.49, observe que las raíces obtenidas en el ejemplo 7 tienen todas ellas una magnitud de 1 y están igualmente espaciadas alrededor de la circunferencia unitaria. También observe que las raíces complejas se presentan en pares conjugados, como se explica en la Sección 2.5. Las n distintas raíces n-ésimas de 1 se denominan **raíces n-ésimas de la unidad.**

Ejemplo 8 Hallar las raíces n-ésimas de un número complejo

Encuentre las tres raíces cúbicas de $z = -2 + 2i$.

Solución

Como z se encuentra en el segundo cuadrante, la forma trigonométrica de z es

$$z = -2 + 2i$$
$$= \sqrt{8}\,(\cos 135^\circ + i \operatorname{sen} 135^\circ). \qquad \theta = \arctan\left(\frac{2}{-2}\right) = 135^\circ$$

Por la fórmula para raíces n-ésimas, las raíces cúbicas tienen la forma

$$\sqrt[3]{8}\left(\cos\frac{135^\circ + 360^\circ k}{3} + i \operatorname{sen}\frac{135^o + 360^\circ k}{3}\right).$$

Finalmente, para $k = 0$, 1 y 2, se obtienen las raíces

$$\sqrt[6]{8}\left(\cos\frac{135^\circ + 360^\circ(0)}{3} + i \operatorname{sen}\frac{135^\circ + 360^\circ(0)}{3}\right) = \sqrt{2}(\cos 45^\circ + i \operatorname{sen} 45^\circ)$$
$$= 1 + i$$

$$\sqrt[6]{8}\left(\cos\frac{135^\circ + 360^\circ(1)}{3} + i \operatorname{sen}\frac{135^\circ + 360^\circ(1)}{3}\right) = \sqrt{2}(\cos 165^\circ + i \operatorname{sen} 165^\circ)$$
$$\approx -1.3660 + 0.3660i$$

$$\sqrt[6]{8}\left(\cos\frac{135^\circ + 360^\circ(2)}{3} + i \operatorname{sen}\frac{135^\circ + 360^\circ(2)}{3}\right) = \sqrt{2}(\cos 285^\circ + i \operatorname{sen} 285^\circ)$$
$$\approx 0.3660 - 1.3660i.$$

Vea la Figura 6.50.

PUNTO *de repaso* Ahora trate de hacer el Ejercicio 97.

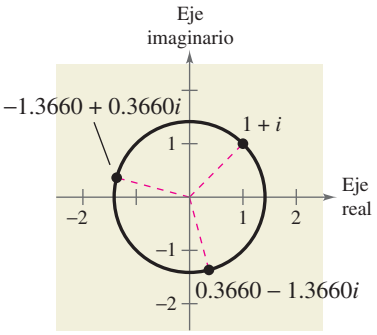


FIGURA 6.50

Tip de estudio

Observe en el Ejemplo 8 que el valor absoluto de z es

$$r = |-2 + 2i|$$
$$= \sqrt{(-2)^2 + 2^2}$$
$$= \sqrt{8}$$

y el ángulo θ está dado por

$$\tan\theta = \frac{b}{a} = \frac{2}{-2} = -1.$$

Discusión en clase

Una famosa fórmula matemática La famosa fórmula

$$e^{a+bi} = e^a(\cos b + i \operatorname{sen} b)$$

es la fórmula de Euler, así llamada en honor al matemático suizo Leonhard Euler (1707-1783). Aunque la interpretación de esta fórmula está fuera del propósito de este texto, decidimos incluirla porque da lugar a una de las ecuaciones más maravillosas en matemáticas.

$$e^{\pi i} + 1 = 0$$

Esta elegante ecuación relaciona los cinco números más famosos en matemáticas: 0, 1, π, e e i en una sola ecuación. Demuestre la forma en que la fórmula de Euler se puede usar para deducir esta ecuación.

6.5 EJERCICIOS

En www.CalcChat.com vea las soluciones a los ejercicios impares.

VOCABULARIO: Llene los espacios en blanco.

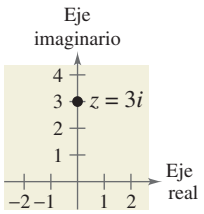
1. La _____ _____ de un número complejo $a + bi$ es la distancia entre el origen (0, 0) y el punto (a, b).
2. La _____ _____ de un número complejo $z = a + bi$ está dada por $z = r(\cos\theta + i\,\text{sen}\,\theta)$, donde r es el _____de z y θ es el _____ de z.
3. El teorema de_____ expresa que si$z = r(\cos\theta + i\,\text{sen}\,\theta)$ es un número complejo y n es un entero positivo, entonces $z^n = r^n(\cos n\theta + i\,\text{sen}\,n\theta)$.
4. El número complejo $u = a + bi$ es un _____ _____ del número complejo z si $z = u^n = (a + bi)^n$.

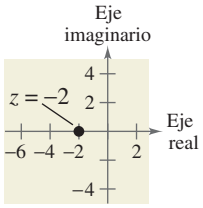
HABILIDADES Y APLICACIONES

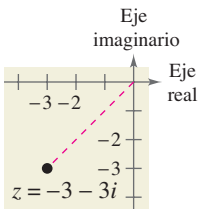
En los Ejercicios 5-10, localice el número complejo y encuentre su valor absoluto.

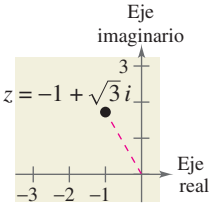
5. $-6 + 8i$
6. $5 - 12i$
7. $-7i$
8. -7
9. $4 - 6i$
10. $-8 + 3i$

En los Ejercicios 11-14, escriba el número complejo en forma trigonométrica.

11.


12.


13.


14.


En los Ejercicios 15-32, represente gráficamente el número complejo y encuentre la forma trigonométrica del número.

15. $1 + i$
16. $5 - 5i$
17. $1 - \sqrt{3}i$
18. $4 - 4\sqrt{3}i$
19. $-2(1 + \sqrt{3}i)$
20. $\frac{5}{2}(\sqrt{3} - i)$
21. $-5i$
22. $12i$
23. $-7 + 4i$
24. $3 - i$
25. 2
26. 4
27. $2\sqrt{2} - i$
28. $-3 - i$
29. $5 + 2i$
30. $8 + 3i$
31. $-8 - 5\sqrt{3}i$
32. $-9 - 2\sqrt{10}i$

En los Ejercicios 33-42, encuentre la forma estándar del número complejo. A continuación, represente gráficamente el número complejo.

33. $2(\cos 60° + i\,\text{sen}\,60°)$
34. $5(\cos 135° + i\,\text{sen}\,135°)$
35. $\sqrt{48}[\cos(-30°) + i\,\text{sen}(-30°)]$
36. $\sqrt{8}(\cos 225° + i\,\text{sen}\,225°)$
37. $\frac{9}{4}\left(\cos\frac{3\pi}{4} + i\,\text{sen}\frac{3\pi}{4}\right)$
38. $6\left(\cos\frac{5\pi}{12} + i\,\text{sen}\frac{5\pi}{12}\right)$
39. $7(\cos 0 + i\,\text{sen}\,0)$
40. $8\left(\cos\frac{\pi}{2} + i\,\text{sen}\frac{\pi}{2}\right)$
41. $5[\cos(198° 45') + i\,\text{sen}(198° 45')]$
42. $9.75[\cos(280° 30') + i\,\text{sen}(280° 30')]$

En los Ejercicios 43-46, use una calculadora de gráficas para representar el número complejo en forma estándar.

43. $5\left(\cos\frac{\pi}{9} + i\,\text{sen}\frac{\pi}{9}\right)$
44. $10\left(\cos\frac{2\pi}{5} + i\,\text{sen}\frac{2\pi}{5}\right)$
45. $2(\cos 155° + i\,\text{sen}\,155°)$
46. $9(\cos 58° + i\,\text{sen}\,58°)$

En los Ejercicios 47-58, realice la operación y deje el resultado en forma trigonométrica.

47. $\left[2\left(\cos\frac{\pi}{4} + i\,\text{sen}\frac{\pi}{4}\right)\right]\left[6\left(\cos\frac{\pi}{12} + i\,\text{sen}\frac{\pi}{12}\right)\right]$
48. $\left[\frac{3}{4}\left(\cos\frac{\pi}{3} + i\,\text{sen}\frac{\pi}{3}\right)\right]\left[4\left(\cos\frac{3\pi}{4} + i\,\text{sen}\frac{3\pi}{4}\right)\right]$
49. $\left[\frac{5}{3}(\cos 120° + i\,\text{sen}\,120°)\right]\left[\frac{2}{3}(\cos 30° + i\,\text{sen}\,30°)\right]$
50. $\left[\frac{1}{2}(\cos 100° + i\,\text{sen}\,100°)\right]\left[\frac{4}{5}(\cos 300° + i\,\text{sen}\,300°)\right]$
51. $(\cos 80° + i\,\text{sen}\,80°)(\cos 330° + i\,\text{sen}\,330°)$
52. $(\cos 5° + i\,\text{sen}\,5°)(\cos 20° + i\,\text{sen}\,20°)$
53. $\frac{3(\cos 50° + i\,\text{sen}\,50°)}{9(\cos 20° + i\,\text{sen}\,20°)}$
54. $\frac{\cos 120° + i\,\text{sen}\,120°}{2(\cos 40° + i\,\text{sen}\,40°)}$
55. $\frac{\cos\pi + i\,\text{sen}\,\pi}{\cos(\pi/3) + i\,\text{sen}(\pi/3)}$
56. $\frac{5(\cos 4.3 + i\,\text{sen}\,4.3)}{4(\cos 2.1 + i\,\text{sen}\,2.1)}$
57. $\frac{12(\cos 92° + i\,\text{sen}\,92°)}{2(\cos 122° + i\,\text{sen}\,122°)}$
58. $\frac{6(\cos 40° + i\,\text{sen}\,40°)}{7(\cos 100° + i\,\text{sen}\,100°)}$

En los Ejercicios 59-64, (a) escriba las formas trigonométricas de los números complejos, (b) realice la operación indicada usando las formas trigonométricas y (c) realice la operación indicada usando las formas estándar y compruebe el resultado con el del inciso (b).

59. $(2 + 2i)(1 - i)$ **60.** $(\sqrt{3} + i)(1 + i)$

61. $-2i(1 + i)$ **62.** $3i(1 - \sqrt{2}i)$

63. $\dfrac{3 + 4i}{1 - \sqrt{3}i}$ **64.** $\dfrac{1 + \sqrt{3}i}{6 - 3i}$

En los Ejercicios 65 y 66, represente gráficamente las potencias z, z^2, z^3 y z^4. Describa el modelo.

65. $z = \dfrac{\sqrt{2}}{2}(1 + i)$ **66.** $z = \dfrac{1}{2}(1 + \sqrt{3}i)$

En los Ejercicios 67-82, use el teorema de DeMoivre para hallar la potencia indicada del número complejo. Escriba el resultado en forma estándar.

67. $(1 + i)^5$ **68.** $(2 + 2i)^6$

69. $(-1 + i)^6$ **70.** $(3 - 2i)^8$

71. $2(\sqrt{3} + i)^{10}$ **72.** $4(1 - \sqrt{3}i)^3$

73. $[5(\cos 20° + i \operatorname{sen} 20°)]^3$ **74.** $[3(\cos 60° + i \operatorname{sen} 60°)]^4$

75. $\left(\cos\dfrac{\pi}{4} + i \operatorname{sen}\dfrac{\pi}{4}\right)^{12}$ **76.** $\left[2\left(\cos\dfrac{\pi}{2} + i \operatorname{sen}\dfrac{\pi}{2}\right)\right]^8$

77. $[5(\cos 3.2 + i \operatorname{sen} 3.2)]^4$ **78.** $(\cos 0 + i \operatorname{sen} 0)^{20}$

79. $(3 - 2i)^5$ **80.** $(\sqrt{5} - 4i)^3$

81. $[3(\cos 15° + i \operatorname{sen} 15°)]^4$ **82.** $\left[2\left(\cos\dfrac{\pi}{8} + i \operatorname{sen}\dfrac{\pi}{8}\right)\right]^6$

En los Ejercicios 83-98, (a) use la fórmula de la página 474 para hallar las raíces indicadas del número complejo, (b) represente gráficamente cada una de las raíces y (c) escriba cada una de las raíces en forma estándar.

83. Raíces cuadradas de $5(\cos 120° + i \operatorname{sen} 120°)$

84. Raíces cuadradas de $16(\cos 60° + i \operatorname{sen} 60°)$

85. Raíces cúbicas de $8\left(\cos\dfrac{2\pi}{3} + i \operatorname{sen}\dfrac{2\pi}{3}\right)$

86. Raíces quintas de $32\left(\cos\dfrac{5\pi}{6} + i \operatorname{sen}\dfrac{5\pi}{6}\right)$

87. Raíces cúbicas de $-\frac{125}{2}(1 + \sqrt{3}i)$

88. Raíces cúbicas de $-4\sqrt{2}(-1 + i)$

89. Raíces cuadradas de $-25i$ **90.** Raíces cuartas de $625i$

91. Raíces cuartas de 16 **92.** Raíces cuartas de i

93. Raíces quintas de 1 **94.** Raíces cúbicas de 1000

95. Raíces cúbicas de -125 **96.** Raíces cuartas de -4

97. Raíces quintas de $4(1 - i)$ **98.** Raíces sextas de $64i$

En los Ejercicios 99-106, use la fórmula de la página 474 para hallar todas las soluciones de la ecuación y represéntelas gráficamente.

99. $x^4 + i = 0$ **100.** $x^3 + 1 = 0$

101. $x^5 + 243 = 0$ **102.** $x^3 - 27 = 0$

103. $x^4 + 16i = 0$ **104.** $x^6 + 64i = 0$

105. $x^3 - (1 - i) = 0$ **106.** $x^4 + (1 + i) = 0$

EXPLORACION

¿VERDADERO O FALSO? En los Ejercicios 107 y 108, determine si la proposición es verdadera o falsa. Justifique su respuesta.

107. Geométricamente, las raíces n-ésimas de cualquier número complejo z están todas igualmente espaciadas alrededor de la circunferencia unitaria con centro en el origen.

108. El producto de dos números complejos es cero sólo cuando el módulo de uno (o ambos) de los números complejos es cero.

109. Dados dos números complejos $z_1 = r_1(\cos\theta_1 + i \operatorname{sen}\theta_1)$ y $z_2 = r_2(\cos\theta_2 + i \operatorname{sen}\theta_2)$, $z_2 \neq 0$, demuestre que $\dfrac{z_1}{z_2} = \dfrac{r_1}{r_2}[\cos(\theta_1 - \theta_2) + i \operatorname{sen}(\theta_1 - \theta_2)]$.

110. Demuestre que $\bar{z} = r[\cos(-\theta) + i \operatorname{sen}(-\theta)]$ es el conjugado complejo de $z = r(\cos\theta + i \operatorname{sen}\theta)$.

111. Use las formas trigonométricas de z y $\bar{z}$ en el ejercicio 110 para hallar (a) $z\bar{z}$ y (b) $z/\bar{z}$, $\bar{z} \neq 0$.

112. Demuestre que el negativo de $z = r(\cos\theta + i \operatorname{sen}\theta)$ es $-z = r[\cos(\theta + \pi) + i \operatorname{sen}(\theta + \pi)]$.

113. Demuestre que $\frac{1}{2}(1 - \sqrt{3}i)$ es una raíz novena de -1.

114. Demuestre que $2^{-1/4}(1 - i)$ es una raíz cuarta de -2.

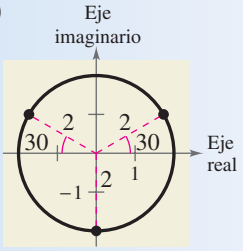
115. PIÉNSELO Explique cómo puede usted usar el teorema de DeMoivre para resolver la ecuación polinomial $x^4 + 16 = 0$. [*Sugerencia:* escriba -16 como $16(\cos\pi + i \operatorname{sen}\pi)$.]

116. TOQUE FINAL Use la gráfica de las raíces de un número complejo.

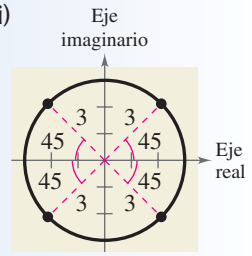
(a) Escriba cada raíz en forma trigonométrica.

(b) Identifique el número complejo cuyas raíces se dan. Use una calculadora de gráficas para verificar sus resultados.

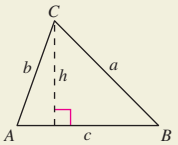
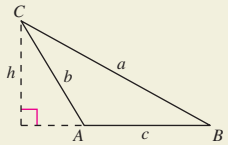
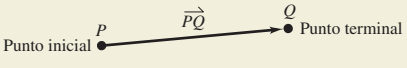
(i)



(ii)



6 Resumen del capítulo

	¿Qué aprendió?	Explicación/Ejemplos	Ejercicios de repaso
Sección 6.1	Usar la ley de los senos para resolver triángulos oblicuángulos (AAL o ALA) *(p. 428)*.	**Ley de los senos** Si ABC es un triángulo con lados a, b y c, entonces $\frac{a}{\text{sen } A} = \frac{b}{\text{sen } B} = \frac{c}{\text{sen } C}$.  A es agudo.  A es obtuso.	1–12
	Usar la ley de los senos para resolver triángulos oblicuángulos (LLA) *(p. 430)*.	Si se dan dos lados y un ángulo opuesto, pueden ocurrir tres posibles situaciones: (1) no existe ese triángulo (vea Ejemplo 4), (2) existe uno de esos triángulos (vea Ejemplo 3), o (3) dos triángulos distintos pueden satisfacer las condiciones (vea Ejemplo 5).	1–12
	Encontrar las áreas de triángulos oblicuángulos *(p. 432)*.	El área de cualquier triángulo es la mitad del producto de las longitudes de dos lados por el seno y su ángulo incluido. Esto es, área $= \frac{1}{2}bc \text{ sen } A = \frac{1}{2}ab \text{ sen } C = \frac{1}{2}ac \text{ sen } B$.	13–16
	Usar la ley de los senos para modelar y resolver problemas de la vida real *(p. 433)*.	La ley de los senos se puede usar para aproximar la distancia total del curso de una carrera de botes. (Vea Ejemplo 7.)	17–20
Sección 6.2	Usar la ley de los cosenos para resolver triángulos oblicuángulos (LLL o LAL) *(p. 437)*.	**Ley de los cosenos** *Forma estándar* / *Forma alternativa* $a^2 = b^2 + c^2 - 2bc \cos A$; $\cos A = \frac{b^2 + c^2 - a^2}{2bc}$ $b^2 = a^2 + c^2 - 2ac \cos B$; $\cos B = \frac{a^2 + c^2 - b^2}{2ac}$ $c^2 = a^2 + b^2 - 2ab \cos C$; $\cos C = \frac{a^2 + b^2 - c^2}{2ab}$	21–30
	Usar la ley de los cosenos para modelar y resolver problemas de la vida real *(p. 439)*.	La ley de los cosenos se puede usar para hallar la distancia entre el montículo de lanzamiento y la primera base de un campo de softbol femenino. (Vea Ejemplo 3.)	35–38
	Usar la fórmula del área de Herón para hallar el área de un triángulo *(p. 440)*.	**Fórmula del área de Herón:** Dado cualquier triángulo con lados de longitudes a, b y c, el área del triángulo es área $= \sqrt{s(s-a)(s-b)(s-c)}$, donde $s = (a + b + c)/2$.	39–42
Sección 6.3	Representar vectores como segmentos de recta dirigidos *(p. 445)*.	 	43, 44
	Escribir las formas componentes vectoriales *(p. 446)*.	La forma componente del vector con punto inicial $P(p_1, p_2)$ y punto terminal $Q(q_1, q_2)$ está dada por $\overrightarrow{PQ} = \langle q_1 - p_1, q_2 - p_2 \rangle = \langle v_1, v_2 \rangle = \mathbf{v}$.	45–50

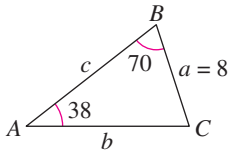
	¿Qué aprendió?	Explicación/Ejemplos	Ejercicios de repaso
Sección 6.3	Realizar operaciones básicas con vectores y representarlas gráficamente *(p. 447)*.	Sean $\mathbf{u} = \langle u_1, u_2 \rangle$ y $\mathbf{v} = \langle v_1, v_2 \rangle$ vectores y sea k un escalar (un número real). $\mathbf{u} + \mathbf{v} = \langle u_1 + v_1, u_2 + v_2 \rangle \qquad k\mathbf{u} = \langle ku_1, ku_2 \rangle$ $-\mathbf{v} = \langle -v_1, -v_2 \rangle \qquad \mathbf{u} - \mathbf{v} = \langle u_1 - v_1, u_2 - v_2 \rangle$	51–62
	Escribir vectores como combinaciones lineales de vectores unitarios *(p. 449)*.	$\mathbf{v} = \langle v_1, v_2 \rangle = v_1\langle 1, 0 \rangle + v_2\langle 0, 1 \rangle = v_1\mathbf{i} + v_2\mathbf{j}$ Los escalares v_1 y v_2 son las componentes horizontales y verticales de $\mathbf{v}$, respectivamente. La suma vectorial $v_1\mathbf{i} + v_2\mathbf{j}$ es la combinación lineal de los vectores $\mathbf{i}$ y $\mathbf{j}$.	63–68
	Hallar los ángulos de directores de vectores *(p. 451)*.	Si $\mathbf{u} = 2i + 2j$, entonces el ángulo de director es $\tan\theta = 2/2 = 1$. Por tanto, $\theta = 45°$.	69–74
	Usar vectores para modelar y resolver problemas de la vida real *(p. 452)*.	Se pueden usar vectores para hallar la velocidad resultante y dirección de un avión. (Vea Ejemplo 10.)	75–78
Sección 6.4	Hallar el producto punto de dos vectores y usar las propiedades del producto punto *(p. 458)*.	El producto punto de $\mathbf{u} = \langle u_1, u_2 \rangle$ y $\mathbf{v} = \langle v_1, v_2 \rangle$ es $\mathbf{u} \cdot \mathbf{v} = u_1v_1 + u_2v_2$.	79–90
	Hallar el ángulo entre dos vectores y determinar si dos vectores son ortogonales *(p. 459)*.	Si θ es el ángulo entre dos vectores $\mathbf{u}$ y $\mathbf{v}$, entonces $\cos\theta = \dfrac{\mathbf{u} \cdot \mathbf{v}}{\|\mathbf{u}\|\,\|\mathbf{v}\|}$. Los vectores $\mathbf{u}$ y $\mathbf{v}$ son ortogonales si $\mathbf{u} \cdot \mathbf{v} = 0$.	91–98
	Escribir un vector como la suma de dos componentes vectoriales *(p. 461)*.	Muchas aplicaciones en física e ingeniería requieren la descomposición de un vector determinado en la suma de dos componentes vectoriales. (Vea Ejemplo 7.)	99–102
	Usar vectores para hallar el trabajo realizado por una fuerza *(p. 464)*.	El trabajo W realizado por una fuerza constante $\mathbf{F}$ cuando su punto de aplicación se mueve a lo largo del vector $\overrightarrow{PQ}$ está dado por una de las dos cosas siguientes. **1.** $W = \|\text{proy}_{\overrightarrow{PQ}}\mathbf{F}\|\,\|\overrightarrow{PQ}\|$ **2.** $W = \mathbf{F} \cdot \overrightarrow{PQ}$	103–106
Sección 6.5	Localizar números complejos en el plano complejo y hallar valores absolutos de números complejos *(p. 468)*.	Un número complejo $z = a + bi$ se puede representar como el punto (a, b) en el plano complejo. El eje horizontal es el eje real y el eje vertical es el eje imaginario. El valor absoluto de $z = a + bi$ es $\|a + bi\| = \sqrt{a^2 + b^2}$.	107–112
	Escribir las formas trigonométricas de números complejos *(p. 469)*.	La forma trigonométrica del número complejo $z = a + bi$ es $z = r(\cos\theta + i\,\text{sen}\,\theta)$, donde $a = r\cos\theta$, $b = r\,\text{sen}\,\theta$, $r = \sqrt{a^2 + b^2}$ y $\tan\theta = b/a$.	113–118
	Multiplicar y dividir números complejos escritos en forma trigonométrica *(p. 470)*.	Sea $z_1 = r_1(\cos\theta_1 + i\,\text{sen}\,\theta_1)$ y $z_2 = r_2(\cos\theta_2 + i\,\text{sen}\,\theta_2)$. $z_1z_2 = r_1r_2[\cos(\theta_1 + \theta_2) + i\,\text{sen}(\theta_1 + \theta_2)]$ $z_1/z_2 = (r_1/r_2)[\cos(\theta_1 - \theta_2) + i\,\text{sen}(\theta_1 - \theta_2)], \quad z_2 \neq 0$	119, 120
	Usar el teorema de DeMoivre para hallar potencias de números complejos *(p. 472)*.	**Teorema de DeMoivre:** si $z = r(\cos\theta + i\,\text{sen}\,\theta)$ es un número complejo y n es un entero positivo, entonces $z^n = [r(\cos\theta + i\,\text{sen}\,\theta)]^n = r^n(\cos n\theta + i\,\text{sen}\,n\theta)$.	121–124
	Hallar las raíces n-ésimas de números complejos *(p. 473)*.	El número complejo $u = a + bi$ es una raíz n-ésima del número complejo z si $z = u^n = (a + bi)^n$.	125–134

6 Ejercicios de repaso

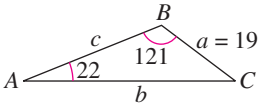
En www.CalcChat.com vea las soluciones a los ejercicios impares.

6.1 En los Ejercicios 1-12, use la ley de los senos para resolver (si es posible) el triángulo. Si existen dos soluciones, encuentre ambas. Redondee las respuestas a dos lugares decimales.

1.



2.



3. $B = 72°,\ C = 82°,\ b = 54$

4. $B = 10°,\ C = 20°,\ c = 33$

5. $A = 16°,\ B = 98°,\ c = 8.4$

6. $A = 95°,\ B = 45°,\ c = 104.8$

7. $A = 24°,\ C = 48°,\ b = 27.5$

8. $B = 64°,\ C = 36°,\ a = 367$

9. $B = 150°,\ b = 30,\ c = 10$

10. $B = 150°,\ a = 10,\ b = 3$

11. $A = 75°,\ a = 51.2,\ b = 33.7$

12. $B = 25°,\ a = 6.2,\ b = 4$

En los Ejercicios 13-16, encuentre el área del triángulo que tenga el ángulo y lados indicados.

13. $A = 33°,\ b = 7,\ c = 10$

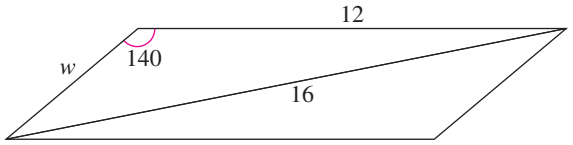
14. $B = 80°,\ a = 4,\ c = 8$

15. $C = 119°,\ a = 18,\ b = 6$

16. $A = 11°,\ b = 22,\ c = 21$

17. ALTURA Desde cierta distancia, el ángulo de elevación de lo alto de un edificio es 17°. En un punto a 50 metros más cerca del edificio, el ángulo de elevación es 31°. Aproxime la altura del edificio.

18. GEOMETRÍA Encuentre la longitud del lado w del paralelogramo.



19. ALTURA Un árbol se levanta en una colina de 28° de pendiente a partir de la horizontal. Desde un punto a 75 pies cuesta abajo, el ángulo de elevación a lo alto del árbol es 45° (vea figura). Encuentre la altura del árbol.

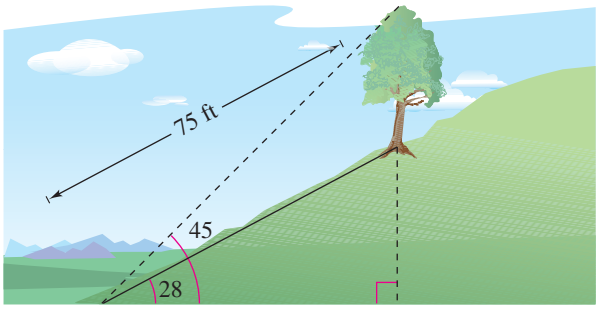
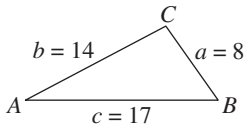


FIGURA PARA EJERCICIO 19

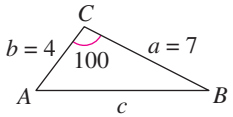
20. ANCHO DE RÍO Un topógrafo encuentra que un árbol en la margen opuesta de un río que corre al Este tiene un rumbo de N 22° 30′ E desde cierto punto y un rumbo de N 15° O desde un punto a 400 pies corriente abajo. Encuentre el ancho del río.

6.2 En los Ejercicios 21-30, use la ley de los cosenos para resolver el triángulo. Redondee las respuestas a dos lugares decimales.

21.



22.



23. $a = 6,\ b = 9,\ c = 14$

24. $a = 75,\ b = 50,\ c = 110$

25. $a = 2.5,\ b = 5.0,\ c = 4.5$

26. $a = 16.4,\ b = 8.8,\ c = 12.2$

27. $B = 108°,\ a = 11,\ c = 11$

28. $B = 150°,\ a = 10,\ c = 20$

29. $C = 43°,\ a = 22.5,\ b = 31.4$

30. $A = 62°,\ b = 11.34,\ c = 19.52$

En los Ejercicios 31-34, determine si la ley de los senos o la de los cosenos es necesaria para resolver el triángulo. Luego resuelva el triángulo.

31. $b = 9,\ c = 13,\ C = 64°$

32. $a = 4,\ c = 5,\ B = 52°$

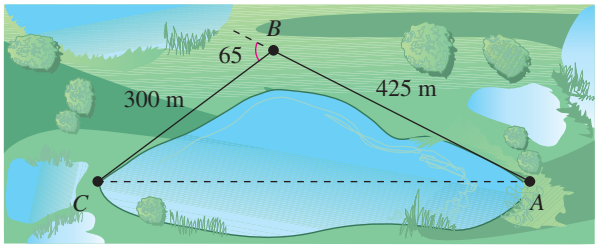
33. $a = 13,\ b = 15,\ c = 24$

34. $A = 44°,\ B = 31°,\ c = 2.8$

35. GEOMETRÍA Las longitudes de las diagonales de un paralelogramo son 10 pies y 16 pies. Encuentre las longitudes de los lados del paralelogramo si las diagonales se intersecan a un ángulo de 28°.

36. GEOMETRÍA Las longitudes de las diagonales de un paralelogramo son 30 metros y 40 metros. Encuentre las longitudes de los lados del paralelogramo si las diagonales se intersecan a un ángulo de 34°.

37. TOPOGRAFÍA Para aproximar la longitud de un pantano, un topógrafo camina 425 metros del punto A al punto B. Luego gira 65° y camina 300 metros al punto C (vea figura). Aproxime la longitud AC del pantano.



38. NAVEGACIÓN Dos aviones salen de un aeropuerto a la misma hora aproximadamente. Uno de ellos vuela a 425 millas por hora con un rumbo de 355°, y el otro vuela a 530 millas por hora con un rumbo de 67°. Trace una figura que dé una representación visual de la situación y determine la distancia entre los aviones después que hayan volado durante 2 horas.

En los Ejercicios 39-42, use la fórmula del área de Herón para hallar el área del triángulo.

39. $a = 3,\ b = 6,\ c = 8$

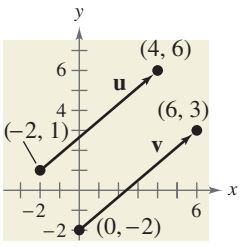
40. $a = 15,\ b = 8,\ c = 10$

41. $a = 12.3,\ b = 15.8,\ c = 3.7$

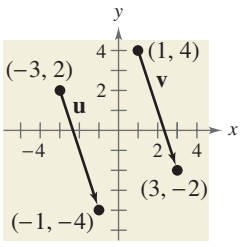
42. $a = \frac{4}{5},\ b = \frac{3}{4},\ c = \frac{5}{8}$

6.3 En los Ejercicios 43 y 44, demuestre que $\mathbf{u}$ y $\mathbf{v}$ son equivalentes.

43.

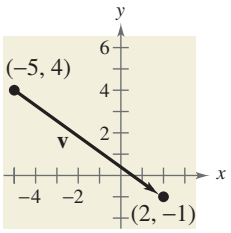


44.

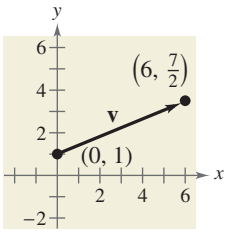


En los Ejercicios 45-50, encuentre la forma de componentes del vector $\mathbf{v}$ que satisfaga las condiciones.

45.



46.



47. Punto inicial: (0, 10); punto terminal: (7, 3)

48. Punto inicial: (1, 5); punto terminal: (15, 9)

49. $\|\mathbf{v}\| = 8, \quad \theta = 120°$

50. $\|\mathbf{v}\| = \frac{1}{2}, \quad \theta = 225°$

En los Ejercicios 51-58, encuentre (a) $\mathbf{u} + \mathbf{v}$, (b) $\mathbf{u} - \mathbf{v}$, (c) $4\mathbf{u}$ y (d) $3\mathbf{v} + 5\mathbf{u}$.

51. $\mathbf{u} = \langle -1, -3 \rangle,\ \mathbf{v} = \langle -3, 6 \rangle$

52. $\mathbf{u} = \langle 4, 5 \rangle,\ \mathbf{v} = \langle 0, -1 \rangle$

53. $\mathbf{u} = \langle -5, 2 \rangle,\ \mathbf{v} = \langle 4, 4 \rangle$

54. $\mathbf{u} = \langle 1, -8 \rangle,\ \mathbf{v} = \langle 3, -2 \rangle$

55. $\mathbf{u} = 2\mathbf{i} - \mathbf{j},\ \mathbf{v} = 5\mathbf{i} + 3\mathbf{j}$

56. $\mathbf{u} = -7\mathbf{i} - 3\mathbf{j},\ \mathbf{v} = 4\mathbf{i} - \mathbf{j}$

57. $\mathbf{u} = 4\mathbf{i},\ \mathbf{v} = -\mathbf{i} + 6\mathbf{j}$

58. $\mathbf{u} = -6\mathbf{j},\ \mathbf{v} = \mathbf{i} + \mathbf{j}$

En los Ejercicios 59-62, encuentre la forma de componentes de $\mathbf{w}$ y trace geométricamente las operaciones especificadas con vectores, donde $\mathbf{u} = 6\mathbf{i} - 5\mathbf{j}$ y $\mathbf{v} = 10\mathbf{i} + 3\mathbf{j}$.

59. $\mathbf{w} = 2\mathbf{u} + \mathbf{v}$

60. $\mathbf{w} = 4\mathbf{u} - 5\mathbf{v}$

61. $\mathbf{w} = 3\mathbf{v}$

62. $\mathbf{w} = \frac{1}{2}\mathbf{v}$

En los Ejercicios 63-66, escriba el vector $\mathbf{u}$ como una combinación lineal de los vectores unitarios canónicos $\mathbf{i}$ y $\mathbf{j}$.

63. $\mathbf{u} = \langle -1, 5 \rangle$

64. $\mathbf{u} = \langle -6, -8 \rangle$

65. $\mathbf{u}$ tiene punto inicial (3, 4) y punto terminal (9, 8).

66. $\mathbf{u}$ tiene punto inicial $(-2, 7)$ y punto terminal $(5, -9)$.

En los Ejercicios 67 y 68, escriba el vector $\mathbf{v}$ en la forma $\|\mathbf{v}\|(\cos\theta\mathbf{i} + \text{sen}\,\theta\mathbf{j})$.

67. $\mathbf{v} = -10\mathbf{i} + 10\mathbf{j}$

68. $\mathbf{v} = 4\mathbf{i} - \mathbf{j}$

En los Ejercicios 69-74, encuentre la magnitud y el ángulo director del vector $\mathbf{v}$.

69. $\mathbf{v} = 7(\cos 60°\mathbf{i} + \text{sen}\,60°\mathbf{j})$

70. $\mathbf{v} = 3(\cos 150°\mathbf{i} + \text{sen}\,150°\mathbf{j})$

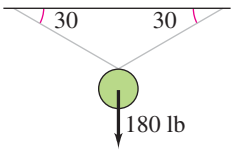
71. $\mathbf{v} = 5\mathbf{i} + 4\mathbf{j}$

72. $\mathbf{v} = -4\mathbf{i} + 7\mathbf{j}$

73. $\mathbf{v} = -3\mathbf{i} - 3\mathbf{j}$ **74.** $\mathbf{v} = 8\mathbf{i} - \mathbf{j}$

75. FUERZA RESULTANTE Fuerzas con magnitudes de 85 libras y 50 libras actúan sobre un solo punto. El ángulo entre las fuerzas es 15°. Describa la fuerza resultante.

76. TENSIÓN EN UNA CUERDA Un peso de 180 libras está sostenido por dos cuerdas, como se muestra en la figura. Encuentre la tensión en cada cuerda.



77. NAVEGACIÓN Un avión tiene una rapidez relativa de 430 millas por hora con un rumbo de 135°. La velocidad del viento es de 35 millas por hora en la dirección N 30° E. Encuentre la rapidez resultante y dirección del avión.

78. NAVEGACIÓN Un avión tiene una rapidez relativa de 724 kilómetros por hora con un rumbo de 30°. La velocidad del viento es 32 kilómetros por hora del Oeste. Encuentre la rapidez resultante y dirección del avión.

6.4 En los Ejercicios 79-82, encuentre el producto punto de **u** y **v**

79. $\mathbf{u} = \langle 6, 7\rangle$, $\mathbf{v} = \langle -3, 9\rangle$ **80.** $\mathbf{u} = \langle -7, 12\rangle$, $\mathbf{v} = \langle -4, -14\rangle$

81. $\mathbf{u} = 3\mathbf{i} + 7\mathbf{j}$, $\mathbf{v} = 11\mathbf{i} - 5\mathbf{j}$ **82.** $\mathbf{u} = -7\mathbf{i} + 2\mathbf{j}$, $\mathbf{v} = 16\mathbf{i} - 12\mathbf{j}$

En los Ejercicios 83-90, use los vectores $\mathbf{u} = \langle -4, 2\rangle$ y $\mathbf{v} = \langle 5, 1\rangle$ para hallar la cantidad indicada. Diga si el resultado es un vector o un escalar.

83. $2\mathbf{u} \cdot \mathbf{u}$ **84.** $3\mathbf{u} \cdot \mathbf{v}$

85. $4 - \|\mathbf{u}\|$ **86.** $\|\mathbf{v}\|^2$

87. $\mathbf{u}(\mathbf{u} \cdot \mathbf{v})$ **88.** $(\mathbf{u} \cdot \mathbf{v})\mathbf{v}$

89. $(\mathbf{u} \cdot \mathbf{u}) - (\mathbf{u} \cdot \mathbf{v})$ **90.** $(\mathbf{v} \cdot \mathbf{v}) - (\mathbf{v} \cdot \mathbf{u})$

En los Ejercicios 91-94, encuentre el ángulo θ entre los vectores.

91. $\mathbf{u} = \cos\frac{7\pi}{4}\mathbf{i} + \operatorname{sen}\frac{7\pi}{4}\mathbf{j}$

$\mathbf{v} = \cos\frac{5\pi}{6}\mathbf{i} + \operatorname{sen}\frac{5\pi}{6}\mathbf{j}$

92. $\mathbf{u} = \cos 45°\mathbf{i} + \operatorname{sen} 45°\mathbf{j}$

$\mathbf{v} = \cos 300°\mathbf{i} + \operatorname{sen} 300°\mathbf{j}$

93. $\mathbf{u} = \langle 2\sqrt{2}, -4\rangle$, $\mathbf{v} = \langle -\sqrt{2}, 1\rangle$

94. $\mathbf{u} = \langle 3, \sqrt{3}\rangle$, $\mathbf{v} = \langle 4, 3\sqrt{3}\rangle$

En los Ejercicios 95-98, determine si **u** y **v** son ortogonales, paralelos o ninguno de los dos.

95. $\mathbf{u} = \langle -3, 8\rangle$, $\mathbf{v} = \langle 8, 3\rangle$ **96.** $\mathbf{u} = \langle \frac{1}{4}, -\frac{1}{2}\rangle$, $\mathbf{v} = \langle -2, 4\rangle$

97. $\mathbf{u} = -\mathbf{i}$, $\mathbf{v} = \mathbf{i} + 2\mathbf{j}$ **98.** $\mathbf{u} = -2\mathbf{i} + \mathbf{j}$, $\mathbf{v} = 3\mathbf{i} + 6\mathbf{j}$

En los Ejercicios 99-102, encuentre la proyección de **u** sobre **v**. A continuación escriba **u** como la suma de dos vectores ortogonales, uno de los cuales es $\text{proy}_{\mathbf{v}}\mathbf{u}$.

99. $\mathbf{u} = \langle -4, 3\rangle$, $\mathbf{v} = \langle -8, -2\rangle$

100. $\mathbf{u} = \langle 5, 6\rangle$, $\mathbf{v} = \langle 10, 0\rangle$

101. $\mathbf{u} = \langle 2, 7\rangle$, $\mathbf{v} = \langle 1, -1\rangle$

102. $\mathbf{u} = \langle -3, 5\rangle$, $\mathbf{v} = \langle -5, 2\rangle$

TRABAJO En los Ejercicios 103 y 104, encuentre el trabajo realizado al mover una partícula de P a Q si la magnitud y dirección de la fuerza están dadas por **v**.

103. $P(5, 3)$, $Q(8, 9)$, $\mathbf{v} = \langle 2, 7\rangle$

104. $P(-2, -9)$, $Q(-12, 8)$, $\mathbf{v} = 3\mathbf{i} - 6\mathbf{j}$

105. TRABAJO Determine el trabajo realizado (en pies-libras) por una grúa que levanta 48 pulgadas a un camión de 18 000 libras.

106. TRABAJO Un empleado de mudanzas ejerce una fuerza horizontal de 25 libras sobre una caja al empujarla para subirla a una rampa de 12 pies de largo y un ángulo de 20° sobre la horizontal. Encuentre el trabajo realizado al empujar la caja.

6.5 En los Ejercicios 107-112, localice el número complejo y encuentre su valor absoluto.

107. $7i$ **108.** $-6i$

109. $5 + 3i$ **110.** $-10 - 4i$

111. $\sqrt{2} - \sqrt{2}i$ **112.** $-\sqrt{2} + \sqrt{2}i$

En los Ejercicios 113-118, escriba el número complejo en forma trigonométrica.

113. $4i$ **114.** -7

115. $5 - 5i$ **116.** $5 + 12i$

117. $-5 - 12i$ **118.** $-3\sqrt{3} + 3i$

En los Ejercicios 119 y 120, (a) escriba los dos números complejos en forma trigonométrica y (b) use las formas trigonométricas para hallar z_1z_2 y z_1/z_2, donde $z_2 \neq 0$.

119. $z_1 = 2\sqrt{3} - 2i$, $z_2 = -10i$

120. $z_1 = -3(1 + i)$, $z_2 = 2(\sqrt{3} + i)$

En los Ejercicios 121-124, use el teorema de DeMoivre para hallar la potencia indicada del número complejo. Escriba el resultado en forma estándar.

121. $\left[5\left(\cos\frac{\pi}{12}+i\,\text{sen}\,\frac{\pi}{12}\right)\right]^4$

122. $\left[2\left(\cos\frac{4\pi}{15}+i\,\text{sen}\,\frac{4\pi}{15}\right)\right]^5$

123. $(2+3i)^6$ **124.** $(1-i)^8$

En los Ejercicios 125-128, (a) use la fórmula de la página 474 para hallar las raíces indicadas del número complejo, (b) represente gráficamente cada una de las raíces y (c) escriba cada una de las raíces en forma estándar.

125. Raíces sextas de $-729i$ **126.** Raíces cuartas de $256i$

127. Raíces cúbicas de 8 **128.** Raíces quintas de -1024

En los Ejercicios 129-134, use la fórmula en la página 474 para hallar todas las soluciones de la ecuación y represente gráficamente éstas.

129. $x^4+81=0$ **130.** $x^5-32=0$

131. $x^3+8i=0$ **132.** $x^4-64i=0$

133. $x^5+x^3-x^2-1=0$

134. $x^5+4x^3-8x^2-32=0$

EXPLORACIÓN

¿VERDADERO O FALSO? **En los Ejercicios 135-139, determine si la proposición es verdadera o falsa. Justifique su respuesta.**

135. La ley de los senos es verdadera si uno de los ángulos del triángulo es recto.

136. Cuando se usa la ley de los senos, la solución es siempre única.

137. Si $\mathbf{u}$ es un vector unitario en la dirección de $\mathbf{v}$, entonces $\mathbf{v}=\|\mathbf{v}\|\mathbf{u}$.

138. Si $\mathbf{v}=a\mathbf{i}+b\mathbf{j}=\mathbf{0}$, entonces $a=-b$.

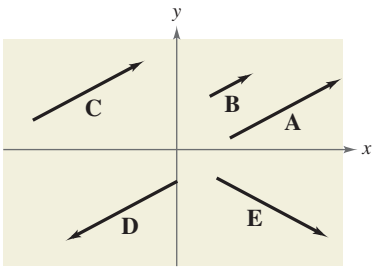
139. $x=\sqrt{3}+i$ es una solución de la ecuación $x^2-8i=0$.

140. Diga de memoria la ley de los senos.

141. Diga de memoria la ley de los cosenos.

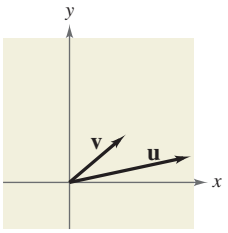
142. ¿Qué caracteriza a un vector en el plano?

143. ¿Cuáles vectores de la figura parecen equivalentes?

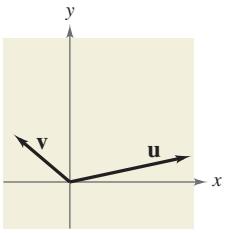


144. Los vectores $\mathbf{u}$ y $\mathbf{v}$ tienen las mismas magnitudes en las dos figuras. ¿En cuál figura será mayor la magnitud de la suma? Dé una razón para su respuesta.

(a)



(b)



145. Dé una descripción geométrica del múltiplo escalar $k\mathbf{u}$ del vector $\mathbf{u}$, para $k>0$ y para $k<0$.

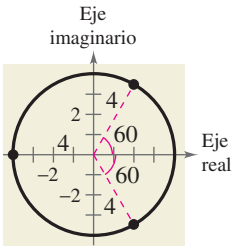
146. Dé una descripción geométrica de la suma de los vectores $\mathbf{u}$ y $\mathbf{v}$.

RAZONAMIENTO GRÁFICO **En los Ejercicios 147 y 148, use la gráfica de las raíces de un número complejo.**

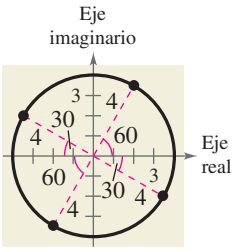
(a) Escriba cada una de las raíces en forma trigonométrica.

(b) Identifique el número complejo cuyas raíces se dan. Use una calculadora de gráficas para verificar sus resultados.

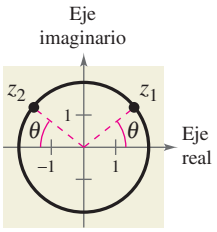
147.



148.



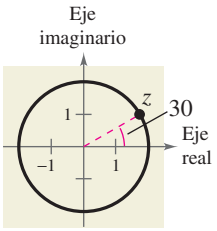
149. La figura muestra z_1 y z_2. Describa z_1z_2 y z_1/z_2.



150. Una de las cuatro raíces de un número complejo z se ilustra en la figura.

(a) ¿Cuántas raíces no se muestran?

(b) Describa las otras raíces.



6 EXAMEN DEL CAPÍTULO

En www.CalcChat.com vea las soluciones a los ejercicios impares.

Tome este examen como lo haría en clase. Cuando termine, verifique su trabajo contra las respuestas dadas al final del libro.

En los Ejercicios 1-6, use la información para resolver el triángulo (si es posible). Si existen dos soluciones, encuéntrelas. Redondee las respuestas a dos lugares decimales.

1. $A = 24°,\ B = 68°,\ a = 12.2$

2. $B = 110°,\ C = 28°,\ a = 15.6$

3. $A = 24°,\ a = 11.2,\ b = 13.4$

4. $a = 4.0,\ b = 7.3,\ c = 12.4$

5. $B = 100°,\ a = 15,\ b = 23$

6. $C = 121°,\ a = 34,\ b = 55$

7. Un terreno triangular tienen límites de longitudes 60 metros, 70 metros y 82 metros. Encuentre el área del terreno.

8. Un avión vuela 370 millas del punto A al punto B con un rumbo de 24°. A continuación vuela 240 millas del punto B al punto C con rumbo de 37° (vea figura). Encuentre la distancia y rumbo del punto A al punto C.

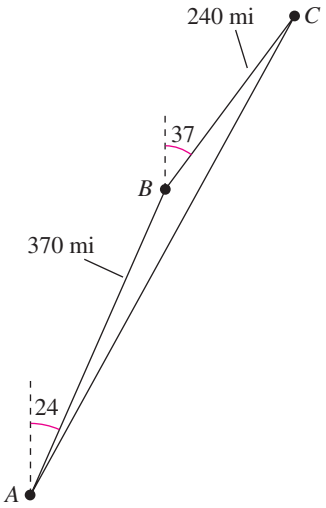


FIGURA PARA EJERCICIO 8

En los Ejercicios 9 y 10, encuentre la forma de componente del vector $\mathbf{v}$ que satisfaga las condiciones dadas.

9. Punto inicial de $\mathbf{v}$: $(-3, 7)$; punto terminal de $\mathbf{v}$: $(11, -16)$

10. Magnitud de $\mathbf{v}$: $\|\mathbf{v}\| = 12$; dirección de $\mathbf{v}$: $\mathbf{u} = \langle 3, -5 \rangle$

En los Ejercicios 11-14, $\mathbf{u} = \langle 2, 7 \rangle$ y $\mathbf{v} = \langle -6, 5 \rangle$. Encuentre el vector resultante y trace su gráfica.

11. $\mathbf{u} + \mathbf{v}$ **12.** $\mathbf{u} - \mathbf{v}$ **13.** $5\mathbf{u} - 3\mathbf{v}$ **14.** $4\mathbf{u} + 2\mathbf{v}$

15. Encuentre el ángulo entre los vectores $\mathbf{u} = \langle 24, -7 \rangle$.

16. Fuerzas con magnitudes de 250 libras y 130 libras actúan sobre un cuerpo a ángulos de 45° y $-60°$, respectivamente, con el eje x. Encuentre la dirección y magnitud de la resultante de estas fuerzas.

17. Encuentre el ángulo entre los vectores $\mathbf{u} = \langle -1, 5 \rangle$ y $\mathbf{v} = \langle 3, -2 \rangle$.

18. ¿Los vectores $\mathbf{u} = \langle 6, -10 \rangle$ y $\mathbf{v} = \langle 5, 3 \rangle$ son ortogonales?

19. Encuentre la proyección de $\mathbf{u} = \langle 6, 7 \rangle$ sobre $\mathbf{v} = \langle -5, -1 \rangle$. A continuación, escriba $\mathbf{u}$ como la suma de dos vectores ortogonales.

20. Una motocicleta de 500 libras se dirige cuesta arriba por una pendiente de 12°.¿Qué fuerza se requiere para evitar que se ruede cuesta abajo cuando se detenga en un semáforo en luz roja?

21. Escriba el número complejo $z = 5 - 5i$ en forma trigonométrica.

22. Escriba el número complejo $z = 6(\cos 120° + i \operatorname{sen} 120°)$ en forma estándar.

En los Ejercicios 23 y 24, use el teorema de DeMoivre para hallar la potencia indicada del número complejo. Escriba el resultado en forma estándar.

23. $\left[3\left(\cos\dfrac{7\pi}{6} + i \operatorname{sen}\dfrac{7\pi}{6}\right)\right]^8$ **24.** $(3 - 3i)^6$

25. Encuentre las raíces cuartas de $256\left(1 + \sqrt{3}i\right)$.

26. Encuentre todas las soluciones de la ecuación $x^3 - 27i = 0$ y represéntelas gráficamente.

6 EXAMEN ACUMULATIVO PARA LOS CAPÍTULOS 4 A 6*

Tome este examen como lo haría en clase. Cuando termine, verifique su trabajo contra las respuestas dadas al final del libro.

1. Considere el ángulo $\theta = -120°$.
   (a) Trace el ángulo en posición estándar.
   (b) Determine un ángulo coterminal en el intervalo $[0°, 360°)$.
   (c) Convierta la medida del ángulo a radianes.
   (d) Encuentre el ángulo de referencia θ'.
   (e) Encuentre los valores exactos de las seis funciones trigonométricas de θ.

2. Convierta el ángulo $\theta = -1.45$ radianes a grados. Redondee la respuesta a un lugar decimal.

3. Encuentre $\cos\theta$ si $\tan\theta = -\frac{21}{20}$ y $\operatorname{sen}\theta < 0$.

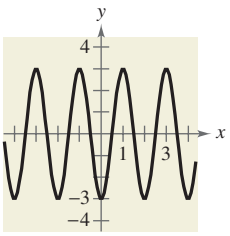


FIGURA PARA EJERCICIO 7

En los Ejercicios 4-6, trace la gráfica de la función. (Incluya dos periodos.)

4. $f(x) = 3 - 2\operatorname{sen}\pi x$ **5.** $g(x) = \frac{1}{2}\tan\left(x - \frac{\pi}{2}\right)$ **6.** $h(x) = -\sec(x + \pi)$

7. Encuentre a, b y c tales que la gráfica de una función $h(x) = a\cos(bx + c)$ se relaciona con la gráfica de la figura.

8. Trace la gráfica de la función $f(x) = \frac{1}{2}x\operatorname{sen}x$ sobre el intervalo $-3\pi \le x \le 3\pi$.

En los Ejercicios 9 y 10, encuentre el valor exacto de la expresión sin usar calculadora.

9. $\tan(\arctan 4.9)$ **10.** $\tan\left(\operatorname{arcsen}\frac{3}{5}\right)$

11. Escriba una expresión algebraica equivalente a $\operatorname{sen}(\arccos 2x)$.

12. Use las identidades fundamentales para simplificar $\cos\left(\frac{\pi}{2} - x\right)\csc x$.

13. Reste y simplifique: $\dfrac{\operatorname{sen}\theta - 1}{\cos\theta} - \dfrac{\cos\theta}{\operatorname{sen}\theta - 1}$.

En los Ejercicios 14-16, compruebe la identidad.

14. $\cot^2\alpha(\sec^2\alpha - 1) = 1$

15. $\operatorname{sen}(x + y)\operatorname{sen}(x - y) = \operatorname{sen}^2 x - \operatorname{sen}^2 y$

16. $\operatorname{sen}^2 x\cos^2 x = \frac{1}{8}(1 - \cos 4x)$

En los Ejercicios 17 y 18, encuentre todas las soluciones de la ecuación en el intervalo $[0, 2\pi)$.

17. $2\cos^2\beta - \cos\beta = 0$ **18.** $3\tan\theta - \cot\theta = 0$

19. Use la fórmula cuadrática para resolver la ecuación en el intervalo $[0, 2\pi)$: $\operatorname{sen}^2 x + 2\operatorname{sen}x + 1 = 0$.

20. Dado que $\operatorname{sen}u = \frac{12}{13}$, $\cos v = \frac{3}{5}$ y los ángulos u y v están ambos en el primer cuadrante, encuentre $\tan(u - v)$.

21. Si $\tan\theta = \frac{1}{2}$, encuentre el valor exacto de $\tan(2\theta)$.

22. Si $\tan\theta = \dfrac{4}{3}$, encuentre el valor exacto de $\operatorname{sen}\dfrac{\theta}{2}$.

*En www.CalcChat.com vea las soluciones a los ejercicios impares.

23. Escriba el producto $5 \operatorname{sen} \frac{3\pi}{4} \cdot \cos \frac{7\pi}{4}$ como una suma o diferencia.

24. Escriba $\cos 9x - \cos 7x$ como producto.

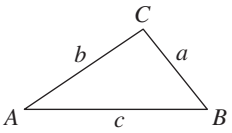


FIGURA PARA EJERCICIOS 25–28

En los Ejercicios 25-28, use la información para resolver el triángulo que se muestra en la figura. Redondee las respuestas a dos lugares decimales.

25. $A = 30°,\ a = 9,\ b = 8$

26. $A = 30°,\ b = 8,\ c = 10$

27. $A = 30°,\ C = 90°,\ b = 10$

28. $a = 4.7,\ b = 8.1,\ c = 10.3$

En los Ejercicios 29 y 30, determine si la ley de los senos o la de los cosenos es necesaria para resolver el triángulo. A continuación, resuelva el triángulo.

29. $A = 45°,\ B = 26°,\ c = 20$

30. $a = 1.2,\ b = 10,\ C = 80°$

31. Dos lados de un triángulo tienen longitudes de 7 pulgadas y 12 pulgadas. El ángulo incluido de ambos mide 99°. Encuentre el área del triángulo.

32. Encuentre el área de un triángulo con lados de longitudes de 30 metros, 41 metros y 45 metros.

33. Escriba el vector $\mathbf{u} = \langle 7, 8 \rangle$ como una combinación lineal de los vectores unitarios canónicos $\mathbf{i}$ y $\mathbf{j}$.

34. Encuentre un vector unitario en la dirección de $\mathbf{v} = \mathbf{i} + \mathbf{j}$.

35. Encuentre $\mathbf{u} \cdot \mathbf{v}$ para $\mathbf{u} = 3\mathbf{i} + 4\mathbf{j}$ y $\mathbf{v} = \mathbf{i} - 2\mathbf{j}$.

36. Encuentre la proyección de $\mathbf{u} = \langle 8, -2 \rangle$ sobre $\mathbf{v} = \langle 1, 5 \rangle$. A continuación escriba $\mathbf{u}$ como la suma de dos vectores ortogonales.

37. Escriba el número complejo $-2 + 2i$ en forma trigonométrica.

38. Encuentre el producto de $[4(\cos 30° + i \operatorname{sen} 30°)][6(\cos 120° + i \operatorname{sen} 120°)]$. Escriba la respuesta en forma estándar.

39. Encuentre las tres raíces cúbicas de 1.

40. Encuentre todas las soluciones de la ecuación $x^5 + 243 = 0$.

41. Un ventilador de techo, con paletas de 21 pulgadas, gira a 63 revoluciones por minuto. Encuentre la rapidez angular del ventilador en radianes por minuto. Encuentre la rapidez lineal de la punta de las paletas en pulgadas por minuto.

42. Encuentre el área del sector circular con radio de 12 yardas y un ángulo central de 105°.

43. Desde un punto a 200 pies de un asta, los ángulos de elevación a la parte inferior y la superior de la bandera son 16° 45′ y 18°, respectivamente. Aproxime la altura de la bandera al pie más cercano.

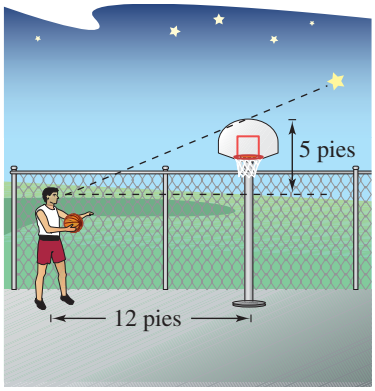


FIGURA PARA EJERCICIO 44

44. Para determinar el ángulo de elevación de una estrella en el cielo, un jugador mira la estrella en la línea de visión con el tablero de un aro de baloncesto que es 5 pies más alto que el jugador (vea figura). Su distancia horizontal desde el tablero es 12 pies. ¿Cuál es el ángulo de elevación de la estrella?

45. Escriba un modelo para una partícula en movimiento armónico simple con un desplazamiento de 4 pulgadas y un periodo de 8 segundos.

46. La rapidez de un avión respecto al aire es 500 kilómetros por hora, con un rumbo de 30°. El viento a la altitud del avión tiene una rapidez de 50 kilómetros por hora con un rumbo de N 60° E. ¿Cuál es la dirección real del avión y cuál es su rapidez respecto al suelo?

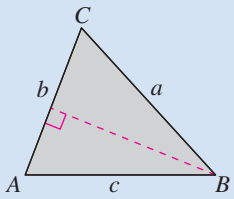
47. Se requiere una fuerza de 85 libras ejercida a un ángulo de 60° sobre la horizontal para deslizar un cuerpo en un piso. El cuerpo es arrastrado 10 pies. Determine el trabajo realizado para deslizar el cuerpo.

Ley de las tangentes

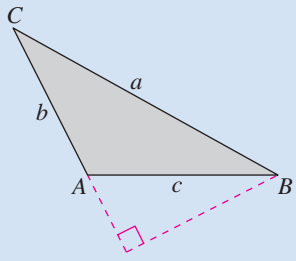
Además de la ley de los senos y la ley de los cosenos, también hay una ley de las tangentes, que fue ideada por Francois Viète (1540-1603). La ley de las tangentes se sigue de la ley de los senos y de las fórmulas de suma a producto para el seno, y está definida como sigue.

$$\frac{a+b}{a-b}=\frac{\tan[(A+B)/2]}{\tan[(A-B)/2]}$$

La ley de las tangentes se puede usar para resolver un triángulo cuando se dan dos lados y el ángulo incluido (LAL). Antes de que se inventaran las calculadoras, se usaba la ley de las tangentes para resolver el caso lado ángulo lado (LAL) en lugar de la ley de los cosenos, porque era más fácil el cálculo con una tabla de valores de tangentes.



A es agudo.

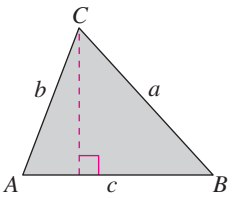


A es obtuso.

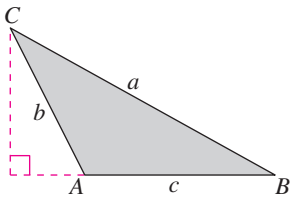
Ley de los senos (p. 428)

Si ABC es un triángulo con lados a, b y c, entonces

$$\frac{a}{\operatorname{sen} A}=\frac{b}{\operatorname{sen} B}=\frac{c}{\operatorname{sen} C}.$$



A es agudo.



A es obtuso.

Demostración

Sea h la altura de cualquiera de los triángulos de la figura de arriba. Entonces, tenemos

$$\operatorname{sen} A=\frac{h}{b} \quad \text{o} \quad h=b \operatorname{sen} A$$

$$\operatorname{sen} B=\frac{h}{a} \quad \text{o} \quad h=a \operatorname{sen} B.$$

Igualando estos dos valores de h, tenemos

$$a \operatorname{sen} B=b \operatorname{sen} A \quad \text{o} \quad \frac{a}{\operatorname{sen} A}=\frac{b}{\operatorname{sen} B}.$$

Nótese que $\operatorname{sen} A \neq 0$ y $\operatorname{sen} B \neq 0$ porque ningún ángulo de un triángulo puede tener una medida de $0°$ o $180°$. De igual modo, construya una altura del vértice B al lado AC (prolongado en el triángulo obtuso), como se muestra a la izquierda. Entonces tenemos:

$$\operatorname{sen} A=\frac{h}{c} \quad \text{o} \quad h=c \operatorname{sen} A$$

$$\operatorname{sen} C=\frac{h}{a} \quad \text{o} \quad h=a \operatorname{sen} C.$$

Igualando estos dos valores de h, tenemos

$$a \operatorname{sen} C=c \operatorname{sen} A \quad \text{o} \quad \frac{a}{\operatorname{sen} A}=\frac{c}{\operatorname{sen} C}.$$

Por la propiedad transitiva de la igualdad sabemos que

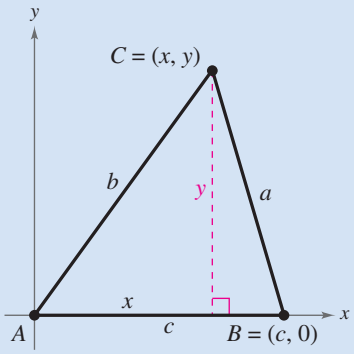
$$\frac{a}{\operatorname{sen} A}=\frac{b}{\operatorname{sen} B}=\frac{c}{\operatorname{sen} C}.$$

Por tanto, queda establecida la ley de los senos.

Ley de los cosenos (p. 437)

Forma estándar	*Forma alternativa*
$a^2 = b^2 + c^2 - 2bc \cos A$	$\cos A = \dfrac{b^2 + c^2 - a^2}{2bc}$
$b^2 = a^2 + c^2 - 2ac \cos B$	$\cos B = \dfrac{a^2 + c^2 - b^2}{2ac}$
$c^2 = a^2 + b^2 - 2ab \cos C$	$\cos C = \dfrac{a^2 + b^2 - c^2}{2ab}$

Demostración



Para demostrar la primera fórmula, considere el triángulo de arriba a la izquierda, que tiene tres ángulos agudos. Observe que el vértice B tiene coordenadas $(c, 0)$. Además, C tiene coordenadas (x, y), donde $x = b \cos A$ y $y = b \operatorname{sen} A$. Como a es la distancia del vértice C al vértice B, se deduce que

$$a = \sqrt{(x - c)^2 + (y - 0)^2}$$ Fórmula de la distancia

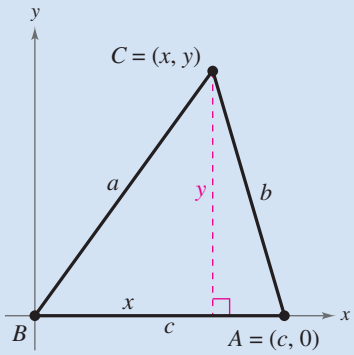
$$a^2 = (x - c)^2 + (y - 0)^2$$ Elevar al cuadrado ambos lados.

$$a^2 = (b \cos A - c)^2 + (b \operatorname{sen} A)^2$$ Sustituir por x y y.

$$a^2 = b^2 \cos^2 A - 2bc \cos A + c^2 + b^2 \operatorname{sen}^2 A$$ Expandir.

$$a^2 = b^2(\operatorname{sen}^2 A + \cos^2 A) + c^2 - 2bc \cos A$$ Factorizar b^2.

$$a^2 = b^2 + c^2 - 2bc \cos A.$$ $\operatorname{sen}^2 A + \cos^2 A = 1$



Para demostrar la segunda fórmula, considere el triángulo de abajo a la izquierda, que también tiene tres ángulos agudos. Observe que A tiene coordenadas $(c, 0)$. Además, C tiene coordenadas (x, y), donde $x = a \cos B$ y $y = a \operatorname{sen} B$. Como b es la distancia del vértice C al vértice A, se deduce que

$$b = \sqrt{(x - c)^2 + (y - 0)^2}$$ Fórmula de la distancia

$$b^2 = (x - c)^2 + (y - 0)^2$$ Elevar al cuadrado ambos lados.

$$b^2 = (a \cos B - c)^2 + (a \operatorname{sen} B)^2$$ Sustituir por x y y.

$$b^2 = a^2 \cos^2 B - 2ac \cos B + c^2 + a^2 \operatorname{sen}^2 B$$ Expandir.

$$b^2 = a^2(\operatorname{sen}^2 B + \cos^2 B) + c^2 - 2ac \cos B$$ Factorizar a^2.

$$b^2 = a^2 + c^2 - 2ac \cos B.$$ $\operatorname{sen}^2 B + \cos^2 B = 1$

Se usa un argumento similar para establecer la tercera fórmula.

Fórmula del área de Herón (p. 440)

Dado cualquier triángulo con longitudes a, b y c, el área del triángulo es

$$\text{Área} = \sqrt{s(s-a)(s-b)(s-c)}$$

donde $s = \dfrac{a+b+c}{2}$.

Demostración

De la Sección 6.1, sabemos que

$$\text{Área} = \frac{1}{2}bc \operatorname{sen} A \qquad \text{Fórmula del área de un triángulo oblicuángulo}$$

$$(\text{Área})^2 = \frac{1}{4}b^2c^2 \operatorname{sen}^2 A \qquad \text{Elevar al cuadrado ambos lados}$$

$$\text{Área} = \sqrt{\frac{1}{4}b^2c^2 \operatorname{sen}^2 A} \qquad \text{Obtener la raíz cuadrada de cada lado.}$$

$$= \sqrt{\frac{1}{4}b^2c^2(1-\cos^2 A)} \qquad \text{Identidad pitagórica}$$

$$= \sqrt{\left[\frac{1}{2}bc(1+\cos A)\right]\left[\frac{1}{2}bc(1-\cos A)\right]}. \qquad \text{Factorizar.}$$

Usando la ley de los cosenos, se puede demostrar que

$$\frac{1}{2}bc(1+\cos A) = \frac{a+b+c}{2} \cdot \frac{-a+b+c}{2}$$

y

$$\frac{1}{2}bc(1-\cos A) = \frac{a-b+c}{2} \cdot \frac{a+b-c}{2}.$$

Si hacemos $s = (a+b+c)/2$, estas dos ecuaciones pueden reescribirse como

$$\frac{1}{2}bc(1+\cos A) = s(s-a)$$

y

$$\frac{1}{2}bc(1-\cos A) = (s-b)(s-c).$$

Al sustituir en la última fórmula para el área, se puede concluir que

$$\text{Área} = \sqrt{s(s-a)(s-b)(s-c)}.$$

Propiedades del producto punto (p. 458)

Sean $\mathbf{u}$, $\mathbf{v}$ y $\mathbf{w}$ vectores en el plano o en el espacio y sea c un escalar.

1. $\mathbf{u} \cdot \mathbf{v} = \mathbf{v} \cdot \mathbf{u}$
2. $\mathbf{0} \cdot \mathbf{v} = 0$
3. $\mathbf{u} \cdot (\mathbf{v} + \mathbf{w}) = \mathbf{u} \cdot \mathbf{v} + \mathbf{u} \cdot \mathbf{w}$
4. $\mathbf{v} \cdot \mathbf{v} = \|\mathbf{v}\|^2$
5. $c(\mathbf{u} \cdot \mathbf{v}) = c\mathbf{u} \cdot \mathbf{v} = \mathbf{u} \cdot c\mathbf{v}$

Demostración

Sea $\mathbf{u} = \langle u_1, u_2 \rangle$, $\mathbf{v} = \langle v_1, v_2 \rangle$, $\mathbf{w} = \langle w_1, w_2 \rangle$, $\mathbf{0} = \langle 0, 0 \rangle$ y sea c un escalar.

1. $\mathbf{u} \cdot \mathbf{v} = u_1v_1 + u_2v_2 = v_1u_1 + v_2u_2 = \mathbf{v} \cdot \mathbf{u}$

2. $\mathbf{0} \cdot \mathbf{v} = 0 \cdot v_1 + 0 \cdot v_2 = 0$

3.
$$\begin{aligned}\mathbf{u} \cdot (\mathbf{v} + \mathbf{w}) &= \mathbf{u} \cdot \langle v_1 + w_1, v_2 + w_2 \rangle \\ &= u_1(v_1 + w_1) + u_2(v_2 + w_2) \\ &= u_1v_1 + u_1w_1 + u_2v_2 + u_2w_2 \\ &= (u_1v_1 + u_2v_2) + (u_1w_1 + u_2w_2) = \mathbf{u} \cdot \mathbf{v} + \mathbf{u} \cdot \mathbf{w}\end{aligned}$$

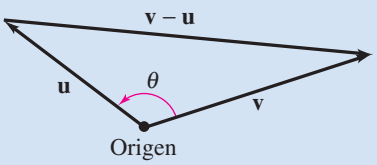
4. $\mathbf{v} \cdot \mathbf{v} = v_1^2 + v_2^2 = \left(\sqrt{v_1^2 + v_2^2}\right)^2 = \|\mathbf{v}\|^2$

5.
$$\begin{aligned}c(\mathbf{u} \cdot \mathbf{v}) &= c(\langle u_1, u_2 \rangle \cdot \langle v_1, v_2 \rangle) \\ &= c(u_1v_1 + u_2v_2) \\ &= (cu_1)v_1 + (cu_2)v_2 \\ &= \langle cu_1, cu_2 \rangle \cdot \langle v_1, v_2 \rangle \\ &= c\mathbf{u} \cdot \mathbf{v}\end{aligned}$$

Ángulo entre dos vectores (p. 459)

Si θ es el ángulo entre dos vectores $\mathbf{u}$ y $\mathbf{v}$ diferentes de cero, entonces $\cos\theta = \dfrac{\mathbf{u} \cdot \mathbf{v}}{\|\mathbf{u}\|\,\|\mathbf{v}\|}$.

Demostración



Considere el triángulo determinado por los vectores $\mathbf{u}$, $\mathbf{v}$ y $\mathbf{v} - \mathbf{u}$, como se muestra en la figura. Por la ley de los cosenos, se puede escribir

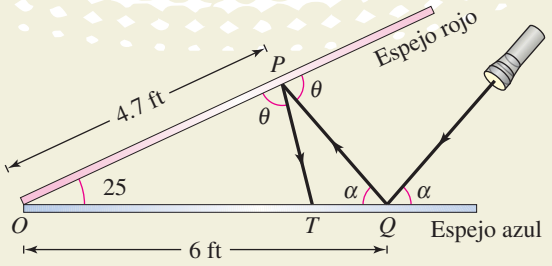
$$\begin{aligned}\|\mathbf{v} - \mathbf{u}\|^2 &= \|\mathbf{u}\|^2 + \|\mathbf{v}\|^2 - 2\|\mathbf{u}\|\,\|\mathbf{v}\| \cos\theta \\ (\mathbf{v} - \mathbf{u}) \cdot (\mathbf{v} - \mathbf{u}) &= \|\mathbf{u}\|^2 + \|\mathbf{v}\|^2 - 2\|\mathbf{u}\|\,\|\mathbf{v}\| \cos\theta \\ (\mathbf{v} - \mathbf{u}) \cdot \mathbf{v} - (\mathbf{v} - \mathbf{u}) \cdot \mathbf{u} &= \|\mathbf{u}\|^2 + \|\mathbf{v}\|^2 - 2\|\mathbf{u}\|\,\|\mathbf{v}\| \cos\theta \\ \mathbf{v} \cdot \mathbf{v} - \mathbf{u} \cdot \mathbf{v} - \mathbf{v} \cdot \mathbf{u} + \mathbf{u} \cdot \mathbf{u} &= \|\mathbf{u}\|^2 + \|\mathbf{v}\|^2 - 2\|\mathbf{u}\|\,\|\mathbf{v}\| \cos\theta \\ \|\mathbf{v}\|^2 - 2\mathbf{u} \cdot \mathbf{v} + \|\mathbf{u}\|^2 &= \|\mathbf{u}\|^2 + \|\mathbf{v}\|^2 - 2\|\mathbf{u}\|\,\|\mathbf{v}\| \cos\theta\end{aligned}$$

$$\cos\theta = \frac{\mathbf{u} \cdot \mathbf{v}}{\|\mathbf{u}\|\,\|\mathbf{v}\|}.$$

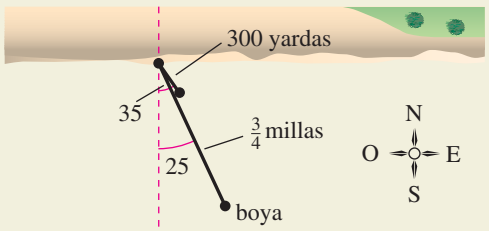
RESOLUCIÓN DE PROBLEMAS

Este conjunto de ejercicios, difíciles y que invitan a meditar, amplía y explora más a fondo los conceptos aprendidos en este capítulo.

1. En la figura, se dirige un haz de luz en el espejo azul, reflejado por el espejo rojo y luego reflejado de nuevo al espejo azul. Encuentre la distancia PT que la luz recorre desde el espejo rojo otra vez al espejo azul.



2. Una atleta de triatlón establece un curso para nadar S 25° E desde un punto en la orilla a una boya que está a $\frac{3}{4}$ de milla de distancia. Después de nadar 300 yardas en una fuerte corriente, la atleta está fuera de curso a un rumbo de S 35° E. Encuentre el rumbo y la distancia que la atleta necesita para corregirlo.



3. Un grupo de excursionistas se pierde en un parque nacional. Dos estaciones de guardas rurales han recibido una señal de SOS de emergencia proveniente del grupo. La estación B está a 75 millas al Este de la estación A. El rumbo de la estación A a la señal es S 60° E y el rumbo de la estación B a la señal es S 75° O.

(a) Trace un diagrama que dé una representación visual del problema.

(b) Encuentre la distancia de cada estación a la señal de SOS.

(c) Un grupo de rescate está en el parque a 20 millas de la estación A a un rumbo de S 80° E. Encuentre la distancia y el rumbo que el grupo de rescate debe recorrer para llegar al grupo de excursionistas perdidos.

4. Una persona está sembrando un terreno triangular. Un lado del terreno mide 52 pies de largo y otro lado mide 46 pies de largo. El ángulo opuesto al lado de 52 pies es 65°.

(a) Trace un diagrama que dé una representación visual de la situación.

(b) ¿Cuál es la longitud del tercer lado del terreno?

(c) Una bolsa de semilla de pasto cubre un área de 50 pies cuadrados. ¿Cuántas bolsas de semilla de pasto se necesitan para cubrir el terreno?

5. Para cada par de vectores, encuentre lo siguiente.

(i) $\|\mathbf{u}\|$ (ii) $\|\mathbf{v}\|$ (iii) $\|\mathbf{u}+\mathbf{v}\|$

(iv) $\left\|\dfrac{\mathbf{u}}{\|\mathbf{u}\|}\right\|$ (v) $\left\|\dfrac{\mathbf{v}}{\|\mathbf{v}\|}\right\|$ (vi) $\left\|\dfrac{\mathbf{u}+\mathbf{v}}{\|\mathbf{u}+\mathbf{v}\|}\right\|$

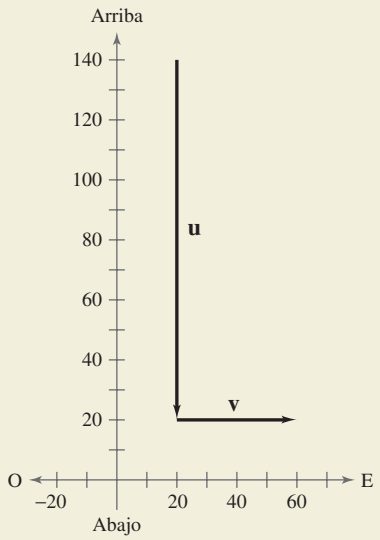
(a) $\mathbf{u} = \langle 1, -1\rangle$, $\mathbf{v} = \langle -1, 2\rangle$

(b) $\mathbf{u} = \langle 0, 1\rangle$, $\mathbf{v} = \langle 3, -3\rangle$

(c) $\mathbf{u} = \left\langle 1, \frac{1}{2}\right\rangle$, $\mathbf{v} = \langle 2, 3\rangle$

(d) $\mathbf{u} = \langle 2, -4\rangle$, $\mathbf{v} = \langle 5, 5\rangle$

6. Un paracaidista cae a una velocidad constante de 120 millas por hora hacia abajo. En la figura, el vector $\mathbf{u}$ representa la velocidad del paracaidista. Un viento constante empuja al paracaidista al Este a 40 millas por hora. El vector $\mathbf{v}$ representa la velocidad del viento.



(a) Escriba los vectores $\mathbf{u}$ y $\mathbf{v}$ en forma de componentes.

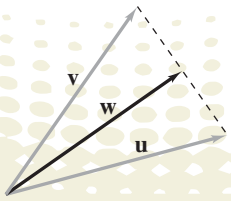
(b) Sea $\mathbf{s} = \mathbf{u} + \mathbf{v}$. Use la figura para trazar $\mathbf{s}$. Para imprimir una copia amplificada de la gráfica, visite el sitio web *www.mathgraphs.com*.

(c) Encuentre la magnitud de $\mathbf{s}$. ¿Qué información da la magnitud acerca de la caída del paracaidista?

(d) Si no hay viento, el paracaidista caería en una trayectoria perpendicular al suelo. ¿A qué ángulo respecto al suelo está la trayectoria del paracaidista, cuando éste es afectado por el viento de 40 millas por hora desde el Oeste?

(e) El paracaidista es desplazado al Oeste a 30 millas por hora. Trace una nueva figura que dé una representación visual del problema y encuentre la nueva velocidad del paracaidista.

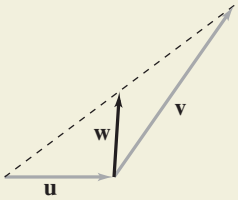
7. Escriba el vector **w** en términos de **u** y **v**, dado que el punto terminal de **w** corta el segmento de recta (vea figura).



8. Demuestre que si **u** es ortogonal a **v** y **w**, entonces **u** es ortogonal a

$c\mathbf{v} + d\mathbf{w}$

para cualesquier escalares c y d (vea figura).



9. Dos fuerzas de la misma magnitud $\mathbf{F}_1$ y $\mathbf{F}_2$ actúan a ángulos θ_1 y θ_2, respectivamente. Use un diagrama para comparar el trabajo realizado por $\mathbf{F}_1$ con el realizado por $\mathbf{F}_2$ al moverse a lo largo del vector PQ si

(a) $\theta_1 = -\theta_2$

(b) $\theta_1 = 60°$ y $\theta_2 = 30°$.

10. Cuatro fuerzas básicas están en acción durante un vuelo: peso, elevación, empuje y resistencia al avance. Para volar por los aires, un cuerpo debe superar su propio *peso*. Para hacer esto, debe crear una fuerza ascendente llamada *sustentación*. Para generar sustentación, es necesario un movimiento hacia adelante llamado *empuje*. El empuje debe ser suficientemente grande para superar la resistencia del aire, que se denomina *resistencia al avance*

Para un avión jet comercial, un rápido ascenso es importante para llevar al máximo la eficiencia porque mejora el rendimiento de un avión a grandes alturas. Además, es necesario pasar sobre obstáculos como son edificios y montañas y para reducir el ruido en zonas residenciales. En el diagrama siguiente, el ángulo θ recibe el nombre de ángulo de ascenso. La rapidez del avión puede estar representada por un vector **v** con una componente vertical $\|\mathbf{v}\|$ sen θ (llamada rapidez de ascenso) y una componente horizontal $\|\mathbf{v}\|$ cos θ, donde $\|\mathbf{v}\|$ es la velocidad del avión.

Cuando despega, un piloto debe decidir cuánto aplicar del empuje a cada componente. Cuanto más empuje aplique a la componente horizontal, más rápidamente ganará velocidad el avión. Cuanto más empuje aplique a la componente vertical, más rápidamente subirá el avión.

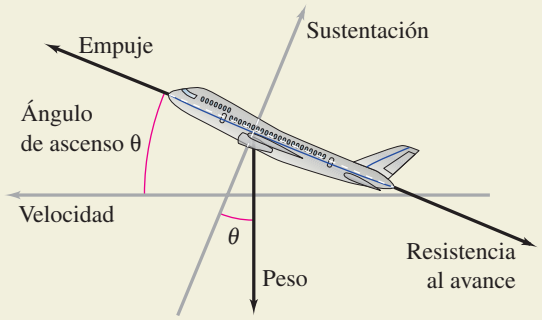


FIGURA PARA EJERCICIO 10

(a) Complete la tabla para un avión que tiene una velocidad de $\|\mathbf{v}\| = 100$ millas por hora.

θ	0.5°	1.0°	1.5°	2.0°	2.5°	3.0°
$\|\mathbf{v}\|$ sen θ						
$\|\mathbf{v}\|$ cos θ						

(b) ¿La velocidad de un avión iguala la suma de las componentes vertical y horizontal de su velocidad? Si no es así, ¿cómo podría hallarse la velocidad de un avión cuyas componentes de velocidad se conocen?

(c) Use el resultado del inciso (b) para hallar la rapidez de un avión con las componentes de velocidad dadas.

(i) $\|\mathbf{v}\|$ sen $\theta = 5.235$ millas por hora
$\|\mathbf{v}\|$ cos $\theta = 149.909$ millas por hora

(ii) $\|\mathbf{v}\|$ sen $\theta = 10.463$ millas por hora
$\|\mathbf{v}\|$ cos $\theta = 149.634$ millas por hora

Sistemas de ecuaciones y desigualdades

7

7.1 Sistemas de ecuaciones lineales y no lineales
7.1 Sistemas lineales de dos variables
7.3 Sistemas lineales de varias variables
7.4 Fracciones parciales
7.5 Sistemas de desigualdades
7.6 Programación lineal

En matemáticas

Se puede usar un sistema de ecuaciones para resolver un problema que contenga dos o más ecuaciones.

En la vida real

Se usan sistemas de ecuaciones y desigualdades para determinar las cantidades correctas para hacer una mezcla ácida, cuánto invertir en diferentes fondos, un punto de equilibrio para un negocio, así como otras numerosas aplicaciones de la vida real. También se usan sistemas de ecuaciones para hallar parábolas de regresión por mínimos cuadrados. Por ejemplo, un equipo de administración de la fauna silvestre puede usar un sistema para modelar las tasas de reproducción de los venados. (Vea el Ejercicio 81, página 528.)

Krzysztof Wiktor/Shutterstock

EN CARRERAS

Hay numerosas carreras que usan sistemas de ecuaciones y desigualdades. A continuación veamos varias de ellas.

- Economista, Ejercicio 72, página 503
- Dietista, Ejemplo 9, página 544
- Inversionista, Ejercicios 53 y 54, página 515
- Promotor de conciertos, Ejercicio 78, página 546

7.1 Sistemas de ecuaciones lineales y no lineales

Lo que debe aprender

- Usar el método de sustitución para resolver sistemas de ecuaciones lineales con dos variables.
- Usar el método de sustitución para resolver sistemas de ecuaciones no lineales con dos variables.
- Usar un procedimiento gráfico para resolver sistemas de ecuaciones con dos variables.
- Usar sistemas de ecuaciones para modelar y resolver problemas de la vida real.

Por qué debe aprenderlo

Las gráficas de sistemas de ecuaciones ayudan a resolver problemas de la vida real. Por ejemplo, en el Ejercicio 75 de la página 503 se puede usar la gráfica de un sistema de ecuaciones para aproximar cuándo el consumo de energía eólica rebasó el de energía solar.

© ML Sinibaldi/Corbis

Método de sustitución

Hasta este punto en el texto, casi todos los problemas han contenido ya sea una función de una variable o una sola ecuación con dos variables. No obstante, numerosos problemas en ciencias, finanzas e ingeniería contienen dos o más ecuaciones con dos o más variables. Para resolver estos problemas es necesario hallar soluciones de un **sistema de ecuaciones**. A continuación veamos un ejemplo de un sistema de dos ecuaciones con dos incógnitas.

$$\begin{cases} 2x + y = 5 & \text{Ecuación 1} \\ 3x - 2y = 4 & \text{Ecuación 2} \end{cases}$$

Una **solución** de este sistema es un par ordenado que satisface cada una de las ecuaciones del sistema. Hallar el conjunto de todas las soluciones es **resolver el sistema de ecuaciones.** Por ejemplo, el par ordenado (2, 1) es una solución de este sistema. Para verificar esto, se puede sustituir el 2 por x y 1 por y en cada ecuación.

Pruebe (2, 1) en la ecuación 1 y en la ecuación 2:

$2x + y = 5$ Escribir la ecuación 1.

$2(2) + 1 \stackrel{?}{=} 5$ Sustituir 2 por x y 1 por y.

$4 + 1 = 5$ La solución se verifica en la ecuación 1. ✓

$3x - 2y = 4$ Escribir la ecuación 2.

$3(2) - 2(1) \stackrel{?}{=} 4$ Sustituir 2 por x y 1 por y.

$6 - 2 = 4$ La solución se verifica en la ecuación 1. ✓

En este capítulo estudiaremos cuatro formas de resolver sistemas de ecuaciones, empezando por el **método de sustitución.**

Metodo	*Sección*	*Tipo de sistema*
1. Sustitución	7.1	Lineal o no lineal, dos variables
2. Método gráfico	7.1	Lineal o no lineal, dos variables
3. Eliminación	7.2	Lineal, dos variables
4. Eliminación gaussiana	7.3	Lineal, tres o más variables

Método de sustitución

1. *Despejar* una de las variables de una de las ecuaciones en términos de la otra.
2. *Sustituir* la expresión hallada en el paso 1 en la otra ecuación para obtener una ecuación con una variable.
3. *Resolver* la ecuación obtenida en el paso 2.
4. *Hacer sustitución inversa* del valor obtenido en el paso 3 en la expresión obtenida en el paso 1 para hallar el valor de la otra variable.
5. *Verificar* que la solución satisfaga cada una de las ecuaciones originales.

Ejemplo 1 Resolver un sistema de ecuaciones por sustitución

Resuelva el sistema de ecuaciones.

$$\begin{cases} x + y = 4 & \text{Ecuación 1} \\ x - y = 2 & \text{Ecuación 2} \end{cases}$$

Solución

Empiece por despejar y de la ecuación 1.

$y = 4 - x$ Despejar y de la ecuación 1.

A continuación, sustituya esta expresión por y en la ecuación 2 y despeje x de la ecuación resultante con una sola variable.

$x - y = 2$ Escribir la ecuación 2.

$x - (4 - x) = 2$ Sustituir $4 - x$ por y.

$x - 4 + x = 2$ Propiedad distributiva

$2x = 6$ Combinar términos semejantes.

$x = 3$ Dividir cada lado entre 2.

Por último, se puede despejar y hacer *sustitución hacia atrás* de $x = 3$ en la ecuación $y = 4 - x$ para obtener

$y = 4 - x$ Escribir la ecuación 1 modificada

$y = 4 - 3$ Sustituir 3 por x

$y = 1.$ Despejar y.

La solución es el par ordenado (3, 1). Se puede verificar esta solución como sigue.

Comprobación

Sustituya (3, 1) en la ecuación 1:

$x + y = 4$ Escribir la ecuación 1.

$3 + 1 \stackrel{?}{=} 4$ Sustituir x y y

$4 = 4$ La solución se verifica en la ecuación 1. ✓

Sustituya (3, 1) en la ecuación 2:

$x - y = 2$ Escribir la ecuación 2.

$3 - 1 \stackrel{?}{=} 2$ Sustituir x y y.

$2 = 2$ La solución es buena, se verifica en la ecuación 2 ✓

Como el par (3, 1) satisface ambas ecuaciones en el sistema, es una solución de éste.

PUNTO *de repaso* Ahora trate de hacer el Ejercicio 11.

El término *sustitución hacia atrás* implica que se debe trabajar *a la inversa*. Primero se despeja una de las variables y, a continuación, se sustituye ese valor en una de las ecuaciones del sistema para hallar el valor de la otra variable.

Ayuda de álgebra

En el apéndice A.5 se pueden repasar las técnicas para resolver diferentes tipos de ecuaciones.

ATENCIÓN

Dado que se requieren muchos pasos para resolver un sistema de ecuaciones es muy fácil cometer errores en aritmética. Por tanto, siempre debe comprobar su solución al sustituirla en *cada una* de las ecuaciones del sistema original.

Ejemplo 2 Resolver un sistema por sustitución

Un total de \$12 000 se invierten en dos fondos que pagan 5% y 3% de interés simple. (Recuerde que la fórmula para interés simple es $I = Prt$, donde P es el capital, r es la tasa anual de interés y t es el tiempo.) El interés anual es \$500. ¿Cuánto se invierte a cada una de las tasas?

Solución

Modelo verbal:

5% fondo + 3% fondo = Inversión total

5% interés + 3% Interés = Interés total

Leyendas:

Cantidad en fondo al 5% $= x$ (dólares)
Interés para fondo al 5% $= 0.05x$ (dólares)
Cantidad en fondo al 3% $= y$ (dólares)
Interés para fondo al 3% $= 0.03y$ (dólares)
Inversión total $= 12\,000$ (dólares)
Interés total $= 500$ (dólares)

Sistema:

$$\begin{cases} x + y = 12\,000 & \text{Ecuación 1} \\ 0.05x + 0.03y = 500 & \text{Ecuación 2} \end{cases}$$

Para empezar, es conveniente multiplicar por 100 cada uno de los lados (miembros) de la ecuación 2. Esto elimina la necesidad de trabajar con decimales.

$100(0.05x + 0.03y) = 100(500)$ Multiplicar cada lado por 100.

$5x + 3y = 50\,000$ Ecuación 2 modificada

Para resolver este sistema, se puede despejar x de la ecuación 1.

$x = 12\,000 - y$ Ecuación 1 revisada

A continuación, sustituya esta expresión por x en la ecuación 2 modificada y despeje y de la ecuación resultante.

$5x + 3y = 50\,000$ Escribir la ecuación 2 modificada.

$5(12\,000 - y) + 3y = 50\,000$ Sustituir $12\,000 - y$ por x.

$60\,000 - 5y + 3y = 50\,000$ Propiedad distributiva

$-2y = -10\,000$ Combinar términos semejantes.

$y = 5000$ Dividir cada lado entre -2.

A continuación, haga sustitución inversa del valor $y = 5000$ para despejar x.

$x = 12\,000 - y$ Escribir la ecuación 1 modificada

$x = 12\,000 - 5000$ Sustituir 5000 por y.

$x = 7000$ Simplificar

La solución es (7000, 5000). Entonces, \$7000 se invierten al 5% y \$5000 se invierten al 3%. Compruebe esto en el sistema original.

PUNTO *de repaso* Ahora trate de hacer el Ejercicio 25.

Tip de estudio

Cuando utilice el método de sustitución, no importa cuál variable escoja para despejar primero, ya sea que primero despeje y o primero x, siempre obtendrá la misma solución. Cuando haga su elección, debe escoger la variable y ecuación con la que sea más fácil trabajar. Por citar un caso, en el Ejemplo 2, despejar x en la ecuación 1 es más fácil que despejar x en la ecuación 2.

TECNOLOGÍA

Una forma de verificar las respuestas que obtenga en esta sección es usar una calculadora de gráficas. Por ejemplo, ingrese las dos ecuaciones del Ejemplo 2

$$y_1 = 12\,000 - x$$

$$y_2 = \frac{500 - 0.05x}{0.03}$$

y encuentre una pantalla apropiada que muestre dónde se cortan las dos rectas. Luego use el comando *intersect* o los comandos *zoom* y *trace* para hallar el punto de intersección. ¿Este punto coincide con la solución obtenida a la derecha?

Sistemas de ecuaciones no lineales

Las ecuaciones de los Ejemplos 1 y 2 son lineales. El método de sustitución también se puede usar para resolver sistemas en los que una de las ecuaciones, o las dos, son no lineales.

Ejemplo 3 Sustitución: caso de dos soluciones

Resuelva el sistema de ecuaciones.

$$\begin{cases} 3x^2 + 4x - y = 7 & \text{Ecuación 1} \\ 2x - y = -1 & \text{Ecuación 2} \end{cases}$$

Solución

Empiece por despejar y de la ecuación 2 para obtener $y = 2x + 1$. A continuación, sustituya esta expresión por y en la ecuación 1 y despeje x.

$$\begin{aligned} 3x^2 + 4x - (2x + 1) &= 7 && \text{Sustituir } 2x + 1 \text{ por } y \text{ en la ecuación 1.} \\ 3x^2 + 2x - 1 &= 7 && \text{Simplificar} \\ 3x^2 + 2x - 8 &= 0 && \text{Escribir en forma general} \\ (3x - 4)(x + 2) &= 0 && \text{Factorizar} \\ x &= \frac{4}{3}, -2 && \text{Despejar } x. \end{aligned}$$

La sustitución hacia atrás de estos valores de x para despejar los correspondientes valores de y produce las soluciones $\left(\frac{4}{3}, \frac{11}{3}\right)$ y $(-2, -3)$. Compruébelo en el sistema original.

PUNTO *de repaso* Ahora trate de hacer el Ejercicio 31.

Ayuda de álgebra

En el apéndice A.3 se pueden repasar las técnicas de factorización.

Cuando use el método de sustitución podría hallar una ecuación que no tenga solución, como se ilustra en el Ejemplo 4.

Ejemplo 4 Sustitución: caso sin solución real

Resuelva el sistema de ecuaciones.

$$\begin{cases} -x + y = 4 & \text{Ecuación 1} \\ x^2 + y = 3 & \text{Ecuación 2} \end{cases}$$

Solución

Empiece por despejar y de la ecuación 1 para obtener $y = x + 4$. A continuación, sustituya esta expresión por y en la ecuación 2 y despeje x.

$$\begin{aligned} x^2 + (x + 4) &= 3 && \text{Sustituir } x + 4 \text{ por } y \text{ en la ecuación 2.} \\ x^2 + x + 1 &= 0 && \text{Simplificar} \\ x &= \frac{-1 \pm \sqrt{-3}}{2} && \text{Usar la fórmula cuadrática.} \end{aligned}$$

Como el discriminante es negativo, la ecuación $x^2 + x + 1 = 0$ no tiene solución (real). Por tanto, el sistema original no tiene solución (real).

PUNTO *de repaso* Ahora trate de hacer el Ejercicio 33.

TECNOLOGÍA

Casi todas las calculadoras de gráficas tienen funciones ya integradas que aproximan el(los) punto(s) de intersección de dos gráficas. Típicamente, se deben ingresar las ecuaciones de las gráficas y visualmente localizar un punto de intersección antes de usar el comando *intersect*.

Use este comando para hallar los puntos de intersección de las gráficas de las Figuras 7.1 a 7.3. Asegúrese de ajustar la pantalla de modo que vea todos los puntos de intersección.

Ayuda de álgebra

En la Sección 1.2 se pueden repasar las técnicas para graficar ecuaciones.

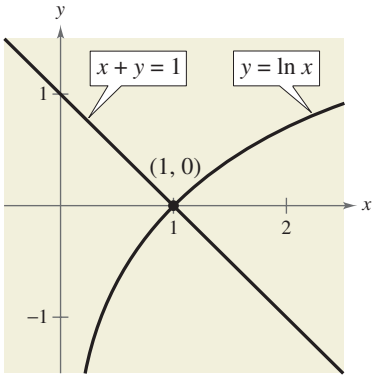
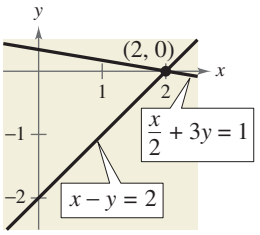


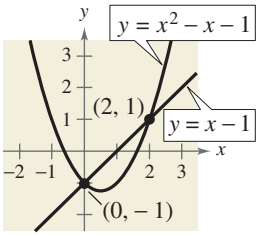
FIGURA 7.4

Procedimiento gráfico para hallar soluciones

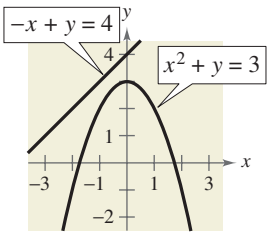
En los Ejemplos 2, 3 y 4 se puede ver que un sistema de dos ecuaciones con dos incógnitas puede tener exactamente una solución, más de una solución, o puede no tener solución. Con el uso de un **método gráfico** se puede tener idea del número de soluciones y el lugar (o lugares) de la solución (o soluciones) de un sistema de ecuaciones si se grafica cada una de las ecuaciones en el mismo plano de coordenadas. Las soluciones del sistema corresponden a los **puntos de intersección** de las gráficas. Por ejemplo, las dos ecuaciones de la Figura 7.1 se grafican como dos rectas con un *solo punto* de intersección; las dos ecuaciones de la Figura 7.2 se grafican como una parábola y una recta con *dos puntos* de intersección; y las dos ecuaciones de la Figura 7.3 se grafican como una recta y una parábola que no *tienen puntos* de intersección.



Un punto de intersección
FIGURA 7.1



Dos punto de intersección
FIGURA 7.2



No hay puntos de intersección
FIGURA 7.3

Ejemplo 5 Resolver gráficamente un sistema de ecuaciones

Resuelva el sistema de ecuaciones.

$$\begin{cases} y = \ln x & \text{Ecuación 1} \\ x + y = 1 & \text{Ecuación 2} \end{cases}$$

Solución

Trace las gráficas de las dos ecuaciones. De las gráficas de estas ecuaciones, es evidente que hay sólo un punto de intersección: (1, 0) (vea Figura 7.4). Se puede verificar esta solución de la siguiente manera.

Pruebe (1, 0) en la ecuación 1:

$y = \ln x$ Escribir la ecuación 1.

$0 = \ln 1$ Sustituir x y y.

$0 = 0$ La solución se verifica en la ecuación 1. ✓

Pruebe (1, 0) en la ecuación 2:

$x + y = 1$ Escribir la ecuación 2.

$1 + 0 = 1$ Sustituir x y y.

$1 = 1$ La solución se verifica en la ecuación 2 ✓

PUNTO *de repaso* Ahora trate de hacer el Ejercicio 39.

El Ejemplo 5 muestra el valor de un procedimiento gráfico para resolver sistemas de ecuaciones con dos variables. Observe lo que pasaría si tratáramos sólo el método de sustitución en el Ejemplo 5. Obtendríamos la ecuación $x + \ln x = 1$. Sería difícil despejar x de esta ecuación usando técnicas algebraicas normales.

Aplicaciones

El costo total C de producir x unidades de un producto por lo general tiene dos componentes: el costo inicial y el costo por unidad. Cuando se han vendido suficientes unidades de modo que el ingreso total R es igual al costo total C, se dice que las ventas han llegado al **punto de equilibrio.** Encontrará que el punto de equilibrio corresponde al punto de la intersección de las curvas de costo e ingresos.

Ejemplo 6 Analizar el punto de equilibrio

Una compañía fabricante de calzado invierte \$300 000 en equipo para producir una nueva línea de calzado para atletismo. Cada par de este calzado cuesta \$5 para producirse y se vende en \$60. ¿Cuántos pares de zapatos deben venderse para que el negocio llegue a su punto de equilibrio?

Solución algebraica

El costo total de producir x unidades es

$$\text{Costo total} = \text{Costo por unidad} \cdot \text{Número de unidades} + \text{Costo inicial}$$

$$C = 5x + 300\,000. \qquad \text{Ecuación 1}$$

El ingreso obtenido por vender x unidades es

$$\text{Ingreso total} = \text{Precio por unidad} \cdot \text{Número de unidades}$$

$$R = 60x. \qquad \text{Ecuación 2}$$

Como el punto de equilibrio ocurre cuando $R = C$, tenemos que $C = 60x$, y el sistema de ecuaciones a resolver es

$$\begin{cases} C = 5x + 300\,000 \\ C = 60x \end{cases}.$$

Resuelva por sustitución.

$60x = 5x + 300\,000$ Sustituir $60x$ por C en la ecuación 1.

$55x = 300\,000$ Restar $5x$ de cada lado.

$x \approx 5455$ Dividir cada lado entre 55.

Entonces, la compañía debe vender unos 5455 pares de zapatos para alcanzar el punto de equilibrio.

PUNTO *de repaso* Ahora trate de hacer el Ejercicio 67.

Solución gráfica

El costo total de producir x unidades es

$$\text{Costo total} = \text{Costo por unidad} \cdot \text{Número de unidades} + \text{Costo inicial}$$

$$C = 5x + 300\,000. \qquad \text{Ecuación 1}$$

El ingreso obtenido por vender x unidades es

$$\text{Ingreso total} = \text{Precio por unidad} \cdot \text{Número de unidades}$$

$$R = 60x. \qquad \text{Ecuación 2}$$

Como el punto de equilibrio ocurre cuando $R = C$, tenemos $C = 60x$, y el sistema de ecuaciones a resolver es

$$\begin{cases} C = 5x + 300\,000 \\ C = 60x \end{cases}.$$

Use una calculadora de gráficas para graficar tanto $y_1 = 5x + 300\,000$ como $y_2 = 60x$ en la misma pantalla. Use el comando *intersect* o los comandos *zoom* y *trace* de la calculadora para aproximar el punto de intersección de las gráficas. El punto de intersección (punto de equilibrio) se presenta en $x \approx 5455$, como se ve en la Figura 7.5 Entonces, la compañía debe vender unos 5455 pares de zapatos para alcanzar el punto de equilibrio.

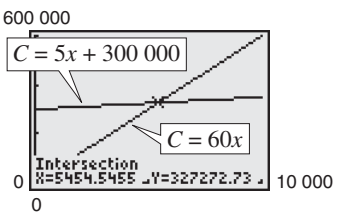


FIGURA 7.5

Otra forma de ver la solución del Ejemplo 6 es considerar la función de utilidad

$$P = R - C.$$

El punto de equilibrio se presenta cuando la utilidad es 0, que es lo mismo que decir que $R = C$.

Ejemplo 7 Venta de boletos para el cine

Las ventas semanales de boletos para una nueva película de comedia disminuían cada semana. Al mismo tiempo, las ventas semanales de boletos para una nueva película de drama aumentaban cada semana. Los modelos que aproximan las ventas semanales S de boletos (en millones de dólares) para cada película son

$$\begin{cases} S = 60 - 8x & \text{Comedia} \\ S = 10 + 4.5x & \text{Drama} \end{cases}$$

donde x representa el número de semanas que cada película estaba en cines, con $x = 0$ correspondiente a las ventas de boletos durante el fin de semana de apertura. ¿Después de cuántas semanas serán iguales las ventas de boletos para las dos películas?

Solución algebraica

Como de la segunda ecuación ya se ha despejado S en términos de x, sustituya este valor en la primera ecuación y despeje x, como sigue.

$$10 + 4.5x = 60 - 8x \quad \text{Sustituir } S \text{ en la ecuación 1.}$$
$$4.5x + 8x = 60 - 10 \quad \text{Sumar } 8x \text{ y } -10 \text{ a cada lado.}$$
$$12.5x = 50 \quad \text{Combinar términos semejantes.}$$
$$x = 4 \quad \text{Dividir cada lado entre } 12.5.$$

Por tanto, las ventas semanales de boletos para las dos películas serán iguales después de 4 semanas.

PUNTO *de repaso* Ahora trate de hacer el Ejercicio 69.

Solución numérica

Se puede crear una tabla de valores para cada modelo para determinar cuándo las ventas de boletas para las dos películas serán iguales.

Número de semanas, x	0	1	2	3	4	5	6
Ventas, S (comedia)	60	52	44	36	28	20	12
Ventas , S (drama)	10	14.5	19	23.5	28	32.5	37

Por tanto, en esta tabla se puede ver que las ventas semanales de boletos para las dos películas serán iguales después de 4 semanas.

Discusión en clase

Interpretación de puntos de intersección Una persona planea rentar un camión de 14 pies para una mudanza local de dos días. En la agencia A de renta de camiones, la persona renta un camión en \$29.95 al día más \$0.49 por milla. En la agencia B, la persona renta un camión en \$50 al día más \$0.25 por milla.

a. Escriba una ecuación de costo total en términos de x y de y para el costo total de rentar el camión en cada agencia.

b. Use una calculadora de gráficas para graficar las dos ecuaciones en la misma pantalla y hallar el punto de intersección. Interprete el significado de ese punto en el contexto del problema.

c. ¿Cuál agencia debe escoger la persona si piensa viajar un total de 100 millas durante la mudanza de dos días? ¿Por qué?

d. ¿Cómo cambia la situación si la persona piensa viajar 200 millas durante la mudanza de dos días

7.1 EJERCICIOS

En www.CalcChat.com vea las soluciones a los ejercicios impares.

VOCABULARIO: Llene los espacios en blanco.

1. Un conjunto de dos o más ecuaciones con dos o más variables se denomina _____ de _____.
2. Una _____ de un sistema de ecuaciones es un par ordenado que satisface cada ecuación del sistema.
3. Hallar el conjunto de todas las soluciones de un sistema de ecuaciones se denomina _____ el sistema de ecuaciones.
4. El primer paso para resolver un sistema de ecuaciones por el método de _____ es despejar una de las variables de una de las ecuaciones en términos de la otra variable.
5. Gráficamente, la solución de un sistema de dos ecuaciones es el _____ de _____ de las gráficas de las dos ecuaciones.
6. En aplicaciones básicas, el punto en el que el ingreso es igual a los costos se llama punto de _____.

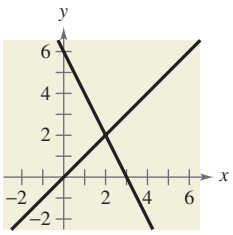
HABILIDADES Y APLICACIONES

En los Ejercicios 7-10, determine si cada par ordenado es una solución del sistema de ecuaciones.

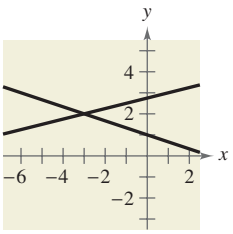
7. $\begin{cases} 2x - y = 4 \\ 8x + y = -9 \end{cases}$ (a) $(0, -4)$ (b) $(-2, 7)$ (c) $\left(\frac{3}{2}, -1\right)$ (d) $\left(-\frac{1}{2}, -5\right)$
8. $\begin{cases} 4x^2 + y = 3 \\ -x - y = 11 \end{cases}$ (a) $(2, -13)$ (b) $(2, -9)$ (c) $\left(-\frac{3}{2}, -\frac{31}{3}\right)$ (d) $\left(-\frac{7}{4}, -\frac{37}{4}\right)$
9. $\begin{cases} y = -4e^x \\ 7x - y = 4 \end{cases}$ (a) $(-4, 0)$ (b) $(0, -4)$ (c) $(0, -2)$ (d) $(-1, -3)$
10. $\begin{cases} -\log x + 3 = y \\ \frac{1}{9}x + y = \frac{28}{9} \end{cases}$ (a) $\left(9, \frac{37}{9}\right)$ (b) $(10, 2)$ (c) $(1, 3)$ (d) $(2, 4)$

En los Ejercicios 11-20, resuelva el sistema por el método de sustitución. Verifique su(s) solución(es) gráficamente.

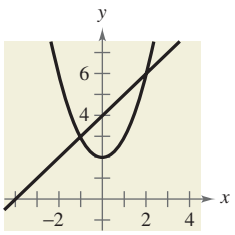
11. $\begin{cases} 2x + y = 6 \\ -x + y = 0 \end{cases}$



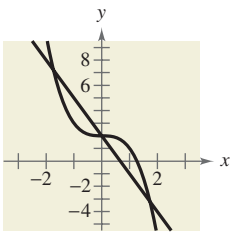
12. $\begin{cases} x - 4y = -11 \\ x + 3y = 3 \end{cases}$



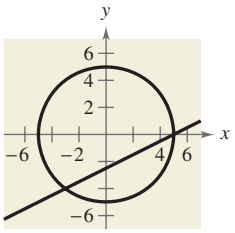
13. $\begin{cases} x - y = -4 \\ x^2 - y = -2 \end{cases}$



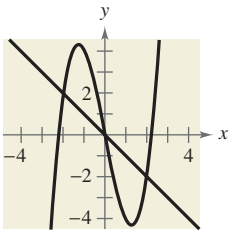
14. $\begin{cases} 3x + y = 2 \\ x^3 - 2 + y = 0 \end{cases}$



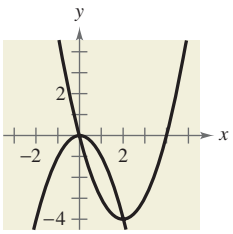
15. $\begin{cases} -\frac{1}{2}x + y = -\frac{5}{2} \\ x^2 + y^2 = 25 \end{cases}$



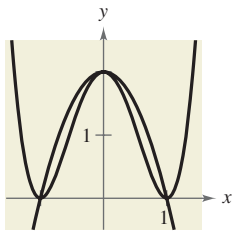
16. $\begin{cases} x + y = 0 \\ x^3 - 5x - y = 0 \end{cases}$



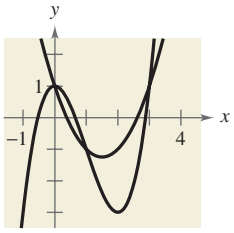
17. $\begin{cases} x^2 + y = 0 \\ x^2 - 4x - y = 0 \end{cases}$



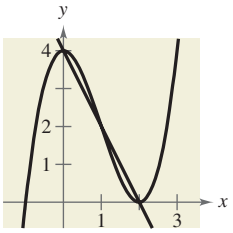
18. $\begin{cases} y = -2x^2 + 2 \\ y = 2(x^4 - 2x^2 + 1) \end{cases}$



19. $\begin{cases} y = x^3 - 3x^2 + 1 \\ y = x^2 - 3x + 1 \end{cases}$



20. $\begin{cases} y = x^3 - 3x^2 + 4 \\ y = -2x + 4 \end{cases}$



En los Ejercicios 21-34, resuelva el sistema por el método de sustitución.

21. $\begin{cases} x - y = 2 \\ 6x - 5y = 16 \end{cases}$
22. $\begin{cases} x + 4y = 3 \\ 2x - 7y = -24 \end{cases}$
23. $\begin{cases} 2x - y + 2 = 0 \\ 4x + y - 5 = 0 \end{cases}$
24. $\begin{cases} 6x - 3y - 4 = 0 \\ x + 2y - 4 = 0 \end{cases}$

25. $\begin{cases} 1.5x + 0.8y = 2.3 \\ 0.3x - 0.2y = 0.1 \end{cases}$

26. $\begin{cases} 0.5x + 3.2y = 9.0 \\ 0.2x - 1.6y = -3.6 \end{cases}$

27. $\begin{cases} \frac{1}{5}x + \frac{1}{2}y = 8 \\ x + y = 20 \end{cases}$

28. $\begin{cases} \frac{1}{2}x + \frac{3}{4}y = 10 \\ \frac{3}{4}x - y = 4 \end{cases}$

29. $\begin{cases} 6x + 5y = -3 \\ -x - \frac{5}{6}y = -7 \end{cases}$

30. $\begin{cases} -\frac{2}{3}x + y = 2 \\ 2x - 3y = 6 \end{cases}$

31. $\begin{cases} x^2 - y = 0 \\ 2x + y = 0 \end{cases}$

32. $\begin{cases} x - 2y = 0 \\ 3x - y^2 = 0 \end{cases}$

33. $\begin{cases} x - y = -1 \\ x^2 - y = -4 \end{cases}$

34. $\begin{cases} y = -x \\ y = x^3 + 3x^2 + 2x \end{cases}$

En los Ejercicios 35-48, resuelva gráficamente el sistema.

35. $\begin{cases} -x + 2y = -2 \\ 3x + y = 20 \end{cases}$

36. $\begin{cases} x + y = 0 \\ 3x - 2y = 5 \end{cases}$

37. $\begin{cases} x - 3y = -3 \\ 5x + 3y = -6 \end{cases}$

38. $\begin{cases} -x + 2y = -7 \\ x - y = 2 \end{cases}$

39. $\begin{cases} x + y = 4 \\ x^2 + y^2 - 4x = 0 \end{cases}$

40. $\begin{cases} -x + y = 3 \\ x^2 - 6x - 27 + y^2 = 0 \end{cases}$

41. $\begin{cases} x - y + 3 = 0 \\ x^2 - 4x + 7 = y \end{cases}$

42. $\begin{cases} y^2 - 4x + 11 = 0 \\ -\frac{1}{2}x + y = -\frac{1}{2} \end{cases}$

43. $\begin{cases} 7x + 8y = 24 \\ x - 8y = 8 \end{cases}$

44. $\begin{cases} x - y = 0 \\ 5x - 2y = 6 \end{cases}$

45. $\begin{cases} 3x - 2y = 0 \\ x^2 - y^2 = 4 \end{cases}$

46. $\begin{cases} 2x - y + 3 = 0 \\ x^2 + y^2 - 4x = 0 \end{cases}$

47. $\begin{cases} x^2 + y^2 = 25 \\ 3x^2 - 16y = 0 \end{cases}$

48. $\begin{cases} x^2 + y^2 = 25 \\ (x - 8)^2 + y^2 = 41 \end{cases}$

En los Ejercicios 49-54, use una calculadora de gráficas para resolver el sistema de ecuaciones. Encuentre la(s) solución(es) precisas a dos lugares decimales.

49. $\begin{cases} y = e^x \\ x - y + 1 = 0 \end{cases}$

50. $\begin{cases} y = -4e^{-x} \\ y + 3x + 8 = 0 \end{cases}$

51. $\begin{cases} x + 2y = 8 \\ y = \log_2 x \end{cases}$

52. $\begin{cases} y + 2 = \ln(x - 1) \\ 3y + 2x = 9 \end{cases}$

53. $\begin{cases} x^2 + y^2 = 169 \\ x^2 - 8y = 104 \end{cases}$

54. $\begin{cases} x^2 + y^2 = 4 \\ 2x^2 - y = 2 \end{cases}$

En los Ejercicios 55–64, resuelva gráfica o algebraicamente el sistema. Explique por qué escogió ese método.

55. $\begin{cases} y = 2x \\ y = x^2 + 1 \end{cases}$

56. $\begin{cases} x^2 + y^2 = 25 \\ 2x + y = 10 \end{cases}$

57. $\begin{cases} x - 2y = 4 \\ x^2 - y = 0 \end{cases}$

58. $\begin{cases} y = (x + 1)^3 \\ y = \sqrt{x - 1} \end{cases}$

59. $\begin{cases} y - e^{-x} = 1 \\ y - \ln x = 3 \end{cases}$

60. $\begin{cases} x^2 + y = 4 \\ e^x - y = 0 \end{cases}$

61. $\begin{cases} y = x^4 - 2x^2 + 1 \\ y = 1 - x^2 \end{cases}$

62. $\begin{cases} y = x^3 - 2x^2 + x - 1 \\ y = -x^2 + 3x - 1 \end{cases}$

63. $\begin{cases} xy - 1 = 0 \\ 2x - 4y + 7 = 0 \end{cases}$

64. $\begin{cases} x - 2y = 1 \\ y = \sqrt{x - 1} \end{cases}$

ANÁLISIS DE EQUILIBRIO En los Ejercicios 65 y 66, encuentre las ventas necesarias para el equilibrio ($R = C$) para el costo C de producir x unidades y el ingreso R obtenido por vender x unidades. (Redondee a la unidad entera más cercana.)

65. $C = 8650x + 250\,000, \quad R = 9950x$

66. $C = 5.5\sqrt{x} + 10\,000, \quad R = 3.29x$

67. ANÁLISIS DE EQUILIBRIO Una pequeña compañía fabricante de software invierte \$25 000 para producir un paquete de software que se venderá en \$69.95. Cada unidad tiene un costo de producción de \$45.25.

(a) ¿Cuántas unidades deben ser vendidas para alcanzar el punto de equilibrio?

(b) ¿Cuántas unidades deben ser vendidas para obtener una utilidad de \$100 000?

68. ANÁLISIS DE EQUILIBRIO Un pequeño restaurante de comida rápida invierte \$10 000 para producir un nuevo alimento que se venderá en \$3.99. Cada uno de estos alimentos tiene un costo de producción de \$1.90.

(a) ¿Cuántas unidades deben ser vendidas para alcanzar el punto de equilibrio?

(b) ¿Cuántas unidades deben ser vendidas para obtener una utilidad de \$12 000?

69. RENTA DE PELÍCULAS EN DVD Las rentas semanales del DVD de una película de dibujos animados de estreno reciente disminuían cada semana en una tienda local de videos. Al mismo tiempo, las rentas semanales de un DVD de estreno reciente de una película de terror aumentaban cada semana. Los modelos que aproximan las rentas semanales R de cada uno de estos DVD son

$$\begin{cases} R = 360 - 24x & \text{Película animada} \\ R = 24 + 18x & \text{Película de terror} \end{cases}$$

donde x representa el número de semanas que cada DVD estuvo en la tienda, con $x = 1$ correspondiente a la primera semana.

(a) ¿Después de cuántas semanas serán iguales las rentas para las dos películas?

(b) Use una tabla para resolver numéricamente el sistema de ecuaciones. Compare su resultado con el del inciso (a).

70. VENTAS Las ventas semanales totales de un aparato portátil reproductor (PMP) recién puesto a la venta aumentaban cada semana. Al mismo tiempo, las ventas semanales totales de otro aparato (PMP) recién puesto a la venta disminuían cada semana. Los modelos que aproximan las ventas semanales totales S (en miles de unidades) de cada PMP son

$$\begin{cases} S = 15x + 50 & \text{PMP 1} \\ S = -20x + 190 & \text{PMP 2} \end{cases}$$

donde x representa el número de semanas que cada PMP estaba en tiendas, con $x = 0$ correspondiente a las ventas del PMP el día que se ponía a la venta.

(a) ¿Después de cuántas semanas serán iguales las ventas de los dos PMP?

(b) Use una tabla para resolver numéricamente el sistema de ecuaciones. Compare su resultado con el del inciso (a).

71. SELECCIÓN DE DOS TRABAJOS A usted le ofrecen dos trabajos de venta de suministros para dentistas. Una compañía ofrece una comisión directa simple de 6% sobre ventas. La otra compañía ofrece un salario de $500 por semana más 3% sobre ventas. ¿Cuánto tendría usted que vender en una semana para hacer que la oferta de comisión simple sea mejor?

72. OFERTA Y DEMANDA Las curvas de oferta y demanda de un negocio que se dedica al trigo son

Oferta: $p = 1.45 + 0.00014x^2$

Demanda: $p = (2.388 - 0.007x)^2$

donde p es el precio en dólares por búshels y x es la cantidad de búshels por día. Use una calculadora de gráficas para graficar las ecuaciones de oferta y demanda y encuentre el equilibrio de mercado. (El equilibrio del mercado es el punto de intersección de las gráficas para $x > 0$.)

73. CARTERA DE INVERSIONES Un total de $25 000 se invierte en dos fondos que pagan 6% y 8.5% de interés simple. (La inversión a 6% tiene un menor riesgo.) El inversionista desea un ingreso anual de intereses de $2000 de las dos inversiones.

(a) Escriba un sistema de ecuaciones en el que una ecuación represente la cantidad total invertida y la otra los requeridos $2000 en intereses. Represente con x y y las cantidades invertidas a 6% y 8.5%, respectivamente.

(b) Use una calculadora de gráficas para graficar las dos ecuaciones en la misma pantalla. Cuando aumenta la cantidad invertida a 6%, ¿cómo cambia la invertida a 8.5%? ¿Cómo cambia el ingreso por la cantidad de interés? Explique

(c) ¿Qué cantidad debe invertirse a 6% para satisfacer el requisito de $2000 por año en intereses?

74. VOLUMEN DE TRONCOS A usted le ofrecen dos reglas diferentes para estimar el número de pies de madera en un tronco de 16 pies. (Un pie de madera es una unidad de medida de madera igual a una tabla de 1 pie cuadrado y 1 pulgada de grueso.) La primera *regla es la de Doyle del tronco* y está modelada por $V_1 = (D - 4)^2$, $5 \le D \le 40$, y la otra es la *regla de Scribner del tronco* y está modelada por $V_2 = 0.79D^2 - 2D - 4$, $5 \le D \le 40$, donde D es el diámetro (en pulgadas) del tronco y V es su volumen (en pies de madera).

(a) Use una calculadora de gráficas para graficar las dos reglas del tronco en la misma pantalla.

(b) ¿Para qué diámetro concuerdan las dos escalas?

(c) Usted vende troncos grandes por pies de madera. ¿Cuál escala usaría? Explique su razonamiento.

75. ANÁLISIS DE DATOS: ENERGÍA RENOVABLE La tabla siguiente muestra el consumo C (en billones de Btu) de energía solar y energía eólica en Estados Unidos, de 1998 a 2006. (Fuente: Energy Information Administration)

Año	Solar, C	Eólica, C
1998	70	31
1999	69	46
2000	66	57
2001	65	70
2002	64	105
2003	64	115
2004	65	142
2005	66	178
2006	72	264

(a) Use el comando *regression* de una calculadora de gráficas para hallar un modelo cúbico para los datos de consumo de energía solar, así como un modelo cuadrático para los datos de energía eólica. Con t represente el año, con $t = 8$ para 1998.

(b) Use una calculadora de gráficas para graficar los datos y los dos modelos en la misma pantalla.

(c) Use la gráfica del inciso (b) para aproximar el punto de intersección de las gráficas de los modelos. Interprete su respuesta en el contexto del problema.

(d) Describa el comportamiento de cada modelo. ¿Piensa usted que los modelos se pueden usar para pronosticar el consumo de energía solar y eólica en Estados Unidos para años futuros? Explique.

(e) Use la biblioteca de su escuela, internet o alguna otra fuente de consulta para buscar las ventajas y desventajas de usar energía renovable.

76. ANÁLISIS DE DATOS: POBLACIÓN La tabla siguiente muestra las poblaciones P (en millones) de Georgia, Nueva Jersey y Carolina del Norte, de 2002 a 2007. (Fuente: U.S. Census Bureau)

Año	Georgia, G	Nueva Jersey, J	Carolina del Norte
2002	8.59	8.56	8.32
2003	8.74	8.61	8.42
2004	8.92	8.64	8.54
2005	9.11	8.66	8.68
2006	9.34	8.67	8.87
2007	9.55	8.69	9.06

(a) Use el comando *regression* de una calculadora de gráficas para hallar modelos lineales para cada conjunto de datos. Con t represente el año, con $t = 2$ correspondiente a 2002.

(b) Use una calculadora de gráficas para graficar los datos y los modelos en la misma pantalla.

(c) Use la gráfica del inciso (b) para aproximar cualesquier puntos de intersección de las gráficas de los modelos. Interprete esos puntos en el contexto del problema.

(d) Verifique algebraicamente sus respuestas al inciso (c).

77. ANÁLISIS DE DATOS: COLEGIATURA La tabla siguiente muestra el costo promedio (en dólares) de la colegiatura de un año para universidades públicas y privadas en Estados Unidos, de 2000 a 2006. (Fuente: U.S. National Center for Education Statistics)

Año	Universidades públicas	Universidades privadas
2000	2506	14 081
2001	2562	15 000
2002	2700	15 742
2003	2903	16 383
2004	3319	17 327
2005	3629	18 154
2006	3874	18 862

(a) Use el comando *regression* de una calculadora de gráficas para hallar un modelo cuadrático T_1 para la colegiatura en universidades públicas, y un modelo lineal T_2 para la colegiatura en universidades privadas. Con t represente el año, con $t = 0$ para el año 2000.

(b) Use una calculadora de gráficas para graficar los datos y los dos modelos en la misma pantalla.

(c) Use la gráfica del inciso (b) para determinar el año, después de 2006, en el que la colegiatura en universidades públicas rebasará la colegiatura en universidades privadas.

(d) Verifique algebraicamente su respuesta al inciso (c).

GEOMETRÍA En los Ejercicios 78-82, encuentre las dimensiones del rectángulo que satisfaga las condiciones especificadas.

78. El perímetro es 56 metros y la longitud es 4 metros mayor que el ancho.

79. El perímetro es 280 centímetros y el ancho es 20 centímetros menos que la longitud.

80. El perímetro es 42 pulgadas y el ancho es tres cuartos de la longitud.

81. El perímetro es 484 pies y la longitud es 4½ veces el ancho.

82. El perímetro es 30.6 milímetros y la longitud es 2.4 veces el ancho.

83. GEOMETRÍA ¿Cuáles son las dimensiones de un terreno rectangular, si su perímetro es 44 kilómetros y su área es 120 kilómetros cuadrados?

84. GEOMETRÍA ¿Cuáles son las dimensiones de un triángulo rectángulo isósceles con una hipotenusa de dos pulgadas y un área de 1 pulgada cuadrada?

EXPLORACIÓN

¿VERDADERO O FALSO? En los Ejercicios 85 y 86, determine si la proposición es verdadera o falsa. Justifique su respuesta.

85. Para resolver un sistema de ecuaciones por sustitución, siempre se debe despejar y en una de las dos ecuaciones y luego sustituirla en la otra ecuación.

86. Si el sistema está formado por una parábola y una circunferencia, entonces puede tener dos soluciones como máximo.

87. RAZONAMIENTO GRÁFICO Use una calculadora de gráficas para graficar $y_1 = 4 - x$ y $y_2 = x - 2$ en la misma pantalla. Use las funciones *zoom* y *trace* para hallar las coordenadas del punto de intersección. ¿Cuál es la relación entre ese punto y la solución hallada en el ejemplo 1?

88. RAZONAMIENTO GRÁFICO Use una calculadora de gráficas para graficar las dos ecuaciones del Ejemplo 3, $y_1 = 3x^2 + 4x - 7$ y $y_2 = 2x + 1$, en la misma pantalla. ¿Cuántas soluciones cree que tiene el sistema? Repita este experimento para las ecuaciones del Ejemplo 4. ¿Cuántas soluciones tiene ese sistema? Explique su razonamiento.

89. PIÉNSELO Cuando resuelve un sistema de ecuaciones por sustitución, ¿cómo reconoce que el sistema no tiene solución?

90. TOQUE FINAL Considere el sistema de ecuaciones

$$\begin{cases} ax + by = c \\ dx + ey = f \end{cases}.$$

(a) Encuentre valores para a, b, c, d, e y f de modo que el sistema tenga una solución distinta. (Hay más de una respuesta correcta.)

(b) Explique cómo resolver el sistema del inciso (a) por el método de sustitución y gráficamente.

(c) Escriba un breve párrafo que describa cualesquiera ventajas del método de sustitución sobre el método gráfico de resolver un sistema de ecuaciones.

91. Encuentre ecuaciones de rectas cuyas gráficas corten la gráfica de la parábola $y = x^2$ en (a) dos puntos, (b) un punto, y (c) ningún punto. (Hay más de una respuesta correcta.) Use gráficas para apoyar sus respuestas.

7.2 Sistemas lineales de dos variables

Lo que debe aprender

- Usar el método de eliminación para resolver sistemas de ecuaciones lineales con dos variables.
- Interpretar gráficamente el número de soluciones de sistemas de ecuaciones lineales con dos variables.
- Usar sistemas de ecuaciones lineales con dos variables, para modelar y resolver problemas de la vida real.

Por qué debe aprenderlo

Se pueden usar sistemas de ecuaciones con dos variables para modelar y resolver problemas de la vida real. Por ejemplo, en el Ejercicio 61 de la página 515 resolverá un sistema de ecuaciones para hallar un modelo lineal que represente la relación entre producción de trigo y cantidad de fertilizante aplicado.

© Bill Stormont/Corbis

El método de eliminación

En la sección 7.1, estudiamos dos métodos para resolver un sistema de ecuaciones: el de sustitución y el gráfico. A continuación estudiaremos el **método de eliminación.** El paso principal en este método es obtener, para una de las variables, coeficientes que difieran sólo en signo para que *la suma* de las ecuaciones elimine la variable.

$$\begin{aligned} 3x + 5y &= 7 && \text{Ecuación 1} \\ -3x - 2y &= -1 && \text{Ecuación 2} \\ \hline 3y &= 6 && \text{Sumar ecuaciones.} \end{aligned}$$

Nótese que al sumar las dos ecuaciones se eliminan los términos en x y se obtiene una sola ecuación en y. Si de esta ecuación se despeja y resulta $y = 2$, que se puede sustituir de nuevo en una de las ecuaciones originales para despejar x.

Ejemplo 1 Resolver un sistema de ecuaciones por eliminación

Resuelva el sistema de ecuaciones lineales.

$$\begin{cases} 3x + 2y = 4 & \text{Ecuación 1} \\ 5x - 2y = 12 & \text{Ecuación 2} \end{cases}$$

Solución

Como los coeficientes de y difieren sólo en signo, se pueden eliminar al sumar las dos ecuaciones.

$$\begin{aligned} 3x + 2y &= 4 && \text{Escribir la ecuación 1.} \\ 5x - 2y &= 12 && \text{Escribir la ecuación 2.} \\ \hline 8x &= 16 && \text{Sumar las ecuaciones.} \\ x &= 2 && \text{Despejar } x. \end{aligned}$$

Al sustituir $x = 2$ en la ecuación 1, se puede despejar y.

$$\begin{aligned} 3x + 2y &= 4 && \text{Escribir la ecuación 1.} \\ 3(2) + 2y &= 4 && \text{Sustituir 2 por } x. \\ 6 + 2y &= 4 && \text{Simplificar.} \\ y &= -1 && \text{Despejar } y. \end{aligned}$$

La solución es $(2, -1)$. Compruébelo en el sistema original, como sigue.

Comprobación

$$\begin{aligned} 3(2) + 2(-1) &\stackrel{?}{=} 4 && \text{Sustituir en la ecuación 1.} \\ 6 - 2 &= 4 && \text{La ecuación 1 está bien. } \checkmark \\ 5(2) - 2(-1) &\stackrel{?}{=} 12 && \text{Sustituir en la ecuación 2.} \\ 10 + 2 &= 12 && \text{La ecuación 2 está bien. } \checkmark \end{aligned}$$

PUNTO *de repaso* Ahora trate de hacer el Ejercicio 11.

Método de eliminación

Para usar el **método de eliminación** para resolver un sistema de dos ecuaciones lineales en x y en y, siga estos pasos.

1. *Obtenga coeficientes* para x (o y) que difieran sólo en signo al multiplicar todos los términos de una o ambas ecuaciones por constantes escogidas apropiadamente.
2. *Sume* las ecuaciones para eliminar una variable.
3. *Resuelva* la ecuación obtenida en el paso 2.
4. *Sustituya de nuevo* el valor obtenido en el paso 3 en cualquiera de las dos ecuaciones originales y despeje la otra variable.
5. *Compruebe* que la solución satisfaga *cada una* de las ecuaciones originales.

Ejemplo 2 Resolver un sistema de ecuaciones por eliminación

Resuelva el sistema de ecuaciones lineales.

$$\begin{cases} 2x - 4y = -7 & \text{Ecuación 1} \\ 5x + \ \ y = -1 & \text{Ecuación 2} \end{cases}$$

Solución

Para este sistema, puede obtener coeficientes que difieran sólo en signo al multiplicar por 4 la ecuación 2.

$$\begin{aligned} 2x - 4y &= -7 & 2x - 4y &= -7 && \text{Escribir la ecuación 1.} \\ 5x + \ \ y &= -1 & 20x + 4y &= -4 && \text{Multiplicar por 4 la ecuación 2.} \\ & & 22x \ \ &= -11 && \text{Sumar las ecuaciones.} \\ & & x \ \ &= -\tfrac{1}{2} && \text{Despejar } x. \end{aligned}$$

Sustituyendo $x = -\frac{1}{2}$ en la ecuación 1, puede despejar y.

$$\begin{aligned} 2x - 4y &= -7 && \text{Escribir la ecuación 1.} \\ 2\left(-\tfrac{1}{2}\right) - 4y &= -7 && \text{Sustituir } -\tfrac{1}{2} \text{ por } x. \\ -4y &= -6 && \text{Combinar términos semejantes.} \\ y &= \tfrac{3}{2} && \text{Despejar } y. \end{aligned}$$

La solución es $\left(-\frac{1}{2}, \frac{3}{2}\right)$. Compruébelo en el sistema original, como sigue.

Comprobación

$$\begin{aligned} 2x - 4y &= -7 && \text{Escribir la ecuación 1 original.} \\ 2\left(-\tfrac{1}{2}\right) - 4\left(\tfrac{3}{2}\right) &\stackrel{?}{=} -7 && \text{Sustituir en la ecuación 1.} \\ -1 - 6 &= -7 && \text{La ecuación 1 está bien. } \checkmark \\ 5x + y &= -1 && \text{Escribir la ecuación 2 original.} \\ 5\left(-\tfrac{1}{2}\right) + \tfrac{3}{2} &\stackrel{?}{=} -1 && \text{Sustituir en la ecuación 2.} \\ -\tfrac{5}{2} + \tfrac{3}{2} &= -1 && \text{La ecuación 2 está bien. } \checkmark \end{aligned}$$

PUNTO *de repaso* Ahora trate de hacer el Ejercicio 15.

En el ejemplo 2, los dos sistemas de ecuaciones lineales (el sistema original y el sistema obtenido al multiplicar por constantes)

$$\begin{cases} 2x - 4y = -7 \\ 5x + y = -1 \end{cases} \quad \text{y} \quad \begin{cases} 2x - 4y = -7 \\ 20x + 4y = -4 \end{cases}$$

se denominan **sistemas equivalentes** porque tienen precisamente el mismo conjunto de solución. Las operaciones que se pueden efectuar en un sistema de ecuaciones lineales para producir un sistema equivalente son (1) intercambiar dos ecuaciones cualesquiera, (2) multiplicar una ecuación por una constante diferente de cero, y (3) sumar un múltiplo de una ecuación a cualquier otra del sistema.

Ejemplo 3 Resolver el sistema de ecuaciones por eliminación

Resolver el sistema de ecuaciones lineales.

$$\begin{cases} 5x + 3y = 9 & \text{Ecuación 1} \\ 2x - 4y = 14 & \text{Ecuación 2} \end{cases}$$

Solución algebraica

Se pueden obtener coeficientes que difieran sólo en signo al multiplicar por 4 la ecuación 1 y multiplicar por 3 la ecuación 2.

$$\begin{array}{rcrl} 5x + 3y = 9 & \Rightarrow & 20x + 12y = 36 & \text{Multiplicar por 4 la ecuación 1.} \\ \underline{2x - 4y = 14} & \Rightarrow & \underline{6x - 12y = 42} & \text{Multiplicar por 3 la ecuación 2.} \\ & & 26x = 78 & \text{Sumar ecuaciones.} \\ & & x = 3 & \text{Despejar } x. \end{array}$$

Sustituyendo $x = 3$ en la ecuación 2 se puede despejar y.

$$\begin{array}{rl} 2x - 4y = 14 & \text{Escribir la ecuación 2.} \\ 2(3) - 4y = 14 & \text{Sustituir 3 por } x. \\ -4y = 8 & \text{Combinar términos semejantes.} \\ y = -2 & \text{Despejar } y. \end{array}$$

La solución es $(3, -2)$. Compruébelo en el sistema original.

Solución gráfica

Despeje y de cada una de las ecuaciones. A continuación use una calculadora de gráficas para graficar $y_1 = -\frac{5}{3}x + 3$ y $y_2 = \frac{1}{2}x - \frac{7}{2}$ en la misma pantalla. Use el comando *intersect* o los comandos *zoom* y *trace* para aproximar el punto de intersección de las gráficas. En la gráfica de la Figura 7.6 se puede ver que el punto de intersección es $(3, -2)$. Se puede determinar que ésta es la solución exacta al verificar $(3, -2)$ en ambas ecuaciones.

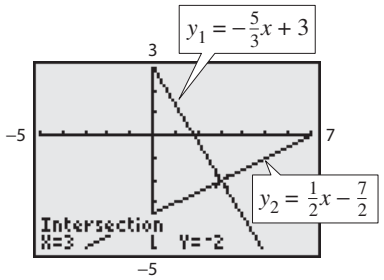


FIGURA 7.6

PUNTO *de repaso* Ahora trate de hacer el Ejercicio 17.

El estudiante puede comprobar la solución del ejemplo 3 como sigue.

$$\begin{array}{rl} 5(3) + 3(-2) \stackrel{?}{=} 9 & \text{Sustituir 3 por } x \text{ y } -2 \text{ por } y \text{ en la ecuación 1.} \\ 15 - 6 = 9 & \text{La ecuación 1 está bien. } \checkmark \\ 2(3) - 4(-2) \stackrel{?}{=} 14 & \text{Sustituir 3 por } x \text{ y } -2 \text{ por } y \text{ en la ecuación 2.} \\ 6 + 8 = 14 & \text{La ecuación 2 está bien. } \checkmark \end{array}$$

Recuerde que la terminología y métodos estudiados en esta sección se aplican sólo a sistemas de ecuaciones *lineales*.

Interpretación gráfica de las soluciones

Es posible que un sistema *general* de ecuaciones tenga exactamente una solución, dos o más soluciones, o que no tenga solución. Si un sistema de ecuaciones *lineales* tiene dos soluciones, debe tener un número *infinito* de soluciones.

Interpretaciones gráficas de las soluciones

Para un sistema de dos ecuaciones lineales con dos variables, el número de soluciones es uno de lo siguiente.

Número de soluciones	*Interpretación gráfica*	*Pendientes de las rectas*
1. Exactamente una solución	Las dos rectas se cortan en un punto.	Las pendientes de las dos rectas no son iguales.
2. Un número infinito de soluciones	Las dos rectas coinciden (son idénticas).	Las pendientes de las dos rectas son iguales.
3. Ninguna solución	Las dos rectas son paralelas.	Las pendientes de las dos rectas son iguales.

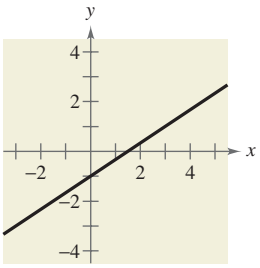
Un sistema de ecuaciones lineales es **consistente** si tiene al menos una solución. Un sistema consistente con exactamente una solución es *independiente*, mientas que un sistema consistente con un número infinito de soluciones es *dependiente*. Un sistema es **inconsistente** si no tiene solución.

Ejemplo 4 Reconocer gráficas de sistemas lineales

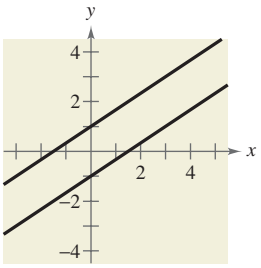
Relacione cada sistema de ecuaciones lineales con su gráfica en la Figura 7.7. Describa el número de soluciones y diga si el sistema es consistente o inconsistente.

a. $\begin{cases} 2x - 3y = 3 \\ -4x + 6y = 6 \end{cases}$ **b.** $\begin{cases} 2x - 3y = 3 \\ x + 2y = 5 \end{cases}$ **c.** $\begin{cases} 2x - 3y = 3 \\ -4x + 6y = -6 \end{cases}$

i.



ii.



iii.

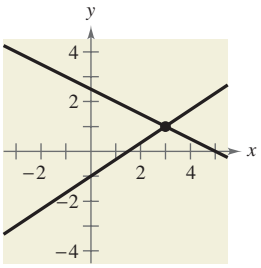


FIGURA 7.7

Solución

a. La gráfica del sistema (a) es un par de rectas paralelas (ii). Las rectas no tienen punto de intersección, de modo que el sistema no tiene solución. El sistema es inconsistente.

b. La gráfica del sistema (b) es un par de rectas que se cortan (iii). Las rectas tienen un punto de intersección, por lo que el sistema tiene exactamente una solución. El sistema es consistente.

c. La gráfica del sistema (c) es un par de rectas que coinciden (i). Las rectas tienen un número infinito de puntos de intersección, de modo que el sistema tiene un número infinito de soluciones. El sistema es consistente.

PUNTO *de repaso* Ahora trate de hacer los Ejercicios 31-34.

Tip de estudio

Una comparación de las pendientes de dos rectas da información útil acerca del número de soluciones del correspondiente sistema de ecuaciones. Para resolver gráficamente un sistema de ecuaciones, ayuda empezar por escribir las ecuaciones en forma pendiente-intersección. Trate de hacer esto para los sistemas del Ejemplo 4.

En los Ejemplos 5 y 6, nótese la forma en que se puede usar el método de eliminación para determinar que un sistema de ecuaciones lineales no tiene solución o tiene un número infinito de soluciones.

Ejemplo 5 Caso sin solución: método de eliminación

Resuelva el sistema de ecuaciones lineales.

$$\begin{cases} x - 2y = 3 & \text{Ecuación 1} \\ -2x + 4y = 1 & \text{Ecuación 2} \end{cases}$$

Solución

Para obtener coeficientes que difieran sólo en signo, se puede multiplicar por 2 la ecuación 1.

$$\begin{array}{rcrl} x - 2y = 3 & \Rightarrow & 2x - 4y = 6 & \text{Multiplicar por 2 la ecuación 1.} \\ -2x + 4y = 1 & \Rightarrow & -2x + 4y = 1 & \text{Escribir la ecuación 2} \\ \hline & & 0 = 7 & \text{Proposición falsa} \end{array}$$

Como no hay valores de x y y para los cuales $0 = 7$, se puede concluir que el sistema es inconsistente y que no tiene solución. Las rectas correspondientes a las dos ecuaciones de este sistema se muestran en la Figura 7.8. Nótese que las dos rectas son paralelas y, por tanto, no tienen punto de intersección.

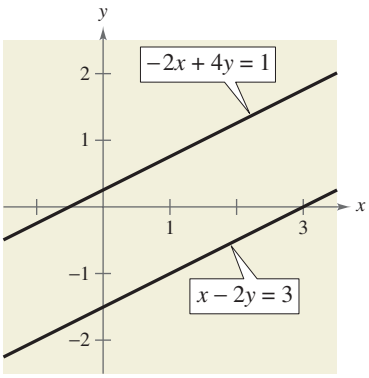


FIGURA 7.8

PUNTO *de repaso* Ahora trate de hacer el Ejercicio 21.

En el Ejemplo 5, observe que el caso de una proposición falsa, como este ejemplo de $0 = 7$, indica que el sistema no tiene solución. En el siguiente ejemplo, nótese que el caso de una proposición verdadera para todos los valores de las variables, como $0 = 0$, indica que el sistema tiene un número infinito de soluciones.

Ejemplo 6 Caso de numerosas soluciones: método de eliminación

Resuelva el sistema de ecuaciones lineales.

$$\begin{cases} 2x - y = 1 & \text{Ecuación 1} \\ 4x - 2y = 2 & \text{Ecuación 2} \end{cases}$$

Solución

Para obtener coeficientes que difieran sólo en signo, se puede multiplicar por -2 la ecuación 1.

$$\begin{array}{rcrl} 2x - y = 1 & \Rightarrow & -4x + 2y = -2 & \text{Multiplicar por } -2 \text{ la ecuación 1.} \\ 4x - 2y = 2 & \Rightarrow & 4x - 2y = 2 & \text{Escribir la ecuación 2.} \\ \hline & & 0 = 0 & \text{Sumar ecuaciones.} \end{array}$$

Como las dos ecuaciones son equivalentes (tienen el mismo conjunto solución), se puede concluir que el sistema tiene un número infinito de soluciones. El conjunto solución está formado por todos los puntos (x, y) que se encuentren sobre la recta $2x - y = 1$, como se muestra en la Figura 7.9. Haciendo $x = a$, donde a es cualquier número real, se puede ver que las soluciones del sistema son $(a, 2a - 1)$.

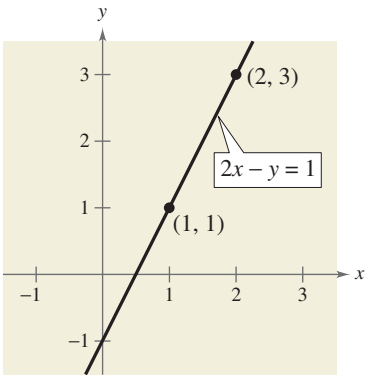


FIGURA 7.9

PUNTO *de repaso* Ahora trate de hacer el Ejercicio 23.

TECNOLOGÍA

La solución general del sistema lineal

$$\begin{cases} ax + by = c \\ dx + ey = f \end{cases}$$

es

$$x = \frac{ce - bf}{ae - bd}$$

y

$$y = \frac{af - cd}{ae - bd}.$$

Si $ae - bd = 0$, el sistema no tiene una solución única. Un programa de calculadoras de gráficas (llamado sistemas de ecuaciones lineales) para resolver ese sistema se puede hallar en el sitio web para este texto, en *academic.cengage.com*. Intente usar el programa para su calculadora de gráficas para resolver el sistema del Ejemplo 7.

El Ejemplo 7 ilustra una estrategia para resolver un sistema de ecuaciones lineales que tiene coeficientes decimales.

Ejemplo 7 Un sistema lineal que tiene coeficientes decimales

Resuelva el sistema de ecuaciones lineales.

$$\begin{cases} 0.02x - 0.05y = -0.38 & \text{Ecuación 1} \\ 0.03x + 0.04y = \ \ 1.04 & \text{Ecuación 2} \end{cases}$$

Solución

Como los coeficientes de este sistema tienen dos lugares decimales, se puede empezar por multiplicar por 100 cada una de las ecuaciones. Esto produce un sistema en el que los coeficientes son todos enteros.

$$\begin{cases} 2x - 5y = -38 & \text{Ecuación 1 modificada} \\ 3x + 4y = \ \ 104 & \text{Ecuación 2 modificada} \end{cases}$$

A continuación, para obtener coeficientes que difieran sólo en signo, multiplique por 3 la ecuación 1 y multiplique por -2 la ecuación 2.

$$\begin{aligned} 2x - 5y &= -38 \quad \Rightarrow \quad 6x - 15y = -114 && \text{Multiplicar por 3 la ecuación 1.} \\ 3x + 4y &= \ \ 104 \quad \Rightarrow \quad -6x - \ \ 8y = -208 && \text{Multiplicar por } -2 \text{ la ecuación 2.} \\ & \qquad\qquad\quad -23y = -322 && \text{Sumar ecuaciones.} \end{aligned}$$

Entonces, se puede concluir que

$$\begin{aligned} y &= \frac{-322}{-23} \\ &= 14. \end{aligned}$$

Sustituir por atrás $y = 14$ en la ecuación 2 modificada produce lo siguiente.

$$\begin{aligned} 3x + 4y &= 104 && \text{Escribir la ecuación 2 modificada.} \\ 3x + 4(14) &= 104 && \text{Sustituir 14 por } y. \\ 3x &= 48 && \text{Combinar términos semejantes.} \\ x &= 16 && \text{Despejar } x. \end{aligned}$$

La solución es $(16, 14)$. Compruébelo en el sistema original, como sigue.

Comprobación

$$\begin{aligned} 0.02x - 0.05y &= -0.38 && \text{Escribir la ecuación 1 original.} \\ 0.02(16) - 0.05(14) &\stackrel{?}{=} -0.38 && \text{Sustituir en la ecuación 1.} \\ 0.32 - 0.70 &= -0.38 && \text{La ecuación 1 está bien. } \checkmark \\ 0.03x + 0.04y &= 1.04 && \text{Escribir la ecuación 2 original.} \\ 0.03(16) + 0.04(14) &\stackrel{?}{=} 1.04 && \text{Sustituir en la ecuación 2.} \\ 0.48 + 0.56 &= 1.04 && \text{La ecuación 2 está bien. } \checkmark \end{aligned}$$

PUNTO *de repaso* Ahora trate de hacer el Ejercicio 25.

Aplicaciones

En este punto, usted puede preguntarse "¿cómo saber cuáles problemas de aplicación se pueden resolver usando un sistema de ecuaciones lineales?". La respuesta proviene de las siguientes consideraciones.

1. ¿El problema contiene más de una cantidad desconocida?

2. ¿Hay dos (o más) ecuaciones o condiciones por satisfacer?

Si se presenta una de estas situaciones, o ambas, el modelo matemático apropiado para el problema puede ser un sistema de ecuaciones lineales.

Ejemplo 8 Una aplicación de un sistema lineal

Un avión que vuela con viento de frente viaja 2000 millas entre Chicopee, Massachusetts, y Salt Lake City, Utah, en 4 horas 24 minutos. En el vuelo de regreso viaja la misma distancia en 4 horas. Encuentre la rapidez relativa del avión y la rapidez del viento, suponiendo que ambas permanecen constantes.

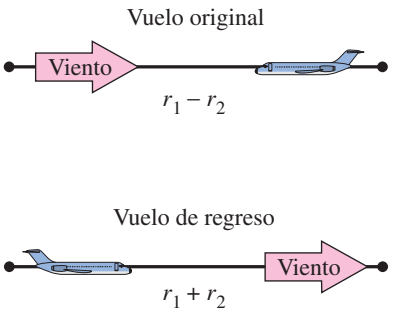


FIGURA 7.10

Solución

Las dos cantidades incógnitas son las magnitudes de rapidez del viento y el avión. Si r_1 es la rapidez del avión y r_2 es la del viento, entonces

$r_1 - r_2$ = rapidez del avión contra el viento

$r_1 + r_2$ = rapidez del avión a favor del viento

como se muestra en la Figura 7.10. Usando la fórmula distancia = (velocidad)(tiempo) para estas dos magnitudes de rapidez, se obtienen las siguientes ecuaciones.

$$2000 = (r_1 - r_2)\left(4 + \frac{24}{60}\right)$$

$$2000 = (r_1 + r_2)(4)$$

Estas dos ecuaciones se simplifican como sigue.

$$\begin{cases} 5000 = 11r_1 - 11r_2 & \text{Ecuación 1} \\ 500 = r_1 + r_2 & \text{Ecuación 2} \end{cases}$$

Para resolver este sistema por eliminación, multiplique por 11 la ecuación 2.

$$\begin{array}{rl} 5000 = 11r_1 - 11r_2 & \Rightarrow \quad 5000 = 11r_1 - 11r_2 \quad \text{Escribir la ecuación 1.} \\ \underline{500 = r_1 + r_2} & \Rightarrow \quad \underline{5500 = 11r_1 + 11r_2} \quad \text{Multiplicar por 11 la ecuación 2.} \\ & \qquad 10\,500 = 22r_1 \quad \text{Sumar ecuaciones.} \end{array}$$

Por tanto,

$$r_1 = \frac{10\,500}{22} = \frac{5250}{11} \approx 477.27 \text{ millas por hora}$$ Rapidez del avión

y

$$r_2 = 500 - \frac{5250}{11} = \frac{250}{11} \approx 22.73 \text{ millas por hora.}$$ Rapidez del viento

Compruebe esta solución en el enunciado original del problema.

PUNTO *de repaso* Ahora trate de hacer el Ejercicio 43.

En un mercado libre, la demanda de muchos productos está relacionada con el precio de éstos. Cuando los precios bajan, la demanda hecha por los consumidores aumenta y entonces disminuye la cantidad que los productores pueden o están dispuestos a ofrecer.

Ejemplo 9 Hallar el punto de equilibrio

Las ecuaciones de demanda y oferta para un nuevo tipo de asistente digital personal son

$$\begin{cases} p = 150 - 0.00001x & \text{Ecuación de demanda} \\ p = 60 + 0.00002x & \text{Ecuación de oferta} \end{cases}$$

donde p es el precio en dólares y x representa el número de unidades. Encuentre el punto de equilibrio para este mercado. El **punto de equilibrio** es el precio p y el número de unidades x que satisfacen las ecuaciones de demanda como de oferta.

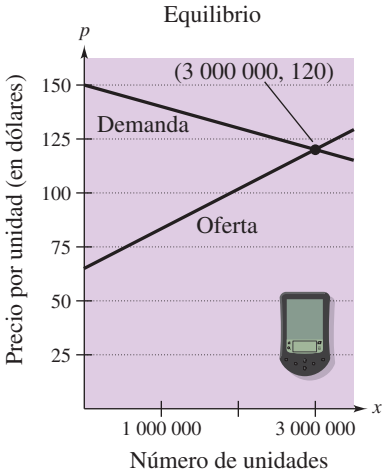


FIGURA 7.11

Solución

Como p está escrita en términos de x, empiece por sustituir, en la ecuación de demanda, el valor de p dado en la ecuación de oferta.

$$\begin{aligned} p &= 150 - 0.00001x && \text{Escribir la ecuación de demanda.} \\ 60 + 0.00002x &= 150 - 0.00001x && \text{Sustituir } 60 + 0.00002x \text{ por } p. \\ 0.00003x &= 90 && \text{Combinar términos semejantes.} \\ x &= 3\,000\,000 && \text{Despejar } x. \end{aligned}$$

Por tanto, el punto de equilibrio se presenta cuando demanda y oferta son 3 millones de unidades cada una (vea figura 7.11). El precio que corresponde a este valor de x se obtiene al sustituir $x = 3\,000\,000$ en cualquiera de las dos ecuaciones originales. Por ejemplo, sustituyendo en la ecuación de demanda resulta

$$\begin{aligned} p &= 150 - 0.00001(3\,000\,000) \\ &= 150 - 30 \\ &= \$120. \end{aligned}$$

La solución es (3 000 000, 120). Se puede comprobar esto como sigue.

Comprobación

Sustituya (3 000 000, 120) en la ecuación de demanda.

$$\begin{aligned} p &= 150 - 0.00001x && \text{Escribir la ecuación de demanda.} \\ 120 &\stackrel{?}{=} 150 - 0.00001(3\,000\,000) && \text{Sustituir 120 por } p \text{ y 3 000 000 por } x. \\ 120 &= 120 && \text{La sustitución es buena en la ecuación de demanda. } \checkmark \end{aligned}$$

Sustituya (3 000 000, 120) en la ecuación de oferta.

$$\begin{aligned} p &= 60 + 0.00002x && \text{Escribir la ecuación de oferta.} \\ 120 &\stackrel{?}{=} 60 + 0.00002(3\,000\,000) && \text{Sustituir 120 por } p \text{ y 3 000 000 por } x. \\ 120 &= 120 && \text{La sustitución es buena en la ecuación de oferta. } \checkmark \end{aligned}$$

PUNTO *de repaso* Ahora trate de hacer el Ejercicio 45.

7.2 EJERCICIOS

En www.CalcChat.com vea las soluciones a los ejercicios impares.

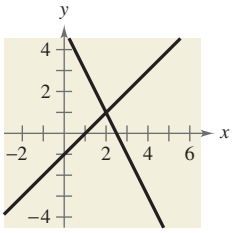
VOCABULARIO: Llene los espacios en blanco.

1. El primer paso para resolver un sistema de ecuaciones por el método de _____ es obtener coeficientes para x (o y) que difieran sólo en signo.
2. Dos sistemas de ecuaciones que tienen el mismo conjunto de solución reciben el nombre de sistemas _____.
3. Un sistema de ecuaciones lineales que tiene al menos una solución se denomina _____, mientras que un sistema de ecuaciones lineales que no tiene solución se llama _____.
4. En aplicaciones de negocios, el _____ _____ _____ se define como el precio p y el número de unidades x que satisfacen tanto la ecuación de demanda como la de oferta.

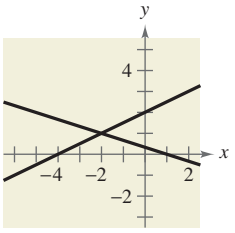
HABILIDADES Y APLICACIONES

En los Ejercicios 5-12, resuelva el sistema por el método de eliminación. Marque cada recta con su ecuación. Para imprimir una copia amplificada de la gráfica, visite el sitio *www.mathgraphs.com*.

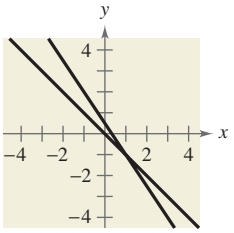
5. $\begin{cases} 2x + y = 5 \\ x - y = 1 \end{cases}$



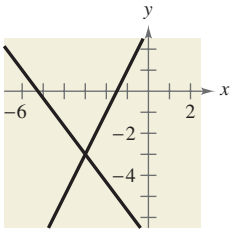
6. $\begin{cases} x + 3y = 1 \\ -x + 2y = 4 \end{cases}$



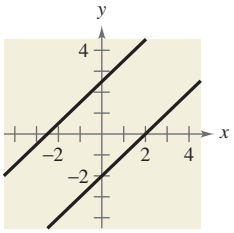
7. $\begin{cases} x + y = 0 \\ 3x + 2y = 1 \end{cases}$



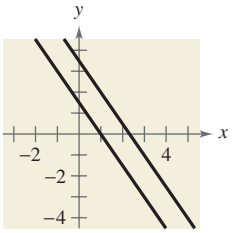
8. $\begin{cases} 2x - y = -3 \\ 4x + 3y = -21 \end{cases}$



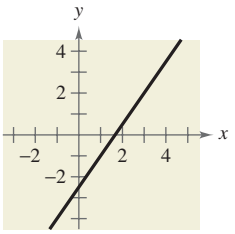
9. $\begin{cases} x - y = 2 \\ -2x + 2y = 5 \end{cases}$



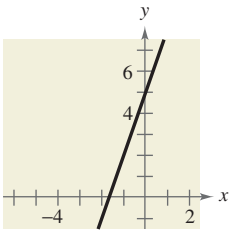
10. $\begin{cases} 3x + 2y = 3 \\ 6x + 4y = 14 \end{cases}$



11. $\begin{cases} 3x - 2y = 5 \\ -6x + 4y = -10 \end{cases}$



12. $\begin{cases} 9x - 3y = -15 \\ -3x + y = 5 \end{cases}$



En los Ejercicios 13-30, resuelva el sistema por el método de eliminación y verifique algebraicamente cualesquiera soluciones.

13. $\begin{cases} x + 2y = 6 \\ x - 2y = 2 \end{cases}$

14. $\begin{cases} 3x - 5y = 8 \\ 2x + 5y = 22 \end{cases}$

15. $\begin{cases} 5x + 3y = 6 \\ 3x - y = 5 \end{cases}$

16. $\begin{cases} x + 5y = 10 \\ 3x - 10y = -5 \end{cases}$

17. $\begin{cases} 3x + 2y = 10 \\ 2x + 5y = 3 \end{cases}$

18. $\begin{cases} 2r + 4s = 5 \\ 16r + 50s = 55 \end{cases}$

19. $\begin{cases} 5u + 6v = 24 \\ 3u + 5v = 18 \end{cases}$

20. $\begin{cases} 3x + 11y = 4 \\ -2x - 5y = 9 \end{cases}$

21. $\begin{cases} \frac{9}{5}x + \frac{6}{5}y = 4 \\ 9x + 6y = 3 \end{cases}$

22. $\begin{cases} \frac{3}{4}x + y = \frac{1}{8} \\ \frac{9}{4}x + 3y = \frac{3}{8} \end{cases}$

23. $\begin{cases} -5x + 6y = -3 \\ 20x - 24y = 12 \end{cases}$

24. $\begin{cases} 7x + 8y = 6 \\ -14x - 16y = -12 \end{cases}$

25. $\begin{cases} 0.2x - 0.5y = -27.8 \\ 0.3x + 0.4y = 68.7 \end{cases}$

26. $\begin{cases} 0.05x - 0.03y = 0.21 \\ 0.07x + 0.02y = 0.16 \end{cases}$

27. $\begin{cases} 4b + 3m = 3 \\ 3b + 11m = 13 \end{cases}$

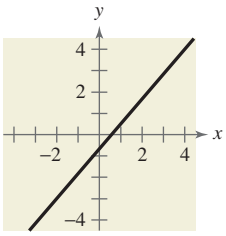
28. $\begin{cases} 2x + 5y = 8 \\ 5x + 8y = 10 \end{cases}$

29. $\begin{cases} \frac{x+3}{4} + \frac{y-1}{3} = 1 \\ 2x - y = 12 \end{cases}$

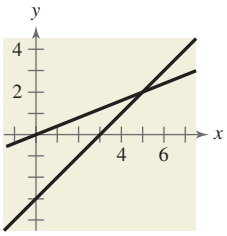
30. $\begin{cases} \frac{x-1}{2} + \frac{y+2}{3} = 4 \\ x - 2y = 5 \end{cases}$

En los Ejercicios 31-34, relacione el sistema de ecuaciones lineales con su gráfica. Describa el número de soluciones y diga si el sistema es consistente o inconsistente. [Las gráficas están marcadas (a), (b), (c) y (d).]

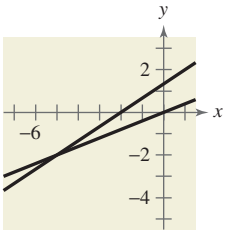
(a)



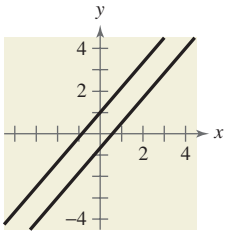
(b)



(c)



(d)



31. $\begin{cases} 2x - 5y = 0 \\ x - y = 3 \end{cases}$

32. $\begin{cases} 2x - 5y = 0 \\ 2x - 3y = -4 \end{cases}$

33. $\begin{cases} -7x + 6y = -4 \\ 14x - 12y = 8 \end{cases}$

34. $\begin{cases} 7x - 6y = -6 \\ -7x + 6y = -4 \end{cases}$

En los Ejercicios 35-42, use cualquier método para resolver el sistema.

35. $\begin{cases} 3x - 5y = 7 \\ 2x + y = 9 \end{cases}$

36. $\begin{cases} -x + 3y = 17 \\ 4x + 3y = 7 \end{cases}$

37. $\begin{cases} y = 2x - 5 \\ y = 5x - 11 \end{cases}$

38. $\begin{cases} 7x + 3y = 16 \\ y = x + 2 \end{cases}$

39. $\begin{cases} x - 5y = 21 \\ 6x + 5y = 21 \end{cases}$

40. $\begin{cases} y = -2x - 17 \\ y = 2 - 3x \end{cases}$

41. $\begin{cases} -5x + 9y = 13 \\ y = x - 4 \end{cases}$

42. $\begin{cases} 4x - 3y = 6 \\ -5x + 7y = -1 \end{cases}$

43. RAPIDEZ DE UN AVIÓN Un avión que vuela en un viento de frente viaja 1800 millas entre Pittsburgh, Pennsylvania, y Phoenix, Arizona, en 3 horas y 36 minutos. En el viaje de regreso, la distancia es recorrida en 3 horas. Encuentre la rapidez relativa del avión y la rapidez del viento, suponiendo que ambas permanecen constantes.

44. RAPIDEZ DE UN AVIÓN Dos aviones salen del aeropuerto internacional de Los Ángeles y vuelan en direcciones opuestas. El segundo avión parte $\frac{1}{2}$ hora después que el primero, pero su rapidez es 80 kilómetros por hora más rápida. Encuentre la rapidez relativa de cada avión si, 2 horas después que sale el primero, los dos aviones están a 3200 kilómetros entre sí.

OFERTA Y DEMANDA En los Ejercicios 45-48, encuentre el punto de equilibrio de las ecuaciones de demanda y oferta. El punto de equilibrio es el precio p y el número de unidades x que satisfacen tanto la ecuación de demanda como la de oferta.

	Demanda	*Oferta*
45.	$p = 500 - 0.4x$	$p = 380 + 0.1x$
46.	$p = 100 - 0.05x$	$p = 25 + 0.1x$
47.	$p = 140 - 0.00002x$	$p = 80 + 0.00001x$
48.	$p = 400 - 0.0002x$	$p = 225 + 0.0005x$

49. NUTRICIÓN Dos hamburguesas con queso y un poco de papas a la francesa de un restaurante de comida rápida contienen un total de 830 calorías. Tres hamburguesas y dos pequeños platillos de papas a la francesa contienen un total de 1360 calorías. Encuentre el contenido calórico de cada artículo.

50. NUTRICIÓN Un vaso de 8 onzas de jugo de naranja contiene un total de 177.4 miligramos de vitamina C. Dos vasos de 8 onzas de jugo de manzana y tres vasos de 8 onzas de jugo de naranja contienen un total de 436.7 miligramos de vitamina C. ¿Cuánta vitamina C hay en un vaso de 8 onzas de cada tipo de jugo?

51. MEZCLA ÁCIDA Treinta litros de una solución ácida al 40% se obtienen al mezclar una solución al 25% con otra al 50%.

(a) Escriba un sistema de ecuaciones en el que una ecuación represente la cantidad de mezcla final necesaria y la otra represente el porcentaje de ácido de la mezcla final. Con x y con y represente las cantidades de las soluciones al 25% y al 50%, respectivamente.

(b) Use una calculadora de gráficas para graficar las dos ecuaciones del inciso (a) en la misma pantalla. Cuando aumenta la cantidad de la solución al 25%, ¿cómo cambia la cantidad de la solución al 50%?

(c) ¿Cuánto de cada solución se requiere para obtener la concentración especificada de la mezcla final?

52. MEZCLA DE COMBUSTIBLE Quinientos galones de gasolina de 89 octanos se obtienen al mezclar gasolina de 87 octanos con gasolina de 92 octanos.

(a) Escriba un sistema de ecuaciones en el que una ecuación represente la cantidad de mezcla final necesaria y la otra represente las cantidades de gasolinas de 87 y de 92 octanos en la mezcla final. Con x y con y represente el número de galones de gasolinas de 87 octanos y de 92 octanos, respectivamente.

(b) Use una calculadora de gráficas para graficar las dos ecuaciones del inciso (a) en la misma pantalla. Cuando aumenta la cantidad de gasolina de 87 octanos, ¿cómo cambia la cantidad de gasolina de 92 octanos?

(c) ¿Cuánto de cada tipo de gasolina se requiere para obtener los 500 galones de gasolina de 89 octanos?

53. CARTERA DE INVERSIONES Se invierten un total de $24 000 en dos bonos corporativos que pagan 3.5% y 5% de interés simple. El inversionista desea obtener un ingreso anual de intereses de $930 por estas inversiones. ¿Qué cantidad debe invertirse en el bono de 3.5%?

54. CARTERA DE INVERSIONES Se invierten un total de $32 000 en dos bonos municipales que pagan 5.75% y 6.25% de interés simple. El inversionista desea obtener un ingreso anual de $1900 por intereses de las inversiones. ¿Qué cantidad debe invertirse en el bono de 5.75%?

55. PRESCRIPCIONES El número de prescripciones P (en miles) preparadas en dos farmacias, de 2006 a 2010, se muestran en la tabla siguiente.

Año	Farmacia A	Farmacia B
2006	19.2	20.4
2007	19.6	20.8
2008	20.0	21.1
2009	20.6	21.5
2010	21.3	22.0

(a) Use una calculadora de gráficas para crear una gráfica de dispersión de los datos de la farmacia A y use el comando *regression* para hallar un modelo lineal. Con t represente el año, con $t = 6$ correspondiente a 2006. Repita el procedimiento para la farmacia B.

(b) Suponiendo que los números para los cinco años dados son representativos de años futuros, ¿el número de prescripciones preparadas en la farmacia A siempre será mayor que el de la farmacia B? Si es así, ¿cuándo?

56. ANÁLISIS DE DATOS El gerente de una tienda desea saber la demanda de un producto como función del precio. Las ventas diarias para precios diferentes del producto se muestran en la tabla siguiente.

Precio, x	Demanda, y
$1.00	45
$1.20	37
$1.50	23

(a) Encuentre la recta de regresión de mínimos cuadrados $y = ax + b$ para los datos al despejar a y b del sistema.

$$\begin{cases} 3.00b + 3.70a = 105.00 \\ 3.70b + 4.69a = 123.90 \end{cases}$$

(b) Use el comando de regresión de la calculadora de gráficas para confirmar el resultado del inciso (a).

(c) Use la calculadora de gráficas para localizar los datos y graficar el modelo lineal del inciso (a) en la misma pantalla.

(d) Use el modelo lineal del inciso (a) para predecir la demanda cuando el precio sea $1.75.

AJUSTE DE UNA RECTA A LOS DATOS En los Ejercicios 57-60, encuentre la recta de regresión de mínimos cuadrados $y = ax + b$ para los puntos

$$(x_1, y_1), (x_2, y_2), \ldots, (x_n, y_n)$$

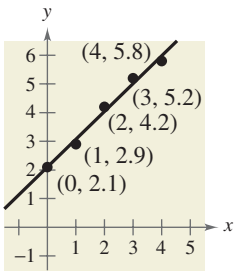
al despejar a y b del sistema.

$$nb + \left(\sum_{i=1}^{n} x_i\right)a = \left(\sum_{i=1}^{n} y_i\right)$$

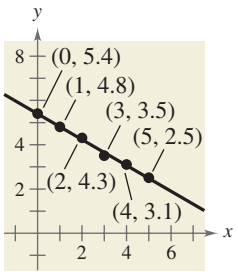
$$\left(\sum_{i=1}^{n} x_i\right)b + \left(\sum_{i=1}^{n} x_i^2\right)a = \left(\sum_{i=1}^{n} x_i y_i\right)$$

A continuación use una calculadora de gráficas para confirmar el resultado. (Si usted no está familiarizado con la notación de suma, vea la exposición de esto en la sección 9.1 o en el apéndice B en el sitio web para este texto en *academic.cengage.com*.)

57.



58.



59. (0, 8), (1, 6), (2, 4), (3, 2)

60. (1, 0.0), (2, 1.1), (3, 2.3), (4, 3.8), (5, 4.0), (6, 5.5), (7, 6.7), (8, 6.9)

61. ANÁLISIS DE DATOS Un ingeniero agrónomo utilizó cuatro terrenos de prueba para determinar la relación entre la producción y de trigo (en búshels por acre) y la cantidad de fertilizante x (en cientos de libras por acre). Los resultados se muestran en la tabla siguiente.

Fertilizante, x	Producción, y
1.0	32
1.5	41
2.0	48
2.5	53

(a) Use la técnica demostrada en los ejercicios 57-60 para establecer un sistema de ecuaciones para los datos y hallar la recta de regresión de mínimos cuadrados $y = ax + b$.

(b) Use el modelo lineal para predecir la producción para una aplicación de fertilizante de 160 libras por acre.

62. GASTOS DEL DEPARTAMENTO DE DEFENSA La tabla siguiente muestra el gasto nacional total y para funciones de defensa (en miles de millones de dólares) para los años 2000 a 2007. (Fuente: U.S. Office of Management and Budget)

Año	Gastos, y
2000	294.4
2001	304.8
2002	348.5
2003	404.8
2004	455.8
2005	495.3
2006	521.8
2007	552.6

(a) Use la técnica demostrada en los ejercicios 57-60 para establecer un sistema de ecuaciones para los datos y hallar la recta de regresión de mínimos cuadrados $y = at + b$. Con t represente el año, con $t = 0$ correspondiente a 2000.

(b) Use el comando *regression* de una calculadora de gráficas para hallar un modelo lineal para los datos. ¿Cómo se compara este modelo con el obtenido en el inciso(a)?

(c) Use el modelo lineal para crear una tabla de valores estimados de y. Compárelos con los datos reales.

(d) Use el modelo lineal para estimar el gasto nacional total para 2008.

(e) Use internet, la biblioteca de su escuela o alguna otra fuente de consulta para hallar el gasto nacional total para 2008. ¿Cómo se compara este valor con su respuesta en el inciso (d)?

(f) ¿El modelo lineal es válido para predicciones de largo plazo de gasto nacional total? Explique.

EXPLORACIÓN

¿VERDADERO O FALSO? En los Ejercicios 63 y 64, determine si la proposición es verdadera o falsa. Justifique su respuesta.

63. Si dos rectas no tienen exactamente un punto de intersección, entonces deben ser paralelas.

64. Resolver gráficamente un sistema de ecuaciones siempre dará una solución exacta.

65. ESCRITURA Brevemente explique si es o no posible que un sistema consistente de ecuaciones lineales tenga exactamente dos soluciones.

66. PIÉNSELO Proporcione ejemplos de un sistema de ecuaciones lineales que (a) no tenga solución y (b) tenga un número infinito de soluciones.

67. MÉTODOS DE COMPARACIÓN Use el método de sustitución para resolver el sistema del Ejemplo 1. ¿Es más fácil este método o el de eliminación? Explique.

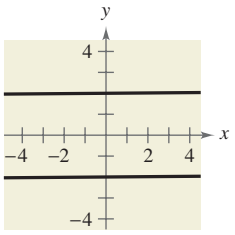
68. TOQUE FINAL Reescriba cada sistema de ecuaciones en forma pendiente-intersección y trace la gráfica de cada sistema. ¿Cuál es la relación entre las pendientes de las dos rectas, el número de puntos de intersección y el número de soluciones?

(a) $\begin{cases} 5x - y = -1 \\ -x + y = -5 \end{cases}$ (b) $\begin{cases} 4x - 3y = 1 \\ -8x + 6y = -2 \end{cases}$

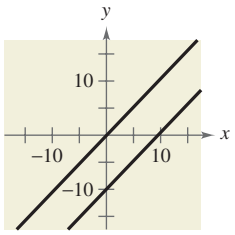
(c) $\begin{cases} x + 2y = 3 \\ x + 2y = -8 \end{cases}$

PIÉNSELO En los Ejercicios 69 y 70, las gráficas de las dos ecuaciones parecen paralelas. Sin embargo, cuando el sistema se resuelve algebraicamente, se encuentra que tiene una solución. Encuéntrela y explique por qué no aparece sobre la parte de la gráfica que se muestra.

69. $\begin{cases} 100y - x = 200 \\ 99y - x = -198 \end{cases}$



70. $\begin{cases} 21x - 20y = 0 \\ 13x - 12y = 120 \end{cases}$



En los Ejercicios 71 y 72, encuentre el valor de k tal que el sistema de ecuaciones lineales sea inconsistente.

71. $\begin{cases} 4x - 8y = -3 \\ 2x + ky = 16 \end{cases}$

72. $\begin{cases} 15x + 3y = 6 \\ -10x + ky = 9 \end{cases}$

APLICACIONES AVANZADAS En los Ejercicios 73 y 74, despeje u y v del sistema de ecuaciones. Mientras despeja estas variables, considere las funciones trascendentales como constantes. (Los sistemas de este tipo se encuentran en un curso de ecuaciones diferenciales.)

73. $\begin{cases} u \operatorname{sen} x + v \cos x = 0 \\ u \cos x - v \operatorname{sen} x = \sec x \end{cases}$

74. $\begin{cases} u \cos 2x + v \operatorname{sen} 2x = 0 \\ u(-2 \operatorname{sen} 2x) + v(2 \cos 2x) = \csc x \end{cases}$

PROYECTO: GASTOS EN UNIVERSIDADES Para resolver una aplicación extendida que analice el promedio de gastos de colegiatura, cuarto y alojamiento en instituciones privadas que otorgan títulos universitarios en Estados Unidos, de 1990 a 2007, visite *academic.cengage.com*. (Fuente: U.S. Dept. of Education)

7.3 Sistemas lineales de varias variables

Lo que debe aprender

- Usar sustitución hacia atrás para resolver sistemas lineales en forma escalonada por renglones.
- Usar eliminación gaussiana para resolver sistemas de ecuaciones lineales.
- Resolver sistemas no cuadrados de ecuaciones lineales.
- Usar sistemas de ecuaciones lineales con tres o más variables para modelar y resolver problemas de la vida real.

Por qué debe aprenderlo

Se pueden usar sistemas de ecuaciones lineales con tres o más variables para modelar y resolver problemas de la vida real. Por ejemplo, en el Ejercicio 83 de la página 529 se puede usar un sistema de ecuaciones para determinar la combinación de jugadas de anotación en el Súper Tazón XLIII.

Harry E. Walker/MCT/Landov

Forma escalonada por renglones y sustitución hacia atrás

El método de eliminación se puede aplicar a un sistema de ecuaciones lineales con más de dos variables. En efecto, este método fácilmente se adapta al uso de computadoras para resolver sistemas lineales con docenas de variables.

Cuando se use eliminación para resolver un sistema de ecuaciones lineales, el objetivo es reescribir el sistema en una forma a la que se pueda aplicar la sustitución hacia atrás. Para ver cómo funciona esto, considere los dos sistemas de ecuaciones lineales siguientes.

Sistema de tres ecuaciones lineales con tres variables: (Vea el Ejemplo 3.)

$$\begin{cases} x - 2y + 3z = 9 \\ -x + 3y = -4 \\ 2x - 5y + 5z = 17 \end{cases}$$

Sistema equivalente en forma escalonada por renglones: (Vea Ejemplo 1.)

$$\begin{cases} x - 2y + 3z = 9 \\ y + 3z = 5 \\ z = 2 \end{cases}$$

Se dice que el segundo sistema está en **forma escalonada por renglones,** lo cual significa que tiene un patrón de "escalón" con coeficientes iniciales de 1. Después de comparar los dos sistemas, debe quedar claro que es más fácil resolver el que tiene forma escalonada por renglones, usando sustitución hacia atrás.

Ejemplo 1 Usar sustitución hacia atrás en forma escalonada por renglones

Resuelva el sistema de ecuaciones lineales.

$$\begin{cases} x - 2y + 3z = 9 & \text{Ecuación 1} \\ y + 3z = 5 & \text{Ecuación 2} \\ z = 2 & \text{Ecuación 3} \end{cases}$$

Solución

De la ecuación 3, sabemos el valor de z. Para despejar y, sustituya $z = 2$ en la ecuación 2 para obtener

$$y + 3(2) = 5 \qquad \text{Sustituir 2 por } z.$$

$$y = -1. \qquad \text{Despejar } y.$$

A continuación, sustituya $y = -1$ y $z = 2$ en la ecuación 1 para obtener

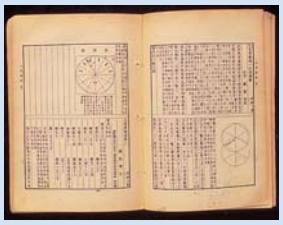
$$x - 2(-1) + 3(2) = 9 \qquad \text{Sustituir } -1 \text{ por } y \text{ y } 2 \text{ por } z.$$

$$x = 1. \qquad \text{Sustituir } x.$$

La solución es $x = 1$, $y = -1$ y $z = 2$, que se puede escribir como **terna ordenada** $(1, -1, 2)$. Compruébelo en el sistema original de ecuaciones.

PUNTO *de repaso* Ahora trate de hacer el Ejercicio 11.

NOTA HISTÓRICA


Christopher Lui/China Stock

Uno de los más influyentes libros de matemáticas chinos fue el *Chui-chang suan-shu* o *Nueve capítulos sobre el arte de las matemáticas* (escrito aproximadamente en el año 250 a.C.). El capítulo ocho de los *Nueve capítulos* contenía soluciones de sistemas de ecuaciones lineales que usaban números positivos y negativos. Uno de estos sistemas era como sigue.

$$\begin{cases} 3x + 2y + z = 39 \\ 2x + 3y + z = 34 \\ x + 2y + 3z = 26 \end{cases}$$

Este sistema se resolvía usando operaciones en columna en una matriz. Las matrices se estudiarán en el siguiente capítulo.

Eliminación gaussiana

Dos sistemas de ecuaciones son *equivalentes* si tienen el mismo conjunto solución. Para resolver un sistema que no sea de la forma escalonada por renglones, primero lo convertimos a un sistema *equivalente* que sea en forma escalonada por renglones usando las siguientes operaciones.

Operaciones que producen sistemas equivalentes

Cada una de las siguientes **operaciones de renglón** en un sistema de ecuaciones lineales produce un sistema *equivalente* de ecuaciones lineales.

1. Intercambiar dos ecuaciones.
2. Multiplicar una de las ecuaciones por una constante diferente de cero.
3. Sumar un múltiplo de una de las ecuaciones a otra ecuación para sustituir la última ecuación.

Para aprender cómo se hace esto, veamos de nuevo el método de eliminación como se aplica a un sistema de dos ecuaciones lineales.

Ejemplo 2 Usar eliminación gaussiana para resolver un sistema

Resuelva el sistema de ecuaciones lineales.

$$\begin{cases} 3x - 2y = -1 \\ x - y = 0 \end{cases}$$

Ecuación 1
Ecuación 2

Solución

Hay dos estrategias que parecen razonables: eliminar la variable x o eliminar la variable y. Los pasos siguientes muestran cómo usar la primera estrategia.

$$\begin{cases} x - y = 0 \\ 3x - 2y = -1 \end{cases}$$

Intercambiar las dos ecuaciones del sistema.

$$\begin{cases} -3x + 3y = 0 \\ 3x - 2y = -1 \end{cases}$$

Multiplicar por -3 la primera ecuación.

$$\begin{array}{r} -3x + 3y = 0 \\ 3x - 2y = -1 \\ \hline y = -1 \end{array}$$

Sumar el múltiplo de la primera ecuación a la segunda ecuación para obtener una nueva segunda ecuación.

$$\begin{cases} x - y = 0 \\ y = -1 \end{cases}$$

El nuevo sistema en forma escalonada por renglones

Nótese en el primer paso que intercambiar renglones es una forma fácil de obtener un coeficiente inicial de 1. Ahora, sustituya de nuevo $y = -1$ en la ecuación 2 y despeje x.

$$x - (-1) = 0$$

Sustituir -1 por y.

$$x = -1$$

Despejar x.

La solución es $x = -1$ y $y = -1$, que se pueden escribir como el par ordenado $(-1, -1)$.

PUNTO *de repaso* Ahora trate de hacer el Ejercicio 19.

Reescribir un sistema de ecuaciones lineales en forma escalonada por renglones por lo general comprende una cadena de sistemas equivalentes, cada uno de los cuales se obtiene usando una de las tres operaciones básicas de renglón que aparecen en la página previa. Este proceso se llama **eliminación gaussiana**, en honor al matemático alemán Carl Friedrich Gauss (1777–1855).

ATENCIÓN

Es frecuente cometer errores aritméticos cuando se realizan operaciones elementales de renglones. El estudiante debe observar la operación realizada en cada paso para poder regresar y verificar su trabajo.

Ejemplo 3 Usar eliminación gaussiana para resolver un sistema

Resuelva el siguiente sistema de ecuaciones lineales.

$$\begin{cases} x - 2y + 3z = 9 & \text{Ecuación 1} \\ -x + 3y = -4 & \text{Ecuación 2} \\ 2x - 5y + 5z = 17 & \text{Ecuación 3} \end{cases}$$

Solución

Como el coeficiente inicial de la primera ecuación es 1, se puede empezar por guardar la x en la esquina superior izquierda y eliminar los otros términos en x de la primera columna.

$$\begin{array}{rl} x - 2y + 3z = 9 & \text{Escribir la ecuación 1.} \\ -x + 3y = -4 & \text{Escribir la ecuación 2.} \\ \hline y + 3z = 5 & \text{Sumar las ecuaciones 1 y 2.} \end{array}$$

$$\begin{cases} x - 2y + 3z = 9 \\ y + 3z = 5 \\ 2x - 5y + 5z = 17 \end{cases}$$

Sumar la primera ecuación a la segunda produce una nueva segunda ecuación.

$$\begin{array}{rl} -2x + 4y - 6z = -18 & \text{Multiplicar por } -2 \text{ la ecuación 1.} \\ 2x - 5y + 5z = 17 & \text{Escribir la ecuación 3.} \\ \hline -y - z = -1 & \text{Sumar la ecuación 1 modificada a la ecuación 3.} \end{array}$$

$$\begin{cases} x - 2y + 3z = 9 \\ y + 3z = 5 \\ -y - z = -1 \end{cases}$$

Sumar -2 veces la primera ecuación a la tercera produce una nueva tercera ecuación.

Ahora que de la primera columna se han eliminado todas las x menos la primera, trabajamos la segunda columna. (Es necesario eliminar y de la tercera ecuación.)

$$\begin{cases} x - 2y + 3z = 9 \\ y + 3z = 5 \\ 2z = 4 \end{cases}$$

Sumar la segunda ecuación a la tercera produce una nueva tercera ecuación.

Por último, necesitamos un coeficiente de 1 para z en la tercera ecuación.

$$\begin{cases} x - 2y + 3z = 9 \\ y + 3z = 5 \\ z = 2 \end{cases}$$

Multiplicar la tercera ecuación por $\frac{1}{2}$ produce una nueva tercera ecuación

Éste es el mismo sistema que se resolvió en el Ejemplo 1, y, al igual que en ese ejemplo, se puede concluir que la solución es

$$x = 1, \quad y = -1 \quad \text{y} \quad z = 2.$$

PUNTO *de repaso* Ahora trate de hacer el Ejercicio 21.

El siguiente ejemplo contiene un sistema inconsistente, que no tiene solución. La clave para reconocer un sistema inconsistente es que en alguna etapa del proceso de eliminación se obtiene una proposición falsa, por ejemplo, $0 = -2$.

Ejemplo 4 Un sistema inconsistente

Resuelva el sistema de ecuaciones lineales.

$$\begin{cases} x - 3y + z = 1 & \text{Ecuación 1} \\ 2x - y - 2z = 2 & \text{Ecuación 2} \\ x + 2y - 3z = -1 & \text{Ecuación 3} \end{cases}$$

Solución

$$\begin{cases} x - 3y + z = 1 \\ 5y - 4z = 0 \\ x + 2y - 3z = -1 \end{cases}$$

Sumar -2 veces la primera ecuación a la segunda produce una nueva segunda ecuación.

$$\begin{cases} x - 3y + z = 1 \\ 5y - 4z = 0 \\ 5y - 4z = -2 \end{cases}$$

Sumar -1 veces la primera ecuación a la tercera produce una nueva tercera ecuación.

$$\begin{cases} x - 3y + z = 1 \\ 5y - 4z = 0 \\ 0 = -2 \end{cases}$$

Sumar -1 la segunda ecuación a la tercera produce una nueva tercera ecuación.

Como $0 = -2$ es una proposición falsa, se puede concluir que este sistema es inconsistente y no tiene solución. Además, como también es equivalente al sistema original, se puede concluir que éste tampoco tiene solución.

PUNTO *de repaso* Ahora trate de hacer el Ejercicio 25.

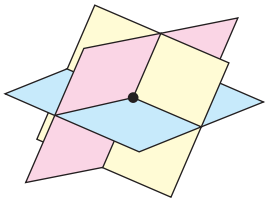
Al igual que con un sistema de ecuaciones lineales con dos variables, la solución(es) de un sistema de ecuaciones lineales con más de dos variables debe caer en una de tres categorías.

El número de soluciones de un sistema lineal

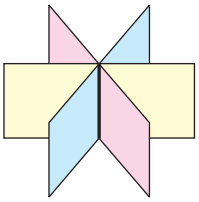
Para un sistema de ecuaciones lineales, es cierto exactamente uno de lo siguiente.

1. Hay exactamente una solución.
2. Hay un número infinito de soluciones.
3. No hay solución.

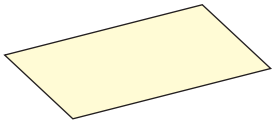
En la sección 7.2 usted aprendió que un sistema de dos ecuaciones lineales con dos variables se puede representar gráficamente como un par de rectas que se intersecan, son coincidentes o paralelas. Un sistema de tres ecuaciones lineales con tres variables tiene una representación gráfica similar; puede estar representado como tres planos en el espacio que se intersecan en un punto (exactamente una solución) [vea Figura 7.12], en una recta o un plano (número infinito de soluciones) [vea Figuras 7.13 y 7.14], o no tener puntos comunes a los tres planos (no hay solución) [vea Figuras 7.15 y 7.16].



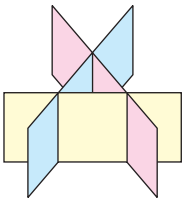
Solución: un punto
FIGURA 7.12



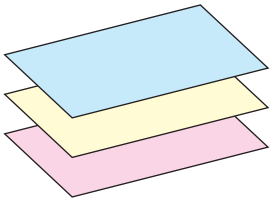
Solución: una recta
FIGURA 7.13



Solución: un plano
FIGURA 7.14



Solución: ninguna
FIGURA 7.15



Solución: ninguna
FIGURA 7.16

Ejemplo 5 Un sistema con un número infinito de soluciones

Resuelva el sistema de ecuaciones lineales.

$$\begin{cases} x + y - 3z = -1 & \text{Ecuación 1} \\ y - z = 0 & \text{Ecuación 2} \\ -x + 2y = 1 & \text{Ecuación 3} \end{cases}$$

Solución

$$\begin{cases} x + y - 3z = -1 \\ y - z = 0 \\ 3y - 3z = 0 \end{cases}$$

Sumar la primera ecuación a la tercera produce una nueva tercera ecuación.

$$\begin{cases} x + y - 3z = -1 \\ y - z = 0 \\ 0 = 0 \end{cases}$$

Sumar -3 veces la segunda ecuación a la tercera produce una nueva tercera ecuación.

Este resultado significa que la ecuación 3 depende de las ecuaciones 1 y 2, en el sentido de que no da información adicional acerca de las variables. Como $0 = 0$ es una proposición verdadera, se puede concluir que este sistema tendrá un número infinito de soluciones. No obstante, es incorrecto decir simplemente que la solución es "infinita"; se debe especificar también su forma correcta. Entonces, el sistema original es equivalente al sistema

$$\begin{cases} x + y - 3z = -1 \\ y - z = 0 \end{cases}.$$

En la última ecuación, despeje y en términos de z para obtener $y = z$. Al sustituir de nuevo $y = z$ en la primera ecuación produce $x = 2z - 1$. Por último, haciendo $z = a$, donde a es un número real, las soluciones al sistema dado son todas de la forma $x = 2a - 1$, $y = a$ y $z = a$. Por tanto, toda terna ordenada de la forma

$$(2a - 1, a, a) \qquad a \text{ es un número real.}$$

es una solución del sistema.

PUNTO *de repaso* Ahora trate de hacer el Ejercicio 29.

Tip de estudio

En el Ejemplo 5, x y y se despejan en términos de la tercera variable z. Para escribir la forma correcta de la solución al sistema que no usa ninguna de las tres variables del sistema, con a represente cualquier número real y sea $z = a$. A continuación despeje x y y. La solución se puede escribir entonces en términos de a, que no es una de las variables del sistema.

En el Ejemplo 5, hay otras formas de escribir el mismo conjunto infinito de soluciones. Por ejemplo, si hacemos $x = b$, las soluciones podrían haberse escrito como

$$\left(b, \tfrac{1}{2}(b + 1), \tfrac{1}{2}(b + 1)\right). \qquad b \text{ es un número real.}$$

Para que se convenza de que esta descripción produce el mismo conjunto de soluciones, considere lo siguiente.

Sustitución	*Solución*	
$a = 0$	$(2(0) - 1, 0, 0) = (-1, 0, 0)$	
$b = -1$	$\left(-1, \tfrac{1}{2}(-1 + 1), \tfrac{1}{2}(-1 + 1)\right) = (-1, 0, 0)$	Misma solución
$a = 1$	$(2(1) - 1, 1, 1) = (1, 1, 1)$	
$b = 1$	$\left(1, \tfrac{1}{2}(1 + 1), \tfrac{1}{2}(1 + 1)\right) = (1, 1, 1)$	Misma solución
$a = 2$	$(2(2) - 1, 2, 2) = (3, 2, 2)$	
$b = 3$	$\left(3, \tfrac{1}{2}(3 + 1), \tfrac{1}{2}(3 + 1)\right) = (3, 2, 2)$	Misma solución

Tip de estudio

Cuando compare descripciones de un conjunto infinito de solución, recuerde que hay más de una forma de describir el conjunto.

Sistemas no cuadrados

Hasta este punto, cada uno de los sistemas de ecuaciones lineales que hemos visto ha sido *cuadrado*, lo cual significa que el número de ecuaciones es igual al número de variables. En un sistema **no cuadrado,** el número de ecuaciones difiere del número de variables. Un sistema de ecuaciones lineales no puede tener una solución única a menos que tenga al menos tantas ecuaciones como variables.

Ejemplo 6 Un sistema con menos ecuaciones que variables

Resuelva el siguiente sistema de ecuaciones lineales.

$$\begin{cases} x - 2y + z = 2 & \text{Ecuación 1} \\ 2x - y - z = 1 & \text{Ecuación 2} \end{cases}$$

Solución

Empiece por reescribir el sistema en forma escalonada por renglones.

$$\begin{cases} x - 2y + z = 2 \\ 3y - 3z = -3 \end{cases}$$

Sumar -2 veces la primera ecuación a la segunda produce una nueva segunda ecuación

$$\begin{cases} x - 2y + z = 2 \\ y - z = -1 \end{cases}$$

Multiplicar la segunda ecuación por $\frac{1}{3}$ produce una nueva segunda ecuación.

Despeje y en términos de z para obtener

$$y = z - 1.$$

Al sustituir de nuevo $y = z - 1$ en la ecuación 1, se puede despejar x como sigue.

$$\begin{aligned} x - 2y + z &= 2 && \text{Escribir la ecuación 1.} \\ x - 2(z - 1) + z &= 2 && \text{Sustituir } z - 1 \text{ por } y \text{ en la ecuación 1.} \\ x - 2z + 2 + z &= 2 && \text{Propiedad distributiva} \\ x &= z && \text{Despejar } x. \end{aligned}$$

Por último, haciendo $z = a$, donde a es un número real, tenemos la solución

$$x = a, \quad y = a - 1 \quad \text{y} \quad z = a.$$

Por tanto, toda terna ordenada de la forma

$$(a, a - 1, a) \qquad a \text{ es un número real.}$$

es una solución del sistema. Como originalmente había tres variables y sólo dos ecuaciones, el sistema no puede tener una solución única.

PUNTO *de repaso* Ahora trate de hacer el Ejercicio 33.

En el Ejemplo 6, trate de escoger algunos valores de a para obtener soluciones diferentes del sistema, por ejemplo $(1, 0, 1)$, $(2, 1, 2)$ y $(3, 2, 3)$. A continuación compruebe cada una de las soluciones en el sistema original para verificar que sean soluciones del sistema original.

Aplicaciones

Ejemplo 7 Movimiento vertical

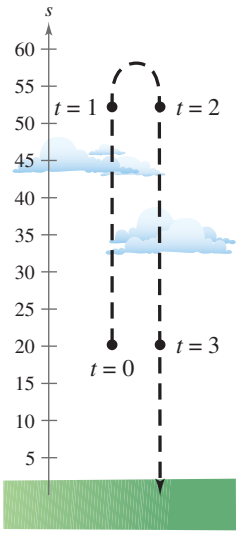


FIGURA 7.17

La altura en el tiempo t de un cuerpo que se mueve en una recta (vertical) con aceleración constante a está dada por la **ecuación de posición**

$$s = \tfrac{1}{2}at^2 + v_0t + s_0.$$

La altura s se mide en pies, la aceleración a en pies por segundo al cuadrado, t en segundos, v_0 es la velocidad inicial (en $t = 0$) y s_0 es la altura inicial. Encuentre los valores de a, v_0 y s_0 si $s = 52$ en $t = 1$, $s = 52$ en $t = 2$ y $s = 20$ en $t = 3$, e interprete el resultado. (Vea figura 7.17.)

Solución

Al sustituir los tres valores de t y s en la ecuación de posición, se pueden obtener tres ecuaciones lineales en a, v_0 y s_0.

$$\text{Cuando } t = 1\text{:}\quad \tfrac{1}{2}a(1)^2 + v_0(1) + s_0 = 52 \quad\Rightarrow\quad a + 2v_0 + 2s_0 = 104$$
$$\text{Cuando } t = 2\text{:}\quad \tfrac{1}{2}a(2)^2 + v_0(2) + s_0 = 52 \quad\Rightarrow\quad 2a + 2v_0 + s_0 = 52$$
$$\text{Cuando } t = 3\text{:}\quad \tfrac{1}{2}a(3)^2 + v_0(3) + s_0 = 20 \quad\Rightarrow\quad 9a + 6v_0 + 2s_0 = 40$$

Esto produce el siguiente sistema de ecuaciones lineales.

$$\begin{cases} a + 2v_0 + 2s_0 = 104 \\ 2a + 2v_0 + s_0 = 52 \\ 9a + 6v_0 + 2s_0 = 40 \end{cases}$$

A continuación resuelva el sistema usando eliminación gaussiana.

$$\begin{cases} a + 2v_0 + 2s_0 = 104 \\ -2v_0 - 3s_0 = -156 \\ 9a + 6v_0 + 2s_0 = 40 \end{cases}$$
Sumar -2 veces la primera ecuación a la segunda produce una nueva segunda ecuación.

$$\begin{cases} a + 2v_0 + 2s_0 = 104 \\ -2v_0 - 3s_0 = -156 \\ -12v_0 - 16s_0 = -896 \end{cases}$$
Sumar -9 veces la primera ecuación a la tercera produce una nueva tercera ecuación.

$$\begin{cases} a + 2v_0 + 2s_0 = 104 \\ -2v_0 - 3s_0 = -156 \\ 2s_0 = 40 \end{cases}$$
Sumar -6 veces la segunda ecuación a la tercera ecuación produce una nueva tercera ecuación.

$$\begin{cases} a + 2v_0 + 2s_0 = 104 \\ v_0 + \tfrac{3}{2}s_0 = 78 \\ s_0 = 20 \end{cases}$$
Multiplicar la segunda ecuación por $-\frac{1}{2}$ produce una nueva segunda ecuación, y multiplicar la tercera ecuación por $\frac{1}{2}$ produce una nueva tercera ecuación.

Por tanto, la solución de este sistema es $a = -32$, $v_0 = 48$ y $s_0 = 20$, que se pueden escribir como $(-32, 48, 20)$. Esta solución resulta en una ecuación de posición de $s = -16t^2 + 48t + 20$ e implica que el cuerpo fue lanzado hacia arriba a una velocidad de 48 pies por segundo desde una altura de 20 pies.

PUNTO *de repaso* Ahora trate de hacer el Ejercicio 45.

Ejemplo 8 Análisis de datos: ajuste de curvas

Encuentre una ecuación cuadrática

$$y = ax^2 + bx + c$$

cuya gráfica pasa por los puntos $(-1, 3)$, $(1, 1)$ y $(2, 6)$.

Solución

Como la gráfica de $y = ax^2 + bx + c$ pasa por los puntos $(-1, 3)$, $(1, 1)$ y $(2, 6)$, se puede escribir lo siguiente.

$$\begin{aligned}
&\text{Cuando } x = -1,\ y = 3: && a(-1)^2 + b(-1) + c = 3\\
&\text{Cuando } x = 1,\ y = 1: && a(1)^2 + (1) + c = 1\\
&\text{Cuando } x = 2,\ y = 6: && a(2)^2 + (2) + c = 6
\end{aligned}$$

Esto produce el siguiente sistema de ecuaciones lineales.

$$\begin{cases}
a - b + c = 3 & \text{Ecuación 1}\\
a + b + c = 1 & \text{Ecuación 2}\\
4a + 2b + c = 6 & \text{Ecuación 3}
\end{cases}$$

La solución de este sistema es $a = 2$, $b = -1$ y $c = 0$. Por tanto, la ecuación de la parábola es $y = 2x^2 - x$, como se ve en la Figura 7.18.

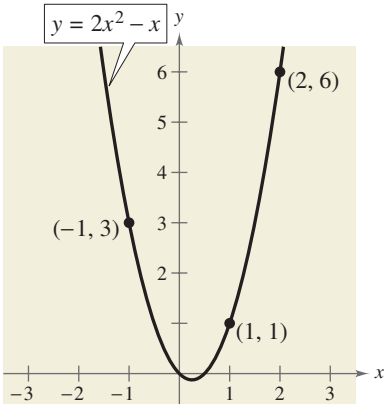


FIGURA 7.18

PUNTO *de repaso* Ahora trate de hacer el Ejercicio 49.

Ejemplo 9 Análisis de inversiones

Una herencia de \$12 000 se invirtió entre tres fondos: un fondo de mercado de dinero que pagaba 3% anualmente, bonos municipales que pagaban 4% anualmente y fondos mutuos que pagaban 7% anualmente. La cantidad invertida en fondos mutuos fue \$4000 más que la invertida en bonos municipales. El interés total ganado durante el primer año fue \$670. ¿Cuánto se invirtió en cada tipo de fondo?

Solución

Con x, y y z representemos las cantidades invertidas en el fondo de mercado de dinero, bonos municipales y fondos mutuos, respectivamente. De la información dada, se pueden escribir las siguientes ecuaciones.

$$\begin{cases}
x + y + z = 12\,000 & \text{Ecuación 1}\\
z = y + 4000 & \text{Ecuación 2}\\
0.03x + 0.04y + 0.07z = 670 & \text{Ecuación 3}
\end{cases}$$

Reescribir este sistema en forma estándar sin decimales produce lo siguiente.

$$\begin{cases}
x + y + z = 12\,000 & \text{Ecuación 1}\\
-y + z = 4000 & \text{Ecuación 2}\\
3x + 4y + 7z = 67\,000 & \text{Ecuación 3}
\end{cases}$$

Usando eliminación gaussiana para resolver este sistema dará $x = 2000$, $y = 3000$ y $z = 7000$. Por tanto, \$2000 se invirtieron en el fondo de mercado de dinero, \$3000 en bonos municipales y \$7000 en fondos mutuos.

PUNTO *de repaso* Ahora trate de hacer el Ejercicio 61.

7.3 EJERCICIOS

En www.CalcChat.com vea las soluciones a los ejercicios impares.

VOCABULARIO: Llene los espacios en blanco.

1. Un sistema de ecuaciones que está en forma de _____ _____ _____ tiene un patrón de "escalón" con coeficientes iniciales de 1.
2. Una solución al sistema de tres ecuaciones lineales con tres incógnitas se puede escribir como una _____ _____, que tiene la forma (x, y, z).
3. El proceso empleado para escribir un sistema de ecuaciones lineales en forma escalonada por renglones se denomina eliminación _____.
4. Intercambiar dos ecuaciones de un sistema de ecuaciones lineales es un _____ _____ que produce un sistema equivalente.
5. Un sistema de ecuaciones se llama _____ _____ si el número de ecuaciones difiere del número de variables en el sistema.
6. La ecuación $s = \frac{1}{2}at^2 + v_0t + s_0$ recibe el nombre de ecuación _____, y modela la altura s de un cuerpo en el tiempo t que se mueve en una recta vertical con una aceleración constante a.

HABILIDADES Y APLICACIONES

En los Ejercicios 7-10, determine si cada terna ordenada es una solución del sistema de ecuaciones.

7. $\begin{cases} 6x - y + z = -1 \\ 4x - 3z = -19 \\ 2y + 5z = 25 \end{cases}$

(a) $(2, 0, -2)$ (b) $(-3, 0, 5)$
(c) $(0, -1, 4)$ (d) $(-1, 0, 5)$

8. $\begin{cases} 3x + 4y - z = 17 \\ 5x - y + 2z = -2 \\ 2x - 3y + 7z = -21 \end{cases}$

(a) $(3, -1, 2)$ (b) $(1, 3, -2)$
(c) $(4, 1, -3)$ (d) $(1, -2, 2)$

9. $\begin{cases} 4x + y - z = 0 \\ -8x - 6y + z = -\frac{7}{4} \\ 3x - y = -\frac{9}{4} \end{cases}$

(a) $\left(\frac{1}{2}, -\frac{3}{4}, -\frac{7}{4}\right)$ (b) $\left(-\frac{3}{2}, \frac{5}{4}, -\frac{5}{4}\right)$
(c) $\left(-\frac{1}{2}, \frac{3}{4}, -\frac{5}{4}\right)$ (d) $\left(-\frac{1}{2}, \frac{1}{6}, -\frac{3}{4}\right)$

10. $\begin{cases} -4x - y - 8z = -6 \\ y + z = 0 \\ 4x - 7y = 6 \end{cases}$

(a) $(-2, -2, 2)$ (b) $\left(-\frac{33}{2}, -10, 10\right)$
(c) $\left(\frac{1}{8}, -\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right)$ (d) $\left(-\frac{11}{2}, -4, 4\right)$

En los Ejercicios 11-16, use sustitución hacia atrás para resolver el sistema de ecuaciones lineales.

11. $\begin{cases} 2x - y + 5z = 24 \\ y + 2z = 6 \\ z = 8 \end{cases}$

12. $\begin{cases} 4x - 3y - 2z = 21 \\ 6y - 5z = -8 \\ z = -2 \end{cases}$

13. $\begin{cases} 2x + y - 3z = 10 \\ y + z = 12 \\ z = 2 \end{cases}$

14. $\begin{cases} x - y + 2z = 22 \\ 3y - 8z = -9 \\ z = -3 \end{cases}$

15. $\begin{cases} 4x - 2y + z = 8 \\ -y + z = 4 \\ z = 11 \end{cases}$

16. $\begin{cases} 5x - 8z = 22 \\ 3y - 5z = 10 \\ z = -4 \end{cases}$

En los Ejercicios 17 y 18, realice la operación por renglones y escriba el sistema equivalente.

17. Sume la ecuación 1 a la ecuación 2.

$$\begin{cases} x - 2y + 3z = 5 & \text{Ecuación 1} \\ -x + 3y - 5z = 4 & \text{Ecuación 2} \\ 2x - 3z = 0 & \text{Ecuación 3} \end{cases}$$

¿A dónde condujo esta operación?

18. Sume -2 veces la ecuación 1 a la ecuación 3.

$$\begin{cases} x - 2y + 3z = 5 & \text{Ecuación 1} \\ -x + 3y - 5z = 4 & \text{Ecuación 2} \\ 2x - 3z = 0 & \text{Ecuación 3} \end{cases}$$

¿A dónde condujo esta operación?

En los Ejercicios 19-44, resuelva el sistema de ecuaciones lineales y verifique algebraicamente cualquier solución.

19. $\begin{cases} x + y + z = 7 \\ 2x - y + z = 9 \\ 3x - z = 10 \end{cases}$

20. $\begin{cases} x + y + z = 5 \\ x - 2y + 4z = 13 \\ 3y + 4z = 13 \end{cases}$

21. $\begin{cases} 2x + 2z = 2 \\ 5x + 3y = 4 \\ 3y - 4z = 4 \end{cases}$

22. $\begin{cases} 2x + 4y + z = 1 \\ x - 2y - 3z = 2 \\ x + y - z = -1 \end{cases}$

23. $\begin{cases} 6y + 4z = -12 \\ 3x + 3y = 9 \\ 2x - 3z = 10 \end{cases}$

24. $\begin{cases} 2x + 4y - z = 7 \\ 2x - 4y + 2z = -6 \\ x + 4y + z = 0 \end{cases}$

25. $\begin{cases} 2x + y - z = 7 \\ x - 2y + 2z = -9 \\ 3x - y + z = 5 \end{cases}$

26. $\begin{cases} 5x - 3y + 2z = 3 \\ 2x + 4y - z = 7 \\ x - 11y + 4z = 3 \end{cases}$

27. $\begin{cases} 3x - 5y + 5z = 1 \\ 5x - 2y + 3z = 0 \\ 7x - y + 3z = 0 \end{cases}$

28. $\begin{cases} 2x + y + 3z = 1 \\ 2x + 6y + 8z = 3 \\ 6x + 8y + 18z = 5 \end{cases}$

29. $\begin{cases} x + 2y - 7z = -4 \\ 2x + y + z = 13 \\ 3x + 9y - 36z = -33 \end{cases}$

30. $\begin{cases} 2x + y - 3z = 4 \\ 4x + 2z = 10 \\ -2x + 3y - 13z = -8 \end{cases}$

31. $\begin{cases} 3x - 3y + 6z = 6 \\ x + 2y - z = 5 \\ 5x - 8y + 13z = 7 \end{cases}$

32. $\begin{cases} x + 2z = 5 \\ 3x - y - z = 1 \\ 6x - y + 5z = 16 \end{cases}$

33. $\begin{cases} x - 2y + 5z = 2 \\ 4x - z = 0 \end{cases}$

34. $\begin{cases} x - 3y + 2z = 18 \\ 5x - 13y + 12z = 80 \end{cases}$

35. $\begin{cases} 2x - 3y + z = -2 \\ -4x + 9y = 7 \end{cases}$

36. $\begin{cases} 2x + 3y + 3z = 7 \\ 4x + 18y + 15z = 44 \end{cases}$

37. $\begin{cases} x + 3w = 4 \\ 2y - z - w = 0 \\ 3y - 2w = 1 \\ 2x - y + 4z = 5 \end{cases}$

38. $\begin{cases} x + y + z + w = 6 \\ 2x + 3y - w = 0 \\ -3x + 4y + z + 2w = 4 \\ x + 2y - z + w = 0 \end{cases}$

39. $\begin{cases} x + 4z = 1 \\ x + y + 10z = 10 \\ 2x - y + 2z = -5 \end{cases}$

40. $\begin{cases} 2x - 2y - 6z = -4 \\ -3x + 2y + 6z = 1 \\ x - y - 5z = -3 \end{cases}$

41. $\begin{cases} 2x + 3y = 0 \\ 4x + 3y - z = 0 \\ 8x + 3y + 3z = 0 \end{cases}$

42. $\begin{cases} 4x + 3y + 17z = 0 \\ 5x + 4y + 22z = 0 \\ 4x + 2y + 19z = 0 \end{cases}$

43. $\begin{cases} 12x + 5y + z = 0 \\ 23x + 4y - z = 0 \end{cases}$

44. $\begin{cases} 2x - y - z = 0 \\ -2x + 6y + 4z = 2 \end{cases}$

MOVIMIENTO VERTICAL En los Ejercicios 45-48, un cuerpo que se mueve verticalmente está a las alturas dadas en los tiempos especificados. Encuentre la ecuación de posición $s = \frac{1}{2}at^2 + v_0t + s_0$ para el cuerpo.

45. En $t = 1$ segundo(s), $s = 128$ pies
En $t = 2$ segundo(s), $s = 80$ pies
En $t = 3$ segundo(s), $s = 0$ pies

46. En $t = 1$ segundo(s), $s = 32$ pies
En $t = 2$ segundo(s), $s = 32$ pies
En $t = 3$ segundo(s), $s = 0$ pies

47. En $t = 1$ segundo(s), $s = 352$ pies
En $t = 2$ segundo(s), $s = 272$ pies
En $t = 3$ segundo(s), $s = 160$ pies

48. En $t = 1$ segundo(s), $s = 132$ pies
En $t = 2$ segundo(s), $s = 100$ pies
En $t = 3$ segundo(s), $s = 36$ pies

En los Ejercicios 49-54, encuentre la ecuación de la circunferencia

$$y = ax^2 + bx + c$$

que pasa por los puntos. Para verificar su resultado, use una calculadora de gráficas para determinar los puntos y graficar la circunferencia.

49. $(0, 0), (2, -2), (4, 0)$

50. $(0, 3), (1, 4), (2, 3)$

51. $(2, 0), (3, -1), (4, 0)$

52. $(1, 3), (2, 2), (3, -3)$

53. $\left(\frac{1}{2}, 1\right), (1, 3), (2, 13)$

54. $(-2, -3), (-1, 0), \left(\frac{1}{2}, -3\right)$

En los Ejercicios 55-58, encuentre la ecuación de la circunferencia

$$x^2 + y^2 + Dx + Ey + F = 0$$

que pasa por los puntos. Para verificar su resultado, use una calculadora de gráficas para determinar los puntos y graficar la circunferencia.

55. $(0, 0), (5, 5), (10, 0)$

56. $(0, 0), (0, 6), (3, 3)$

57. $(-3, -1), (2, 4), (-6, 8)$

58. $(0, 0), (0, -2), (3, 0)$

59. DEPORTES En el Súper Tazón I, el 15 de enero de 1967, los Empacadores de Green Bay derrotaron a los Jefes de Kansas City por un marcador de 35 a 10. El total de puntos anotados provino de 13 jugadas diferentes de anotación, que fueron una combinación de *touchdowns*, patadas de punto extra y goles de campo, con valor de 6, 1 y 3 puntos, respectivamente. Se anotó el mismo número de *touchdowns* y patadas de punto extra. Hubo seis veces más *touchdowns* que goles de campo. ¿Cuántos *touchdowns*, patadas de punto extra y goles de campo se anotaron durante el juego? (Fuente: Super Bowl.com)

60. DEPORTES En el juego final de campeonato de 2008 de la NCAA para mujeres, la Universidad de Tennessee Lady Volunteers derrotó a la de Stanford Cardinal por un marcador de 64 a 48. Las Lady Volunteers ganaron por anotar una combinación de canastas de dos puntos, canastas de tres puntos y tiros libres de un punto. El número de canastas de dos puntos fue dos más que el de tiros libres. El número de tiros libres fue dos más que cinco veces el número de canastas de tres puntos. ¿Qué combinación de anotaciones explica los 64 puntos de las Lady Volunteers? (Fuente: National Collegiate Athletic Association)

61. FINANZAS Una pequeña corporación solicitó en préstamo $775 000 para expandir su línea de prendas de vestir. Parte del dinero se obtuvo a 8%, parte a 9% y parte a 10%. ¿Cuánto se obtuvo a cada tasa si el interés anual adeudado fue $67 500 y la cantidad solicitada al 8% fue cuatro veces la cantidad solicitada a 10%?

62. FINANZAS Una pequeña corporación solicitó en préstamo $800 000 para expandir su línea de juguetes. Parte del dinero se obtuvo a 8%, parte a 9% y parte a 10%. ¿Cuánto se obtuvo a cada tasa si el interés anual adeudado fue $67 000 y la cantidad solicitada a 8% fue cinco veces la cantidad solicitada a 10%?

CARTERA DE INVERSIONES En los Ejercicios 63 y 64, considere un inversionista con una cartera que totaliza $500 000 que se invierten en certificados de depósito, bonos municipales, acciones preferenciales y títulos de crecimiento o especulativos. ¿Cuánto se invierte en cada tipo de inversión?

63. Los certificados de depósito pagan 3% anualmente y los bonos municipales 5% anualmente. En un periodo de cinco años, el inversionista espera que las acciones preferenciales den un rendimiento de 8% anualmente y que los títulos de crecimiento den 10% al año. El inversionista desea un rendimiento anual combinado de 5% y también desea tener sólo un cuarto de la cartera invertido en acciones.

64. Los certificados de depósito pagan 2% anualmente y los bonos municipales pagan 4% anualmente. En un periodo de cinco años, el inversionista espera que las acciones preferenciales den un rendimiento de 10% anualmente y que los títulos de crecimiento den 14% anualmente. El inversionista desea un rendimiento anual combinado de 6% y también desea tener sólo un cuarto de la cartera invertido en acciones.

65. AGRICULTURA Una mezcla de 5 libras de fertilizante A, 13 libras de fertilizante B y 4 libras de fertilizante C da los nutrientes óptimos para una planta. La marca comercial X contiene partes iguales de fertilizante B y fertilizante C. La marca comercial Y contiene una parte de fertilizante A y dos partes de fertilizante B. La marca comercial Z contiene dos partes de fertilizante A, cinco partes de fertilizante B y dos partes de fertilizante C. ¿Qué cantidad de cada marca de fertilizante es necesaria para obtener la mezcla deseada?

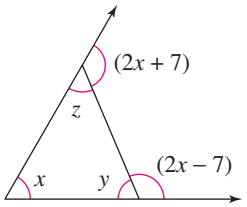
66. AGRICULTURA Se requiere de una mezcla de 12 litros del producto químico A, 16 litros del producto químico B y 26 litros del producto químico C para matar un destructivo insecto de las cosechas. El pulverizador comercial X contiene 1, 2 y 3 partes, respectivamente, de estos productos químicos. El pulverizador comercial Y contiene sólo el producto químico C y el pulverizador comercial Z contiene sólo los productos químicos A y B en cantidades iguales. ¿Cuánto de cada tipo de pulverizador comercial es necesario para obtener la mezcla deseada?

67. GEOMETRÍA El perímetro de un triángulo es 110 pies. Su lado más largo es 21 pies más largo que el lado más corto. La suma de las longitudes de los dos lados más cortos es 14 pies más que la longitud del lado más largo. Encuentre las longitudes de los lados del triángulo.

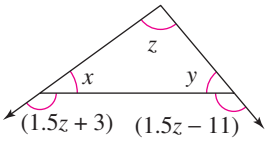
68. GEOMETRÍA El perímetro de un triángulo es 180 pies. Su lado más largo es 9 pies más corto que dos veces el lado más corto. La suma de las longitudes de los dos lados más cortos es 30 pies más que la longitud del lado más largo. Encuentre las longitudes de los lados del triángulo.

En los Ejercicios 69 y 70, encuentre los valores de x, y y z en la figura.

69.



70.



71. PUBLICIDAD Una compañía de seguros para la salud se anuncia en televisión, en radio y en un diario local. El departamento de mercadotecnia tiene un presupuesto de publicidad de $42 000 al mes. Un anuncio en televisión cuesta $1000, uno en radio $200 y uno en el periódico $500. El departamento desea publicar 60 anuncios por mes y tener tantos anuncios por televisión como en radio y periódico combinados. ¿Cuántos de cada tipo de anuncio puede publicar el departamento en un mes?

72. RADIO Usted trabaja como disc jockey en la estación de radio de su colegio, suponiéndose que debe reproducir 32 canciones en no más de dos horas. Debe escoger las canciones de entre los últimos álbumes de rock, dance y música pop, y desea reproducir el doble de discos de rock que de pop y cuatro veces más canciones de pop que de dance. ¿Cuántos de cada tipo de canción debe reproducir?

73. MEZCLA ÁCIDA Un químico necesita 10 litros de una solución ácida al 25%. La solución debe mezclarse a partir de tres soluciones cuyas concentraciones son 10%, 20% y 50%. ¿Cuántos litros de cada solución satisfarán cada condición?

(a) Usar 2 litros de la solución al 50%.

(b) Usar tan poco como sea posible de la solución al 50%.

(c) Usar tanto como sea posible de la solución al 50%.

74. MEZCLA ÁCIDA Un químico necesita 12 galones de una solución ácida al 20%. La solución debe mezclarse a partir de tres soluciones cuyas concentraciones son 10%, 15% y 25%. ¿Cuántos galones de cada solución satisfarán cada condición?

(a) Usar 4 galones de la solución al 25%.

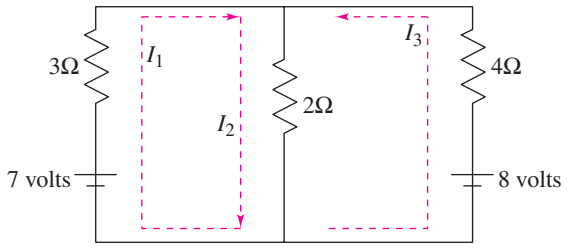
(b) Usar tan poco como sea posible de la solución al 25%.

(c) Usar tanto como sea posible de la solución al 25%.

75. RED ELÉCTRICA Si se aplican las leyes de Kirchhoff a la red eléctrica de la figura, las corrientes I_1, I_2 y I_3 son la solución del sistema

$$\begin{cases} I_1 - I_2 + I_3 = 0 \\ 3I_1 + 2I_2 = 7 \\ 2I_2 + 4I_3 = 8 \end{cases}$$

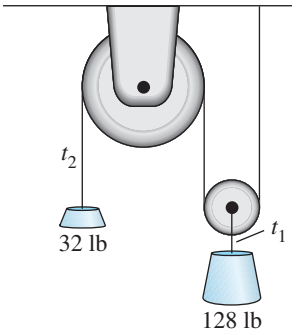
Encuentre las corrientes.



76. SISTEMA DE POLEAS Un sistema de poleas se carga con 128 libras y pesas de 32 libras (vea figura). Las tensiones t_1 y t_2 en las cuerdas y la aceleración a de la pesa de 32 libras se encuentran al resolver el sistema de ecuaciones

$$\begin{cases} t_1 - 2t_2 = 0 \\ t_1 - 2a = 128 \\ t_2 + a = 32 \end{cases}$$

donde t_1 y t_2 se miden en libras y a se mide en pies por segundo al cuadrado.



(a) Resuelva este sistema.

(b) La pesa de 32 libras del sistema de poleas es sustituida por una pesa de 64 libras. El nuevo sistema de poleas se puede modelar con el sistema de ecuaciones siguiente.

$$\begin{cases} t_1 - 2t_2 = 0 \\ t_1 - 2a = 128 \\ t_2 + a = 64 \end{cases}$$

Resuelva este sistema y use su respuesta para la aceleración para describir lo que pasa (si algo pasa) en el sistema de poleas.

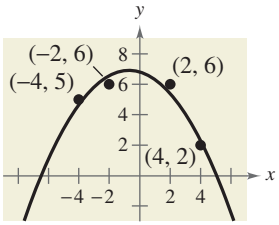
AJUSTE DE UNA PARÁBOLA En los Ejercicios 77-80, encuentre la parábola de regresión de mínimos cuadrados $y = ax^2 + bx + c$ para los puntos $(x_1, y_1), (x_2, y_2), \ldots, (x_n, y_n)$ al resolver el siguiente sistema de ecuaciones lineales para a, b y c. A continuación use el comando *regression* de una calculadora de gráficas para confirmar el resultado. (Si no está familiarizado con la notación de suma, vea la exposición de la sección 9.1 o el apéndice B en el sitio web para este texto en *academic.cengage.com*.)

$$nc + \left(\sum_{i=1}^{n} x_i\right)b + \left(\sum_{i=1}^{n} x_i^2\right)a = \sum_{i=1}^{n} y_i$$

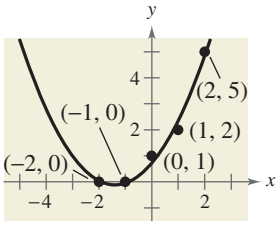
$$\left(\sum_{i=1}^{n} x_i\right)c + \left(\sum_{i=1}^{n} x_i^2\right)b + \left(\sum_{i=1}^{n} x_i^3\right)a = \sum_{i=1}^{n} x_i y_i$$

$$\left(\sum_{i=1}^{n} x_i^2\right)c + \left(\sum_{i=1}^{n} x_i^3\right)b + \left(\sum_{i=1}^{n} x_i^4\right)a = \sum_{i=1}^{n} x_i^2 y_i$$

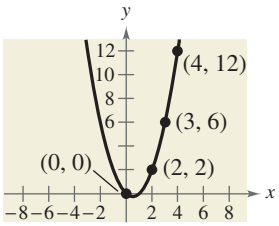
77.



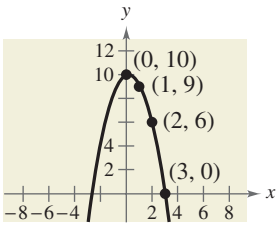
78.



79.



80.



81. ANÁLISIS DE DATOS: FAUNA SILVESTRE Un equipo de administración de la fauna silvestre estudió los porcentajes de reproducción de venados en tres terrenos de una reserva para fauna silvestre. Cada terreno tenía 5 acres. En cada uno se registró el número x de hembras y el porcentaje y de hembras que tuvieron descendientes al año siguiente. Los resultados se muestran en la tabla.

Número, x	Porcentaje, y
100	75
120	68
140	55

(a) Utilice la técnica demostrada en los Ejercicios 77-80 para establecer un sistema de ecuaciones para los datos, así como para hallar una parábola de regresión de mínimos cuadrados que los modele.

(b) Use una calculadora de gráficas para graficar la parábola y los datos en la misma pantalla.

(c) Utilice el modelo para crear una tabla de valores de y estimados. Compare los valores estimados con los datos reales.

(d) Use el modelo para estimar el porcentaje de hembras que tuvieron descendientes cuando había 170 hembras.

(e) Use el modelo para estimar el número de hembras cuando 40% de ellas tuvieron descendientes.

82. ANÁLISIS DE DATOS: DISTANCIA DE PARADA Al probar un nuevo sistema de frenado para automóviles, la velocidad x (en millas por hora) y la distancia de frenado y (en pies) se registraron en la tabla.

Velocidad, x	Distancia de frenado, y
30	55
40	105
50	188

(a) Use la técnica demostrada en los Ejercicios 77-80 para establecer un sistema de ecuaciones para los datos, así como para hallar una parábola de regresión de mínimos cuadrados que los modele.

(b) Grafique la parábola y los datos en el mismo conjunto de ejes.

(c) Use el modelo para estimar la distancia de frenado cuando la velocidad sea de 70 millas por hora.

83. DEPORTES En el Súper Tazón XLIII, el 1 de febrero de 2009, los Acereros de Pittsburgh derrotaron a los Cardenales de Arizona con un marcador de 27 a 23. El total de puntos anotados provino de 15 jugadas diferentes de anotación, que fueron una combinación de *touchdowns*, patadas de punto extra, goles de campo y *safeties*, con valor de 6, 1, 3 y 2 puntos, respectivamente. Hubo tres veces más *touchdowns* que goles de campo, y el número de patadas de punto extra fue igual que el número de *touchdowns*. ¿Cuántos *touchdowns*, patadas de punto extra, goles de campo y *safeties* se anotaron durante el juego? (Fuente: National Football League)

84. DEPORTES En el Tazón de 2008 de las Fuerzas Armadas, la Universidad de Houston derrotó a la Academia de la Fuerza Aérea con un marcador de 34 a 28. El total de puntos anotados provino de 18 jugadas diferentes de anotación, que fueron una combinación de *touchdowns*, patadas de punto extra, goles de campo y conversiones de dos puntos con valor de 6, 1, 3 y 2 puntos, respectivamente. El número de *touchdowns* fue uno más que el número de patadas de punto extra, y hubo cuatro veces más goles de campo que conversiones de dos puntos. ¿Cuántos *touchdowns*, patadas de punto extra, goles de campo y conversiones de dos puntos se anotaron durante el juego? (Fuente: ESPN.com)

APLICACIONES AVANZADAS En los Ejercicios 85-88, encuentre valores de x, y y λ que satisfagan el sistema. Estos sistemas aparecen en ciertos problemas de optimización en cálculo, y λ recibe el nombre de multiplicador de Lagrange.

85.
$$\begin{cases} y + \lambda = 0 \\ x + \lambda = 0 \\ x + y - 10 = 0 \end{cases}$$

86.
$$\begin{cases} 2x + \lambda = 0 \\ 2y + \lambda = 0 \\ x + y - 4 = 0 \end{cases}$$

87.
$$\begin{cases} 2x - 2x\lambda = 0 \\ -2y + \lambda = 0 \\ y - x^2 = 0 \end{cases}$$

88.
$$\begin{cases} 2 + 2y + 2\lambda = 0 \\ 2x + 1 + \lambda = 0 \\ 2x + y - 100 = 0 \end{cases}$$

EXPLORACIÓN

¿VERDADERO O FALSO? En los Ejercicios 89 y 90, determine si la proposición es verdadera o falsa. Justifique su respuesta.

89. El sistema

$$\begin{cases} x + 3y - 6z = -16 \\ 2y - z = -1 \\ z = 3 \end{cases}$$

está en forma escalonada por renglones.

90. Si un sistema de tres ecuaciones lineales es inconsistente, entonces su gráfica no tiene puntos comunes a las tres ecuaciones.

91. PIÉNSELO ¿Los siguientes dos sistemas de ecuaciones son equivalentes? Dé razones para su respuesta.

$$\begin{cases} x + 3y - z = 6 \\ 2x - y + 2z = 1 \\ 3x + 2y - z = 2 \end{cases} \qquad \begin{cases} x + 3y - z = 6 \\ -7y + 4z = 1 \\ -7y - 4z = -16 \end{cases}$$

92. TOQUE FINAL Encuentre valores de a, b y c (si es posible) tales que el sistema de ecuaciones lineales (a) tenga una solución única, (b) no tenga solución y (c) tenga un número infinito de soluciones.

$$\begin{aligned} x + y &= 2 \\ y + z &= 2 \\ x + z &= 2 \\ ax + by + cz &= 0 \end{aligned}$$

En los Ejercicios 93-96, encuentre dos sistemas de ecuaciones lineales que tengan la terna ordenada como solución. (Hay numerosas respuestas correctas.)

93. $(3, -4, 2)$ **94.** $(-5, -2, 1)$

95. $\left(-6, -\frac{1}{2}, -\frac{7}{4}\right)$ **96.** $\left(-\frac{3}{2}, 4, -7\right)$

PROYECTO: GANANCIAS POR ACCIÓN Para resolver una aplicación extendida analizando las ganancias por acción para Wal-Mart Stores, Inc. de 1992 a 2007, visite el sitio web de este texto en *academic.cengage.com*. (Fuente: Wal-Mart Stores, Inc.)

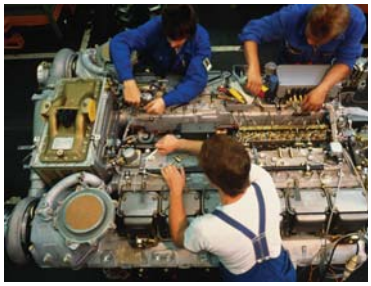
7.4 Fracciones parciales

Lo que debe aprender

- Reconocer descomposiciones de fracción parcial de expresiones racionales.
- Hallar descomposiciones de fracción parcial de expresiones racionales.

Por qué debe aprenderlo

Las fracciones parciales pueden ayudar a analizar el comportamiento de una fracción racional. Por ejemplo, en el Ejercicio 62 de la página 537 se pueden analizar las temperaturas de escape de un motor diesel con el uso de fracciones parciales.



Ayuda de álgebra

En el apéndice A.3 puede repasar cómo hallar el grado de un polinomio (por ejemplo, $x - 3$ y $x + 2$).

Tip de estudio

El apéndice A.4 muestra cómo combinar expresiones como

$$\frac{1}{x-2} + \frac{-1}{x+3} = \frac{5}{(x-2)(x+3)}.$$

El método de descomposición en fracciones parciales muestra cómo invertir este proceso y escribir

$$\frac{5}{(x-2)(x+3)} = \frac{1}{x-2} + \frac{-1}{x+3}.$$

Introducción

En esta sección aprenderá a escribir una expresión racional como la suma de dos o más expresiones racionales más sencillas. Por ejemplo, la expresión racional

$$\frac{x+7}{x^2-x-6}$$

se puede escribir como la suma de dos fracciones con denominadores de primer grado. Esto es,

$$\overbrace{\frac{x+7}{x^2-x-6}}^{\text{Descomposición en fracciones parciales de}} = \frac{2}{\underbrace{x-3}_{\text{Fracción parcial}}} + \frac{-1}{\underbrace{x+2}_{\text{Fracción parcial}}}.$$

Cada fracción del lado (miembro) derecho de la ecuación es una **fracción parcial**, y juntas conforman la **descomposición en fracciones** parciales del lado izquierdo.

Descomposición de $N(x)/D(x)$ en fracciones parciales

1. *Divida si es impropia:* si $N(x)/D(x)$ es una fracción impropia [el grado de $N(x) \geq$ el grado de $D(x)$], divida el numerador entre el denominador para obtener

   $$\frac{N(x)}{D(x)} = (\text{polinomio}) + \frac{N_1(x)}{D(x)}$$

   y aplique los pasos 2, 3 y 4 siguientes a la expresión racional propia $N_1(x)/D(x)$. Observe que $N_1(x)$ es el residuo de la división de $N(x)$ entre $D(x)$.

2. *Factorice el denominador:* factorice por completo el denominador en factores de la forma

   $$(px+q)^m \quad \text{y} \quad (ax^2+bx+c)^n$$

   donde $(ax^2 + bx + c)$ es irreductible.

3. *Factores lineales:* por *cada* factor de la forma $(px+q)^m$, la descomposición en fracciones parciales debe incluir la siguiente suma de m fracciones.

   $$\frac{A_1}{(px+q)} + \frac{A_2}{(px+q)^2} + \cdots + \frac{A_m}{(px+q)^m}$$

4. *Factores cuadráticos:* por *cada* factor de la forma $(ax^2+bx+c)^n$, la descomposición de fracción parcial debe incluir la siguiente suma de n fracciones.

   $$\frac{B_1x + C_1}{ax^2+bx+c} + \frac{B_2x + C_2}{(ax^2+bx+c)^2} + \cdots + \frac{B_nx + C_n}{(ax^2+bx+c)^n}$$

Descomposición en fracciones parciales

Las técnicas algebraicas para determinar las constantes en los numeradores de fracciones parciales se demuestran en los ejemplos que siguen. Observe que las técnicas varían ligeramente, de acuerdo con el tipo de factores del denominador: lineales o cuadráticos, distintos o repetidos.

Ejemplo 1 Factores lineales distintos

Escriba la descomposición en fracciones parciales de $\dfrac{x+7}{x^2-x-6}$.

Solución

La expresión es propia, por lo que es necesario asegurarse de factorizar el denominador. Como $x^2 - x - 6 = (x-3)(x+2)$, se debe incluir una fracción parcial con un numerador constante por cada factor lineal del denominador. Escriba la forma de la descomposición como sigue.

$$\frac{x+7}{x^2-x-6} = \frac{A}{x-3} + \frac{B}{x+2}$$ Escribir la forma de descomposición.

Multiplicar cada lado de esta ecuación por el mínimo común denominador (MCD), $(x-3)(x+2)$, lleva a la **ecuación básica**

$$x + 7 = A(x+2) + B(x-3).$$ Ecuación básica

Como esta ecuación es verdadera para toda x, se puede sustituir cualesquier valores *convenientes* de x que ayudarán a determinar las constantes A y B. Los valores de x que son especialmente convenientes son los que hacen iguales a cero los factores $(x+2)$ y $(x-3)$. Por ejemplo, sea $x = -2$. Entonces,

$$\begin{aligned} -2 + 7 &= A(-2+2) + B(-2-3) && \text{Sustituir } -2 \text{ por } x. \\ 5 &= A(0) + B(-5) \\ 5 &= -5B \\ -1 &= B. \end{aligned}$$

Para despejar A, sea $x = 3$ para obtener

$$\begin{aligned} 3 + 7 &= A(3+2) + B(3-3) && \text{Sustituir 3 por } x. \\ 10 &= A(5) + B(0) \\ 10 &= 5A \\ 2 &= A. \end{aligned}$$

Por tanto, la descomposición de fracción parcial es

$$\frac{x+7}{x^2-x-6} = \frac{2}{x-3} + \frac{-1}{x+2}.$$

Compruebe este resultado combinando las dos fracciones parciales del lado derecho de la ecuación o con el uso de una calculadora de gráficas.

PUNTO *de repaso* Ahora trate de hacer el Ejercicio 23.

TECNOLOGÍA

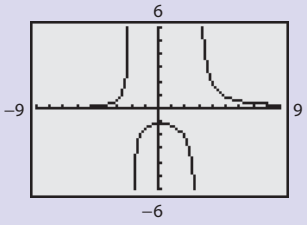
Se puede usar una calculadora de gráficas para comprobar la descomposición hallada en el Ejemplo 1. Para hacer esto, grafique

$$y_1 = \frac{x+7}{x^2-x-6}$$

y

$$y_2 = \frac{2}{x-3} + \frac{-1}{x+2}$$

en la misma pantalla. Las gráficas deben ser idénticas, como se muestra a continuación.



El siguiente ejemplo muestra la forma de hallar la descomposición en fracciones parciales de una expresión racional cuyo denominador tiene un factor lineal *repetido*

Ejemplo 2 Factores lineales repetidos

Escriba la descomposición en fracciones parciales de $\dfrac{x^4 + 2x^3 + 6x^2 + 20x + 6}{x^3 + 2x^2 + x}$.

Solución

Esta expresión racional es impropia, de modo que se debe empezar por dividir el numerador entre el denominador para obtener

$$x + \frac{5x^2 + 20x + 6}{x^3 + 2x^2 + x}.$$

Como el denominador del residuo se factoriza como

$$x^3 + 2x^2 + x = x(x^2 + 2x + 1) = x(x + 1)^2$$

se debe incluir una fracción parcial con un numerador constante por cada potencia de $(x + 1)$ y escribir la forma de la descomposición como sigue.

$$\frac{5x^2 + 20x + 6}{x(x + 1)^2} = \frac{A}{x} + \frac{B}{x + 1} + \frac{C}{(x + 1)^2}$$

Escribir la forma de descomposición.

La multiplicación por el mínimo común denominador (MCD) lleva a la ecuación básica $x(x + 1)^2$,

$$5x^2 + 20x + 6 = A(x + 1)^2 + Bx(x + 1) + Cx.$$

Ecuación básica

Hacer $x = -1$ elimina los términos A y B y produce

$$5(-1)^2 + 20(-1) + 6 = A(-1 + 1)^2 + B(-1)(-1 + 1) + C(-1)$$
$$5 - 20 + 6 = 0 + 0 - C$$
$$C = 9.$$

Hacer $x = 0$ elimina los términos B y C y produce

$$5(0)^2 + 20(0) + 6 = A(0 + 1)^2 + B(0)(0 + 1) + C(0)$$
$$6 = A(1) + 0 + 0$$
$$6 = A.$$

En este punto, usted ha agotado las opciones más convenientes de x, de modo que para hallar el valor de B use *cualquier otro valor* de x junto con los valores conocidos de A y C. Por tanto, usando $x = 1$, $A = 6$ y $C = 9$,

$$5(1)^2 + 20(1) + 6 = 6(1 + 1)^2 + B(1)(1 + 1) + 9(1)$$
$$31 = 6(4) + 2B + 9$$
$$-2 = 2B$$
$$-1 = B.$$

En consecuencia, la descomposición en fracciones parciales es

$$\frac{x^4 + 2x^3 + 6x^2 + 20x + 6}{x^3 + 2x^2 + x} = x + \frac{6}{x} + \frac{-1}{x + 1} + \frac{9}{(x + 1)^2}.$$

PUNTO *de repaso* Ahora trate de hacer el Ejercicio 49.

Ayuda de álgebra

En la sección 2.3 se puede repasar la división larga de polinomios. En el apéndice A.3 se puede repasar la factorización de polinomios.

ATENCIÓN

Para obtener la ecuación básica, asegúrese de multiplicar *cada* fracción en la forma de descomposición por el MCD.

El procedimiento empleado para resolver las constantes de los Ejemplos 1 y 2 funciona bien cuando los factores del denominador son lineales, pero cuando son factores cuadráticos irreductibles se debe usar otro procedimiento que comprenda escribir el lado (miembro) derecho de la ecuación básica en forma de polinomio *e igualando los coeficientes* de términos semejantes. Entonces se puede usar un sistema de ecuaciones para despejar los coeficientes.

Ejemplo 3 Factores lineales y cuadráticos distintos

Escriba la descomposición en fracciones parciales de

$$\frac{3x^2 + 4x + 4}{x^3 + 4x}.$$

Solución

Esta expresión es propia, por lo que debe factorizarse el denominador, que se factoriza como

$$x^3 + 4x = x(x^2 + 4)$$

Se debe incluir una fracción parcial con un numerador constante y una fracción parcial con un numerador lineal y escribir la forma de la descomposición como sigue.

$$\frac{3x^2 + 4x + 4}{x^3 + 4x} = \frac{A}{x} + \frac{Bx + C}{x^2 + 4}$$ Escribir la forma de descomposición.

Multiplicar por el MCD, $x(x^2 + 4)$, da la ecuación básica

$$3x^2 + 4x + 4 = A(x^2 + 4) + (Bx + C)x.$$ Ecuación básica

La expansión de esta ecuación básica y recolección de términos semejantes produce

$$\begin{aligned} 3x^2 + 4x + 4 &= Ax^2 + 4A + Bx^2 + Cx \\ &= (A + B)x^2 + Cx + 4A. \end{aligned}$$ Forma polinomial

Por último, como dos polinomios son iguales si y sólo si los coeficientes de los términos semejantes son iguales, se pueden igualar los coeficientes de términos semejantes en lados (miembros) opuestos de la ecuación.

$$3x^2 + 4x + 4 = (A + B)x^2 + Cx + 4A$$ Igualar los coeficientes de términos semejantes.

Ahora se puede escribir el siguiente sistema de ecuaciones lineales.

$$\begin{cases} A + B = 3 & \text{Ecuación 1} \\ C = 4 & \text{Ecuación 2} \\ 4A = 4 & \text{Ecuación 3} \end{cases}$$

De este sistema se puede ver que $A = 1$ y $C = 4$. Además, sustituir $A = 1$ en la ecuación 1 da

$$1 + B = 3 \Rightarrow B = 2.$$

Por tanto, la descomposición en fracciones parciales es

$$\frac{3x^2 + 4x + 4}{x^3 + 4x} = \frac{1}{x} + \frac{2x + 4}{x^2 + 4}.$$

PUNTO *de repaso* Ahora trate de hacer el Ejercicio 33.

NOTA HISTÓRICA

The Granger Collection

John Bernoulli (1667-1748), matemático suizo, introdujo el método de fracciones parciales y colaboró en el desarrollo inicial del cálculo. Bernoulli fue profesor en la Universidad de Basilea y fue maestro de numerosos y distinguidos estudiantes, el más famoso de los cuales fue Leonhard Euler.

El siguiente ejemplo muestra la forma de hallar la descomposición en fracciones parciales de una expresión racional cuyo denominador tiene un factor cuadrático *repetido*.

Ejemplo 4 Factores cuadráticos repetidos

Escriba la descomposición en fracciones parciales de $\dfrac{8x^3 + 13x}{(x^2 + 2)^2}$.

Solución

Incluya una fracción parcial con un numerador lineal para cada potencia de $(x^2 + 2)$.

$$\frac{8x^3 + 13x}{(x^2 + 2)^2} = \frac{Ax + B}{x^2 + 2} + \frac{Cx + D}{(x^2 + 2)^2}$$ Escribir la forma de descomposición.

Multiplicar por el MCD, $(x^2 + 2)^2$, produce la ecuación básica

$$\begin{aligned} 8x^3 + 13x &= (Ax + B)(x^2 + 2) + Cx + D && \text{Ecuación básica} \\ &= Ax^3 + 2Ax + Bx^2 + 2B + Cx + D \\ &= Ax^3 + Bx^2 + (2A + C)x + (2B + D). && \text{Forma polinomial} \end{aligned}$$

Igualar los coeficientes de términos semejantes en lados opuestos de la ecuación

$$8x^3 + 0x^2 + 13x + 0 = Ax^3 + Bx^2 + (2A + C)x + (2B + D)$$

produce el siguiente sistema de ecuaciones lineales.

$$\begin{cases} A = 8 & \text{Ecuación 1} \\ B = 0 & \text{Ecuación 2} \\ 2A + C = 13 & \text{Ecuación 3} \\ 2B + D = 0 & \text{Ecuación 4} \end{cases}$$

Por último, use los valores $A = 8$ y $B = 0$ para obtener lo siguiente

$$2(8) + C = 13$$ Sustituir 8 por A en la ecuación 3

$$C = -3$$

$$2(0) + D = 0$$ Sustituir 0 por B en la ecuación 4.

$$D = 0$$

Entonces, usando $A = 8$, $B = 0$, $C = -3$ y $D = 0$, la descomposición en fracciones parciales es

$$\frac{8x^3 + 13x}{(x^2 + 2)^2} = \frac{8x}{x^2 + 2} + \frac{-3x}{(x^2 + 2)^2}.$$

Compruebe este resultado al combinar las dos fracciones parciales en el lado (miembro) derecho de la ecuación o con el uso de una calculadora de gráficas.

PUNTO *de repaso* Ahora trate de hacer el Ejercicio 55.

Guías para resolver la ecuación básica

Factores lineales

1. Sustituya los *ceros* de los factores lineales distintos en la ecuación básica.
2. Para factores lineales repetidos, use los coeficientes determinados en el paso 1 para reescribir la ecuación básica. A continuación sustituya *otros* valores convenientes de x y despeje los coeficientes restantes.

Factores cuadráticos

1. Expanda la ecuación básica.
2. Reúna términos de acuerdo con las potencias de x.
3. Iguale los coeficientes de términos semejantes para obtener ecuaciones que contengan A, B, C, etcétera.
4. Use un sistema de ecuaciones lineales para despejar A, B, C,… .

Recuerde que para expresiones racionales impropias tales como

$$\frac{N(x)}{D(x)} = \frac{2x^3 + x^2 - 7x + 7}{x^2 + x - 2}$$

primero hay que dividir antes de aplicar descomposición en fracciones parciales.

Discusión en clase

Análisis del error Usted está asesorando a un estudiante en álgebra. Al tratar de hallar una descomposición en fracciones parciales, él escribe lo siguiente.

$$\frac{x^2 + 1}{x(x - 1)} = \frac{A}{x} + \frac{B}{x - 1}$$

$$\frac{x^2 + 1}{x(x - 1)} = \frac{A(x - 1)}{x(x - 1)} + \frac{Bx}{x(x - 1)}$$

$$x^2 + 1 = A(x - 1) + Bx \qquad \text{Ecuación básica}$$

Al sustituir $x = 0$ y $x = 1$ en la ecuación básica, el estudiante concluye que $A = -1$ y $B = 2$, pero al verificar esta solución, obtiene lo siguiente.

$$\frac{-1}{x} + \frac{2}{x - 1} = \frac{(-1)(x - 1) + 2(x)}{x(x - 1)}$$

$$= \frac{x + 1}{x(x - 1)}$$

$$\neq \frac{x^2 + 1}{x(x - 1)}$$

¿Qué está mal?

7.4 EJERCICIO

En www.CalcChat.com vea las soluciones a los ejercicios impares.

VOCABULARIO: Llene los espacios en blanco.

1. El proceso de escribir una expresión racional como la suma o diferencia de dos o más expresiones racionales más sencillas se denomina _____ _____ _____ _____.
2. Si el grado del numerador de una expresión racional es mayor o igual que el del denominador, entonces la fracción recibe el nombre de _____.
3. Cada fracción del lado derecho de la ecuación $\frac{x-1}{x^2-8x+15} = \frac{-1}{x-3} + \frac{2}{x-5}$ es una _____ _____ _____.
4. La _____ _____ se obtiene después de multiplicar cada lado de la forma de descomposición en fracciones parciales por el mínimo común denominador.

HABILIDADES Y APLICACIONES

En los Ejercicios 5-8, relacione la expresión racional con la forma de su descomposición. [Las descomposiciones están marcadas (a),(b),(c) y (d).]

(a) $\frac{A}{x} + \frac{B}{x+2} + \frac{C}{x-2}$ (b) $\frac{A}{x} + \frac{B}{x-4}$

(c) $\frac{A}{x} + \frac{B}{x^2} + \frac{C}{x-4}$ (d) $\frac{A}{x} + \frac{Bx+C}{x^2+4}$

5. $\frac{3x-1}{x(x-4)}$
6. $\frac{3x-1}{x^2(x-4)}$
7. $\frac{3x-1}{x(x^2+4)}$
8. $\frac{3x-1}{x(x^2-4)}$

En los Ejercicios 9-18, escriba la forma de la descomposición en fracciones parciales de la expresión racional. No despeje las constantes.

9. $\frac{3}{x^2-2x}$
10. $\frac{x-2}{x^2+4x+3}$
11. $\frac{9}{x^3-7x^2}$
12. $\frac{x^2-3x+2}{4x^3+11x^2}$
13. $\frac{4x^2+3}{(x-5)^3}$
14. $\frac{6x+5}{(x+2)^4}$
15. $\frac{2x-3}{x^3+10x}$
16. $\frac{x-6}{2x^3+8x}$
17. $\frac{x-1}{x(x^2+1)^2}$
18. $\frac{x+4}{x^2(3x-1)^2}$

En los Ejercicios 19-42, escriba la descomposición en fracciones parciales de la expresión racional. Verifique algebraicamente su resultado.

19. $\frac{1}{x^2+x}$
20. $\frac{3}{x^2-3x}$
21. $\frac{1}{2x^2+x}$
22. $\frac{5}{x^2+x-6}$
23. $\frac{3}{x^2+x-2}$
24. $\frac{x+1}{x^2-x-6}$
25. $\frac{1}{x^2-1}$
26. $\frac{1}{4x^2-9}$
27. $\frac{x^2+12x+12}{x^3-4x}$
28. $\frac{x+2}{x(x^2-9)}$
29. $\frac{3x}{(x-3)^2}$
30. $\frac{2x-3}{(x-1)^2}$
31. $\frac{4x^2+2x-1}{x^2(x+1)}$
32. $\frac{6x^2+1}{x^2(x-1)^2}$
33. $\frac{x^2+2x+3}{x^3+x}$
34. $\frac{2x}{x^3-1}$
35. $\frac{x}{x^3-x^2-2x+2}$
36. $\frac{x+6}{x^3-3x^2-4x+12}$
37. $\frac{2x^2+x+8}{(x^2+4)^2}$
38. $\frac{x^2}{x^4-2x^2-8}$
39. $\frac{x}{16x^4-1}$
40. $\frac{3}{x^4+x}$
41. $\frac{x^2+5}{(x+1)(x^2-2x+3)}$
42. $\frac{x^2-4x+7}{(x+1)(x^2-2x+3)}$

En los Ejercicios 43-50, escriba la descomposición en fracciones parciales de la expresión racional impropia.

43. $\frac{x^2-x}{x^2+x+1}$
44. $\frac{x^2-4x}{x^2+x+6}$
45. $\frac{2x^3-x^2+x+5}{x^2+3x+2}$
46. $\frac{x^3+2x^2-x+1}{x^2+3x-4}$
47. $\frac{x^4}{(x-1)^3}$
48. $\frac{16x^4}{(2x-1)^3}$
49. $\frac{x^4+2x^3+4x^2+8x+2}{x^3+2x^2+x}$
50. $\frac{2x^4+8x^3+7x^2-7x-12}{x^3+4x^2+4x}$

En los Ejercicios 51-58, escriba la descomposición en fracciones parciales de la expresión racional. Use una calculadora de gráficas para comprobar su resultado.

51. $\dfrac{5 - x}{2x^2 + x - 1}$

52. $\dfrac{3x^2 - 7x - 2}{x^3 - x}$

53. $\dfrac{4x^2 - 1}{2x(x + 1)^2}$

54. $\dfrac{3x + 1}{2x^3 + 3x^2}$

55. $\dfrac{x^2 + x + 2}{(x^2 + 2)^2}$

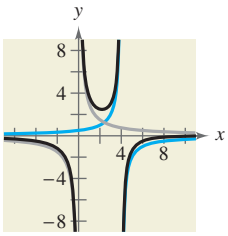
56. $\dfrac{x^3}{(x + 2)^2(x - 2)^2}$

57. $\dfrac{2x^3 - 4x^2 - 15x + 5}{x^2 - 2x - 8}$

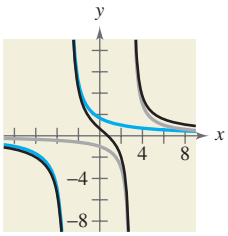
58. $\dfrac{x^3 - x + 3}{x^2 + x - 2}$

ANÁLISIS GRÁFICO En los Ejercicios 59 y 60, (a) escriba la descomposición en fracciones parciales de la función racional, (b) identifique la gráfica de la función racional y la gráfica de cada término de su descomposición, y (c) exprese cualquier relación entre las asíntotas verticales de la gráfica de la función racional y las asíntotas verticales de las gráficas de los términos de la descomposición. Para imprimir una copia amplificada de la gráfica, visite el sitio *www.mathgraphs.com*.

59. $y = \dfrac{x - 12}{x(x - 4)}$



60. $y = \dfrac{2(4x - 3)}{x^2 - 9}$



61. AMBIENTE El costo C pronosticado (en miles de dólares) para que una compañía elimine $p\%$ de una sustancia química de sus aguas de desecho está dado por el modelo

$$C = \frac{120p}{10\,000 - p^2}, \quad 0 \le p < 100.$$

Escriba la descomposición en fracciones parciales para la función racional. Verifique el resultado usando el comando *table* de una calculadora de gráficas, para crear una tabla que compare la función original con las fracciones parciales.

62. TERMODINÁMICA La magnitud de la variación o rango R de temperaturas (en grados Fahrenheit) en un motor diesel experimental está aproximada por el modelo

$$R = \frac{5000(4 - 3x)}{(11 - 7x)(7 - 4x)}, \quad 0 < x \le 1$$

donde x es la carga relativa (en pies-libras).

(a) Escriba la descomposición en fracciones parciales de la ecuación.

(b) La descomposición del inciso (a) es la diferencia de dos fracciones. Los valores absolutos de los términos dan las temperaturas máxima y mínima esperadas de los gases de escape para cargas diferentes.

$$\text{Ymáx} = |\text{1o. término}| \qquad \text{Ymín} = |\text{2o. término}|$$

Escriba las ecuaciones para Ymáx y Ymín.

(c) Use una calculadora de gráficas para graficar cada ecuación del inciso (b) en la misma pantalla.

(d) Determine las temperaturas máxima y mínima esperadas para la carga relativa de 0.5.

EXPLORACIÓN

¿VERDADERO O FALSO? En los Ejercicios 63-65, determine si la proposición es verdadera o falsa. Justifique su respuesta.

63. Para la expresión racional $\dfrac{x}{(x + 10)(x - 10)^2}$, la descomposición en fracciones parciales es de la forma $\dfrac{A}{x + 10} + \dfrac{B}{(x - 10)^2}$.

64. Para la expresión racional $\dfrac{2x + 3}{x^2(x + 2)^2}$, la descomposición en fracciones parciales es de la forma $\dfrac{Ax + B}{x^2} + \dfrac{Cx + D}{(x + 2)^2}$.

65. Cuando escriba la descomposición en fracciones parciales de la expresión $\dfrac{x^3 + x - 2}{x^2 - 5x - 14}$, el primer paso es dividir el numerador entre el denominador.

66. TOQUE FINAL Explique las similitudes y diferencias para hallar las descomposiciones en fracciones parciales de expresiones racionales propias, cuyos denominadores se factorizan en (a) factores lineales distintos, (b) factores cuadráticos distintos, (c) factores repetidos, y (d) factores lineales y cuadráticos.

En los Ejercicios 67-70, escriba la descomposición en fracciones parciales de la expresión racional. Compruebe algebraicamente el resultado. A continuación asigne un valor a la constante a para comprobar gráficamente el resultado.

67. $\dfrac{1}{a^2 - x^2}$

68. $\dfrac{1}{x(x + a)}$

69. $\dfrac{1}{y(a - y)}$

70. $\dfrac{1}{(x + 1)(a - x)}$

71. ESCRITURA Describa dos formas de despejar las constantes en una descomposición en fracciones parciales.

7.5 Sistemas de desigualdades

Lo que debe aprender

- Trazar las gráficas de desigualdades con dos variables.
- Resolver sistemas de desigualdades.
- Usar sistemas de desigualdades con dos variables para modelar y resolver problemas de la vida real.

Por qué debe aprenderlo

Se pueden usar sistemas de desigualdades con dos variables para modelar y resolver problemas de la vida real. Por ejemplo, en el Ejercicio 83 de la página 547 se usará un sistema de desigualdades para analizar las ventas al por menor de medicamentos con receta.

La gráfica de una desigualdad

Las proposiciones $3x - 2y < 6$ y $2x^2 + 3y^2 \geq 6$ son desigualdades con dos variables. Un par ordenado (a, b) es una **solución de una desigualdad** en x y y si la desigualdad es verdadera cuando a y b se sustituyen por x y y, respectivamente. La **gráfica de una desigualdad** es el conjunto de todas las soluciones de la desigualdad. Para trazar la gráfica de una desigualdad, empiece por trazar la gráfica de la ecuación correspondiente. La gráfica de la ecuación normalmente separará el plano en dos o más regiones, en cada una de las cuales debe ser cierto uno de lo siguiente.

1. *Todos* los puntos de la región son soluciones de la desigualdad.
2. *Ningún* punto de la región es una solución de la desigualdad.

Por tanto, se puede determinar si los puntos en toda una región satisfacen la desigualdad con sólo probar un punto de ella.

Trazar la gráfica de una desigualdad con dos variables

1. Sustituya el signo de desigualdad por un signo igual y trace la gráfica de la ecuación resultante. (Use una línea discontinua para $<$ o $>$ y una línea sólida para $\leq$ o $\geq$.)
2. Pruebe un punto en cada una de las regiones formadas por la gráfica del paso 1. Si el punto satisface la desigualdad, aplique sombreado a toda la región para indicar que todo punto de ésta satisface la desigualdad.

Ejemplo 1 Trazar la gráfica de una desigualdad

Trace la gráfica de $y \geq x^2 - 1$.

Solución

Empiece por graficar la ecuación correspondiente $y = x^2 - 1$, que es una parábola, como se muestra en la Figura 7.19. Al probar un punto *arriba* de la parábola $(0, 0)$ y un punto *abajo* de la parábola $(0, -2)$, se puede ver que los puntos que satisfacen la desigualdad son los que están arriba (o sobre) la parábola.

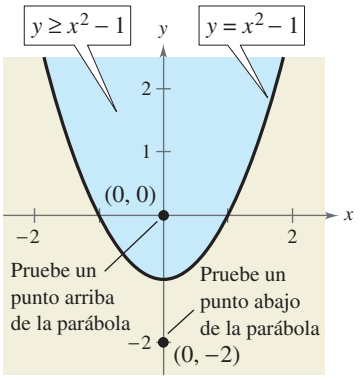


FIGURA 7.19

PUNTO de repaso Ahora trate de hacer el Ejercicio 7.

¡ATENCIÓN

Tenga cuidado cuando trace la gráfica de una desigualdad con dos variables. Una línea discontinua significa que todos los puntos de la recta o curva *no son* soluciones de la desigualdad. Una línea sólida significa que todos los puntos de la recta o curva *son* soluciones de la desigualdad.

Ayuda de álgebra

Puede repasar las propiedades de las desigualdades en el apéndice A.6.

La desigualdad del Ejemplo 1 es una desigualdad no lineal de dos variables. Casi todos los ejemplos siguientes contienen **desigualdades lineales** como $ax + by < c$ (a y b no son cero ambas). La gráfica de la desigualdad lineal es un semiplano que se encuentra en un lado de la recta $ax + by = c$.

Ejemplo 2 Trazar la gráfica de una desigualdad lineal

Trace la gráfica de cada desigualdad lineal.

a. $x > -2$ **b.** $y \leq 3$

Solución

a. La gráfica de la ecuación correspondiente $x = -2$ es una recta vertical. Los puntos que satisfacen la desigualdad $x > -2$ son los que están a la derecha de esta recta, como se ve en la Figura 7.20.

b. La gráfica de la ecuación correspondiente $y = 3$ es una recta horizontal. Los puntos que satisfacen la desigualdad $y \leq 3$ son los que se encuentran abajo (o sobre) de esta recta, como se ve en la Figura 7.21.

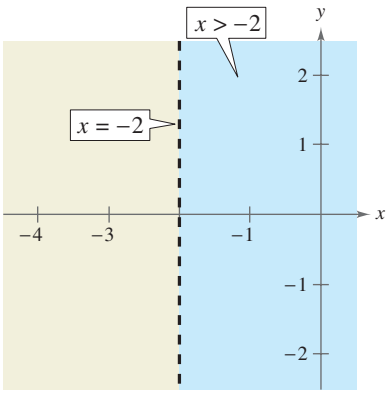


FIGURA 7.20

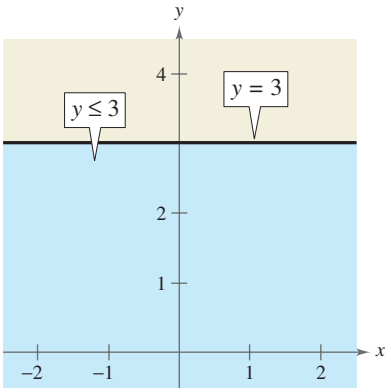
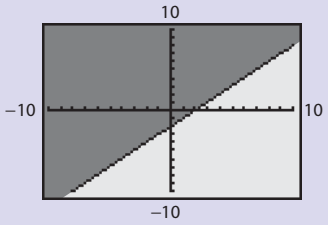


FIGURA 7.21

PUNTO *de repaso* Ahora trate de hacer el Ejercicio 9.

TECNOLOGÍA

Se puede usar una calculadora de gráficas para graficar una desigualdad o un sistema de desigualdades. Por ejemplo, para graficar $y \geq x - 2$, ingrese $y = x - 2$ y use el comando *shade* de la calculadora de gráficas para aplicar sombreado a la parte correcta de la gráfica. Se debe obtener la gráfica que se ve abajo. Consulte las secuencias específicas de tecleo en la guía del usuario de la calculadora.



Ejemplo 3 Trazar la gráfica de una desigualdad lineal

Trace la gráfica de $x - y < 2$.

Solución

La gráfica de la ecuación correspondiente $x - y = 2$ es una recta, como se ve en la Figura 7.22. Como el origen (0, 0) satisface la desigualdad, la gráfica está formada por el semiplano que se encuentra arriba de la recta. (Trate de comprobar un punto abajo de ésta. Cualquiera que sea el punto seleccionado, se verá que no satisface la desigualdad.)

PUNTO *de repaso* Ahora trate de hacer el Ejercicio 15.

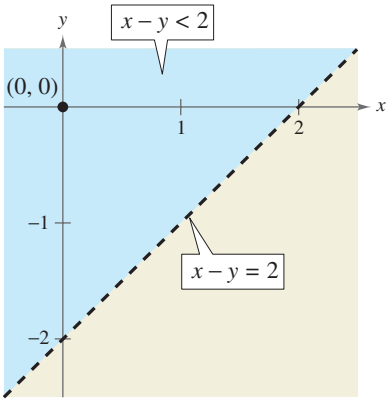


FIGURA 7.22

Para graficar una desigualdad lineal, puede ser útil escribirla en forma pendiente-intersección. Por ejemplo, al escribir $x - y < 2$ en la forma

$$y > x - 2$$

se puede ver que los puntos de solución se encuentran arriba de la recta $x - y = 2$ (o $y = x - 2$), como se ve en la Figura 7.22.

Sistemas de desigualdades

Numerosos problemas prácticos en finanzas, ciencias e ingeniería contienen sistemas de desigualdades lineales. Una **solución** de un sistema de desigualdades en x y y es un punto (x, y) que satisface cada desigualdad del sistema.

Para trazar la gráfica de un sistema de desigualdades con dos variables, primero trace la gráfica de cada desigualdad individual (en el mismo sistema de coordenadas) y a continuación encuentre la región que sea *común* a toda gráfica del sistema. Esta región representa el **conjunto solución** del sistema. Para sistemas de **desigualdades lineales** es útil hallar los vértices de la región de solución.

Ejemplo 4 Resolver un sistema de desigualdades

Trace la gráfica (y marque los vértices) del conjunto solución del sistema.

$$\begin{cases} x - y < 2 & \text{Desigualdad 1} \\ x > -2 & \text{Desigualdad 2} \\ y \le 3 & \text{Desigualdas 3} \end{cases}$$

Solución

Las gráficas de estas desigualdades se muestran en las Figuras 7.22, 7.20 y 7.21, respectivamente, en la página 539. La región triangular común de las tres gráficas se puede hallar al superponer las gráficas en el mismo sistema de coordenadas, como se ve en la Figura 7.23. Para hallar los vértices de la región, resuelva los tres sistemas de ecuaciones correspondientes obtenidos al tomar pares de ecuaciones que representen las fronteras de las regiones individuales.

Vértice A: $(-2, -4)$ $\begin{cases} x - y = 2 \\ x = -2 \end{cases}$

Vértice B: $(5, 3)$ $\begin{cases} x - y = 2 \\ y = 3 \end{cases}$

Vértice C: $(-2, 3)$ $\begin{cases} x = -2 \\ y = 3 \end{cases}$

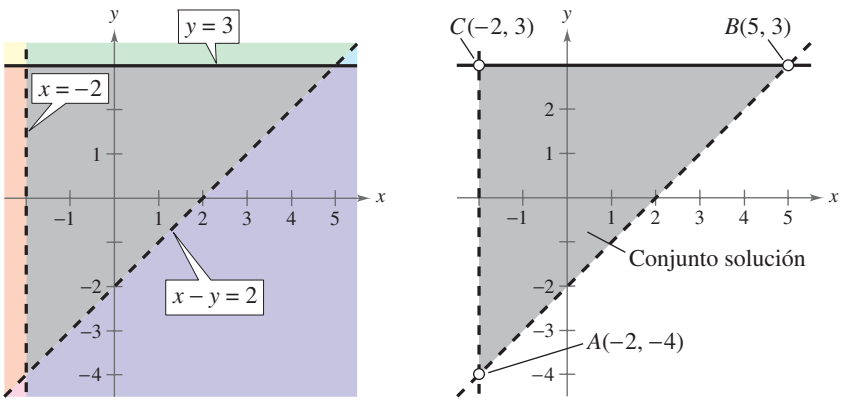


FIGURA 7.23

Nótese en la Figura 7.23 que los vértices de la región están representados por puntos abiertos. Esto significa que los vértices *no son* soluciones del sistema de desigualdades.

PUNTO *de repaso* Ahora trate de hacer el Ejercicio 41.

Tip de estudio

El uso de lápices de colores para aplicar sombreado a la solución de cada desigualdad de un sistema hará más fácil la identificación de la solución del sistema de desigualdades.

Para la región triangular que se ilustra en la figura 7.23, cada punto de intersección de un par de rectas de frontera corresponde a un vértice. Con regiones más complicadas, dos rectas de frontera a veces se cortan en un punto que no es un vértice de la región, como se ve en la Figura 7.24. Para dar seguimiento a qué puntos de intersección son en realidad vértices de la región, se debe trazar ésta y consultar el trazado cuando se encuentre cada punto de intersección.

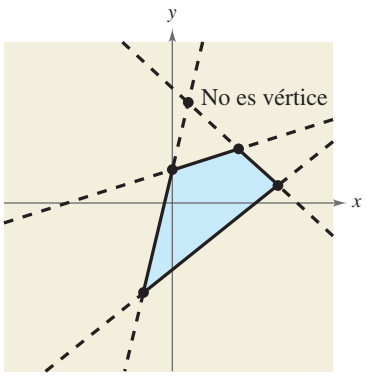


FIGURA 7.24

Ejemplo 5 Resolver un sistema de desigualdades

Trace la región que contenga todos los puntos que satisfagan el sistema de desigualdades.

$$\begin{cases} x^2 - y \le 1 & \text{Desigualdad 1} \\ -x + y \le 1 & \text{Desigualdad 2} \end{cases}$$

Solución

Como se muestra en la Figura 7.25, los puntos que satisfacen la desigualdad

$$x^2 - y \le 1 \qquad \text{Desigualdad 1}$$

son los que están arriba (o sobre) la parábola dada por

$$y = x^2 - 1. \qquad \text{Parábola}$$

Los puntos que satisfacen la desigualdad

$$-x + y \le 1 \qquad \text{Desigualdad 2}$$

son los que están abajo (o sobre) la recta dada por

$$y = x + 1. \qquad \text{Recta}$$

Para hallar los puntos de intersección de la parábola y la recta, resuelva el sistema de ecuaciones correspondientes.

$$\begin{cases} x^2 - y = 1 \\ -x + y = 1 \end{cases}$$

Usando el método de sustitución se puede hallar que las soluciones son $(-1, 0)$ y $(2, 3)$. Por tanto, la región que contiene todos los puntos que satisfacen el sistema está indicada por la región sombreada en la Figura 7.25.

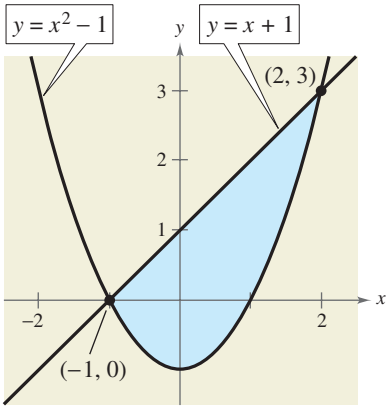


FIGURA 7.25

PUNTO *de repaso* Ahora trate de hacer el Ejercicio 43.

Cuando resuelva un sistema de desigualdades debe estar consciente de que podría no tener solución *o bien* podría estar representado por una región no limitada del plano. Estas dos posibilidades se muestran en los Ejemplos 6 y 7.

Ejemplo 6 Un sistema que no tiene solución

Trace el conjunto solución del sistema de desigualdades.

$$\begin{cases} x + y > 3 & \text{Desigualdad 1} \\ x + y < -1 & \text{Desigualdad 2} \end{cases}$$

Solución

Por la forma en que el sistema está escrito es evidente que no tiene solución porque la cantidad $(x + y)$ no puede ser menor que -1 y mayor que 3. Gráficamente, la desigualdad $x + y > 3$ está representada por el semiplano que está arriba de la recta $x + y = 3$, y la desigualdad $x + y < -1$ está representada por el semiplano que está abajo de la recta $x + y = -1$, como se ve en la Figura 7.26. Estos dos semiplanos no tienen puntos en común. Por tanto, el sistema de desigualdades no tiene solución.

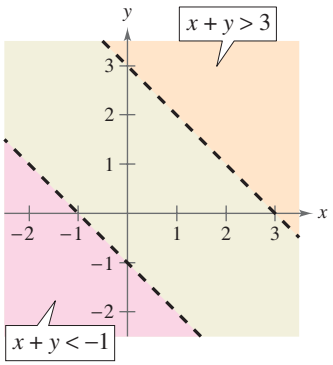


FIGURA 7.26

PUNTO *de repaso* Ahora trate de hacer el Ejercicio 45.

Ejemplo 7 Un conjunto solución sin acotaciones

Trace el conjunto solución del sistema de desigualdades.

$$\begin{cases} x + \ \ y < 3 & \text{Desigualdad 1} \\ x + 2y > 3 & \text{Desigualdad 2} \end{cases}$$

Solución

La gráfica de la desigualdad $x + y < 3$ es el semiplano que está debajo de la recta $x + y = 3$, como se ve en la Figura 7.27. La gráfica de la desigualdad $x + 2y > 3$ es el semiplano que está arriba de la recta $x + 2y = 3$. La intersección de estos dos semiplanos es una *cuña infinita* que tiene un vértice en (3, 0). Por tanto, el conjunto solución del sistema de desigualdades no tiene cotas.

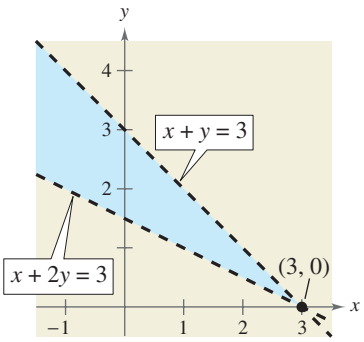


FIGURA 7.27

PUNTO *de repaso* Ahora trate de hacer el Ejercicio 47.

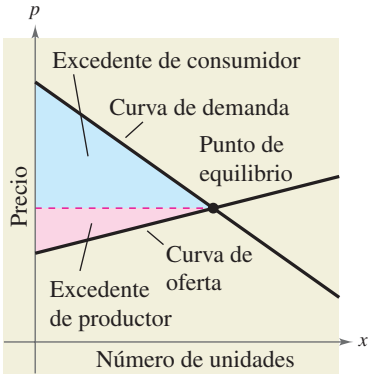


FIGURA 7.28

Aplicaciones

En el Ejemplo 9 de la sección 7.2 vimos el *punto de equilibrio* para un sistema de ecuaciones de oferta y demanda. El siguiente ejemplo estudia dos conceptos relacionados que los economistas llaman **excedente de consumidor y excedente de productor.** Como se ve en la Figura 7.28, el excedente de consumidor está definido como el área de la región que se encuentra **debajo** de la curva de demanda, **arriba** de la recta horizontal que pasa por el punto de equilibrio, y a la derecha del eje p. Del mismo modo, el excedente de productor está definido como el área de la región que se encuentra *arriba* de la curva de oferta, debajo de la recta horizontal que pasa por el punto de equilibrio, y a la derecha del eje p. El excedente de consumidor es una medida de la cantidad que los consumidores estarían dispuestos a pagar *más de lo que en realidad pagaron*, mientras que el excedente de productor es una medida de la cantidad que los productores hubieran estado dispuestos a recibir *menos de lo que en realidad recibieron.*

Ejemplo 8 Excedente de consumidor y excedente de productor

Las ecuaciones de demanda y oferta para un nuevo tipo de asistente digital personal están dadas por

$$\begin{cases} p = 150 - 0.00001x & \text{Ecuación de demanda} \\ p = 60 + 0.00002x & \text{Ecuación de oferta} \end{cases}$$

donde p es el precio (en dólares) y x representa el número de unidades. Encuentre el excedente de consumidor y el de productor para estas dos ecuaciones.

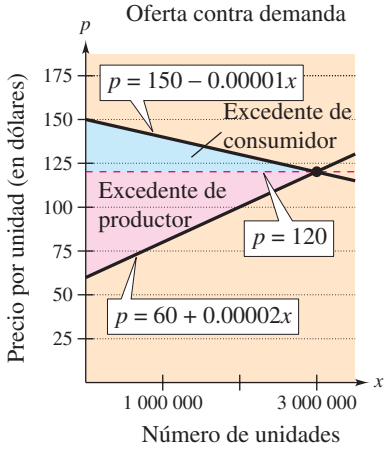


FIGURA 7.29

Solución

Empiece por hallar el punto de equilibrio (cuando son iguales la oferta y la demanda) al resolver la ecuación

$$60 + 0.00002x = 150 - 0.00001x.$$

En el Ejemplo 9 de la sección 7.2 vimos que la solución es $x = 3\,000\,000$ de unidades, lo cual corresponde a un precio de equilibrio de $p = \$120$. Por tanto, el excedente de consumidor y el de productor son las áreas de las siguientes regiones triangulares.

Excedente de consumidor

$$\begin{cases} p \le 150 - 0.00001x \\ p \ge 120 \\ x \ge 0 \end{cases}$$

Excedente de productor

$$\begin{cases} p \ge 60 + 0.00002x \\ p \le 120 \\ x \ge 0 \end{cases}$$

En la Figura 7.29 se puede ver que los excedentes de consumidor y de productor están definidos como las áreas de los triángulos sombreados.

$$\text{Excedente de consumidor} = \frac{1}{2}(\text{base})(\text{altura})$$

$$= \frac{1}{2}(3\,000\,000)(30) = \$45\,000\,000$$

$$\text{Excedente de productor} = \frac{1}{2}(\text{base})(\text{altura})$$

$$= \frac{1}{2}(3\,000\,000)(60) = \$90\,000\,000$$

PUNTO *de repaso* Ahora trate de hacer el Ejercicio 45.

Ejemplo 9 Nutrición

La parte líquida de una dieta es para proporcionar al menos 300 calorías, 36 unidades de vitamina A y 90 unidades de vitamina C. Una taza de bebida de dieta X proporciona 60 calorías, 12 unidades de vitamina A y 10 unidades de vitamina C. Una taza de bebida de dieta Y produce 60 calorías, 6 unidades de vitamina A y 30 unidades de vitamina C. Establezca un sistema de desigualdades lineales que describa cuántas tazas de cada bebida deben ser consumidas al día para satisfacer o rebasar las necesidades diarias mínimas de calorías y vitaminas.

Solución

Empiece por representar con x y y lo siguiente.

x = número de tazas de bebida de dieta X

y = número de tazas de bebida de dieta Y

Para satisfacer o rebasar las necesidades diarias mínimas, deben satisfacerse las siguientes desigualdades..

$$\begin{cases} 60x + 60y \geq 300 & \text{Calorías} \\ 12x + 6y \geq 36 & \text{Vitamina A} \\ 10x + 30y \geq 90 & \text{Vitamina C} \\ x \geq 0 & \\ y \geq 0 & \end{cases}$$

Las últimas dos desigualdades están incluidas porque x y y no pueden ser negativas. La gráfica de este sistema se muestra en la Figura 7.30. (En el Ejemplo 6 de la sección 7.6 hablaremos más acerca de esta aplicación.)

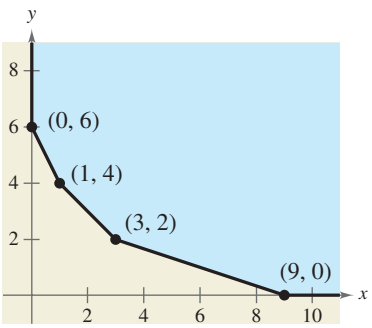


FIGURA 7.30

PUNTO *de repaso* Ahora trate de hacer el Ejercicio 45.

Discusión en clase

Creación de un sistema de desigualdades Sitúe los puntos (0, 0), (4, 0), (3, 2) y (0, 2) en un plano de coordenadas. Trace el cuadrilátero que tenga estos cuatro puntos como sus vértices. Escriba un sistema de desigualdades lineales que tenga el cuadrilátero como su solución. Explique la forma en que encontró el sistema de desigualdades.

7.5 EJERCICIOS

En www.CalcChat.com vea las soluciones a los ejercicios impares.

VOCABULARIO: Llene los espacios en blanco.

1. Un par ordenado (a, b) es una _____ de una desigualdad en x y y si la desigualdad es verdadera cuando a y b son sustituidas por x y y, respectivamente.
2. La _____ de una desigualdad es el conjunto de todas las soluciones de la desigualdad.
3. La gráfica de un desigualdad _____ es un semiplano que se encuentra en un lado de la recta $ax + by = c$.
4. Una _____ de un sistema de desigualdades en x y y es un punto (x, y) que satisface cada desigualdad del sistema.
5. Una _____ _____ _____ de un sistema de desigualdades con dos variables es la región común a las gráficas de toda desigualdad del sistema.
6. El área de la región que se encuentra debajo de la curva de demanda, arriba de la recta horizontal que pasa por el punto de equilibrio, a la derecha del eje p se denomina _____ _____ _____.

HABILIDADES Y APLICACIONES

En los Ejercicios 7-20, trace la gráfica de la desigualdad.

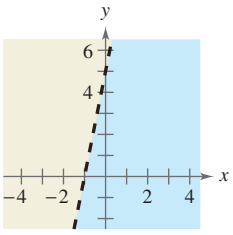
7. $y < 5 - x^2$
8. $y^2 - x < 0$
9. $x \geq 6$
10. $x < -4$
11. $y > -7$
12. $10 \geq y$
13. $y < 2 - x$
14. $y > 4x - 3$
15. $2y - x \geq 4$
16. $5x + 3y \geq -15$
17. $(x + 1)^2 + (y - 2)^2 < 9$
18. $(x - 1)^2 + (y - 4)^2 > 9$
19. $y \leq \dfrac{1}{1 + x^2}$
20. $y > \dfrac{-15}{x^2 + x + 4}$

En los Ejercicios 21-32, use una calculadora de gráficas para graficar la desigualdad.

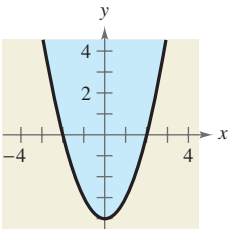
21. $y < \ln x$
22. $y \geq -2 - \ln(x + 3)$
23. $y < 4^{-x-5}$
24. $y \leq 2^{2x-0.5} - 7$
25. $y \geq \frac{5}{9}x - 2$
26. $y \leq 6 - \frac{3}{2}x$
27. $y < -3.8x + 1.1$
28. $y \geq -20.74 + 2.66x$
29. $x^2 + 5y - 10 \leq 0$
30. $2x^2 - y - 3 > 0$
31. $\frac{5}{2}y - 3x^2 - 6 \geq 0$
32. $-\frac{1}{10}x^2 - \frac{3}{8}y < -\frac{1}{4}$

En los Ejercicios 33-36, escriba una desigualdad para la región sombreada que se muestra en la figura.

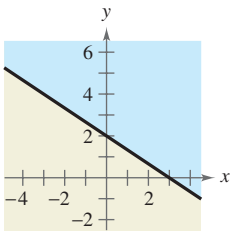
33.



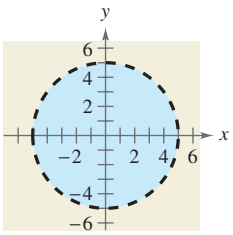
34.



35.



36.



En los Ejercicios 37-40, determine si cada par ordenado es una solución del sistema de desigualdades lineales.

37. $\begin{cases} x \geq -4 \\ y > -3 \\ y \leq -8x - 3 \end{cases}$ (a) $(0, 0)$ (b) $(-1, -3)$ (c) $(-4, 0)$ (d) $(-3, 11)$

38. $\begin{cases} -2x + 5y \geq 3 \\ y < 4 \\ -4x + 2y < 7 \end{cases}$ (a) $(0, 2)$ (b) $(-6, 4)$ (c) $(-8, -2)$ (d) $(-3, 2)$

39. $\begin{cases} 3x + y > 1 \\ -y - \frac{1}{2}x^2 \leq -4 \\ -15x + 4y > 0 \end{cases}$ (a) $(0, 10)$ (b) $(0, -1)$ (c) $(2, 9)$ (d) $(-1, 6)$

40. $\begin{cases} x^2 + y^2 \geq 36 \\ -3x + y \leq 10 \\ \frac{2}{3}x - y \geq 5 \end{cases}$ (a) $(-1, 7)$ (b) $(-5, 1)$ (c) $(6, 0)$ (d) $(4, -8)$

En los Ejercicios 41-54, trace la gráfica y marque los vértices del conjunto de solución del sistema de desigualdades.

41. $\begin{cases} x + y \leq 1 \\ -x + y \leq 1 \\ y \geq 0 \end{cases}$

42. $\begin{cases} 3x + 4y < 12 \\ x > 0 \\ y > 0 \end{cases}$

43. $\begin{cases} x^2 + y \leq 7 \\ x \geq -2 \\ y \geq 0 \end{cases}$

44. $\begin{cases} 4x^2 + y \geq 2 \\ x \leq 1 \\ y \leq 1 \end{cases}$

45. $\begin{cases} 2x + y > 2 \\ 6x + 3y < 2 \end{cases}$

46. $\begin{cases} x - 7y > -36 \\ 5x + 2y > 5 \\ 6x - 5y > 6 \end{cases}$

47. $\begin{cases} -3x + 2y < 6 \\ x - 4y > -2 \\ 2x + y < 3 \end{cases}$

48. $\begin{cases} x - 2y < -6 \\ 5x - 3y > -9 \end{cases}$

49. $\begin{cases} x > y^2 \\ x < y + 2 \end{cases}$

50. $\begin{cases} x - y^2 > 0 \\ x - y > 2 \end{cases}$

51. $\begin{cases} x^2 + y^2 \le 36 \\ x^2 + y^2 \ge 9 \end{cases}$

52. $\begin{cases} x^2 + y^2 \le 25 \\ 4x - 3y \le 0 \end{cases}$

53. $\begin{cases} 3x + 4 \ge y^2 \\ x - y < 0 \end{cases}$

54. $\begin{cases} x < 2y - y^2 \\ 0 < x + y \end{cases}$

En los Ejercicios 55-60, use una calculadora de gráficas para graficar el conjunto de solución del sistema de desigualdades.

55. $\begin{cases} y \le \sqrt{3x} + 1 \\ y \ge x^2 + 1 \end{cases}$

56. $\begin{cases} y < -x^2 + 2x + 3 \\ y > x^2 - 4x + 3 \end{cases}$

57. $\begin{cases} y < x^3 - 2x + 1 \\ y > -2x \\ x \le 1 \end{cases}$

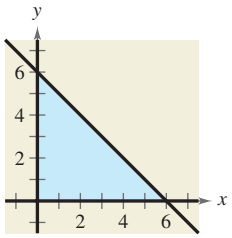
58. $\begin{cases} y \ge x^4 - 2x^2 + 1 \\ y \le 1 - x^2 \end{cases}$

59. $\begin{cases} x^2y \ge 1 \\ 0 < x \le 4 \\ y \le 4 \end{cases}$

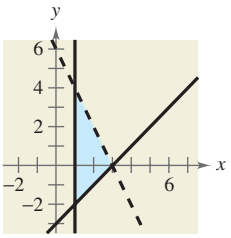
60. $\begin{cases} y \le e^{-x^2/2} \\ y \ge 0 \\ -2 \le x \le 2 \end{cases}$

En los Ejercicios 61-70, deduzca un conjunto de desigualdades para describir la región.

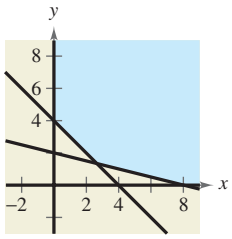
61.



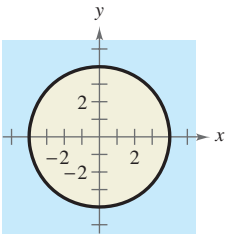
62.



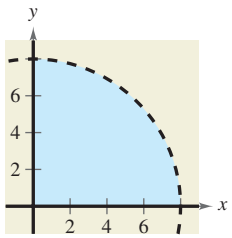
63.



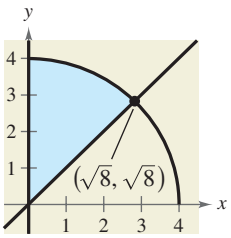
64.



65.



66.



67. Rectángulo: vértices en $(4, 3), (9, 3), (9, 9), (4, 9)$

68. Paralelogramo: vértices en $(0, 0), (4, 0), (1, 4), (5, 4)$

69. Triángulo: vértices en $(0, 0), (6, 0), (1, 5)$

70. Triángulo: vértices en $(-1, 0), (1, 0), (0, 1)$

OFERTA Y DEMANDA En los Ejercicios 71-74, (a) grafique los sistemas que representan el excedente de consumidor y el de productor para las ecuaciones de oferta y demanda y (b) encuentre el excedente de consumidor y el de productor.

	Demanda	*Oferta*
71.	$p = 50 - 0.5x$	$p = 0.125x$
72.	$p = 100 - 0.05x$	$p = 25 + 0.1x$
73.	$p = 140 - 0.00002x$	$p = 80 + 0.00001x$
74.	$p = 400 - 0.0002x$	$p = 225 + 0.0005x$

75. PRODUCCIÓN Una compañía fabricante de muebles puede vender todas las mesas y sillas que produce. Cada mesa requiere 1 hora en el centro de ensamble y $1\frac{1}{3}$ horas en el centro de acabado. El centro de ensamble de la compañía está disponible 12 horas por día y el de acabado 15 horas por día. Encuentre y grafique un sistema de desigualdades que describa todos los posibles niveles de producción.

76. INVENTARIO Una tienda vende dos modelos de computadoras laptop. Por la demanda, tiene una existencia de al menos el doble de unidades del modelo *A* que del modelo *B*. Los costos para la tienda para los dos modelos son \$800 y \$1200, respectivamente. La gerencia no desea más de \$20 000 en inventarios en ningún momento, pero sí tener en inventario al menos cuatro laptop modelo *A* y dos modelo *B* en todo momento. Encuentre y grafique un sistema de desigualdades que describa todos los posibles niveles de inventario.

77. ANÁLISIS DE INVENTARIO Una persona planea invertir hasta \$20 000 en dos cuentas que dan intereses; cada cuenta debe tener al menos \$5000. Además, la cantidad en cada una de las cuentas debe ser al menos el doble de la cantidad de la otra cuenta. Encuentre y grafique un sistema de desigualdades para describir las diversas cantidades que puedan depositarse en cada cuenta.

78. VENTA DE BOLETOS Para un concierto, hay boletos de \$30 para reservar un asiento y boletos de \$20 para entrada general. Hay 2000 asientos reservados disponibles, y los reglamentos contra incendio limitan a 3000 el número de tenedores con boleto pagado. El promotor debe recibir al menos \$75 000 en ventas de boletos. Encuentre y grafique un sistema de desigualdades que describa los diferentes números de boletos que puedan ser vendidos.

79. ENVÍOS El supervisor de un almacén recibe orden de enviar al menos 50 paquetes de grava que pesan 55 libras cada uno y al menos 40 bolsas de piedra que pesan 70 libras cada una. La capacidad máxima de carga del camión por usar es de 7500 libras. Encuentre y grafique un sistema de desigualdades que describa el número de bolsas de piedra y grava que se puedan enviar.

80. HORARIO DE CAMIÓN Una pequeña compañía, que manufactura dos modelos de máquinas para ejercitarse, tiene un pedido de 15 unidades del modelo estándar y 16 unidades del modelo de lujo. La compañía tiene camiones de dos tamaños que pueden transportar los productos, como se muestra en la tabla.

Camión	Estándar	De lujo
Grande	6	3
Mediano	4	6

Encuentre y grafique un sistema de desigualdades que describa el número de camiones de cada tamaño que sean necesarios para entregar el pedido.

81. NUTRICIÓN A un dietista se le pide diseñar un suplemento alimenticio especial que contenga dos alimentos. Cada onza del alimento X contiene 20 unidades de calcio, 15 de hierro y 10 de vitamina B. Cada onza del alimento Y contiene 10 unidades de calcio, 10 de hierro y 20 de vitamina B. Las necesidades diarias mínimas de la dieta son 300 unidades de calcio, 150 de hierro y 200 de vitamina B.

(a) Escriba un sistema de desigualdades que describa las diferentes cantidades de alimento X y alimento Y que puedan usarse.

(b) Trace una gráfica de la región correspondiente al sistema del inciso (a).

(c) Encuentre dos soluciones del sistema e interprete sus significados en el contexto del problema.

82. SALUD La frecuencia cardiaca máxima de una persona es $220 - x$, donde x es la edad de la persona en años para $20 \le x \le 70$. Cuando una persona se ejercita, se recomienda que se esfuerce hasta una frecuencia cardiaca que sea al menos 50% del máximo y como máximo 75% del máximo. (Fuente: American Heart Association)

(a) Escriba un sistema de desigualdades que describa la región objetivo de frecuencia cardiaca por el ejercicio.

(b) Trace una gráfica de la región del inciso (a).

(c) Encuentre dos soluciones al sistema e interprete sus significados en el contexto del problema.

83. ANÁLISIS DE DATOS: MEDICAMENTOS CON RECETA La tabla siguiente muestra las ventas al por menor y (en miles de millones de dólares) de medicamentos con receta en Estados Unidos, de 2000 a 2007. (Fuente: National Association of Chain Drug Stores)

Año	Ventas al menudeo, y
2000	145.6
2001	161.3
2002	182.7
2003	204.2
2004	220.1
2005	232.0
2006	250.6
2007	259.4

(a) Use el comando *regression* de una calculadora de gráficas para hallar un modelo lineal para los datos. Con t represente el año, con $t = 0$ para 2000.

(b) Las ventas totales al menudeo de medicamentos con receta en Estados Unidos, durante este periodo de ocho años, se pueden aproximar si se encuentra el área del trapecio limitado por el modelo lineal hallado en el inciso (a) y las rectas $y = 0$, $t = -0.5$ y $t = 7.5$. Use una calculadora de gráficas para graficar esta región.

(c) Use la fórmula para el área de un trapecio para aproximar las ventas totales al menudeo de medicamentos con receta.

84. ANÁLISIS DE DATOS: MERCANCÍA La tabla siguiente muestra las ventas al menudeo y (en millones de dólares) para Aeropostale, Inc., de 2000 a 2007. (Fuente: Aeropostale, Inc.)

Año	Ventas al menudeo, y
2000	213.4
2001	304.8
2002	550.9
2003	734.9
2004	964.2
2005	1204.3
2006	1413.2
2007	1590.9

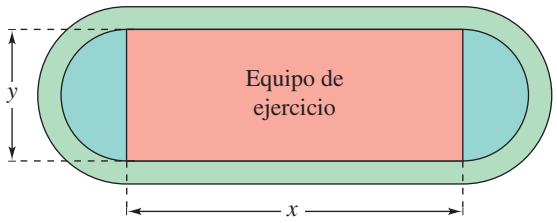
(a) Use el comando *regression* de una calculadora de gráficas para hallar un modelo lineal para los datos. Con t represente el año, con $t = 0$ para 2000.

(b) Las ventas totales al menudeo para Aeropostale, durante este periodo de ocho años se pueden aproximar si se encuentra el área del trapecio limitado por el modelo lineal hallado en el inciso (a) y las

rectas $y = 0$, $t = -0.5$ y $t = 7.5$. Use una calculadora de gráficas para graficar esta región.

(c) Use la fórmula para el área de un trapecio para aproximar las ventas totales al menudeo para Aeropostale.

85. INSTALACIONES PARA EJERCICIO FÍSICO Una pista bajo techo para carreras se ha de construir con un espacio para equipo de ejercicio dentro ella (vea figura). La pista debe medir al menos 125 metros de largo, y el espacio para ejercicio debe tener un área de al menos 500 metros cuadrados.



(a) Encuentre un sistema de desigualdades que describa las necesidades de la instalación.

(b) Grafique el sistema del inciso (a).

EXPLORACIÓN

¿VERDADERO O FALSO? En los Ejercicios 86 y 87, determine si la proposición es verdadera o falsa. Justifique su respuesta.

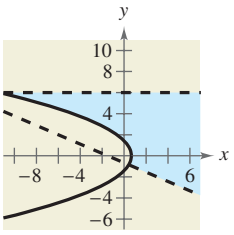
86. El área de la figura definida por el sistema

$$\begin{cases} x \geq -3 \\ x \leq 6 \\ y \leq 5 \\ y \geq -6 \end{cases}$$

es de 99 unidades cuadradas.

87. La gráfica siguiente muestra la solución del sistema

$$\begin{cases} y \leq 6 \\ -4x - 9y > 6. \\ 3x + y^2 \geq 2 \end{cases}$$



88. TOQUE FINAL

(a) Explique la diferencia entre las gráficas de la desigualdad $x \leq -5$ en la recta de números reales y en el sistema de coordenadas rectangulares.

(b) Después de graficar la frontera de la desigualdad $x + y < 3$, explique cómo puede usted decidir sobre qué lado se encuentra el conjunto de solución de la desigualdad.

89. RAZONAMIENTO GRÁFICO Dos círculos concéntricos tienen radios x y y, donde $y > x$. El área entre los círculos debe ser al menos 10 unidades cuadradas.

(a) Encuentre un sistema de desigualdades que describa las restricciones en los círculos.

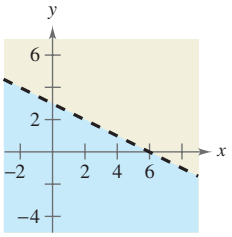
(b) Use una calculadora de gráficas para graficar el sistema de desigualdades del inciso (a). Grafique la recta $y = x$ en la misma pantalla.

(c) Identifique la gráfica de la recta en relación con la frontera de la desigualdad. Explique su significado en el contexto del problema.

90. La gráfica de la solución de la desigualdad $x + 2y < 6$ se muestra en la figura. Describa la forma en que el conjunto de solución cambiaría para cada uno de lo siguiente.

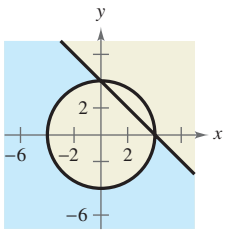
(a) $x + 2y \leq 6$

(b) $x + 2y > 6$

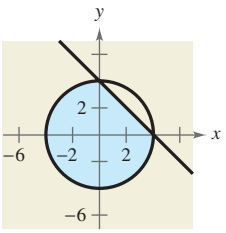


En los Ejercicios 91-94, relacione el sistema de desigualdades con la gráfica de su solución. [Las gráficas están marcadas (a),(b),(c) y (d).]

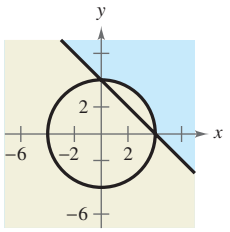
(a)



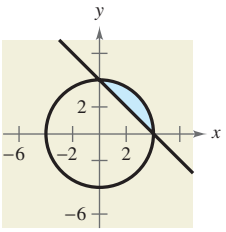
(b)



(c)



(d)



91. $\begin{cases} x^2 + y^2 \leq 16 \\ x + y \geq 4 \end{cases}$

92. $\begin{cases} x^2 + y^2 \leq 16 \\ x + y \leq 4 \end{cases}$

93. $\begin{cases} x^2 + y^2 \geq 16 \\ x + y \geq 4 \end{cases}$

94. $\begin{cases} x^2 + y^2 \geq 16 \\ x + y \leq 4 \end{cases}$

7.6 Programación lineal

Lo que debe aprender

- Resolver problemas de programación lineal.
- Usar programación lineal para modelar y resolver problemas de la vida real.

Por qué debe aprenderlo

Con frecuencia se usa programación lineal para la toma de decisiones económicas reales. Por ejemplo, el Ejercicio 42 de la página 557 muestra cómo se puede determinar el costo óptimo de una mezcla de gasolina y compararla con el promedio nacional.

Tim Boyle/Getty Images

Programación lineal: un método gráfico

En numerosas aplicaciones en finanzas y economía aparece un proceso llamado **optimización**, en el que se nos pide hallar el valor mínimo o máximo de una cantidad. En esta sección estudiaremos una estrategia de optimización llamada **programación lineal.**

Un problema bidimensional de programación lineal consta de una **función objetivo** lineal y un sistema de desigualdades lineales llamadas **restricciones**. La función objetivo da la cantidad que se ha de maximizar (o minimizar) y las restricciones determinan el conjunto de **soluciones factibles**. Supóngase que nos piden maximizar el valor de

$$z = ax + by \qquad \text{Función objetivo}$$

sujeto a un conjunto de restricciones que determina la región sombreada en la Figura 7.31.

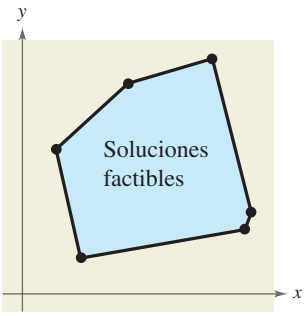


FIGURA 7.31

Como todo punto de la región sombreada satisface cada una de las restricciones, no es clara la forma en que debería hallarse el punto que dé un máximo valor de z. Afortunadamente, se puede demostrar que si hay una solución óptima, ésta debe presentarse en uno de los vértices. Esto significa que *se puede hallar el valor máximo de z al probar z en cada uno de los vértices.*

Solución óptima de un problema de programación lineal

Si un problema de programación lineal tiene una solución, ésta debe presentarse en un vértice del conjunto de soluciones factibles. Si hay más de una solución, al menos una de ellas debe presentarse en tal vértice. En cualquier caso, el valor de la función objetivo es único.

Algunas guías para resolver un problema de programación lineal con dos variables se indican en la parte superior de la página siguiente.

Resolver un problema de programación lineal

1. Trace la región correspondiente al sistema de restricciones. (Los puntos dentro de la frontera de la región, o sobre la frontera, son *soluciones factibles*.
2. Encuentre los vértices de la región.
3. Pruebe la función objetivo en cada uno de los vértices y seleccione los valores de las variables que optimizan la función objetivo. Para una región acotada, existirá tanto un valor mínimo como un máximo. (Para una región no acotada, *si existe* una solución óptima, estará en un vértice.)

Ejemplo 1 Resolver un problema de programación lineal

Encuentre el valor máximo de

$$z = 3x + 2y$$ Función objetivo

sujeto a las siguientes restricciones.

$$\left.\begin{aligned} x &\geq 0 \\ y &\geq 0 \\ x + 2y &\leq 4 \\ x - y &\leq 1 \end{aligned}\right\}$$ Restricciones

Solución

Las restricciones forman la región que se muestra en la Figura 7.32. En los cuatro vértices de esta región, la función objetivo tiene los siguientes valores.

En (0, 0): $z = 3(0) + 2(0) = 0$
En (0, 2): $z = 3(0) + 2(2) = 4$
En (2, 1): $z = 3(2) + 2(1) = 8$ Máximo valor de z
En (1, 0): $z = 3(1) + 2(0) = 3$

Por tanto, el valor máximo de z es 8 y ocurre cuando $x = 2$ y $y = 1$.

PUNTO *de repaso* Ahora trate de hacer el Ejercicio 9.

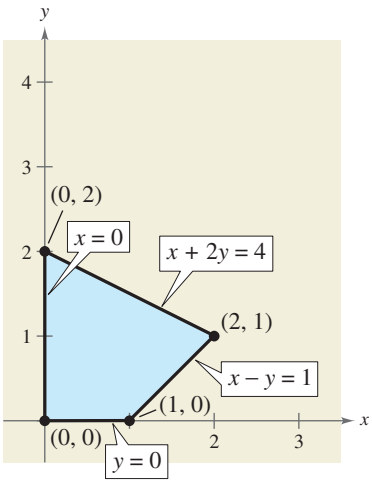


FIGURA 7.32

En el Ejemplo 1, trate de probar algunos de los puntos *interiores* de la región. Se verá que los valores correspondientes de z son menores a 8. A continuación veamos algunos ejemplos.

En (1, 1): $z = 3(1) + 2(1) = 5$ En $\left(\frac{1}{2}, \frac{3}{2}\right)$: $z = 3\left(\frac{1}{2}\right) + 2\left(\frac{3}{2}\right) = \frac{9}{2}$

Para ver por qué el valor máximo de la función objetivo del Ejemplo 1 debe estar en un vértice, considere escribir la función objetivo en forma pendiente-intersección

$$y = -\frac{3}{2}x + \frac{z}{2}$$ Familia de rectas

donde $z/2$ es la intersección de la función objetivo con el eje y. Esta ecuación representa una familia de rectas, cada una de pendiente $-\frac{3}{2}$. De este número infinito de rectas, buscamos una que tenga el máximo valor de z pero que todavía interseque la región determinada por las restricciones. En otras palabras, de todas las rectas cuya pendiente sea $-\frac{3}{2}$, buscamos una que tenga la máxima intersección en y *pero además* corte la región dada, como se ve en la Figura 7.33. En la gráfica, se puede ver que esa recta pasará por uno (o más) de los vértices de la región.

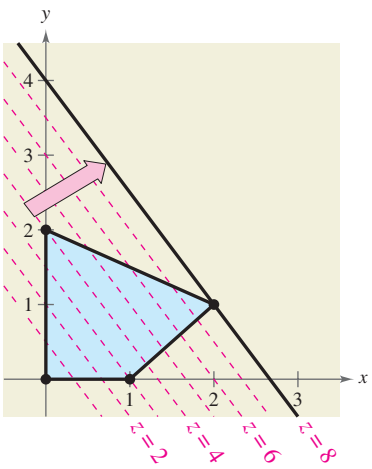


FIGURA 7.33

El siguiente ejemplo muestra que se puede usar el mismo procedimiento básico para resolver un problema en el que la función objetivo ha de *minimizarse*.

Ejemplo 2 Minimizar una función objetivo

Encuentre el valor mínimo de

$$z = 5x + 7y$$ Función objetivo

donde $x \geq 0$ y $y \geq 0$, sujeto a las siguientes restricciones.

$$\left.\begin{aligned} 2x + 3y &\geq 6 \\ 3x - y &\leq 15 \\ -x + y &\leq 4 \\ 2x + 5y &\leq 27 \end{aligned}\right\}$$ Restricciones

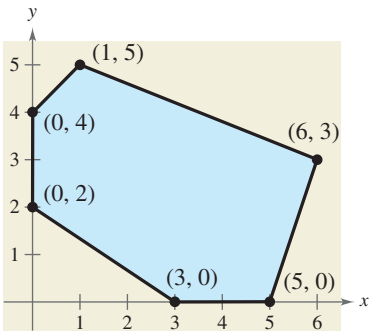


FIGURA 7.34

Solución

La región limitada por las restricciones se muestra en la figura 7.34. Al probar la función objetivo en cada vértice se obtiene lo siguiente.

En (0, 2): $z = 5(0) + 7(2) = 14$ Valor mínimo de z
En (0, 4): $z = 5(0) + 7(4) = 28$
En (1, 5): $z = 5(1) + 7(5) = 40$
En (6, 3): $z = 5(6) + 7(3) = 51$
En (5, 0): $z = 5(5) + 7(0) = 25$
En (3, 0): $z = 5(3) + 7(0) = 15$

Por tanto, el valor mínimo de z es 14 y ocurre cuando $x = 0$ y $y = 2$.

PUNTO *de repaso* Ahora trate de hacer el Ejercicio 11.

Ejemplo 3 Maximizar una función objetivo

Encuentre el valor máximo de

$$z = 5x + 7y$$ Función objetivo

donde $x \geq 0$ y $y \geq 0$, sujeto a las siguientes restricciones.

$$\left.\begin{aligned} 2x + 3y &\geq 6 \\ 3x - y &\leq 15 \\ -x + y &\leq 4 \\ 2x + 5y &\leq 27 \end{aligned}\right\}$$ Restricciones

Solución

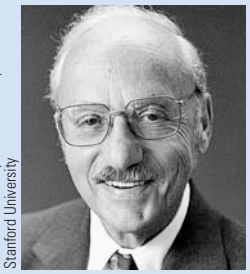
Este problema de programación lineal es idéntico al dado en el Ejemplo 2, *excepto* que la función objetivo se ha de maximizar en lugar de minimizar. Usando los valores de z en los vértices mostrados líneas antes, se puede concluir que el valor máximo de z es

$$z = 5(6) + 7(3) = 51$$

y ocurre cuando $x = 6$ y $y = 3$.

PUNTO *de repaso* Ahora trate de hacer el Ejercicio 13.

NOTA HISTÓRICA



Edward W. Souza/News Services/ Stanford University

George Dantzig (1914-2005) fue el primero en proponer el método simplex, o programación lineal, en 1947. Esta técnica definió los pasos necesarios para hallar la solución óptima a un complejo problema de varias variables.

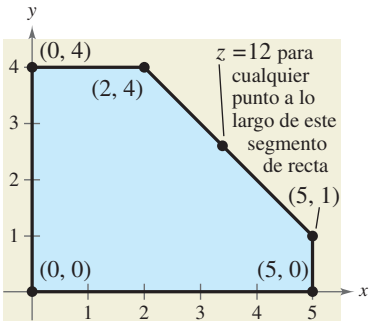


FIGURA 7.35

Es posible que el valor máximo (o mínimo) en un problema de programación lineal se presente en *dos* vértices. Por ejemplo, en los vértices de la región mostrada en la Figura 7.35, la función objetivo

$$z = 2x + 2y \qquad \text{Función objetivo}$$

tiene los siguientes valores.

En (0, 0): $z = 2(0) + 2(0) = 0$
En (0, 4): $z = 2(0) + 2(4) = 8$
En (2, 4): $z = 2(2) + 2(4) = 12$ Valor máximo de z
En (5, 1): $z = 2(5) + 2(1) = 12$ Valor máximo de z
En (5, 0): $z = 2(5) + 2(0) = 10$

En este caso, se puede concluir que la función objetivo tiene un valor máximo no sólo en los vértices (2, 4) y (5, 1); también tiene un valor máximo (de 12) *en cualquier punto del segmento de recta que une estos dos vértices*. Observe que la función objetivo en la forma pendiente-intersección $y = -x + \frac{1}{2}z$ tiene la misma pendiente que la recta que pasa por los vértices (2, 4) y (5, 1)

Algunos problemas de programación lineal no tienen soluciones óptimas. Esto puede ocurrir si la región determinada por las restricciones *no está acotada*. El Ejemplo 4 ilustra este problema.

Ayuda de álgebra

La pendiente m de la recta no vertical que pasa por los puntos (x_1, y_1) y (x_2, y_2) es

$$m = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}$$

donde $x_1 \neq x_2$.

Ejemplo 4 Una región no acotada

Encuentre el valor máximo de

$$z = 4x + 2y \qquad \text{Función objetivo}$$

donde $x \geq 0$ y $y \geq 0$, sujeto a las siguientes restricciones.

$$\left.\begin{aligned} x + 2y &\geq 4 \\ 3x + y &\geq 7 \\ -x + 2y &\leq 7 \end{aligned}\right\} \qquad \text{Restricciones}$$

Solución

La región determinada por las restricciones se muestra en la Figura 7.36. Para esta región no acotada, no hay máximo valor de z. Para ver esto, observe que el punto $(x, 0)$ se encuentra en la región para todos los valores de $x \geq 4$. Sustituyendo este punto en la función objetivo resulta

$$z = 4(x) + 2(0) = 4x.$$

Al escoger x de un valor grande, se pueden obtener valores de z que sean tan grandes como se desee. Por tanto, no hay valor máximo de z, pero sí *hay* un valor mínimo

En (1, 4): $z = 4(1) + 2(4) = 12$
En (2, 1): $z = 4(2) + 2(1) = 10$ Valor mínimo de z
En (4, 0): $z = 4(4) + 2(0) = 16$

Por tanto, el valor mínimo de z es 10 y ocurre cuando $x = 2$ y $y = 1$.

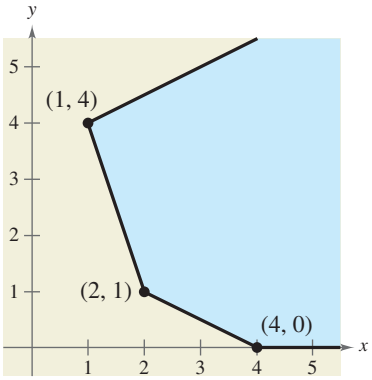


FIGURA 7.36

PUNTO *de repaso* Ahora trate de hacer el Ejercicio 15.

Aplicaciones

El Ejemplo 5 muestra cómo usar programación lineal para hallar la máxima utilidad en una aplicación financiera.

Ejemplo 5 Utilidad óptima

Un fabricante de caramelos desea maximizar la utilidad combinada por dos tipos de chocolates empacados en cajas. Una caja de cremas cubiertas de chocolate da una utilidad de \$1.50 por caja y una caja de nueces cubiertas de chocolate da una utilidad de \$2.00 por caja. Las pruebas de mercado y recursos disponibles han indicado las siguientes restricciones.

1. El nivel combinado de producción no debe exceder de 1200 cajas por mes.
2. La demanda de una caja de nueces cubiertas de chocolate no es más de la mitad de la demanda de una caja de cremas cubiertas de chocolate.
3. El nivel de producción de cremas cubiertas de chocolate debe ser menor o igual a 600 cajas más tres veces el nivel de producción de nueces cubiertas de chocolate.

¿Cuál es la máxima utilidad mensual? ¿Cuántas cajas de cada tipo deben ser producidas al mes para dar la máxima utilidad?

Solución

Sea x el número de cajas de cremas cubiertas de chocolate y sea y el número de cajas de nueces cubiertas de chocolate. Entonces, la función objetivo (para la utilidad combinada) está dada por

$$P = 1.5x + 2y.$$ Función objetivo

Las tres restricciones se traducen en las siguientes desigualdades lineales.

1. $x + y \le 1200 \quad \Rightarrow \quad x + y \le 1200$
2. $y \le \frac{1}{2}x \quad \Rightarrow \quad -x + 2y \le 0$
3. $x \le 600 + 3y \quad \Rightarrow \quad x - 3y \le 600$

Como x ni y pueden ser negativas, también tenemos las dos restricciones adicionales de $x \ge 0$ y $y \ge 0$. La Figura 7.37 muestra la región determinada por las restricciones. Para hallar la máxima utilidad mensual, pruebe los valores de P en los vértices de la región.

En (0, 0): $P = 1.5(0) + 2(0) = 0$
En (800, 400): $P = 1.5(800) + 2(400) = 2000$ Máxima utilidad
En (1050, 150): $P = 1.5(1050) + 2(150) = 1875$
En (600, 0): $P = 1.5(600) + 2(0) = 900$

En consecuencia, la máxima utilidad mensual es \$2000 y ocurre cuando la producción mensual consta de 800 cajas de cremas cubiertas de chocolate y 400 cajas de nueces cubiertas de chocolate.

PUNTO *de repaso* Ahora trate de hacer el Ejercicio 35.

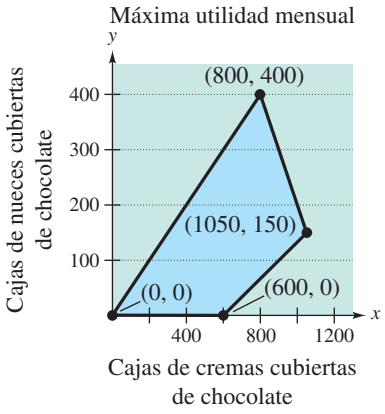


FIGURA 7.37

En el Ejemplo 5, si el fabricante mejoró la producción de cremas cubiertas de chocolate para que dieran una utilidad de \$2.50 por unidad, la máxima utilidad mensual podría hallarse entonces usando la función objetivo $P = 2.5x + 2y$. Al probar los valores de P en los vértices de la región, se encontraría que la máxima utilidad mensual era de \$2925 y ocurriría cuando $x = 1050$ y $y = 150$.

Ejemplo 6 Costo óptimo

La parte líquida de una dieta es para proporcionar al menos 300 calorías, 36 unidades de vitamina A y 90 de vitamina C. Una taza de bebida de dieta X cuesta \$0.12 y proporciona 60 calorías, 12 unidades de vitamina A y 10 de vitamina C. Una taza de bebida de dieta Y cuesta \$0.15 y proporciona 60 calorías, 6 unidades de vitamina A y 3 unidades de vitamina C. ¿Cuántas tazas de cada bebida deben consumirse al día para obtener un costo óptimo y todavía satisfacer las necesidades diarias?

Solución

Como en el Ejemplo 9 de la sección 7.5, sea x el número de tazas de bebida de dieta X y sea y el número de tazas de bebida de dieta Y.

$$\left.\begin{array}{lrcl} \text{Para calorías:} & 60x + 60y & \geq & 300 \\ \text{Para vitamina A:} & 12x + 6y & \geq & 36 \\ \text{Para vitamina C:} & 10x + 30y & \geq & 90 \\ & x & \geq & 0 \\ & y & \geq & 0 \end{array}\right\}$$ Restricciones

El costo C está dado por $C = 0.12x + 0.15y$. Función objetivo

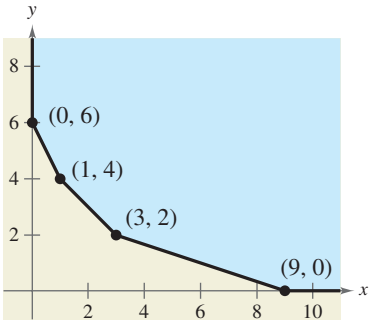


FIGURA 7.38

La gráfica de la región correspondiente a las restricciones se ilustra en la Figura 7.38. En vista de que deseamos incurrir en el menor costo posible, es necesario determinar el costo *mínimo*. Para determinar el costo mínimo, pruebe C en cada vértice de la región.

En (0, 6): $C = 0.12(0) + 0.15(6) = 0.90$
En (1, 4): $C = 0.12(1) + 0.15(4) = 0.72$
En (3, 2): $C = 0.12(3) + 0.15(2) = 0.66$ Valor mínimo de C
En (9, 0): $C = 0.12(9) + 0.15(0) = 1.08$

Por tanto, el costo mínimo es \$0.66 por día, y ocurre cuando 3 tazas de la bebida X y 2 tazas de la bebida Y se consumen al día.

PUNTO *de repaso* Ahora trate de hacer el Ejercicio 37.

DISCUSIÓN EN CLASE

Creación de un problema de programación lineal Trace la región determinada por las siguientes restricciones.

$$\left.\begin{array}{r} x + 2y \leq 8 \\ x + y \leq 5 \\ x \geq 0 \\ y \geq 0 \end{array}\right\}$$ Restricciones

Encuentre, si es posible, una función objetivo de la forma $z = ax + by$ que tenga un máximo en cada vértice indicado de la región.

a. (0, 4) b. (2, 3) c. (5, 0) d. (0, 0)

Explique cómo encontró cada función objetivo.

7.6 EJERCICIOS

En www.CalcChat.com vea las soluciones a los ejercicios impares.

VOCABULARIO: Llene los espacios en blanco.

1. En el proceso llamado _____ nos piden hallar el valor máximo o mínimo de una cantidad.

2. Un tipo de estrategia de optimización se denomina _____ _____.

3. La función _____ de un problema de programación lineal da la cantidad que ha de ser maximizada o minimizada.

4. La _____ de un problema de programación lineal determina el conjunto de _____ _____.

5. Las soluciones factibles están _____ o _____ la frontera de la región correspondiente a un sistema de restricciones.

6. Si un problema de programación lineal tiene solución, debe ocurrir en un _____ del conjunto de soluciones factibles.

HABILIDADES Y APLICACIONES

En los Ejercicios 7-12, encuentre los valores mínimo y máximo de la función objetivo y dónde ocurren, sujetos a las restricciones indicadas. (Para cada ejercicio, se proporciona la gráfica de la región determinada por las restricciones.)

7. Función objetivo:

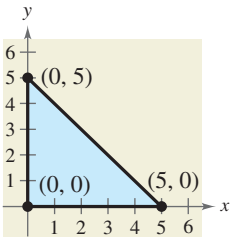
$z = 4x + 3y$

Restricciones:

$x \geq 0$

$y \geq 0$

$x + y \leq 5$



8. Función objetivo:

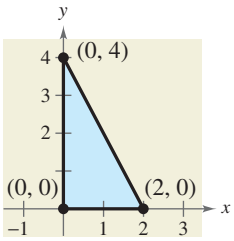
$z = 2x + 8y$

Restricciones:

$x \geq 0$

$y \geq 0$

$2x + y \leq 4$



9. Función objetivo:

$z = 2x + 5y$

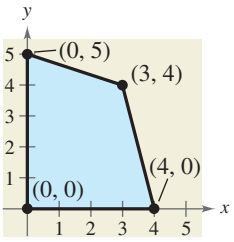
Restricciones:

$x \geq 0$

$y \geq 0$

$x + 3y \leq 15$

$4x + y \leq 16$



10. Función objetivo:

$z = 4x + 5y$

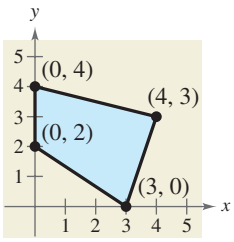
Restricciones:

$x \geq 0$

$2x + 3y \geq 6$

$3x - y \leq 9$

$x + 4y \leq 16$



11. Función objetivo:

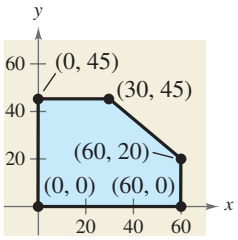
$z = 10x + 7y$

Restricciones:

$0 \leq x \leq 60$

$0 \leq y \leq 45$

$5x + 6y \leq 420$



12. Función objetivo:

$z = 40x + 45y$

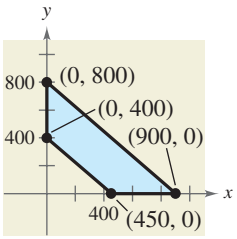
Restricciones:

$x \geq 0$

$y \geq 0$

$8x + 9y \leq 7200$

$8x + 9y \geq 3600$



En los Ejercicios 13-16, trace la región determinada por las restricciones. A continuación encuentre los valores mínimo y máximo de la función objetivo (si es posible) y dónde ocurre, sujeto a las restricciones indicadas.

13. Función objetivo:

$z = 3x + 2y$

Restricciones:

$x \geq 0$

$y \geq 0$

$5x + 2y \leq 20$

$5x + y \geq 10$

14. Función objetivo:

$z = 5x + \frac{1}{2}y$

Restricciones:

$x \geq 0$

$y \geq 0$

$\frac{1}{2}x + y \leq 8$

$x + \frac{1}{2}y \geq 4$

15. Función objetivo:

$z = 4x + 5y$

Restricciones:

$x \geq 0$

$y \geq 0$

$x + y \geq 8$

$3x + 5y \geq 30$

16. Función objetivo:

$z = 5x + 4y$

Restricciones:

$x \geq 0$

$y \geq 0$

$2x + 2y \geq 10$

$x + 2y \geq 6$

En los Ejercicios 17-20, use una calculadora de gráficas para graficar la región determinada por las restricciones. A continuación encuentre los valores mínimo y máximo de la función objetivo y dónde ocurren, sujeto a las restricciones.

17. Función objetivo:

$z = 3x + y$

Restricciones:

$x \geq 0$

$y \geq 0$

$x + 4y \leq 60$

$3x + 2y \geq 48$

18. Función objetivo:

$z = x$

Restricciones:

$x \geq 0$

$y \geq 0$

$2x + 3y \leq 60$

$2x + y \leq 28$

$4x + y \leq 48$

19. Función objetivo:

$z = x + 4y$

Restricciones:

(Ver Ejercicio 17.)

20. Función objetivo:

$z = y$

Restricciones:

(Ver Ejercicio 18.)

En los Ejercicios 21-24, encuentre los valores mínimo y máximo de la función objetivo y dónde ocurren, sujetos a las restricciones $x \geq 0$, $y \geq 0$, $3x + y \leq 15$ y $4x + 3y \leq 30$.

21. $z = 2x + y$

22. $z = 5x + y$

23. $z = x + y$

24. $z = 3x + y$

En los Ejercicios 25-28, encuentre los valores mínimo y máximo de la función objetivo y dónde ocurren, sujetos a las restricciones $x \geq 0$, $y \geq 0$, $x + 4y \leq 20$, $x + y \leq 18$ y $2x + 2y \leq 21$.

25. $z = x + 5y$

26. $z = 2x + 4y$

27. $z = 4x + 5y$

28. $z = 4x + y$

En los Ejercicios 29-34, el problema de programación lineal tiene una característica poco común. Trace una gráfica de la región de solución para el problema y describa la característica poco común. Encuentre los valores mínimo y máximo de la función objetivo (si es posible) y dónde ocurren.

29. Función objetivo:

$z = 2.5x + y$

Restricciones:

$x \geq 0$

$y \geq 0$

$3x + 5y \leq 15$

$5x + 2y \leq 10$

30. Función objetivo:

$z = x + y$

Restricciones:

$x \geq 0$

$y \geq 0$

$-x + y \leq 1$

$-x + 2y \leq 4$

31. Función objetivo:

$z = -x + 2y$

Restricciones:

$x \geq 0$

$y \geq 0$

$x \leq 10$

$x + y \leq 7$

32. Función objetivo:

$z = x + y$

Restricciones:

$x \geq 0$

$y \geq 0$

$-x + y \leq 0$

$-3x + y \geq 3$

33. Función objetivo:

$z = 3x + 4y$

Restricciones:

$x \geq 0$

$y \geq 0$

$x + y \leq 1$

$2x + y \leq 4$

34. Función objetivo:

$z = x + 2y$

Restricciones:

$x \geq 0$

$y \geq 0$

$x + 2y \leq 4$

$2x + y \leq 4$

35. UTILIDAD ÓPTIMA Un comerciante planea vender dos modelos de reproductores MP3 a precios de \$225 y \$250. El modelo de \$225 da una utilidad de \$30 por unidad y, el modelo de \$250, una de \$31 por unidad. El comerciante estima que la demanda mensual total no pasará de 275 unidades y no desea invertir más de \$63 000 en inventario para estos productos. ¿Cuál es el nivel óptimo de inventario para cada modelo? ¿Cuál es la utilidad óptima?

36. UTILIDAD ÓPTIMA Un fabricante produce dos modelos de máquinas elípticas para ejercicio combinado. Los tiempos para ensamble, acabado y empaque del modelo X son 3 horas, 3 horas y 0.8 horas, respectivamente. Los tiempos para el modelo Y son 4 horas, 2.5 horas y 0.4 horas. Los tiempos totales disponibles para el ensamble, acabado y empaque son 6000 horas, 4200 horas y 950 horas, respectivamente. Las utilidades por unidad son \$300 por el modelo X y \$375 por el modelo Y. ¿Cuál es el nivel óptimo de producción para cada modelo? ¿Cuál es la utilidad óptima?

37. COSTO ÓPTIMO Un asilo para animales mezcla dos marcas de alimento para perros. La marca X cuesta \$25 por bolsa y contiene dos unidades del elemento nutricional *A*, dos unidades del elemento *B* y dos unidades del elemento *C*. La marca Y cuesta \$20 por bolsa y contiene una unidad del elemento nutricional *A*, nueve del elemento *B* y tres del elemento *C*. Las cantidades mínimas requeridas de nutrientes *A*, *B* y *C* son 12, 36 y 24 unidades, respectivamente. ¿Cuál es el número óptimo de bolsas de cada marca que deben mezclarse? ¿Cuál es el costo óptimo?

38. COSTO ÓPTIMO Una agencia humanitaria puede usar dos modelos de vehículos para una misión de rescate de refugiados. Cada vehículo del modelo *A* cuesta \$1000 y cada vehículo del modelo *B* cuesta \$1500. Las estrategias y objetivos de la misión indican las siguientes restricciones.

- Deben usarse al menos 20 vehículos.
- Un vehículo modelo *A* puede contener 45 cajas de abastecimientos. Un vehículo de modelo *B* puede contener 30 cajas de abastecimientos. La agencia debe entregar al menos 690 cajas de abastecimientos al campo de refugiados.
- Un vehículo de modelo *A* puede contener 20 refugiados. Un vehículo de modelo *B* puede contener 32 refugiados. La agencia debe rescatar al menos 520 refugiados.

¿Cuál es el número óptimo de vehículos que debe usarse de cada modelo? ¿Cuál es el costo óptimo?

39. INGRESO ÓPTIMO Una firma de contadores tiene disponibles, semanalmente, 780 horas de tiempo de personal y 272 horas de tiempo para revisiones. La firma cobra $1600 por una auditoría y $250 por una devolución de impuestos. Cada auditoría requiere de 60 horas de tiempo de personal y 16 horas de tiempo para revisiones. Cada devolución de impuestos requiere de 10 horas de tiempo de personal y 4 horas de tiempo para revisiones. ¿Qué números de auditorías y devoluciones de impuestos darán un ingreso óptimo? ¿Cuál es el ingreso óptimo?

40. INGRESO ÓPTIMO La firma de contadores del Ejercicio 39 baja su cuota de cobro para una auditoría a $1400. ¿Qué números de auditorías y devoluciones de impuestos darán un ingreso óptimo? ¿Cuál es el ingreso óptimo?

41. SELECCIÓN DE MEDIOS Una compañía ha presupuestado un máximo de $1 000 000 para publicidad nacional de un medicamento contra alergias. Cada minuto de tiempo en televisión cuesta $100 000 y cada anuncio de una página en periódicos cuesta $20 000. Se espera que cada anuncio en televisión sea visto por 20 millones de televidentes, y que cada anuncio en periódicos sea visto por 5 millones de lectores. El departamento de investigación de mercados de la compañía recomienda que, como máximo, se gaste 80% del presupuesto de publicidad en anuncios por televisión. ¿Cuál es la cantidad óptima que debe gastarse en cada tipo de anuncio? ¿Cuál es la audiencia óptima total?

42. COSTO ÓPTIMO De acuerdo con la AAA (Automobile Association of America), el 27 de marzo de 2009, el precio promedio nacional por galón de gasolina regular sin plomo (87 octanos) fue de $2.03, y el precio de gasolina Premium sin plomo (93 octanos) fue de $2.23.

(a) Escriba una función objetivo que modele el costo de la mezcla de gasolina sin plomo de media graduación (89 octanos).

(b) Determine las restricciones para la función objetivo del inciso (a).

(c) Trace una gráfica de la región determinada por las restricciones del inciso (b).

(d) Determine la mezcla de gasolina sin plomo regular y Premium que resulte en un costo óptimo de gasolina sin plomo de media graduación.

(e) ¿Cuál es el costo óptimo?

(f) ¿El costo es menor que el promedio nacional de $2.15 por galón de gasolina sin plomo de media graduación?

43. CARTERA DE INVERSIONES Un inversionista tiene hasta $250 000 para invertir en dos tipos de inversiones. El tipo *A* paga 8% anualmente y el tipo *B* paga 10% anualmente. Para tener una cartera bien equilibrada, el inversionista impone las siguientes condiciones. Al menos un cuarto de la cartera total de valores ha de asignarse a inversiones tipo *A* y al menos un cuarto de la cartera de valores ha de asignarse a inversiones tipo *B*. ¿Cuál es la cantidad óptima que debe invertirse en cada tipo de inversión? ¿Cuál es el rendimiento óptimo?

44. CARTERA DE INVERSIONES Un inversionista tiene hasta $450 000 para invertir en dos tipos de inversiones. El tipo *A* paga 6% anualmente y el tipo *B* paga 10% anualmente. Para tener una cartera bien equilibrada, el inversionista impone las siguientes condiciones. Al menos la mitad de la cartera total de valores ha de asignarse a inversiones tipo *A* y al menos un cuarto de la cartera de valores ha de asignarse a inversiones tipo *B*. ¿Cuál es la cantidad óptima que debe invertirse en cada tipo de inversión? ¿Cuál es el rendimiento óptimo?

EXPLORACIÓN

¿VERDADERO O FALSO? En los Ejercicios 45-47, determine si la proposición es verdadera o falsa. Justifique su respuesta.

45. Si una función objetivo tiene un valor máximo en los vértices (4, 7) y (8, 3), se puede concluir que también tiene un valor máximo en los puntos (4.5, 6.5) y (7.8, 3.2)

46. Si una función objetivo tiene un valor mínimo en el vértice (20, 0), se puede concluir que también tiene un valor mínimo en el punto (0, 0).

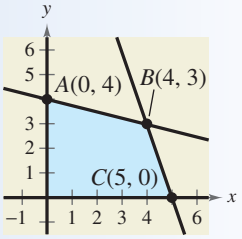
47. Cuando resuelve un problema de programación lineal, si la función objetivo tiene un valor máximo en más de un vértice, se puede suponer que hay un número infinito de puntos que producirán el valor máximo.

48. TOQUE FINAL Usando la región restringida que se muestra a continuación, determine cuál de las siguientes funciones objetivo tiene (a) un máximo en el vértice *A*, (b) un máximo en el vértice *B*, (c) un máximo en el vértice *C* y (d) un mínimo en el vértice *C*

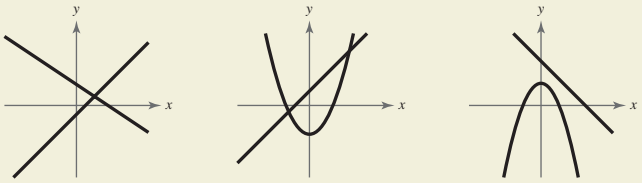
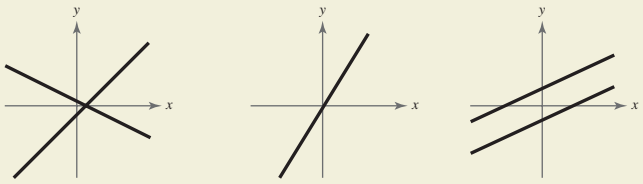
(i) $z = 2x + y$

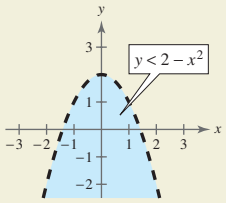
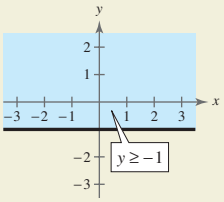
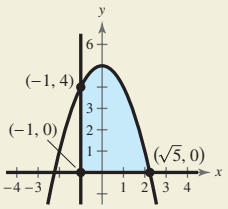
(ii) $z = 2x - y$

(iii) $z = -x + 2y$



7 RESUMEN DEL CAPÍTULO

	¿Qué aprendió?	Explicación/Ejemplos	Ejercicios de repaso
Sección 7.1	Usar el método de sustitución para resolver sistemas de ecuaciones lineales con dos variables *(p. 494)*.	**Método de sustitución** **1.** *Despeje* una variable de una de las ecuaciones en términos de la otra. **2.** *Sustituya* en la otra ecuación, la expresión hallada en el paso 1 para obtener una ecuación con una variable. **3.** *Resuelva* la ecuación obtenida en el paso 2. **4.** *Sustituya hacia atrás* en la expresión obtenida en el paso 1, el valor obtenido en el paso 3 para hallar el valor de la otra variable. **5.** *Verifique* que la solución satisfaga *cada una* de las ecuaciones originales.	1–6
	Usar el método de sustitución para resolver sistemas de ecuaciones no lineales con dos variables *(p. 497)*.	El método de sustitución (vea pasos de líneas antes) se puede usar para resolver sistemas en los que una o ambas ecuaciones son no lineales. (Vea Ejemplos 3 y 4.)	7–10
	Usar un método gráfico para resolver sistemas de ecuaciones con dos variables *(p. 498)*.	 Un punto de intersección; Dos puntos de intersección; No hay puntos de intersección	11–18
	Usar sistemas de ecuaciones para modelar y resolver problemas de la vida real *(p. 499)*.	Un sistema de ecuaciones se puede usar para hallar el punto de equilibrio para una compañía. (Vea Ejemplo 6.)	19–24
Sección 7.2	Usar el método de eliminación para resolver sistemas de ecuaciones lineales con dos variables *(p. 505)*.	**Método de eliminación** **1.** *Obtenga coeficientes* para x (o y) que difieran sólo en signo. **2.** *Sume* las ecuaciones para eliminar una variable. **3.** *Resuelva* la ecuación obtenida en el paso 2. **4.** *Sustituya hacia atrás* en cualquiera de las ecuaciones originales, el valor obtenido en el paso 3 para despejar la otra variable. **5.** *Compruebe* que la solución satisfaga *cada una* de las ecuaciones originales.	25–32
	Interpretar gráficamente el número de soluciones de sistemas de ecuaciones lineales con dos variables *(p. 508)*.	 Las rectas se intersecan en un punto; exactamente una solución; Las rectas coinciden; número infinito de soluciones; Las rectas son paralelas; no hay solución	33–36
	Usar sistemas de ecuaciones lineales con dos variables para modelar y resolver problemas de la vida real *(p. 511)*.	Se puede usar un sistema de ecuaciones lineales con dos variables para hallar el punto de equilibrio para un mercado particular. (Vea Ejemplo 9.)	37, 38

	¿Qué aprendió?	Explicación/Ejemplos	Ejercicios de repaso
Sección 7.3	Usar sustitución hacia atrás para resolver sistemas lineales en forma escalonada por renglones *(p. 517)*.	**Forma escalonada por renglones** $\begin{cases} x - 2y + 3z = 9 \\ -x + 3y = -4 \\ 2x - 5y + 5z = 17 \end{cases} \rightarrow \begin{cases} x - 2y + 3z = 9 \\ y + 3z = 5 \\ z = 2 \end{cases}$	39–42
	Usar eliminación gaussiana para resolver sistemas de ecuaciones lineales *(p. 518)*.	Para producir un sistema equivalente de ecuaciones lineales, use operaciones en escalón al (1) intercambiar dos ecuaciones, (2) multiplicar una ecuación por una constante diferente de cero, o (3) sumar un múltiplo de una de las ecuaciones a otra ecuación para sustituir la última ecuación.	43–48
	Resolver sistemas no cuadrados de ecuaciones lineales *(p. 522)*.	En un sistema no cuadrado, el número de ecuaciones difiere del número de variables. Un sistema de ecuaciones lineales no puede tener una solución única a menos que haya al menos tantas ecuaciones como variables.	49, 50
	Usar sistemas de ecuaciones lineales con dos o más variables, para modelar y resolver problemas de la vida real *(p. 523)*.	Se puede usar un sistema de ecuaciones lineales con tres variables para hallar la ecuación de posición de un objeto que se mueva en una recta (vertical) con aceleración constante. (Vea Ejemplo 7.)	51–60
Sección 7.4	Reconocer descomposiciones en fracciones parciales de expresiones racionales *(p. 530)*.	$\frac{9}{x^3 - 6x^2} = \frac{9}{x^2(x - 6)} = \frac{A}{x} + \frac{B}{x^2} + \frac{C}{x - 6}$	61–64
	Encontrar descomposiciones en fracciones parciales de expresiones racionales *(p. 531)*.	Las técnicas usadas para determinar constantes en los numeradores de fracciones parciales varían ligeramente, según el tipo de factores del denominador: lineal o cuadrático, distinto o repetido.	65–72
Sección 7.5	Trazar las gráficas de desigualdades con dos variables *(p. 538)*.	 	73–78
	Resolver sistemas de desigualdades *(p. 540)*.	$\begin{cases} x^2 + y \le 5 \\ x \ge -1 \\ y \ge 0 \end{cases}$ 	79–86
	Usar sistemas de desigualdades con dos variables para modelar y resolver problemas de la vida real *(p. 543)*.	Se puede usar un sistema de desigualdades con dos variables para hallar el excedente de consumidor y el de productor para funciones dadas de demanda y oferta. (Vea Ejemplo 8.)	87–92
Sección 7.6	Resolver problemas de programación lineal *(p. 549)*.	Para resolver un problema de programación lineal, (1) dibuje la región correspondiente al sistema de restricciones, (2) encuentre los vértices de la región, y (3) pruebe la función objetivo en cada uno de los vértices y seleccione los valores de las variables que optimicen la función objetivo.	93–98
	Usar programación lineal para modelar y resolver problemas de la vida real *(p. 553)*.	Se puede usar programación lineal para hallar la utilidad máxima en aplicaciones financieras. (Vea Ejemplo 5.)	99–103

7 EJERCICIOS DE REPASO

En www.CalcChat.com vea las soluciones a los ejercicios impares.

7.1 En los Ejercicios 1-10, resuelva el sistema por el método de sustitución.

1. $\begin{cases} x + y = 2 \\ x - y = 0 \end{cases}$
2. $\begin{cases} 2x - 3y = 3 \\ x - y = 0 \end{cases}$
3. $\begin{cases} 4x - y - 1 = 0 \\ 8x + y - 17 = 0 \end{cases}$
4. $\begin{cases} 10x + 6y + 14 = 0 \\ x + 9y + 7 = 0 \end{cases}$
5. $\begin{cases} 0.5x + y = 0.75 \\ 1.25x - 4.5y = -2.5 \end{cases}$
6. $\begin{cases} -x + \frac{2}{5}y = \frac{3}{5} \\ -x + \frac{1}{5}y = -\frac{4}{5} \end{cases}$
7. $\begin{cases} x^2 - y^2 = 9 \\ x - y = 1 \end{cases}$
8. $\begin{cases} x^2 + y^2 = 169 \\ 3x + 2y = 39 \end{cases}$
9. $\begin{cases} y = 2x^2 \\ y = x^4 - 2x^2 \end{cases}$
10. $\begin{cases} x = y + 3 \\ x = y^2 + 1 \end{cases}$

En los Ejercicios 11-14, resuelva gráficamente el sistema.

11. $\begin{cases} 2x - y = 10 \\ x + 5y = -6 \end{cases}$
12. $\begin{cases} 8x - 3y = -3 \\ 2x + 5y = 28 \end{cases}$
13. $\begin{cases} y = 2x^2 - 4x + 1 \\ y = x^2 - 4x + 3 \end{cases}$
14. $\begin{cases} y^2 - 2y + x = 0 \\ x + y = 0 \end{cases}$

En los Ejercicios 15-18, use una calculadora de gráficas para resolver el sistema de ecuaciones. Encuentre la solución precisa a dos lugares decimales.

15. $\begin{cases} y = -2e^{-x} \\ 2e^x + y = 0 \end{cases}$
16. $\begin{cases} x^2 + y^2 = 100 \\ 2x - 3y = -12 \end{cases}$
17. $\begin{cases} y = 2 + \log x \\ y = \frac{3}{4}x + 5 \end{cases}$
18. $\begin{cases} y = \ln(x - 1) - 3 \\ y = 4 - \frac{1}{2}x \end{cases}$

19. **ANÁLISIS DE PUNTO DE EQUILIBRIO** Una persona inicia un negocio de álbumes y hace una inversión inicial de $50 000. El costo unitario de un conjunto de piezas para álbum es $12 y el precio de venta es de $25. ¿Cuántos conjuntos de piezas para álbum debe vender para alcanzar el punto de equilibrio?

20. **ELECCIÓN DE DOS TRABAJOS** A una persona le ofrecen dos trabajos de vendedor en una compañía farmacéutica. Una compañía ofrece un salario anual de $55 000 más un bono de fin de año de 1.5% del total de ventas que haga. La otra compañía le ofrece un salario anual de $52 000 más un bono de fin de año de 2% de sus ventas totales que haga. ¿Qué cantidad de ventas hará mejor la segunda oferta? Explique.

21. **GEOMETRÍA** El perímetro de un rectángulo es de 480 metros y su longitud es 150% de su ancho. Encuentre las dimensiones del rectángulo.

22. **GEOMETRÍA** El perímetro de un rectángulo es 68 pies y su ancho es $\frac{8}{9}$ de su longitud. Encuentre las dimensiones del rectángulo.

23. **GEOMETRÍA** El perímetro de un rectángulo es de 40 pulgadas. El área del rectángulo es de 96 pulgadas cuadradas. Encuentre las dimensiones del rectángulo.

24. **ÍNDICE DE MASA CORPORAL** El índice de masa corporal (IMC) es una medida de la grasa corporal basada en estatura y peso. El 75avo percentil de IMC para mujeres de 9 a 20 años de edad está creciendo con más lentitud que el de hombres del mismo rango de edad. Los modelos que representan el 75 percentil de IMC para hombres y mujeres de 9 a 20 años de edad están dados por

$B = 0.73a + 11$ Hombres

$B = 0.61a + 12.8$ Mujeres

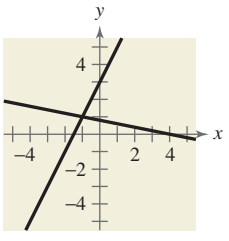
donde B es el IMC (kg/m^2) y a representa la edad, con $a = 9$ correspondiente a 9 años de edad. Use una calculadora de gráficas para determinar si el IMC para hombres rebasa el IMC para mujeres. (Fuente: National Center for Health Statistics)

7.2 En los Ejercicios 25-32, resuelva el sistema por el método de eliminación.

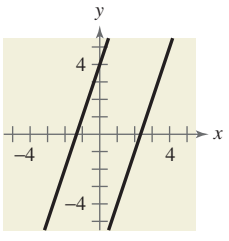
25. $\begin{cases} 2x - y = 2 \\ 6x + 8y = 39 \end{cases}$
26. $\begin{cases} 40x + 30y = 24 \\ 20x - 50y = -14 \end{cases}$
27. $\begin{cases} 0.2x + 0.3y = 0.14 \\ 0.4x + 0.5y = 0.20 \end{cases}$
28. $\begin{cases} 12x + 42y = -17 \\ 30x - 18y = 19 \end{cases}$
29. $\begin{cases} 3x - 2y = 0 \\ 3x + 2(y + 5) = 10 \end{cases}$
30. $\begin{cases} 7x + 12y = 63 \\ 2x + 3(y + 2) = 21 \end{cases}$
31. $\begin{cases} 1.25x - 2y = 3.5 \\ 5x - 8y = 14 \end{cases}$
32. $\begin{cases} 1.5x + 2.5y = 8.5 \\ 6x + 10y = 24 \end{cases}$

En los Ejercicios 33-36, relacione el sistema de ecuaciones lineales con su gráfica. Describa el número de soluciones y diga si el sistema es consistente o inconsistente. [Las gráficas están marcadas (a),(b),(c) y (d).]

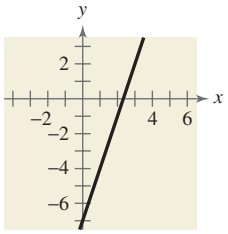
(a)



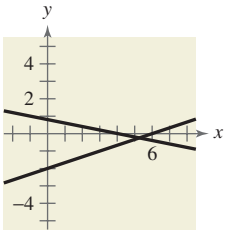
(b)



(c)



(d)



33. $\begin{cases} x + 5y = 4 \\ x - 3y = 6 \end{cases}$

34. $\begin{cases} -3x + y = -7 \\ 9x - 3y = 21 \end{cases}$

35. $\begin{cases} 3x - y = 7 \\ -6x + 2y = 8 \end{cases}$

36. $\begin{cases} 2x - y = -3 \\ x + 5y = 4 \end{cases}$

OFERTA Y DEMANDA En los Ejercicios 37 y 38, encuentre el punto de equilibrio de las ecuaciones de demanda y oferta.

	Demanda	*Oferta*
37.	$p = 37 - 0.0002x$	$p = 22 + 0.00001x$
38.	$p = 120 - 0.0001x$	$p = 45 + 0.0002x$

7.3 En los Ejercicios 39-42, use sustitución hacia atrás para resolver el sistema de ecuaciones lineales.

39. $\begin{cases} x - 4y + 3z = 3 \\ -y + z = -1 \\ z = -5 \end{cases}$

40. $\begin{cases} x - 7y + 8z = 85 \\ y - 9z = -35 \\ z = 3 \end{cases}$

41. $\begin{cases} 4x - 3y - 2z = -65 \\ 8y - 7z = -14 \\ z = 10 \end{cases}$

42. $\begin{cases} 5x - 7z = 9 \\ 3y - 8z = -4 \\ z = -7 \end{cases}$

En los Ejercicios 43-48, use eliminación gaussiana para resolver el sistema de ecuaciones.

43. $\begin{cases} x + 2y + 6z = 4 \\ -3x + 2y - z = -4 \\ 4x + 2z = 16 \end{cases}$

44. $\begin{cases} x + 3y - z = 13 \\ 2x - 5z = 23 \\ 4x - y - 2z = 14 \end{cases}$

45. $\begin{cases} x - 2y + z = -6 \\ 2x - 3y = -7 \\ -x + 3y - 3z = 11 \end{cases}$

46. $\begin{cases} 2x + 6z = -9 \\ 3x - 2y + 11z = -16 \\ 3x - y + 7z = -11 \end{cases}$

47. $\begin{cases} x + 4w = 1 \\ 3y + z - w = 4 \\ 2y - 3w = 2 \\ 4x - y + 2z = 5 \end{cases}$

48. $\begin{cases} x + y + z + w = 6 \\ 3x + 4y - w = 3 \\ -2x + 3y + z + 3w = 6 \\ x + 4y - z + 2w = 7 \end{cases}$

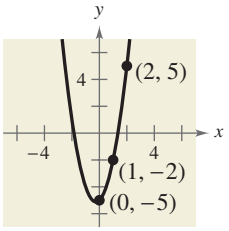
En los Ejercicios 49 y 50, resuelva el sistema no cuadrado de ecuaciones.

49. $\begin{cases} 5x - 12y + 7z = 16 \\ 3x - 7y + 4z = 9 \end{cases}$

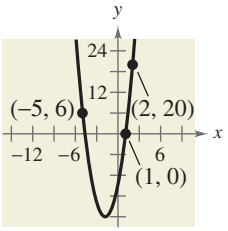
50. $\begin{cases} 2x + 5y - 19z = 34 \\ 3x + 8y - 31z = 54 \end{cases}$

En los Ejercicios 51 y 52, encuentre la ecuación de la parábola $y = ax^2 + bx + c$ que pase por los puntos. Para verificar el resultado, use una calculadora de gráficas para determinar los puntos y graficar la parábola.

51.



52.

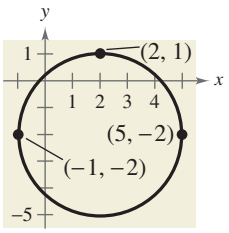


En los Ejercicios 53 y 54, encuentre la ecuación de la circunferencia

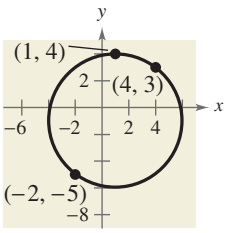
$$x^2 + y^2 + Dx + Ey + F = 0$$

que pasa por los puntos. Para verificar el resultado, use una calculadora de gráficas para determinar los puntos y graficar la circunferencia.

53.



54.



55. ANÁLISIS DE DATOS: COMPRAS EN LÍNEA La tabla siguiente muestra las ventas proyectadas al menudeo en línea y (en miles de millones de dólares) en Estados Unidos, de 2010 a 2012. (Fuente: Forrester Research, Inc.)

Año	Ventas al menudeo en línea, y
2010	267.8
2011	301.0
2012	334.7

(a) Use la técnica demostrada en los Ejercicios 77-80 de la sección 7.3 para establecer un sistema de ecuaciones para los datos y hallar una parábola de regresión de mínimos cuadrados que los modele. Con x represente el año, con $x = 10$ correspondiente a 2010.

(b) Use una calculadora de gráficas para graficar la parábola y los datos en la misma pantalla. ¿Qué tan bien se ajusta el modelo a los datos?

(c) Use el modelo para estimar las ventas al menudeo en línea en Estados Unidos en 2015. ¿Su respuesta le parece razonable?

56. AGRICULTURA Una mezcla de 6 galones del producto químico A, 8 galones del producto químico B y 13 galones del producto químico C es necesaria para matar un insecto destructivo de las cosechas. El pulverizador comercial X contiene 1, 2 y 2 partes, respectivamente, de estos productos químicos. El pulverizador comercial Y contiene sólo el producto químico C y el pulverizador comercial Z contiene sólo los productos químicos A, B y C en cantidades iguales. ¿Cuánto de cada tipo de pulverizador comercial es necesario para obtener la mezcla deseada?

57. ANÁLISIS DE INVERSIONES Una herencia de $40 000 se dividió entre tres inversiones que dieron $3500 de interés al año. Las tasas de interés para las tres inversiones fueron de 7%, 9% y 11%. Encuentre la cantidad colocada en cada inversión si la segunda y la tercera fueron de $3000 y $5000 menos que la primera, respectivamente.

58. MOVIMIENTO VERTICAL Un cuerpo que se mueve verticalmente está en las alturas dadas en los tiempos especificados. Encuentre la ecuación de posición

$$s = \tfrac{1}{2}at^2 + v_0t + s_0$$

para el cuerpo.

(a) En $t = 1$ segundo(s), $s = 134$ pies
En $t = 2$ segundo(s), $s = 86$ pies
En $t = 3$ segundo(s), $s = 6$ pies

(b) En $t = 1$ segundo(s), $s = 184$ pies
En $t = 2$ segundo(s), $s = 116$ pies
En $t = 3$ segundo(s), $s = 16$ pies

59. DEPORTES El campo de golf Pebble Beach, en California, es un campo de 18 hoyos formado por hoyos de par 3, hoyos de par 4 y hoyos de par 5. Hay dos hoyos más de par 4 que dos veces el número de hoyos de par 5, y el número de hoyos de par 3 es igual al número de hoyos de par 5. Encuentre el número de hoyos de par 3, par 4 y par 5 del campo. (Fuente: Pebble Beach Resorts)

60. DEPORTES El campo de golf St. Andrews, en Escocia, es uno de los más antiguos del mundo. Tiene un campo de 18 hoyos formado por hoyos de par 3, hoyos de par 4 y hoyos de par 5. Hay siete veces más hoyos de par 4 que hoyos de par 5, y la suma de los números de hoyos de par 4 y de par 5 es cuatro. Encuentre el número de hoyos de par 3, par 4 y par 5 del campo. (Fuente: St. Andrews Links Trust)

7.4 En los Ejercicios 61-64, escriba la forma de la descomposición en fracciones parciales para la expresión racional. No despeje las constantes.

61. $\dfrac{3}{x^2 + 20x}$

62. $\dfrac{x - 8}{x^2 - 3x - 28}$

63. $\dfrac{3x - 4}{x^3 - 5x^2}$

64. $\dfrac{x - 2}{x(x^2 + 2)^2}$

En los Ejercicios 65-72, escriba la descomposición en fracciones parciales de la expresión racional.

65. $\dfrac{4 - x}{x^2 + 6x + 8}$

66. $\dfrac{-x}{x^2 + 3x + 2}$

67. $\dfrac{x^2}{x^2 + 2x - 15}$

68. $\dfrac{9}{x^2 - 9}$

69. $\dfrac{x^2 + 2x}{x^3 - x^2 + x - 1}$

70. $\dfrac{4x}{3(x - 1)^2}$

71. $\dfrac{3x^2 + 4x}{(x^2 + 1)^2}$

72. $\dfrac{4x^2}{(x - 1)(x^2 + 1)}$

7.5 En los Ejercicios 73-78, trace la gráfica de la desigualdad.

73. $y \leq 5 - \frac{1}{2}x$

74. $3y - x \geq 7$

75. $y - 4x^2 > -1$

76. $y \leq \dfrac{3}{x^2 + 2}$

77. $(x - 1)^2 + (y - 3)^2 < 16$

78. $x^2 + (y + 5)^2 > 1$

En los Ejercicios 79-86, trace la gráfica y marque los vértices del conjunto de solución del sistema de desigualdades.

79. $\begin{cases} x + 2y \leq 160 \\ 3x + y \leq 180 \\ x \geq 0 \\ y \geq 0 \end{cases}$

80. $\begin{cases} 2x + 3y \leq 24 \\ 2x + y \leq 16 \\ x \geq 0 \\ y \geq 0 \end{cases}$

81. $\begin{cases} 3x + 2y \geq 24 \\ x + 2y \geq 12 \\ 2 \leq x \leq 15 \\ y \leq 15 \end{cases}$

82. $\begin{cases} 2x + y \geq 16 \\ x + 3y \geq 18 \\ 0 \leq x \leq 25 \\ 0 \leq y \leq 25 \end{cases}$

83. $\begin{cases} y < x + 1 \\ y > x^2 - 1 \end{cases}$

84. $\begin{cases} y \leq 6 - 2x - x^2 \\ y \geq x + 6 \end{cases}$

85. $\begin{cases} 2x - 3y \geq 0 \\ 2x - y \leq 8 \\ y \geq 0 \end{cases}$

86. $\begin{cases} x^2 + y^2 \leq 9 \\ (x - 3)^2 + y^2 \leq 9 \end{cases}$

87. COSTOS DE INVENTARIO Un operador de almacén tiene 24 000 pies cuadrados de espacio de piso para almacenar dos productos. Cada unidad el producto I requiere 20 pies cuadrados de espacio de piso y cuesta $12 por día para almacenarse. Cada unidad del producto II requiere 30 pies cuadrados de espacio y cuesta $8 por día para almacenarse. El costo total de almacenamiento por día no puede exceder de $12 400. Encuentre y grafique un sistema de desigualdades que describa todos los posibles niveles de inventario.

88. NUTRICIÓN A un dietista se le pide diseñar un suplemento especial dietético que utilice dos alimentos diferentes. Cada onza del alimento X contiene 12 unidades de calcio, 10 de hierro y 20 de vitamina B. Cada onza de alimento Y contiene 15 unidades de calcio, 20 de hierro y 12 de vitamina B. Las necesidades mínimas diarias de la dieta son 300 unidades de calcio, 280 de hierro y 300 de vitamina B.

(a) Escriba un sistema de desigualdades que describa las diferentes cantidades de alimento X y alimento Y que se pueden usar.

(b) Trace una gráfica de la región del inciso (a).

(c) Encuentre dos soluciones al sistema e interprete sus significados en el contexto del problema.

OFERTA Y DEMANDA En los Ejercicios 89 y 90, (a) grafique los sistemas que representen el excedente de consumidor y excedente de productor para las ecuaciones de oferta y demanda y (b) encuentre el excedente de consumidor y excedente de productor.

	Demanda	*Oferta*
89.	$p = 160 - 0.0001x$	$p = 70 + 0.0002x$
90.	$p = 130 - 0.0002x$	$p = 30 + 0.0003x$

91. GEOMETRÍA Deduzca un conjunto de desigualdades para describir la región de un rectángulo con vértices en (3, 1), (7, 1), (7, 10) y (3, 10).

92. ANÁLISIS DE DATOS: VENTAS DE COMPUTADORAS La tabla siguiente muestra las ventas y (en miles de millones de dólares) de Dell, Inc. de 2000 a 2007. (Fuente: Dell, Inc.)

Año	Ventas, y
2000	31.9
2001	31.2
2002	35.4
2003	41.4
2004	49.2
2005	55.9
2006	57.4
2007	61.1

(a) Use el comando *regression* de una calculadora de gráficas para hallar un modelo lineal para los datos. Con t represente el año, con $t = 0$ para el 2000.

(b) Las ventas totales para Dell, durante este periodo de ocho años, se pueden aproximar al hallar el área del trapecio limitado por el modelo lineal del inciso (a) y las rectas $y = 0$, $t = -0.5$ y $t = 7.5$. Use una calculadora de gráficas para graficar esta región.

(c) Use la fórmula para el área de un trapecio para aproximar el total de ventas al menudeo de Dell.

7.6 En los Ejercicios 93-98, trace la región determinada por las restricciones. A continuación encuentre los valores mínimo y máximo de la función objetivo (si es posible) y dónde ocurren, sujeto a las restricciones indicadas.

93. Función objetivo:
$z = 3x + 4y$
Restricciones:
$x \geq 0$
$y \geq 0$
$2x + 5y \leq 50$
$4x + y \leq 28$

94. Función objetivo:
$z = 10x + 7y$
Restricciones:
$x \geq 0$
$y \geq 0$
$2x + y \geq 100$
$x + y \geq 75$

95. Función objetivo:
$z = 1.75x + 2.25y$
Restricciones:
$x \geq 0$
$y \geq 0$
$2x + y \geq 25$
$3x + 2y \geq 45$

96. Función objetivo:
$z = 50x + 70y$
Restricciones:
$x \geq 0$
$y \geq 0$
$x + 2y \leq 1500$
$5x + 2y \leq 3500$

97. Función objetivo:
$z = 5x + 11y$
Restricciones:
$x \geq 0$
$y \geq 0$
$x + 3y \leq 12$
$3x + 2y \leq 15$

98. Función objetivo:
$z = -2x + y$
Restricciones:
$x \geq 0$
$y \geq 0$
$x + y \geq 7$
$5x + 2y \geq 20$

99. INGRESO ÓPTIMO Un estudiante está trabajando tiempo parcial como estilista de peluquería para pagar sus gastos en la universidad. El estudiante no puede trabajar más de 24 horas por semana. Los cortes de pelo cuestan $25 y requieren un promedio de 20 minutos, y los permanentes cuestan $70 y requieren un promedio de 1 hora y 10 minutos. ¿Qué combinación de cortes y permanentes darán un ingreso óptimo? ¿Cuál es el ingreso óptimo?

100. UTILIDAD ÓPTIMA Un fabricante de calzado produce un calzado para caminar y otro para correr que dan utilidades de $18 y $24, respectivamente. Cada calzado debe pasar tres procesos, para los que los tiempos requeridos por unidad se muestran en la tabla siguiente.

	Proceso I	Proceso II	Proceso III
Horas para calzado para caminar	4	1	1
Horas para calzado para correr	2	2	1
Horas disponibles por día	24	9	8

¿Cuál es el nivel óptimo de producción para cada tipo de calzado? ¿Cuál es la utilidad óptima?

101. UTILIDAD ÓPTIMA Un fabricante produce dos modelos de bicicletas. Los tiempos (en horas) necesarios para el ensamble, pintura y empaque de cada modelo se muestran en la tabla siguiente.

Proceso	Horas, modelo *A*	Horas, modelo *B*
Ensamble	2	2.5
Pintura	4	1
Empaque	1	0.75

Los tiempos totales disponibles para ensamble, pintura y empaque son 4000 horas, 4800 horas y 1500 horas, respectivamente. Las utilidades por unidad son $45 para el modelo *A* y $50 para el modelo *B*. ¿Cuál es el nivel óptimo de producción para cada modelo? ¿Cuál es la utilidad óptima?

102. COSTO ÓPTIMO Una compañía de suministros para mascotas mezcla dos marcas de alimentos secos para perros. La marca X cuesta $15 por bolsa y contiene ocho unidades del elemento nutricional *A*, una unidad del elemento nutricional *B* y dos unidades del elemento nutricional *C*. La marca Y cuesta $30 por bolsa y contiene dos unidades del elemento nutricional *A*, una unidad del elemento nutricional *B* y siete unidades del elemento nutricional *C*. Cada bolsa de alimento mezclado para perros debe contener al menos 16, 5 y 20 unidades de elementos nutricionales *A*, *B* y *C*, respectivamente. Encuentre el número de bolsas de las marcas X y Y que deben mezclarse para producir una mezcla que satisfaga las necesidades mínimas nutricionales y tenga un costo óptimo. ¿Cuál es el costo óptimo?

103. COSTO ÓPTIMO La gasolina regular sin plomo y la gasolina Premium sin plomo tienen clasificación de octanaje de 87 y 93, respectivamente. Para la semana del 23 de marzo de 2009, la gasolina regular sin plomo en Houston, Texas, promedió $1.85 por galón. Para la misma semana, la gasolina Premium sin plomo promedió $2.10 por galón. Determine la mezcla de gasolina regular y Premium sin plomo que resulta en un costo óptimo de gasolina de media graduación sin plomo (89 octanos). ¿Cuál es el costo óptimo? (Fuente: Energy Information Administration)

INFORMACIÓN

¿VERDADERO O FALSO? En los Ejercicios 104-106, determine si la proposición es verdadera o falsa. Justifique su respuesta.

104. Si un sistema de ecuaciones consta de una circunferencia y una parábola, es posible que el sistema tenga tres soluciones.

105. El sistema

$$\begin{cases} y \le 5 \\ y \ge -2 \\ y \ge \frac{7}{2}x - 9 \\ y \ge -\frac{7}{2}x + 26 \end{cases}$$

representa la región cubierta por un trapecio isósceles.

106. Es posible que una función objetivo de un problema de programación lineal tenga exactamente 10 puntos de valor máximo.

En los Ejercicios 107-110, encuentre un sistema de ecuaciones lineales que tenga el par ordenado como una solución. (Hay un gran número de respuestas correctas.)

107. $(-8, 10)$ **108.** $(5, -4)$

109. $\left(\frac{4}{3}, 3\right)$ **110.** $\left(-2, \frac{11}{5}\right)$

En los Ejercicios 111–114, halle un sistema de ecuaciones lineales que tiene la tripleta ordenada como solución. (Hay numerosas respuestas correctas.)

111. $(4, -1, 3)$

112. $(-3, 5, 6)$

113. $\left(5, \frac{3}{2}, 2\right)$

114. $\left(-\frac{1}{2}, -2, -\frac{3}{4}\right)$

115. ESCRITURA Explique qué significa un sistema inconsistente de ecuaciones lineales.

116. ¿Cómo puede usted decir gráficamente que un sistema de ecuaciones lineales con dos variables no tiene solución? Dé un ejemplo.

7 EXAMEN DEL CAPÍTULO

En www.CalcChat.com vea las soluciones a los ejercicios impares.

Tome este examen como lo haría en clase. Cuando termine, verifique su trabajo contra las respuestas dadas al final del libro.

En los Ejercicios 1-3, resuelva el sistema por el método de sustitución.

1. $\begin{cases} x + y = -9 \\ 5x - 8y = 20 \end{cases}$ **2.** $\begin{cases} y = x - 1 \\ y = (x - 1)^3 \end{cases}$ **3.** $\begin{cases} 2x - y^2 = 0 \\ x - y = 4 \end{cases}$

En los Ejercicios 4-6, resuelva gráficamente el sistema.

4. $\begin{cases} 3x - 6y = 0 \\ 3x + 6y = 18 \end{cases}$ **5.** $\begin{cases} y = 9 - x^2 \\ y = x + 3 \end{cases}$ **6.** $\begin{cases} y - \ln x = 12 \\ 7x - 2y + 11 = -6 \end{cases}$

En los Ejercicios 7-10, resuelva el sistema lineal por el método de eliminación.

7. $\begin{cases} 3x + 4y = -26 \\ 7x - 5y = 11 \end{cases}$ **8.** $\begin{cases} 1.4x - y = 17 \\ 0.8x + 6y = -10 \end{cases}$

9. $\begin{cases} x - 2y + 3z = 11 \\ 2x - z = 3 \\ 3y + z = -8 \end{cases}$ **10.** $\begin{cases} 3x + 2y + z = 17 \\ -x + y + z = 4 \\ x - y - z = 3 \end{cases}$

En los Ejercicios 11-14, escriba la descomposición en fracciones parciales de la expresión racional.

11. $\dfrac{2x + 5}{x^2 - x - 2}$ **12.** $\dfrac{3x^2 - 2x + 4}{x^2(2 - x)}$ **13.** $\dfrac{x^2 + 5}{x^3 - x}$ **14.** $\dfrac{x^2 - 4}{x^3 + 2x}$

En los Ejercicios 15-17, trace la gráfica y marque los vértices de la solución del sistema de desigualdades.

15. $\begin{cases} 2x + y \le 4 \\ 2x - y \ge 0 \\ x \ge 0 \end{cases}$ **16.** $\begin{cases} y < -x^2 + x + 4 \\ y > 4x \end{cases}$ **17.** $\begin{cases} x^2 + y^2 \le 36 \\ x \ge 2 \\ y \ge -4 \end{cases}$

18. Encuentre los valores máximo y mínimo de la función objetivo $z = 20x + 12y$, y dónde se presentan, sujeto a las siguientes restricciones.

$$\left.\begin{array}{r} x \ge 0 \\ y \ge 0 \\ x + 4y \le 32 \\ 3x + 2y \le 36 \end{array}\right\}$$ Restricciones

19. Un total de \$50 000 se invierten en dos fondos que pagan 4% y 5.5% de interés simple. El interés anual es \$2390. ¿Cuánto se invierte a cada una de las tasas?

20. Encuentre la ecuación de la parábola $y = ax^2 + bx + c$ que pasa por los puntos $(0, 6)$ $(-2, 2)$ y $\left(3, \frac{9}{2}\right)$.

21. Un fabricante produce dos tipos de soportes para televisor. En la tabla de la izquierda se muestran las cantidades (en horas) de tiempo para ensamble, pintura y empaque de los dos modelos. Las cantidades totales de tiempo disponible para ensamble, pintura y empaque son 4000, 8950 y 2650 horas, respectivamente. Las utilidades por unidad son \$30 (modelo I) y \$40 (modelo II). ¿Cuál es el nivel óptimo de inventario para cada modelo? ¿Cuál es la utilidad óptima?

	Modelo I	Modelo II
Ensamble	0.5	0.75
Pintura	2.0	1.5
Empaque	0.5	0.5

TABLA EJERCICIO 21

DEMOSTRACIONES EN MATEMÁTICAS

Una **demostración indirecta** puede ser útil para verificar proposiciones de la forma "p implica q". Recuerde que la proposición condicional $p \rightarrow q$ es falsa sólo cuando p es verdadera y q es falsa. Si esta suposición lleva a una imposibilidad, entonces hemos demostrado que la proposición condicional es verdadera. Una demostración indirecta también se denomina **demostración por contradicción.**

Se puede usar una demostración indirecta para demostrar la siguiente proposición condicional,

"Si a es un entero positivo y a^2 es divisible entre 2, entonces a es divisible entre 2"

como sigue. Primero, suponga que p, "a es un entero positivo y a^2 es divisible entre 2", es verdadera y q, "a es divisible entre 2", es falsa. Esto significa que a no es divisible entre 2. Si es así, a es impar y puede escribirse como $a = 2n + 1$, donde n es un entero.

$$a = 2n + 1 \qquad \text{Definición de entero impar}$$

$$a^2 = 4n^2 + 4n + 1 \qquad \text{Elevar al cuadrado cada lado.}$$

$$a^2 = 2(2n^2 + 2n) + 1 \qquad \text{Propiedad distributiva}$$

Por tanto, por la definición de un entero impar, a^2 es impar. Esto contradice la suposición y se puede concluir que a es divisible entre 2.

Ejemplo Uso de una demostración indirecta

Use una demostración indirecta para demostrar que $\sqrt{2}$ es un número irracional.

Solución

Empiece por suponer que $\sqrt{2}$ *no es* un número irracional. Entonces $\sqrt{2}$ se puede escribir como el cociente de dos enteros a y $b (b \neq 0)$ que no tienen factores comunes.

$$\sqrt{2} = \frac{a}{b} \qquad \text{Suponga que } \sqrt{2} \text{ es un número irracional.}$$

$$2 = \frac{a^2}{b^2} \qquad \text{Elevar al cuadrado cada lado.}$$

$$2b^2 = a^2 \qquad \text{Multiplicar cada lado por } b^2.$$

Esto implica que 2 es un factor de a^2. En consecuencia, 2 también es un factor de a, y a se puede escribir como $2c$, donde c es un entero.

$$2b^2 = (2c)^2 \qquad \text{Sustituir } 2c \text{ por } a.$$

$$2b^2 = 4c^2 \qquad \text{Simplificar.}$$

$$b^2 = 2c^2 \qquad \text{Dividir cada lado entre 2.}$$

Esto implica que 2 es un factor de b^2 y también un factor de b. Por tanto, 2 es un factor de a y de b. Esto contradice la suposición de que a y b no tienen factores comunes. En consecuencia, se puede concluir que $\sqrt{2}$ es un número irracional.

RESOLUCIÓN DE PROBLEMAS

Este conjunto de ejercicios, difíciles y que invitan a meditar, amplía y explora más a fondo los conceptos aprendidos en este capítulo

1. Un teorema de geometría dice que si un triángulo está inscrito en una circunferencia tal que un lado del triángulo es un diámetro de la circunferencia, entonces el triángulo es rectángulo. Demuestre que este teorema es verdadero para la circunferencia

$$x^2 + y^2 = 100$$

y el triángulo formado por las rectas

$$y = 0,\ y = \tfrac{1}{2}x + 5 \text{ y } y = -2x + 20.$$

2. Encuentre k_1 y k_2 tales que el sistema de ecuaciones tiene un número infinito de soluciones.

$$\begin{cases} 3x - 5y = 8 \\ 2x + k_1 y = k_2 \end{cases}$$

3. Considere el siguiente sistema de ecuaciones lineales en x y y.

$$\begin{cases} ax + by = e \\ cx + dy = f \end{cases}$$

¿Bajo qué condiciones tendrá el sistema exactamente una solución?

4. Grafique las rectas determinadas por cada sistema de ecuaciones lineales. A continuación use eliminación gaussiana para resolver cada sistema. En cada paso del proceso de eliminación, grafique las rectas correspondientes. ¿Qué observa?

(a) $\begin{cases} x - 4y = -3 \\ 5x - 6y = 13 \end{cases}$

(b) $\begin{cases} 2x - 3y = 7 \\ -4x + 6y = -14 \end{cases}$

5. Se resuelve un sistema de dos ecuaciones con dos incógnitas y tiene un número finito de soluciones. Determine el número máximo de soluciones del sistema que satisfagan cada condición.

(a) Ambas ecuaciones son lineales.

(b) Una ecuación es lineal y la otra es cuadrática.

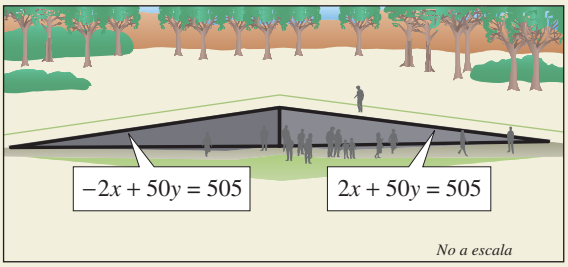
(c) Ambas ecuaciones son cuadráticas.

6. En la elección presidencial de 2008, aproximadamente 125.2 millones de electores dividieron sus votos entre Barack Obama y John McCain. Obama recibió aproximadamente 8.5 millones de votos más que McCain. Escriba y resuelva un sistema de ecuaciones para hallar el número total de votos depositados para cada candidato. Con D represente el número de votos depositados para Obama y con R para McCain. (Fuente: CNN.com)

7. El Vietnam Veterans Memorial (o "El Muro") en Washington, D.C. fue diseñado por Maya Ying Lin cuando ella era estudiante en la Universidad de Yale. Este monumento tiene dos secciones verticales, triangulares, de granito negro con un lado común (vea la figura). La parte inferior de cada sección está a nivel con el suelo. La parte superior de las dos secciones se puede modelar aproximadamente con las ecuaciones

$$-2x + 50y = 505 \quad \text{y} \quad 2x + 50y = 505$$

cuando el eje x está superpuesto en la base del muro. Cada unidad del sistema de coordenadas representa 1 pie. ¿Cuál es la altura del monumento en el punto donde se unen las dos secciones? ¿Cuál es la longitud de cada sección?



8. Los pesos de los átomos y las moléculas se miden en unidades de masa atómica (u). Una molécula de C_2H_6 (etano) está constituida por dos átomos de carbono y seis átomos de hidrógeno y pesa 30.070 u. Una molécula de C_3H_8 (propano) está constituida por tres átomos de carbono y ocho de hidrógeno y pesa 44.097 u. Encuentre los pesos de un átomo de carbono y un átomo de hidrógeno.

9. Conectar un DVD a un televisor requiere de un cable con conectores especiales en ambos extremos. Una persona compra un cable de 6 pies en \$15.50 y un cable de tres pies en \$10.25. Suponiendo que el costo de un cable sea la suma del costo de los dos conectores y el costo del cable en sí, ¿cuál es el costo de un cable de cuatro pies? Explique su razonamiento.

10. Un hotel situado a 35 millas de un aeropuerto tiene servicio de transbordo hacia y desde el aeropuerto. El autobús de las 9:00 A.M. sale para el aeropuerto a 30 millas por hora; el de las 9:15 A.M. sale para el aeropuerto a 40 millas por hora. Escriba un sistema de ecuaciones lineales que represente la distancia como función del tiempo para cada autobús. Grafique y resuelva el sistema. ¿A qué distancia del aeropuerto alcanzará el autobús de las 9:15 A.M. al de las 9:00 A.M.?

11. Resuelva cada sistema de ecuaciones con $X = 1/x$, $Y = 1/y$ y $Z = 1/z$.

(a) $\begin{cases} \dfrac{12}{x} - \dfrac{12}{y} = 7 \\ \dfrac{3}{x} + \dfrac{4}{y} = 0 \end{cases}$

(b) $\begin{cases} \dfrac{2}{x} + \dfrac{1}{y} - \dfrac{3}{z} = 4 \\ \dfrac{4}{x} + \dfrac{2}{z} = 10 \\ -\dfrac{2}{x} + \dfrac{3}{y} - \dfrac{13}{z} = -8 \end{cases}$

12. ¿Qué valores deben darse a a, b y c para que el sistema lineal mostrado tenga $(-1, 2, -3)$ como su única solución?

$$\begin{cases} x + 2y - 3z = a & \text{Ecuación 1} \\ -x - y + z = b & \text{Ecuación 2} \\ 2x + 3y - 2z = c & \text{Ecuación 3} \end{cases}$$

13. El siguiente sistema tiene una solución: $x = 1$, $y = -1$ y $z = 2$.

$$\begin{cases} 4x - 2y + 5z = 16 \\ x + y = 0 \\ -x - 3y + 2z = 6 \end{cases}$$

Resuelva el sistema dado por (a) la ecuación 1 y la ecuación 2, (b) la ecuación 1 y la ecuación 3, y (c) la ecuación 2 y la ecuación 3. (d) ¿Cuántas soluciones tiene cada uno de estos sistemas?

14. Resuelva algebraicamente el sistema de ecuaciones lineales.

$$\begin{aligned} x_1 - x_2 + 2x_3 + 2x_4 + 6x_5 &= 6 \\ 3x_1 - 2x_2 + 4x_3 + 4x_4 + 12x_5 &= 14 \\ -x_2 - x_3 - x_4 - 3x_5 &= -3 \\ 2x_1 - 2x_2 + 4x_3 + 5x_4 + 15x_5 &= 10 \\ 2x_1 - 2x_2 + 4x_3 + 4x_4 + 13x_5 &= 13 \end{aligned}$$

15. Cada día, un alce adulto promedio procesa unos 32 kilogramos de vegetación terrestre (ramas y hojas) y acuática. De este alimento, necesita obtener alrededor de 1.9 gramos de sodio y 11 000 calorías de energía. La vegetación acuática tiene alrededor de 0.15 gramos de sodio por kilogramo y unas 193 calorías de energía por kilogramo, mientras que la vegetación terrestre tiene mínimas cantidades de sodio y alrededor de cuatro veces la energía de la vegetación acuática. Escriba y grafique un sistema de desigualdades que describa las cantidades t y a de vegetación terrestre y acuática, respectivamente, para la dieta diaria de un alce adulto promedio. (Fuente: Biology by Numbers)

16. Para una persona sana de 4 pies 10 pulgadas de estatura, el peso mínimo recomendado es de 91 libras y aumenta unas 3.65 libras por cada pulgada adicional de estatura. El peso máximo recomendado es de unas 119 libras y aumenta en alrededor de 4.85 libras por cada pulgada adicional de estatura. (Fuente: U.S. Department of Agriculture)

(a) Sea x el número de pulgadas por el que la estatura de una persona excede de 4 pies 10 pulgadas y sea y el peso de la persona en libras. Escriba un sistema de desigualdades que describa los posibles valores de x y de y para una persona sana.

(b) Use una calculadora de gráficas para graficar el sistema de desigualdades del inciso (a).

(c) ¿Cuál es la variación recomendada de peso para alguien que mida 6 pies de estatura?

17. El colesterol en sangre humana es necesario, pero demasiado colesterol puede llevar a problemas de salud. Una prueba de colesterol en sangre da tres lecturas: colesterol LDL ("malo"), colesterol HDL ("bueno") y colesterol total (LDL + HDL). Se recomienda que el nivel de colesterol LDL de una persona sea menor a 130 miligramos por decilitro, que el nivel de colesterol HDL sea al menos de 60 miligramos por decilitro y que el nivel de colesterol total no sea mayor a 200 miligramos por decilitro. (Fuente: American Heart Association)

(a) Escriba un sistema de desigualdades lineales para los niveles recomendados de colesterol. Con x represente el colesterol HDL y con y el colesterol LDL.

(b) Grafique el sistema de desigualdades del inciso (a). Marque cualquier vértice de la región de solución.

(c) ¿Los siguientes niveles de colesterol están dentro de las recomendaciones? Explique su razonamiento.

LDL: 120 miligramos por decilitro

HDL: 90 miligramos por decilitro

Total: 210 miligramos por decilitro

(d) Dé un ejemplo de niveles de colesterol en el que el nivel de colesterol LDL sea demasiado alto, pero los niveles de colesterol HDL y total sean aceptables.

(e) Otra recomendación es que la razón entre el colesterol total y el colesterol HDL sea menor a 5. Encuentre un punto en la región de su solución al inciso (b) que satisfaga esta recomendación y explique por qué satisface la recomendación.

Matrices y determinantes

8

8.1 Matrices y sistemas de ecuaciones
8.2 Operaciones con matrices
8.3 La inversa de una matriz cuadrada
8.4 El determinante de una matriz cuadrada
8.5 Aplicaciones de matrices y determinantes

En matemáticas

Se emplean matrices para modelar y resolver una amplia variedad de problemas. Por ejemplo, se pueden usar matrices para resolver sistemas de ecuaciones lineales.

En la vida real

Se usan matrices para modelar niveles de inventario, redes eléctricas, carteras de inversiones y otras situaciones reales. Por ejemplo, se puede usar una matriz para modelar el número de personas en Estados Unidos que participan en patinaje sobre nieve. (Vea Ejercicio 114, página 583.)

Graham Heywood/istockphoto.com

EN CARRERAS

Hay numerosas carreras que usan matrices. A continuación veamos algunas de ellas.

- Cajera de banco
  Ejercicio 110, página 582
- Analista político
  Ejercicio 70, página 597
- Propietario de pequeño negocio
  Ejercicio 69-72, páginas 606 y 607
- Florista
  Ejercicio 74, página 607

8.1 Matrices y sistemas de ecuaciones

Lo que debe aprender

- Escribir matrices e identificar sus órdenes.
- Realizar operaciones elementales en renglones de matrices.
- Usar matrices y eliminación gaussiana para resolver sistemas de ecuaciones lineales.
- Usar matrices y eliminación de Gauss-Jordan para resolver sistemas de ecuaciones lineales.

Por qué debe aprenderlo

Se pueden usar matrices para resolver sistemas de ecuaciones lineales con dos o más variables. Por ejemplo, en el Ejercicio 113 de la página 582 usaremos una matriz para hallar un modelo para la trayectoria de una pelota lanzada por un jugador de béisbol.

Foto Agency/PhotoLibrary

Matrices

En esta sección estudiaremos una técnica refinada para resolver sistemas de ecuaciones lineales. Esta técnica comprende el uso de un arreglo rectangular de números reales llamado **matriz**.

Definición de matriz

Si m y n son enteros positivos, una matriz de $m \times n$ (léase "m por n") es un arreglo rectangular

$$\begin{array}{r} \\ \text{Renglón 1} \\ \text{Renglón 2} \\ \text{Renglón 3} \\ \vdots \\ \text{Renglón } m \end{array} \begin{array}{c} \begin{array}{cccccc} \text{Columna 1} & \text{Columna 2} & \text{Columna 3} & \cdots & \text{Columna } n \end{array} \\ \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & \cdots & a_{2n} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & \cdots & a_{3n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & a_{m3} & \cdots & a_{mn} \end{bmatrix} \end{array}$$

en el que cada **elemento**, a_{ij}, de la matriz es un número. Una matriz de $m \times n$ tiene m renglones y n columnas. Por lo general, las matrices se denotan con letras mayúsculas.

El elemento en el i-ésimo renglón y la j-ésima columna se denota con la notación de *doble subíndice* a_{ij}. Por ejemplo, a_{23} se refiera al elemento del segundo renglón, tercera columna. Se dice que una matriz que tiene m renglones y n columnas es de **orden** $m \times n$. Si $m = n$, la matriz es **cuadrada** de orden $m \times m$ (o $n \times n$). Para una matriz cuadrada, los elementos $a_{11}, a_{22}, a_{33}, \ldots$ son los de la **diagonal principal**.

Ejemplo 1 Orden de matrices

Determine el orden de cada matriz.

a. $\begin{bmatrix} 2 \end{bmatrix}$ **b.** $\begin{bmatrix} 1 & -3 & 0 & \frac{1}{2} \end{bmatrix}$

c. $\begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$ **d.** $\begin{bmatrix} 5 & 0 \\ 2 & -2 \\ -7 & 4 \end{bmatrix}$

Solución

a. Esta matriz tiene *un* renglón y *una* columna; su orden es 1×1.

b. Esta matriz tiene *un* renglón y *cuatro* columnas; su orden es 1×4.

c. Esta matriz tiene *dos* renglones y *dos* columnas; su orden es 2×2.

d. Esta matriz tiene *tres* renglones y *dos* columnas; su orden es 3×2.

PUNTO *de repaso* Ahora trate de hacer el Ejercicio 9.

Una matriz que tiene sólo un renglón se denomina **matriz renglón**; una matriz que tiene sólo una columna recibe el nombre de **matriz columna.**

Una matriz derivada de un sistema de ecuaciones lineales (cada una escrita en forma estándar con el término constante a la derecha) es la **matriz aumentada** del sistema. Además, la matriz derivada de los coeficientes del sistema (pero que no incluye los términos constantes) es la **matriz de coeficientes** del sistema.

Tip de estudio

Los puntos verticales en una matriz aumentada separan los coeficientes del sistema lineal de los términos constantes.

Sistema:
$$\begin{cases} x - 4y + 3z = 5 \\ -x + 3y - z = -3 \\ 2x - 4z = 6 \end{cases}$$

Matriz aumentada:
$$\left[\begin{array}{ccc:c} 1 & -4 & 3 & 5 \\ -1 & 3 & -1 & -3 \\ 2 & 0 & -4 & 6 \end{array}\right]$$

Matriz de coeficientes:
$$\begin{bmatrix} 1 & -4 & 3 \\ -1 & 3 & -1 \\ 2 & 0 & -4 \end{bmatrix}$$

Observe el uso del 0 para el coeficiente faltante de la variable y en la tercera ecuación y también observe la cuarta columna de términos constantes en la matriz aumentada.

Cuando forme ya sea la matriz de coeficientes o la matriz aumentada de un sistema, debe empezar por alinear verticalmente las variables de las ecuaciones y usar ceros para los coeficientes de las variables faltantes.

Ejemplo 2 Escribir una matriz aumentada

Escriba la matriz aumentada para el sistema de ecuaciones lineales.

$$\begin{cases} x + 3y - w = 9 \\ -y + 4z + 2w = -2 \\ x - 5z - 6w = 0 \\ 2x + 4y - 3z = 4 \end{cases}$$

¿Cuál es el orden de la matriz aumentada?

Solución

Empiece por reescribir el sistema lineal y alinear las variables.

$$\begin{cases} x + 3y - w = 9 \\ -y + 4z + 2w = -2 \\ x - 5z - 6w = 0 \\ 2x + 4y - 3z = 4 \end{cases}$$

A continuación, use los coeficientes y términos constantes como entradas de la matriz. Incluya ceros para los coeficientes de las variables faltantes.

$$\begin{array}{c} R_1 \\ R_2 \\ R_3 \\ R_4 \end{array}\left[\begin{array}{cccc:c} 1 & 3 & 0 & -1 & 9 \\ 0 & -1 & 4 & 2 & -2 \\ 1 & 0 & -5 & -6 & 0 \\ 2 & 4 & -3 & 0 & 4 \end{array}\right]$$

La matriz aumentada tiene cuatro renglones y cinco columnas, de modo que es una matriz de 4×5. La notación R_n se usa para designar cada renglón de la matriz. Por ejemplo, el renglón 1 está representado por R_1.

PUNTO de repaso Ahora trate de hacer el Ejercicio 17.

Operaciones elementales de renglones

En la sección 7.3 estudiamos tres operaciones que se pueden usar en un sistema de ecuaciones lineales para producir un sistema equivalente.

1. Intercambiar dos ecuaciones.

2. Multiplicar una ecuación por una constante diferente de cero.

3. Sumar un múltiplo de una ecuación a otra ecuación.

En terminología de matrices, estas tres operaciones corresponden a **operaciones elementales de renglones**. Una operación elemental de renglón, en una matriz aumentada de un sistema determinado de ecuaciones lineales, produce una nueva matriz aumentada correspondiente a un nuevo (pero equivalente) sistema de ecuaciones lineales. Dos matrices son **equivalentes por renglones** si una se puede obtener de la otra por una sucesión de operaciones elementales de renglón.

Operaciones elementales de renglón

1. Intercambiar dos renglones.

2. Multiplicar un renglón por una constante diferente de cero.

3. Sumar un múltiplo de un renglón a otro renglón.

Aunque las operaciones elementales de renglón son fáciles de realizar, suponen buena cantidad de aritmética. Como es fácil cometer un error, se debe tener el hábito de observar las operaciones elementales de renglón realizadas en cada paso, de modo que se pueda regresar y revisar el trabajo.

Ejemplo 3 Operaciones elementales de renglón

a. Intercambiar los renglones primero y segundo de la matriz original.

Matriz original

$$\begin{bmatrix} 0 & 1 & 3 & 4 \\ -1 & 2 & 0 & 3 \\ 2 & -3 & 4 & 1 \end{bmatrix}$$

Nueva matriz por renglones equivalente

$$\begin{matrix} R_2 \\ R_1 \end{matrix}\begin{bmatrix} -1 & 2 & 0 & 3 \\ 0 & 1 & 3 & 4 \\ 2 & -3 & 4 & 1 \end{bmatrix}$$

b. Multiplicar por $\frac{1}{2}$ el primer renglón de la matriz original.

Matriz original

$$\begin{bmatrix} 2 & -4 & 6 & -2 \\ 1 & 3 & -3 & 0 \\ 5 & -2 & 1 & 2 \end{bmatrix}$$

Nueva matriz por renglones equivalente

$$\tfrac{1}{2}R_1 \rightarrow \begin{bmatrix} 1 & -2 & 3 & -1 \\ 1 & 3 & -3 & 0 \\ 5 & -2 & 1 & 2 \end{bmatrix}$$

c. Sumar -2 veces el primer renglón de la matriz original al tercer renglón.

Matriz original

$$\begin{bmatrix} 1 & 2 & -4 & 3 \\ 0 & 3 & -2 & -1 \\ 2 & 1 & 5 & -2 \end{bmatrix}$$

Nueva matriz por renglones equivalente

$$-2R_1 + R_3 \rightarrow \begin{bmatrix} 1 & 2 & -4 & 3 \\ 0 & 3 & -2 & -1 \\ 0 & -3 & 13 & -8 \end{bmatrix}$$

Observe que la operación elemental de renglón se escribe junto al renglón que está *cambiado*.

PUNTO *de repaso* Ahora trate de hacer el Ejercicio 37.

TECNOLOGÍA

Casi todas las calculadoras de gráficas pueden realizar operaciones elementales de renglón de matrices. Consulte las secuencias de tecleo específicas en la guía del usuario de su calculadora.

Una vez realizada una operación de renglón, la nueva matriz equivalente aparece en la pantalla de la calculadora de gráficas en la variable *answer* (respuesta). Usted debe usar la variable *answer* y no la matriz original para subsiguientes operaciones de renglón.

En el ejemplo 3 de la sección 7.3 usamos eliminación gaussiana con sustitución hacia atrás para resolver un sistema de ecuaciones lineales. El siguiente ejemplo demuestra la versión matricial de la eliminación gaussiana; los dos métodos son iguales en esencia y la diferencia básica es que con matrices no es necesario seguir escribiendo las variables.

ATENCIÓN

Es frecuente cometer errores aritméticos al hacer operaciones elementales de renglón. Observe la operación realizada en cada paso para regresar y revisar el trabajo.

Ejemplo 4 Comparar sistemas lineales y operaciones con matrices

Sistema lineal

$$\begin{cases} x - 2y + 3z = 9 \\ -x + 3y = -4 \\ 2x - 5y + 5z = 17 \end{cases}$$

Matriz aumentada asociada

$$\left[\begin{array}{ccc|c} 1 & -2 & 3 & 9 \\ -1 & 3 & 0 & -4 \\ 2 & -5 & 5 & 17 \end{array}\right]$$

Sume la primera ecuación a la segunda.

$$\begin{cases} x - 2y + 3z = 9 \\ y + 3z = 5 \\ 2x - 5y + 5z = 17 \end{cases}$$

Sume el primer renglón al segundo $(R_1 + R_2)$.

$$R_1 + R_2 \rightarrow \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & -2 & 3 & 9 \\ 0 & 1 & 3 & 5 \\ 2 & -5 & 5 & 17 \end{array}\right]$$

Sume -2 veces la primera ecuación a la tercera.

$$\begin{cases} x - 2y + 3z = 9 \\ y + 3z = 5 \\ -y - z = -1 \end{cases}$$

Sume -2 veces el primer renglón al tercero $(-2R_1 + R_3)$.

$$-2R_1 + R_3 \rightarrow \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & -2 & 3 & 9 \\ 0 & 1 & 3 & 5 \\ 0 & -1 & -1 & -1 \end{array}\right]$$

Sume la segunda ecuación a la tercera.

$$\begin{cases} x - 2y + 3z = 9 \\ y + 3z = 5 \\ 2z = 4 \end{cases}$$

Sume el segundo renglón al tercero $(R_2 + R_3)$.

$$R_2 + R_3 \rightarrow \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & -2 & 3 & 9 \\ 0 & 1 & 3 & 5 \\ 0 & 0 & 2 & 4 \end{array}\right]$$

Multiplique la tercera ecuación por $\frac{1}{2}$.

$$\begin{cases} x - 2y + 3z = 9 \\ y + 3z = 5 \\ z = 2 \end{cases}$$

Multiplique el tercer renglón por $\frac{1}{2}$ $\left(\frac{1}{2}R_3\right)$.

$$\frac{1}{2}R_3 \rightarrow \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & -2 & 3 & 9 \\ 0 & 1 & 3 & 5 \\ 0 & 0 & 1 & 2 \end{array}\right]$$

En este punto, se puede usar sustitución hacia atrás para hallar x y y.

$$\begin{aligned} y + 3(2) &= 5 && \text{Sustituir 2 por } z. \\ y &= -1 && \text{Despejar } y. \\ x - 2(-1) + 3(2) &= 9 && \text{Sustituir } -1 \text{ por } y \text{ y } 2 \text{ por } z. \\ x &= 1 && \text{Despejar } x. \end{aligned}$$

La solución es $x = 1$, $y = -1$ y $z = 2$.

PUNTO *de repaso* Ahora trate de hacer el Ejercicio 39.

Tip de estudio

Recuerde que se debe verificar una solución sustituyendo los valores de x, y y z en cada una de las ecuaciones del sistema original. Por ejemplo, se puede comprobar la solución del ejemplo 4 como sigue.

Ecuación 1:
$1 - 2(-1) + 3(2) = 9$ ✓

Ecuación 2:
$-1 + 3(-1) = -4$ ✓

Ecuación 3:
$2(1) - 5(-1) + 5(2) = 17$ ✓

Se dice que la última matriz del Ejemplo 4 está en **forma escalonada por renglones**. El término *escalonada* se refiere al escalón formado por los elementos diferentes de cero de la matriz. Para estar en esta forma, una matriz debe tener las siguientes propiedades.

Forma escalonada por renglones y forma escalonada por renglones reducida

Una matriz en **forma escalonada por renglones** tiene las siguientes propiedades.

1. Cualesquier renglones formados enteramente de ceros se presentan en la parte inferior de la matriz.
2. Por cada renglón que no esté formado enteramente de ceros, la primera entrada diferente de cero es 1 (llamado **1 inicial**).
3. Para dos renglones sucesivos (diferentes de cero), el 1 inicial del reglón más alto está más a la izquierda que el 1 inicial del renglón más bajo.

Una matriz en *forma escalonada por renglones* está en **forma escalonada por renglones reducida** si toda columna que tenga un 1 inicial tiene ceros en toda posición arriba y abajo del 1 inicial.

Merece la pena observar que la forma escalonada por renglones de una matriz no es única. Esto es, dos sucesiones diferentes de operaciones elementales de renglón pueden dar diferentes formas escalonadas por renglones, pero la forma escalonada por renglones reducida de una matriz determinada es única.

Ejemplo 5 Forma escalonada por renglones

Determine si cada matriz está en forma escalonada por renglones. Si lo está, determine si la matriz está en forma escalonada por renglones reducida.

a. $\begin{bmatrix} 1 & 2 & -1 & 4 \\ 0 & 1 & 0 & 3 \\ 0 & 0 & 1 & -2 \end{bmatrix}$

b. $\begin{bmatrix} 1 & 2 & -1 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & -4 \end{bmatrix}$

c. $\begin{bmatrix} 1 & -5 & 2 & -1 & 3 \\ 0 & 0 & 1 & 3 & -2 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 4 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$

d. $\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 1 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$

e. $\begin{bmatrix} 1 & 2 & -3 & 4 \\ 0 & 2 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & -3 \end{bmatrix}$

f. $\begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 5 \\ 0 & 0 & 1 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$

Solución

Las matrices en (a), (c), (d) y (f) están en forma escalonada por renglones. Las matrices en (d) y (f) están en forma escalonada por renglones *reducida* porque toda columna que tiene un 1 inicial tiene ceros en toda posición arriba y debajo de su 1 inicial. La matriz en (b) no está en forma escalonada por renglones porque un renglón formado de ceros no se presenta en la parte inferior. La matriz en (e) no está en forma escalonada por renglones porque el primer elemento diferente de cero en el renglón 2 no es un 1 inicial.

PUNTO *de repaso* Ahora trate de hacer el Ejercicio 41.

Toda matriz es equivalente por renglones a una matriz en forma escalonada por renglones. Por citar un caso, en el Ejemplo 5 se puede cambiar la matriz del inciso (e) a la forma escalonada por renglones multiplicado por $\frac{1}{2}$ su segundo renglón.

Eliminación gaussiana con sustitución hacia atrás

La eliminación gaussina con sustitución hacia atrás funciona bien para resolver sistemas de ecuaciones lineales manualmente o con computadora. Para este algoritmo, es importante el orden en el que se ejecuten las operaciones elementales de renglón. Se debe trabajar de izquierda a derecha por columnas, usando operaciones elementales de renglón para obtener ceros en todas las entradas directamente debajo de los números 1 iniciales.

Ejemplo 6 Eliminación gaussiana con sustitución hacia atrás

Resuelva el sistema
$$\begin{cases} y + z - 2w = -3 \\ x + 2y - z = 2 \\ 2x + 4y + z - 3w = -2 \\ x - 4y - 7z - w = -19 \end{cases}$$

Solución

$$\begin{bmatrix} 0 & 1 & 1 & -2 & \vdots & -3 \\ 1 & 2 & -1 & 0 & \vdots & 2 \\ 2 & 4 & 1 & -3 & \vdots & -2 \\ 1 & -4 & -7 & -1 & \vdots & -19 \end{bmatrix}$$
Escribir la matriz aumentada.

$$\begin{matrix} R_2 \\ R_1 \end{matrix}\begin{bmatrix} 1 & 2 & -1 & 0 & \vdots & 2 \\ 0 & 1 & 1 & -2 & \vdots & -3 \\ 2 & 4 & 1 & -3 & \vdots & -2 \\ 1 & -4 & -7 & -1 & \vdots & -19 \end{bmatrix}$$
Intercambie R_1 y R_2 de modo que la primera columna tenga un 1 inicial en la esquina superior izquierda.

$$\begin{matrix} \\ \\ -2R_1 + R_3 \to \\ -R_1 + R_4 \to \end{matrix}\begin{bmatrix} 1 & 2 & -1 & 0 & \vdots & 2 \\ 0 & 1 & 1 & -2 & \vdots & -3 \\ 0 & 0 & 3 & -3 & \vdots & -6 \\ 0 & -6 & -6 & -1 & \vdots & -21 \end{bmatrix}$$
Ejecute operaciones en R_3 y R_4 de modo que la primera columna tenga ceros debajo de su 1 inicial.

$$\begin{matrix} \\ \\ \\ 6R_2 + R_4 \to \end{matrix}\begin{bmatrix} 1 & 2 & -1 & 0 & \vdots & 2 \\ 0 & 1 & 1 & -2 & \vdots & -3 \\ 0 & 0 & 3 & -3 & \vdots & -6 \\ 0 & 0 & 0 & -13 & \vdots & -39 \end{bmatrix}$$
Ejecute operaciones en R_4 de modo que la segunda columna tenga ceros debajo de su 1 inicial.

$$\begin{matrix} \\ \\ \frac{1}{3}R_3 \to \\ -\frac{1}{13}R_4 \to \end{matrix}\begin{bmatrix} 1 & 2 & -1 & 0 & \vdots & 2 \\ 0 & 1 & 1 & -2 & \vdots & -3 \\ 0 & 0 & 1 & -1 & \vdots & -2 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & \vdots & 3 \end{bmatrix}$$
Realice operaciones en R_3 y R_4 de modo que la tercera y cuarta columnas tengan números 1 iniciales.

La matriz está ahora en forma escalonada por renglones y el sistema correspondiente es
$$\begin{cases} x + 2y - z = 2 \\ y + z - 2w = -3 \\ z - w = -2 \\ w = 3 \end{cases}$$

Usando sustitución hacia atrás, se puede determinar que la solución es $x = -1$, $y = 2$, $z = 1$ y $w = 3$.

PUNTO *de repaso* Ahora trate de hacer el Ejercicio 63.

El procedimiento para usar eliminación gaussiana con sustitución hacia atrás se resume a continuación.

Eliminación gaussiana con sustitución hacia atrás

1. Escriba la matriz aumentada del sistema de ecuaciones lineales.
2. Use operaciones elementales de renglón para reescribir la matriz aumentada en forma escalonada por renglones.
3. Escriba el sistema de ecuaciones lineales correspondiente a la matriz en forma escalonada por renglones, y use sustitución hacia atrás para hallar la solución.

Cuando resuelva un sistema de ecuaciones lineales, recuerde que es posible que no tenga solución. Si, en el proceso de eliminación, obtiene usted un renglón todo de ceros excepto para el último elemento, no es necesario continuar. Simplemente se puede concluir que el sistema no tiene solución, o que es *inconsistente*.

Ejemplo 7 Un sistema sin solución

Resuelva el sistema $\begin{cases} x - y + 2z = 4 \\ x + z = 6 \\ 2x - 3y + 5z = 4 \\ 3x + 2y - z = 1 \end{cases}$.

Solución

$$\begin{bmatrix} 1 & -1 & 2 & \vdots & 4 \\ 1 & 0 & 1 & \vdots & 6 \\ 2 & -3 & 5 & \vdots & 4 \\ 3 & 2 & -1 & \vdots & 1 \end{bmatrix}$$ Escribir la matriz aumentada

$$\begin{matrix} \\ -R_1 + R_2 \to \\ -2R_1 + R_3 \to \\ -3R_1 + R_4 \to \end{matrix} \begin{bmatrix} 1 & -1 & 2 & \vdots & 4 \\ 0 & 1 & -1 & \vdots & 2 \\ 0 & -1 & 1 & \vdots & -4 \\ 0 & 5 & -7 & \vdots & -11 \end{bmatrix}$$ Realizar operaciones de renglón

$$\begin{matrix} \\ \\ R_2 + R_3 \to \\ \\ \end{matrix} \begin{bmatrix} 1 & -1 & 2 & \vdots & 4 \\ 0 & 1 & -1 & \vdots & 2 \\ 0 & 0 & 0 & \vdots & -2 \\ 0 & 5 & -7 & \vdots & -11 \end{bmatrix}$$ Realizar operaciones de renglón

Nótese que el tercer renglón de esta matriz está formado enteramente por ceros, excepto para la última entrada. Esto significa que el sistema original de ecuaciones lineales es inconsistente. Se puede ver por qué esto es cierto al convertir de nuevo a un sistema de ecuaciones lineales.

$$\begin{cases} x - y + 2z = 4 \\ y - z = 2 \\ 0 = -2 \\ 5y - 7z = -11 \end{cases}$$

Como la tercera ecuación no es posible, el sistema no tiene solución.

PUNTO *de repaso* Ahora trate de hacer el Ejercicio 81.

Eliminación de Gauss-Jordan

Con la eliminación gaussiana se aplican operaciones elementales de renglón a una matriz para obtener una forma escalonada por renglones (equivalente de renglón) de la matriz. Un segundo método de eliminación, llamado **eliminación de Gauss-Jordan**, en honor a Carl Friedrich Gauss y Wilhelm Jordan (1842-1899), continúa el proceso de reducción hasta obtener una forma escalonada por renglones *reducida*. Este procedimiento se demuestra en el Ejemplo 8.

Ejemplo 8 Eliminación de Gauss-Jordan

Use eliminación de Gauss-Jordan para resolver el sistema $\begin{cases} x - 2y + 3z = 9 \\ -x + 3y = -4. \\ 2x - 5y + 5z = 17 \end{cases}$

TECNOLOGÍA

Para una demostración de un planteamiento gráfico de la eliminación de Gauss-Jordan en una matriz de 2×3, vea el programa de visualización de operaciones de renglones, disponible para varios modelos de calculadoras de gráficas, en el sitio web para este texto en *academic.cengage.com*.

Solución

En el Ejemplo 4 se utilizó eliminación gaussiana para obtener la forma escalonada por renglones del sistema lineal citado líneas antes.

$$\left[\begin{array}{ccc:c} 1 & -2 & 3 & 9 \\ 0 & 1 & 3 & 5 \\ 0 & 0 & 1 & 2 \end{array}\right]$$

Ahora, aplique operaciones elementales de renglón hasta obtener ceros arriba de cada uno de los 1 iniciales, como sigue.

$$2R_2 + R_1 \rightarrow \left[\begin{array}{ccc:c} 1 & 0 & 9 & 19 \\ 0 & 1 & 3 & 5 \\ 0 & 0 & 1 & 2 \end{array}\right]$$

Realizar operaciones en R_1 de modo que la segunda columna tenga un cero arriba de su 1 inicial.

$$\begin{matrix} -9R_3 + R_1 \rightarrow \\ -3R_3 + R_2 \rightarrow \end{matrix} \left[\begin{array}{ccc:c} 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & 2 \end{array}\right]$$

Realizar operaciones en R_1 y R_2 de modo que la tercera columna tenga ceros arriba de su 1 inicial.

Esta matriz está ahora reducida a forma escalonada por renglones. Convirtiendo de nuevo a un sistema de ecuaciones lineales, tenemos

$$\begin{cases} x = 1 \\ y = -1. \\ z = 2 \end{cases}$$

Ahora se puede simplemente leer la solución, $x = 1$, $y = -1$ y $z = 2$, que se puede escribir como la terna ordenada $(1, -1, 2)$.

PUNTO de repaso Ahora trate de hacer el Ejercicio 71.

Tip de estudio

La ventaja de usar eliminación de Gauss-Jordan para resolver un sistema de ecuaciones lineales es que la solución del sistema se encuentra fácilmente sin usar sustitución hacia atrás, como se ilustra en el Ejemplo 8.

Los procedimientos de eliminación descritos en esta sección a veces resultan en coeficientes fraccionarios. Por ejemplo, en el procedimiento de eliminación para el sistema

$$\begin{cases} 2x - 5y + 5z = 17 \\ 3x - 2y + 3z = 11 \\ -3x + 3y = -6 \end{cases}$$

uno puede estar inclinado a multiplicar el primer renglón por $\frac{1}{2}$ para producir un 1 inicial, lo cual resulta en trabajar con coeficientes fraccionarios. A veces se pueden evitar fracciones si se selecciona juiciosamente el orden en el que se aplican operaciones elementales de renglones.

Recuerde del Capítulo 7 que cuando hay menos ecuaciones que variables en un sistema de ecuaciones, entonces éste no tiene solución o tiene un número infinito de soluciones.

Ejemplo 9 Un sistema con un número infinito de soluciones

Resuelva el sistema.

$$\begin{cases} 2x + 4y - 2z = 0 \\ 3x + 5y \quad\quad = 1 \end{cases}$$

Solución

$$\begin{bmatrix} 2 & 4 & -2 & \vdots & 0 \\ 3 & 5 & 0 & \vdots & 1 \end{bmatrix}$$

$$\tfrac{1}{2}R_1 \rightarrow \begin{bmatrix} 1 & 2 & -1 & \vdots & 0 \\ 3 & 5 & 0 & \vdots & 1 \end{bmatrix}$$

$$-3R_1 + R_2 \rightarrow \begin{bmatrix} 1 & 2 & -1 & \vdots & 0 \\ 0 & -1 & 3 & \vdots & 1 \end{bmatrix}$$

$$-R_2 \rightarrow \begin{bmatrix} 1 & 2 & -1 & \vdots & 0 \\ 0 & 1 & -3 & \vdots & -1 \end{bmatrix}$$

$$-2R_2 + R_1 \rightarrow \begin{bmatrix} 1 & 0 & 5 & \vdots & 2 \\ 0 & 1 & -3 & \vdots & -1 \end{bmatrix}$$

El correspondiente sistema de ecuaciones es

$$\begin{cases} x + 5z = 2 \\ y - 3z = -1 \end{cases}.$$

Despejando x y y en términos de z, tenemos

$$x = -5z + 2 \quad \text{y} \quad y = 3z - 1.$$

Para escribir una solución del sistema que no use ninguna de las tres variables del sistema, con a represente cualquier número real y sea

$$z = a.$$

A continuación sustituya a por z en las ecuaciones para x y y.

$$x = -5z + 2 = -5a + 2$$

$$y = 3z - 1 = 3a - 1$$

Entonces, el conjunto solución se puede escribir como una terna ordenada con la forma

$$(-5a + 2, 3a - 1, a)$$

donde a es cualquier número real. Recuerde que un conjunto solución de esta forma representa un número infinito de soluciones. Trate de sustituir valores para a para obtener algunas de ellas. A continuación verifique cada una de las soluciones en el sistema original de ecuaciones.

PUNTO de repaso Ahora trate de hacer el Ejercicio 79.

Tip de estudio

En el Ejemplo 9, x y y se despejan en términos de la tercera variable, z. Para escribir una solución del sistema que no use ninguna de las tres variables del sistema, con a represente cualquier número real y sea $z = a$. Entonces despeje x y y. La solución se puede escribir en términos de a, que no es una de las variables del sistema.

8.1 EJERCICIOS

En www.CalcChat.com vea las soluciones a los ejercicios impares.

VOCABULARIO: Llene los espacios en blanco.

1. Un arreglo rectangular de números reales que se puede usar para resolver un sistema de ecuaciones lineales se denomina _____.
2. Una matriz es _____ si el número de renglones es igual al número de columnas.
3. Para una matriz cuadrada, los elementos $a_{11}, a_{22}, a_{33}, \ldots, a_{nn}$ son los _____ de la _____.
4. Una matriz con sólo un renglón se llama matriz _____ y una con sólo una columna se llama matriz _____.
5. La matriz derivada de un sistema de ecuaciones lineales se llama matriz _____ del sistema.
6. La matriz derivada de los coeficientes de un sistema de ecuaciones lineales se llama matriz _____ del sistema.
7. Dos matrices se llaman _____ si una de ellas se puede obtener de la otra por una sucesión de operaciones elementales de renglón.
8. Una matriz en forma escalonada por renglones está en _____ _____ _____ si toda columna que tenga un 1 inicial tiene ceros en toda posición arriba y abajo de su 1 inicial.

HABILIDADES Y APLICACIONES

En los Ejercicios 9-14, determine el orden de la matriz.

9. $\begin{bmatrix} 7 & 0 \end{bmatrix}$

10. $\begin{bmatrix} 5 & -3 & 8 & 7 \end{bmatrix}$

11. $\begin{bmatrix} 2 \\ 36 \\ 3 \end{bmatrix}$

12. $\begin{bmatrix} -3 & 7 & 15 & 0 \\ 0 & 0 & 3 & 3 \\ 1 & 1 & 6 & 7 \end{bmatrix}$

13. $\begin{bmatrix} 33 & 45 \\ -9 & 20 \end{bmatrix}$

14. $\begin{bmatrix} -7 & 6 & 4 \\ 0 & -5 & 1 \end{bmatrix}$

En los Ejercicios 15-20, escriba la matriz aumentada para el sistema de ecuaciones lineales.

15. $\begin{cases} 4x - 3y = -5 \\ -x + 3y = 12 \end{cases}$

16. $\begin{cases} 7x + 4y = 22 \\ 5x - 9y = 15 \end{cases}$

17. $\begin{cases} x + 10y - 2z = 2 \\ 5x - 3y + 4z = 0 \\ 2x + y = 6 \end{cases}$

18. $\begin{cases} -x - 8y + 5z = 8 \\ -7x - 15z = -38 \\ 3x - y + 8z = 20 \end{cases}$

19. $\begin{cases} 7x - 5y + z = 13 \\ 19x - 8z = 10 \end{cases}$

20. $\begin{cases} 9x + 2y - 3z = 20 \\ -25y + 11z = -5 \end{cases}$

En los Ejercicios 21-26, escriba el sistema de ecuaciones lineales representado por la matriz aumentada. (Use variables *x*, *y*, *z* y *w*, si es aplicable.)

21. $\left[\begin{array}{cc|c} 1 & 2 & 7 \\ 2 & -3 & 4 \end{array}\right]$

22. $\left[\begin{array}{cc|c} 7 & -5 & 0 \\ 8 & 3 & -2 \end{array}\right]$

23. $\left[\begin{array}{ccc|c} 2 & 0 & 5 & -12 \\ 0 & 1 & -2 & 7 \\ 6 & 3 & 0 & 2 \end{array}\right]$

24. $\left[\begin{array}{ccc|c} 4 & -5 & -1 & 18 \\ -11 & 0 & 6 & 25 \\ 3 & 8 & 0 & -29 \end{array}\right]$

25. $\left[\begin{array}{cccc|c} 9 & 12 & 3 & 0 & 0 \\ -2 & 18 & 5 & 2 & 10 \\ 1 & 7 & -8 & 0 & -4 \\ 3 & 0 & 2 & 0 & -10 \end{array}\right]$

26. $\left[\begin{array}{cccc|c} 6 & 2 & -1 & -5 & -25 \\ -1 & 0 & 7 & 3 & 7 \\ 4 & -1 & -10 & 6 & 23 \\ 0 & 8 & 1 & -11 & -21 \end{array}\right]$

En los Ejercicios 27-34, llene los espacios en blanco usando operaciones elementales de renglón para formar una matriz equivalente de renglones.

27. $\begin{bmatrix} 1 & 4 & 3 \\ 2 & 10 & 5 \end{bmatrix}$

$\begin{bmatrix} 1 & 4 & 3 \\ 0 & \square & -1 \end{bmatrix}$

28. $\begin{bmatrix} 3 & 6 & 8 \\ 4 & -3 & 6 \end{bmatrix}$

$\begin{bmatrix} 1 & \square & \frac{8}{3} \\ 4 & -3 & 6 \end{bmatrix}$

29. $\begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 5 & -2 & 4 \end{bmatrix}$

$\begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & \square & -1 \end{bmatrix}$

30. $\begin{bmatrix} -3 & 3 & 12 \\ 18 & -8 & 4 \end{bmatrix}$

$\begin{bmatrix} 1 & -1 & \square \\ 18 & -8 & 4 \end{bmatrix}$

31. $\begin{bmatrix} 1 & 5 & 4 & -1 \\ 0 & 1 & -2 & 2 \\ 0 & 0 & 1 & -7 \end{bmatrix}$

$\begin{bmatrix} 1 & 0 & \square & \square \\ 0 & 1 & -2 & 2 \\ 0 & 0 & 1 & -7 \end{bmatrix}$

32. $\begin{bmatrix} 1 & 0 & 6 & 1 \\ 0 & -1 & 0 & 7 \\ 0 & 0 & -1 & 3 \end{bmatrix}$

$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 6 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & \square \\ 0 & 0 & 1 & \square \end{bmatrix}$

33. $\begin{bmatrix} 1 & 1 & 4 & -1 \\ 3 & 8 & 10 & 3 \\ -2 & 1 & 12 & 6 \end{bmatrix}$

$\begin{bmatrix} 1 & 1 & 4 & -1 \\ 0 & 5 & & \\ 0 & 3 & & \end{bmatrix}$

$\begin{bmatrix} 1 & 1 & 4 & -1 \\ 0 & 1 & -\frac{2}{5} & \frac{6}{5} \\ 0 & 3 & & \end{bmatrix}$

34. $\begin{bmatrix} 2 & 4 & 8 & 3 \\ 1 & -1 & -3 & 2 \\ 2 & 6 & 4 & 9 \end{bmatrix}$

$\begin{bmatrix} 1 & & & \\ 1 & -1 & -3 & 2 \\ 2 & 6 & 4 & 9 \end{bmatrix}$

$\begin{bmatrix} 1 & 2 & 4 & \frac{3}{2} \\ 0 & & -7 & \frac{1}{2} \\ 0 & 2 & & \end{bmatrix}$

En los Ejercicios 35-38, identifique la(s) operación(es) elementales de renglón que se realizan para obtener la nueva matriz equivalente de renglón.

35. *Matriz original* $\begin{bmatrix} -2 & 5 & 1 \\ 3 & -1 & -8 \end{bmatrix}$ *Nueva matriz equivalente por renglones* $\begin{bmatrix} 13 & 0 & -39 \\ 3 & -1 & -8 \end{bmatrix}$

36. *Matriz original* $\begin{bmatrix} 3 & -1 & -4 \\ -4 & 3 & 7 \end{bmatrix}$ *Nueva matriz equivalente por renglones* $\begin{bmatrix} 3 & -1 & -4 \\ 5 & 0 & -5 \end{bmatrix}$

37. *Matriz original* $\begin{bmatrix} 0 & -1 & -5 & 5 \\ -1 & 3 & -7 & 6 \\ 4 & -5 & 1 & 3 \end{bmatrix}$ *Nueva matriz equivalente por renglones* $\begin{bmatrix} -1 & 3 & -7 & 6 \\ 0 & -1 & -5 & 5 \\ 0 & 7 & -27 & 27 \end{bmatrix}$

38. *Matriz original* $\begin{bmatrix} -1 & -2 & 3 & -2 \\ 2 & -5 & 1 & -7 \\ 5 & 4 & -7 & 6 \end{bmatrix}$ *Nueva matriz equivalente por renglones* $\begin{bmatrix} -1 & -2 & 3 & -2 \\ 0 & -9 & 7 & -11 \\ 0 & -6 & 8 & -4 \end{bmatrix}$

39. Realice la secuencia de operaciones de renglón en la matriz. ¿Qué llevaron a cabo las operaciones?

$$\begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & -1 & -4 \\ 3 & 1 & -1 \end{bmatrix}$$

(a) Sume -2 veces R_1 a R_2.
(b) Sume -3 veces R_1 a R_3.
(c) Sume -1 veces R_2 a R_3.
(d) Multiplique R_2 por $-\frac{1}{5}$.
(e) Sume -2 veces R_2 a R_1.

40. Realice la secuencia de operaciones en la matriz. ¿Qué llevaron a cabo las operaciones?

$$\begin{bmatrix} 7 & 1 \\ 0 & 2 \\ -3 & 4 \\ 4 & 1 \end{bmatrix}$$

(a) Sume R_3 a R_4.
(b) Intercambie R_1 y R_4.
(c) Sume 3 veces R_1 a R_3.
(d) Sume -7 veces R_1 a R_4.
(e) Multiplique R_2 por $\frac{1}{2}$.
(f) Sume los múltiplos apropiados de R_2 a R_1, R_3 y R_4.

En los Ejercicios 41-44, determine si la matriz está en forma escalonada por renglones. Si así es, determine si también está en forma escalonada por renglones reducida.

41. $\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 5 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$

42. $\begin{bmatrix} 1 & 3 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 8 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$

43. $\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 2 \end{bmatrix}$

44. $\begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}$

En los Ejercicios 45-48, escriba la matriz en forma escalonada por renglones. (Recuerde que la forma escalonada por renglones de una matriz no es única.)

45. $\begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 & 5 \\ -2 & -1 & 2 & -10 \\ 3 & 6 & 7 & 14 \end{bmatrix}$

46. $\begin{bmatrix} 1 & 2 & -1 & 3 \\ 3 & 7 & -5 & 14 \\ -2 & -1 & -3 & 8 \end{bmatrix}$

47. $\begin{bmatrix} 1 & -1 & -1 & 1 \\ 5 & -4 & 1 & 8 \\ -6 & 8 & 18 & 0 \end{bmatrix}$

48. $\begin{bmatrix} 1 & -3 & 0 & -7 \\ -3 & 10 & 1 & 23 \\ 4 & -10 & 2 & -24 \end{bmatrix}$

En los Ejercicios 49-54, use la capacidad matricial de una calculadora de gráficas para escribir la matriz en forma escalonada por renglones *reducida*.

49. $\begin{bmatrix} 3 & 3 & 3 \\ -1 & 0 & -4 \\ 2 & 4 & -2 \end{bmatrix}$

50. $\begin{bmatrix} 1 & 3 & 2 \\ 5 & 15 & 9 \\ 2 & 6 & 10 \end{bmatrix}$

51. $\begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 & -5 \\ 1 & 2 & 4 & -9 \\ -2 & -4 & -4 & 3 \\ 4 & 8 & 11 & -14 \end{bmatrix}$

52. $\begin{bmatrix} -2 & 3 & -1 & -2 \\ 4 & -2 & 5 & 8 \\ 1 & 5 & -2 & 0 \\ 3 & 8 & -10 & -30 \end{bmatrix}$

53. $\begin{bmatrix} -3 & 5 & 1 & 12 \\ 1 & -1 & 1 & 4 \end{bmatrix}$

54. $\begin{bmatrix} 5 & 1 & 2 & 4 \\ -1 & 5 & 10 & -32 \end{bmatrix}$

En los Ejercicios 55-58, escriba el sistema de ecuaciones lineales representado por la matriz aumentada. A continuación, use sustitución hacia atrás para resolver. (Use variables x, y y z, si es aplicable.)

55. $\left[\begin{array}{cc:c} 1 & -2 & 4 \\ 0 & 1 & -3 \end{array}\right]$

56. $\left[\begin{array}{cc:c} 1 & 5 & 0 \\ 0 & 1 & -1 \end{array}\right]$

57. $\left[\begin{array}{rrr|r} 1 & -1 & 2 & 4 \\ 0 & 1 & -1 & 2 \\ 0 & 0 & 1 & -2 \end{array}\right]$ **58.** $\left[\begin{array}{rrr|r} 1 & 2 & -2 & -1 \\ 0 & 1 & 1 & 9 \\ 0 & 0 & 1 & -3 \end{array}\right]$

En los Ejercicios 59-62, una matriz aumentada que representa un sistema de ecuaciones lineales (con variables x, y y z, si es aplicable) ha sido reducido usando eliminación de Gauss-Jordan. Escriba la solución representada por la matriz aumentada.

59. $\left[\begin{array}{rr|r} 1 & 0 & 3 \\ 0 & 1 & -4 \end{array}\right]$ **60.** $\left[\begin{array}{rr|r} 1 & 0 & -6 \\ 0 & 1 & 10 \end{array}\right]$

61. $\left[\begin{array}{rrr|r} 1 & 0 & 0 & -4 \\ 0 & 1 & 0 & -10 \\ 0 & 0 & 1 & 4 \end{array}\right]$ **62.** $\left[\begin{array}{rrr|r} 1 & 0 & 0 & 5 \\ 0 & 1 & 0 & -3 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{array}\right]$

En los Ejercicios 63-84, use matrices para resolver el sistema de ecuaciones (si es posible). Use eliminación gaussiana con sustitución hacia atrás o eliminación de Gauss-Jordan.

63. $\begin{cases} x + 2y = 7 \\ 2x + y = 8 \end{cases}$ **64.** $\begin{cases} 2x + 6y = 16 \\ 2x + 3y = 7 \end{cases}$

65. $\begin{cases} 3x - 2y = -27 \\ x + 3y = 13 \end{cases}$ **66.** $\begin{cases} -x + y = 4 \\ 2x - 4y = -34 \end{cases}$

67. $\begin{cases} -2x + 6y = -22 \\ x + 2y = -9 \end{cases}$ **68.** $\begin{cases} 5x - 5y = -5 \\ -2x - 3y = 7 \end{cases}$

69. $\begin{cases} 8x - 4y = 7 \\ 5x + 2y = 1 \end{cases}$ **70.** $\begin{cases} x - 3y = 5 \\ -2x + 6y = -10 \end{cases}$

71. $\begin{cases} x - 3z = -2 \\ 3x + y - 2z = 5 \\ 2x + 2y + z = 4 \end{cases}$ **72.** $\begin{cases} 2x - y + 3z = 24 \\ 2y - z = 14 \\ 7x - 5y = 6 \end{cases}$

73. $\begin{cases} -x + y - z = -14 \\ 2x - y + z = 21 \\ 3x + 2y + z = 19 \end{cases}$ **74.** $\begin{cases} 2x + 2y - z = 2 \\ x - 3y + z = -28 \\ -x + y = 14 \end{cases}$

75. $\begin{cases} x + 2y - 3z = -28 \\ 4y + 2z = 0 \\ -x + y - z = -5 \end{cases}$ **76.** $\begin{cases} 3x - 2y + z = 15 \\ -x + y + 2z = -10 \\ x - y - 4z = 14 \end{cases}$

77. $\begin{cases} x + 2y = 0 \\ -x - y = 0 \end{cases}$ **78.** $\begin{cases} x + 2y = 0 \\ 2x + 4y = 0 \end{cases}$

79. $\begin{cases} x + 2y + z = 8 \\ 3x + 7y + 6z = 26 \end{cases}$ **80.** $\begin{cases} x + y + 4z = 5 \\ 2x + y - z = 9 \end{cases}$

81. $\begin{cases} -x + y = -22 \\ 3x + 4y = 4 \\ 4x - 8y = 32 \end{cases}$ **82.** $\begin{cases} x + 2y = 0 \\ x + y = 6 \\ 3x - 2y = 8 \end{cases}$

83. $\begin{cases} 3x + 2y - z + w = 0 \\ x - y + 4z + 2w = 25 \\ -2x + y + 2z - w = 2 \\ x + y + z + w = 6 \end{cases}$

84. $\begin{cases} x - 4y + 3z - 2w = 9 \\ 3x - 2y + z - 4w = -13 \\ -4x + 3y - 2z + w = -4 \\ -2x + y - 4z + 3w = -10 \end{cases}$

En los Ejercicios 85-90, use la capacidad matricial de una calculadora de gráficas para reducir la matriz aumentada correspondiente al sistema de ecuaciones, y resuelva el sistema.

85. $\begin{cases} 3x + 3y + 12z = 6 \\ x + y + 4z = 2 \\ 2x + 5y + 20z = 10 \\ -x + 2y + 8z = 4 \end{cases}$ **86.** $\begin{cases} 2x + 10y + 2z = 6 \\ x + 5y + 2z = 6 \\ x + 5y + z = 3 \\ -3x - 15y - 3z = -9 \end{cases}$

87. $\begin{cases} 2x + y - z + 2w = -6 \\ 3x + 4y + w = 1 \\ x + 5y + 2z + 6w = -3 \\ 5x + 2y - z - w = 3 \end{cases}$

88. $\begin{cases} x + 2y + 2z + 4w = 11 \\ 3x + 6y + 5z + 12w = 30 \\ x + 3y - 3z + 2w = -5 \\ 6x - y - z + w = -9 \end{cases}$

89. $\begin{cases} x + y + z + w = 0 \\ 2x + 3y + z - 2w = 0 \\ 3x + 5y + z = 0 \end{cases}$

90. $\begin{cases} x + 2y + z + 3w = 0 \\ x - y + w = 0 \\ y - z + 2w = 0 \end{cases}$

En los Ejercicios 91-94, determine si los dos sistemas de ecuaciones lineales dan la misma solución. Si es así, encuéntrela usando matrices.

91. (a) $\begin{cases} x - 2y + z = -6 \\ y - 5z = 16 \\ z = -3 \end{cases}$ (b) $\begin{cases} x + y - 2z = 6 \\ y + 3z = -8 \\ z = -3 \end{cases}$

92. (a) $\begin{cases} x - 3y + 4z = -11 \\ y - z = -4 \\ z = 2 \end{cases}$ (b) $\begin{cases} x + 4y = -11 \\ y + 3z = 4 \\ z = 2 \end{cases}$

93. (a) $\begin{cases} x - 4y + 5z = 27 \\ y - 7z = -54 \\ z = 8 \end{cases}$ (b) $\begin{cases} x - 6y + z = 15 \\ y + 5z = 42 \\ z = 8 \end{cases}$

94. (a) $\begin{cases} x + 3y - z = 19 \\ y + 6z = -18 \\ z = -4 \end{cases}$ (b) $\begin{cases} x - y + 3z = -15 \\ y - 2z = 14 \\ z = -4 \end{cases}$

En los Ejercicios 95-98, use un sistema de ecuaciones para hallar la función cuadrática $f(x) = ax^2 + bx + c$ que satisfaga las ecuaciones. Resuelva el sistema usando matrices.

95. $f(1) = 1, f(2) = -1, f(3) = -5$

96. $f(1) = 2, f(2) = 9, f(3) = 20$

97. $f(-2) = -15, f(-1) = 7, f(1) = -3$

98. $f(-2) = -3, f(1) = -3, f(2) = -11$

En los Ejercicios 99-102, use un sistema de ecuaciones para hallar la función $f(x) = ax^3 + bx^2 + cx + d$ que satisfaga las ecuaciones. Resuelva el sistema usando matrices.

99. $f(-1) = -5$
$f(1) = -1$
$f(2) = 1$
$f(3) = 11$

100. $f(-1) = 4$
$f(1) = 4$
$f(2) = 16$
$f(3) = 44$

101. $f(-2) = -7$
$f(-1) = 2$
$f(1) = -4$
$f(2) = -7$

102. $f(-2) = -17$
$f(-1) = -5$
$f(1) = 1$
$f(2) = 7$

103. Use el sistema

$$\begin{cases} x + 3y + z = 3 \\ x + 5y + 5z = 1 \\ 2x + 6y + 3z = 8 \end{cases}$$

para escribir dos matrices diferentes en forma escalonada por renglones que den la misma solución.

104. RED ELÉCTRICA Las corrientes en una red eléctrica están dadas por la solución del sistema

$$\begin{cases} I_1 - I_2 + I_3 = 0 \\ 3I_1 + 4I_2 = 18 \\ I_2 + 3I_3 = 6 \end{cases}$$

donde I_1, I_2 e I_3 se miden en amperes. Resuelva el sistema de ecuaciones usando matrices.

105. FRACCIONES PARCIALES Use un sistema de ecuaciones para escribir la descomposición en fracciones parciales de la expresión racional. Resuelva el sistema usando matrices.

$$\frac{4x^2}{(x+1)^2(x-1)} = \frac{A}{x-1} + \frac{B}{x+1} + \frac{C}{(x+1)^2}$$

106. FRACCIONES PARCIALES Use un sistema de ecuaciones para escribir la descomposición en fracciones parciales de la expresión racional. Resuelva el sistema usando matrices.

$$\frac{8x^2}{(x-1)^2(x+1)} = \frac{A}{x+1} + \frac{B}{x-1} + \frac{C}{(x-1)^2}$$

107. FINANZAS Una pequeña fábrica de calzado solicitó en préstamo \$1 500 000 para expandir su línea de calzado. Parte del dinero se pidió al 7%, parte al 8% y parte al 10%. Use un sistema de ecuaciones para determinar cuánto fue solicitado en préstamo a cada una de las tasas, si el interés anual fue de \$130 500 y la cantidad obtenida en préstamo al 10% fue 4 veces la obtenida al 7%. Resuelva el sistema usando matrices.

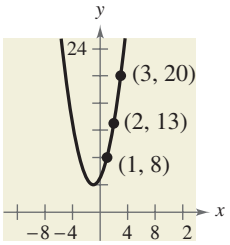
108. FINANZAS Una pequeña corporación fabricante de software solicitó en préstamo \$500 000 para expandir su línea de programas. Parte del dinero se pidió al 9%, parte al 10% y parte al 12%. Use un sistema de ecuaciones para determinar cuánto fue solicitado en préstamo a cada una de las tasas, si el interés anual fue de \$52 000 y la cantidad obtenida en préstamo al 10% fue $2\frac{1}{2}$ veces la cantidad obtenida al 9%. Resuelva el sistema usando matrices.

109. PROPINAS Un empleado de restaurante examina la cantidad de dinero ganada en propinas después de trabajar un turno de 8 horas. El empleado tiene un total de \$95 en billetes de denominaciones de \$1, \$5, \$10 y \$20. El número total de billetes es de 26. El número de billetes de \$5 es 4 veces el número de billetes de \$10 y el número de billetes de \$1 es 1 menos que el doble del número de billetes de \$5. Escriba un sistema de ecuaciones lineales para representar la situación. A continuación, use matrices para hallar el número de cada denominación.

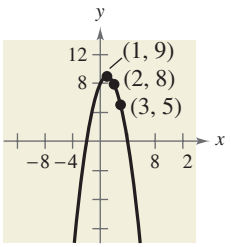
110. BANCA Una cajera de un banco está contando la cantidad total de dinero en cada cajón de dinero al final de un turno. Hay un total de \$2600 en billetes de denominaciones de \$1, \$5, \$10 y \$20. El número total de billetes es 235. El número de billetes de \$20 es el doble de los de \$1 y el número de billetes de \$5 es 10 más que el número de billetes de \$1. Escriba un sistema de ecuaciones lineales que represente la situación. A continuación, use matrices para hallar el número de cada denominación.

En los Ejercicios 111 y 112, use un sistema de ecuaciones para hallar la ecuación de la parábola $y = ax^2 + bx + c$ que pase por los puntos. Resuelva el sistema usando matrices. Use una calculadora de gráficas para verificar sus resultados.

111.



112.



113. MODELAJE MATEMÁTICO Un vídeo de la trayectoria de una pelota lanzada por un jugador de béisbol es analizado con una cuadrícula que cubre la pantalla del monitor. La cinta fue sometida a pausa tres veces y la posición de la pelota se midió en cada una de ellas. Las coordenadas obtenidas se muestran en la tabla. (x y y se midieron en pies.)

Distancia horizontal, x	Altura, y
0	5.0
15	9.6
30	12.4

(a) Use un sistema de ecuaciones para hallar la ecuación de la parábola $y = ax^2 + bx + c$ que pasa por los tres puntos. Resuelva el sistema usando matrices.
(b) Use calculadora de gráficas para graficar la parábola.
(c) Gráficamente, aproxime la altura máxima de la pelota y el punto en el que ésta toca el suelo.
(d) Analíticamente, encuentre la altura máxima de la pelota y el punto en el que toca el suelo.
(e) Compare sus resultados de los incisos (c) y (d).

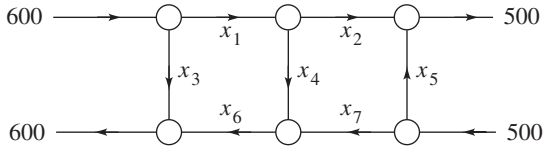
114. ANÁLISIS DE DATOS: PATINADORES EN NIEVE La tabla siguiente muestra el número y de personas (en millones), en Estados Unidos, que participaron en patinaje sobre nieve en años seleccionados de 2003 a 2007. (Fuente: National Sporting Goods Association)

Año	Número, y
2003	6.3
2005	6.0
2007	5.1

(a) Use un sistema de ecuaciones para hallar la ecuación de la parábola $y = at^2 + bt + c$ que pasa por los tres puntos. Con t represente el año, con $t = 3$ correspondiente a 2003. Resuelva el sistema usando matrices.
(b) Use una calculadora de gráficas para graficar la parábola.
(c) Use la ecuación del inciso (a) para estimar el número de personas que participaron en pruebas de patinaje sobre nieve en 2009. ¿La respuesta le parece razonable? Explique.
(d) ¿Piensa usted que la ecuación se puede usar para los años mucho después de 2007? Explique.

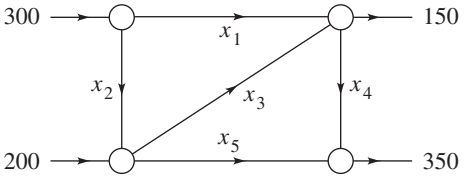
ANÁLISIS DE REDES En los Ejercicios 115 y 116, conteste las preguntas acerca de la red especificada. (En una red se supone que la corriente total que entra en cada unión es igual a la corriente total que sale de ella.)

115. El agua que entra en una red de tubos (en miles de metros cúbicos por hora) se muestra en la figura.



(a) Resuelva este sistema usando matrices para el caudal de agua representado por x_i, $i = 1, 2, \ldots, 7$.
(b) Encuentre el patrón de caudal de agua cuando $x_6 = 0$ y $x_7 = 0$.
(c) Encuentre el patrón de caudal de agua cuando $x_5 = 400$ y $x_6 = 500$.

116. El flujo de tráfico (en vehículos por hora) que pasa por una red de calles se muestra en la figura.



(a) Resuelva este sistema usando matrices para el flujo de tráfico representado por x_i, $i = 1, 2, \ldots, 5$.
(b) Encuentre el flujo de tráfico cuando $x_2 = 200$ y $x_3 = 50$.
(c) Encuentre el flujo de tráfico cuando $x_2 = 150$ y $x_3 = 0$.

EXPLORACIÓN

¿VERDADERO O FALSO? En los Ejercicios 117 y 118, determine si la proposición es verdadera o falsa. Justifique su respuesta.

117. $\begin{bmatrix} 5 & 0 & -2 & 7 \\ -1 & 3 & -6 & 0 \end{bmatrix}$ es una matriz de 4×2.

118. El método de eliminación gaussiana reduce una matriz hasta obtener una forma escalonada por renglones reducida.

119. PIÉNSELO La matriz aumentada siguiente representa el sistema de ecuaciones lineales (con variables x, y y z) que se ha reducido usando eliminación de Gauss-Jordan. Escriba un sistema de ecuaciones con coeficientes diferentes de cero que esté representado por la matriz reducida. (Hay numerosas respuestas correctas.)

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 3 & \vdots & -2 \\ 0 & 1 & 4 & \vdots & 1 \\ 0 & 0 & 0 & \vdots & 0 \end{bmatrix}$$

120. PIÉNSELO
(a) Describa la forma escalonada por renglones de una matriz aumentada que corresponda a un sistema de ecuaciones lineales que sea inconsistente.
(b) Describa la forma escalonada por renglones de una matriz aumentada que corresponda a un sistema de ecuaciones lineales que tenga un número infinito de soluciones.

121. Describa las tres operaciones elementales de renglones que puedan efectuarse en una matriz aumentada.

122. TOQUE FINAL Verbalmente, describa la diferencia entre una matriz en forma escalonada por renglones y una matriz en forma escalonada por renglones reducida. Incluya un ejemplo de cada una para apoyar su explicación.

123. ¿Cuál es la relación entre las tres operaciones elementales de renglones realizadas en una matriz aumentada, y las operaciones que llevan a sistemas equivalentes de ecuaciones?

8.2 Operaciones con matrices

Lo que debe aprender

- Determinar si dos matrices son iguales.
- Sumar y restar matrices y multiplicar matrices por escalares.
- Multiplicar dos matrices
- Usar operaciones matriciales para modelar y resolver problemas de la vida real.

Por qué debe aprenderlo

Se pueden usar operaciones con matrices para modelar y resolver problemas de la vida real. Por ejemplo, en el Ejercicio 76 en la página 598 se usan operaciones con matrices para analizar costos anuales de atención médica.

© Royalty-Free/Corbis

Igualdad de matrices

En la sección 8.1 utilizamos matrices para resolver sistemas de ecuaciones lineales. Hay una rica teoría matemática de matrices y sus aplicaciones son numerosas. Esta sección y las dos siguientes introducen algunos fundamentos de teoría de matrices. Es una convención matemática estándar representar matrices en cualquiera de las tres formas siguientes.

Representación de matrices

1. Una matriz puede denotarse con una letra mayúscula como A, B o C.
2. Una matriz puede denotarse con un elemente representativo encerrado en corchetes, por ejemplo, $[a_{ij}]$, $[b_{ij}]$ o $[c_{ij}]$.
3. Una matriz puede denotarse con un arreglo rectangular de números, como

$$A = [a_{ij}] = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & \cdots & a_{2n} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & \cdots & a_{3n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & a_{m3} & \cdots & a_{mn} \end{bmatrix}.$$

Dos matrices $A = [a_{ij}]$ y $B = [b_{ij}]$ son **iguales** si tienen el mismo orden $(m \times n)$ y $a_{ij} = b_{ij}$ para $1 \le i \le m$ y $1 \le j \le n$. En otras palabras, dos matrices son iguales si sus entradas correspondientes son iguales.

Ejemplo 1 Igualdad de matrices

Identifique a_{11}, a_{12}, a_{21} y a_{22} en la siguiente ecuación matricial.

$$\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 & -1 \\ -3 & 0 \end{bmatrix}$$

Solución

Como dos matrices son iguales si sus correspondientes entradas son iguales, se puede concluir que

$$a_{11} = 2, \quad a_{12} = -1, \quad a_{21} = -3 \quad \text{y} \quad a_{22} = 0.$$

PUNTO *de repaso* Ahora trate de hacer el Ejercicio 7.

Cerciórese de reconocer que para que dos matrices sean iguales deben tener el mismo orden, *además* de que sus entradas deben ser las mismas. Por ejemplo,

$$\begin{bmatrix} 2 & -1 \\ \sqrt{4} & \frac{1}{2} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 & -1 \\ 2 & 0.5 \end{bmatrix} \quad \text{pero} \quad \begin{bmatrix} 2 & -1 \\ 3 & 4 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \neq \begin{bmatrix} 2 & -1 \\ 3 & 4 \end{bmatrix}.$$

Suma de matrices y multiplicación por un escalar

En esta sección estudiaremos tres operaciones básicas de matrices. Las primeras dos son suma de matrices y multiplicación por un escalar. Con la suma de matrices se pueden sumar dos matrices (del mismo orden) al sumar sus elementos correspondientes.

Definición de suma de matrices

Si $A = [a_{ij}]$ and $B = [b_{ij}]$ son matrices de orden $m \times n$, su suma es la matriz de $m \times n$ dada por

$$A + B = [a_{ij} + b_{ij}].$$

La suma de dos matrices de órdenes diferentes no está definida.

NOTA HISTÓRICA

The Granger Collection

Arthur Cayley (1821-1895), matemático inglés, inventó las matrices hacia 1858. Cayley fue graduado de la Universidad de Cambridge y abogado de profesión. Su revolucionario trabajo sobre matrices empezó cuando estudiaba la teoría de transformaciones. Cayley también hizo aportaciones en el desarrollo de determinantes. A Cayley y dos matemáticos estadounidenses, Benjamin Peirce (1809-1880) y su hijo Charles S. Peirce (1839-1914) se les atribuye el desarrollo del "álgebra matricial".

Ejemplo 2 Suma de matrices

a.
$$\begin{bmatrix} -1 & 2 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 1 & 3 \\ -1 & 2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -1+1 & 2+3 \\ 0+(-1) & 1+2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 5 \\ -1 & 3 \end{bmatrix}$$

b.
$$\begin{bmatrix} 0 & 1 & -2 \\ 1 & 2 & 3 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & -2 \\ 1 & 2 & 3 \end{bmatrix}$$

c.
$$\begin{bmatrix} 1 \\ -3 \\ -2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} -1 \\ 3 \\ 2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

d. La suma de

$$A = \begin{bmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 4 & 0 & -1 \\ 3 & -2 & 2 \end{bmatrix} \quad \text{y}$$

$$B = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 3 \\ 2 & 4 \end{bmatrix}$$

no está definida porque A es de orden 3×3 y B es de orden 3×2.

PUNTO *de repaso* Ahora trate de hacer el Ejercicio 13(a).

En operaciones con matrices, por lo general los números se conocen como **escalares**. En este texto, los escalares siempre serán números reales. Se puede multiplicar una matriz A por un escalar c al multiplicar cada elemento de A por c

Definición de multiplicación por un escalar

Si $A = [a_{ij}]$ es una matriz de $m \times n$ y c es un escalar, el **múltiplo escalar** de A por c es la matriz de $m \times n$ dada por

$$cA = [ca_{ij}].$$

El símbolo $-A$ representa la negación de A, que es el producto por un escalar $(-1)A$. Además, si A y B son del mismo orden, entonces $A - B$ representa la suma de A y $(-1)B$. Esto es,

$$A - B = A + (-1)B.$$ Resta de matrices

El orden de operaciones para expresiones de matrices es similar al del orden de números reales. En particular, se ejecuta la multiplicación por un escalar antes de la suma y resta de matrices, como se muestra en el ejemplo 3(c).

Ejemplo 3 Multiplicación por un escalar y resta de matrices

Para las siguientes matrices, encuentre (a) $3A$, (b) $-B$ y (c) $3A - B$.

$$A = \begin{bmatrix} 2 & 2 & 4 \\ -3 & 0 & -1 \\ 2 & 1 & 2 \end{bmatrix} \quad \text{y} \quad B = \begin{bmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 1 & -4 & 3 \\ -1 & 3 & 2 \end{bmatrix}$$

Solución

a. $3A = 3\begin{bmatrix} 2 & 2 & 4 \\ -3 & 0 & -1 \\ 2 & 1 & 2 \end{bmatrix}$ Multiplicación por un escalar

$= \begin{bmatrix} 3(2) & 3(2) & 3(4) \\ 3(-3) & 3(0) & 3(-1) \\ 3(2) & 3(1) & 3(2) \end{bmatrix}$ Multiplicar cada entrada por 3.

$= \begin{bmatrix} 6 & 6 & 12 \\ -9 & 0 & -3 \\ 6 & 3 & 6 \end{bmatrix}$ Simplificar.

b. $-B = (-1)\begin{bmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 1 & -4 & 3 \\ -1 & 3 & 2 \end{bmatrix}$ Definición de negación

$= \begin{bmatrix} -2 & 0 & 0 \\ -1 & 4 & -3 \\ 1 & -3 & -2 \end{bmatrix}$ Multiplicar cada entrada por -1.

c. $3A - B = \begin{bmatrix} 6 & 6 & 12 \\ -9 & 0 & -3 \\ 6 & 3 & 6 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 1 & -4 & 3 \\ -1 & 3 & 2 \end{bmatrix}$ Resta de matrices

$= \begin{bmatrix} 4 & 6 & 12 \\ -10 & 4 & -6 \\ 7 & 0 & 4 \end{bmatrix}$ Restar elementos correspondientes.

PUNTO *de repaso* Ahora trate de hacer el Ejercicio 13(b), (c) y (d).

A veces es conveniente reescribir el múltiplo escalar cA al factorizar c fuera de la matriz. Por citar un caso, en el siguiente ejempl0o, el escalar $\frac{1}{2}$ ha sido factorizado fuera de la matriz.

$$\begin{bmatrix} \frac{1}{2} & -\frac{3}{2} \\ \frac{5}{2} & \frac{1}{2} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{1}{2}(1) & \frac{1}{2}(-3) \\ \frac{1}{2}(5) & \frac{1}{2}(1) \end{bmatrix} = \frac{1}{2}\begin{bmatrix} 1 & -3 \\ 5 & 1 \end{bmatrix}$$

Ayuda de álgebra

Puede repasar las propiedades de suma y multiplicación de números reales (y otras propiedades de los números reales) en el Apéndice A.1

Las propiedades de suma de matrices y multiplicación por un escalar son semejantes a las de suma y multiplicación de números reales.

Propiedades de suma de matrices y multiplicación por un escalar

Sean A, B y C matrices de $m \times n$ y sean c y d escalares.

1. $A + B = B + A$ — Propiedad conmutativa de la suma de matrices
2. $A + (B + C) = (A + B) + C$ — Propiedad asociativa de la suma de matrices
3. $(cd)A = c(dA)$ — Propiedad asociativa de la multiplicación por un escalar
4. $1A = A$ — Propiedad de la identidad escalar
5. $c(A + B) = cA + cB$ — Propiedad distributiva
6. $(c + d)A = cA + dA$ — Propiedad distributiva

Nótese que la propiedad asociativa de la suma de matrices permite escribir expresiones como $A + B + C$ sin ambigüedad porque ocurre la misma suma sin importar cómo se agrupen las matrices. El mismo razonamiento se aplica a sumas de cuatro o más matrices.

Ejemplo 4 Sumar más de dos matrices

Al sumar elementos correspondientes, se obtiene la siguiente suma de cuatro matrices.

$$\begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ -3 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} -1 \\ -1 \\ 2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 4 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 2 \\ -3 \\ -2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 \\ -1 \\ 1 \end{bmatrix}$$

PUNTO *de repaso* Ahora trate de hacer el Ejercicio 19.

Ejemplo 5 Usar la propiedad distributiva

Realice las operaciones de matrices indicadas.

$$3\left(\begin{bmatrix} -2 & 0 \\ 4 & 1 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 4 & -2 \\ 3 & 7 \end{bmatrix}\right)$$

Solución

$$\begin{aligned} 3\left(\begin{bmatrix} -2 & 0 \\ 4 & 1 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 4 & -2 \\ 3 & 7 \end{bmatrix}\right) &= 3\begin{bmatrix} -2 & 0 \\ 4 & 1 \end{bmatrix} + 3\begin{bmatrix} 4 & -2 \\ 3 & 7 \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} -6 & 0 \\ 12 & 3 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 12 & -6 \\ 9 & 21 \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} 6 & -6 \\ 21 & 24 \end{bmatrix} \end{aligned}$$

PUNTO *de repaso* Ahora trate de hacer el Ejercicio 21.

En el Ejemplo 5, se podrían sumar las dos matrices primero y luego multiplicar la matriz por 3, como sigue. Observe que se obtiene el mismo resultado.

$$3\left(\begin{bmatrix} -2 & 0 \\ 4 & 1 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 4 & -2 \\ 3 & 7 \end{bmatrix}\right) = 3\begin{bmatrix} 2 & -2 \\ 7 & 8 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 6 & -6 \\ 21 & 24 \end{bmatrix}$$

TECNOLOGÍA

Casi todas las calculadoras de gráficas tienen la misma capacidad de realizar operaciones con matrices. Consulte las secuencias de tecleo específicas en la guía del usuario de su calculadora. Trate de usar una calculadora de gráficas para hallar la suma de las matrices

$$A = \begin{bmatrix} 2 & -3 \\ -1 & 0 \end{bmatrix}$$

y

$$B = \begin{bmatrix} -1 & 4 \\ 2 & -5 \end{bmatrix}.$$

Una propiedad importante de la suma de números reales es que el número 0 es la identidad aditiva. Esto es, $c + 0 = c$ para cualquier número real c. Para matrices, se cumple una propiedad similar. Esto es, si A es una matriz de $m \times n$ y O es la **matriz cero** de $m \times n$ formada enteramente de ceros, entonces $A + O = A$.

En otras palabras, O es la **identidad aditiva** para el conjunto de todas las matrices de $m \times n$. Por ejemplo, las siguientes matrices son las identidades aditivas para los conjuntos de todas las matrices de 2×3 y 2×2.

$$O = \underbrace{\begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}}_{\text{Matriz de } 2 \times 3 \text{ ceros}} \quad \text{y} \quad O = \underbrace{\begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}}_{\text{Matriz de } 2 \times 2 \text{ ceros}}$$

El álgebra de números reales y el álgebra de matrices tienen muchas similitudes. Por ejemplo, compare las siguientes soluciones.

Números reales (Despeje x)	*Matrices de* $m \times n$ (Despeje X)
$x + a = b$	$X + A = B$
$x + a + (-a) = b + (-a)$	$X + A + (-A) = B + (-A)$
$x + 0 = b - a$	$X + O = B - A$
$x = b - a$	$X = B - A$

El álgebra de números reales y el álgebra de matrices también tienen diferencias importantes, que estudiaremos más adelante.

ATENCIÓN

Recuerde que las matrices se denotan con mayúsculas. Entonces, al despejar X, se despeja una *matriz* que hace verdadera la ecuación de matrices.

Ejemplo 6 Resolver una ecuación de matrices

Despeje X de la ecuación $3X + A = B$, donde

$$A = \begin{bmatrix} 1 & -2 \\ 0 & 3 \end{bmatrix} \quad \text{y} \quad B = \begin{bmatrix} -3 & 4 \\ 2 & 1 \end{bmatrix}.$$

Solución

Empiece por despejar X de la ecuación de matrices para obtener

$$3X = B - A$$

$$X = \frac{1}{3}(B - A).$$

A continuación, usando las matrices A y B, tenemos

$$X = \frac{1}{3}\left(\begin{bmatrix} -3 & 4 \\ 2 & 1 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 1 & -2 \\ 0 & 3 \end{bmatrix}\right) \qquad \text{Sustituir las matrices.}$$

$$= \frac{1}{3}\begin{bmatrix} -4 & 6 \\ 2 & -2 \end{bmatrix} \qquad \text{Restar la matriz } A \text{ de la matriz } B.$$

$$= \begin{bmatrix} -\frac{4}{3} & 2 \\ \frac{2}{3} & -\frac{2}{3} \end{bmatrix}. \qquad \text{Multiplicar la matriz por } \tfrac{1}{3}.$$

PUNTO *de repaso* Ahora trate de hacer el Ejercicio 31.

Multiplicación de matrices

Otra operación básica de matrices es la **multiplicación de matrices**. A primera vista, la definición puede parecer poco común pero más adelante veremos que esta definición del producto de dos matrices tiene muchas aplicaciones prácticas.

Definición de multiplicación de matrices

Si $A = [a_{ij}]$ es una matriz de $m \times n$ y $B = [b_{ij}]$ es una matriz de $n \times p$ el producto AB es una matriz de $m \times p$

$$AB = [c_{ij}]$$

donde $c_{ij} = a_{i1}b_{1j} + a_{i2}b_{2j} + a_{i3}b_{3j} + \cdots + a_{in}b_{nj}$.

La definición de multiplicación de matrices indica una multiplicación de *renglón por columna*, donde el elemento del i-ésimo renglón y la j-ésima columna del producto AB se obtiene al multiplicar los elementos del i-ésimo renglón de A por los correspondientes elementos de la j-ésima columna de B y luego sumar los resultados. Entonces, para que el producto de dos matrices se defina, el número de columnas de la primera matriz debe ser igual al número de renglones de la segunda. La forma general de la multiplicación de matrices es como sigue.

$$\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & \cdots & a_{2n} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & \cdots & a_{3n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{i1} & a_{i2} & a_{i3} & \cdots & a_{in} \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & a_{m3} & \cdots & a_{mn} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} b_{11} & b_{12} & \cdots & b_{1j} & \cdots & b_{1p} \\ b_{21} & b_{22} & \cdots & b_{2j} & \cdots & b_{2p} \\ b_{31} & b_{32} & \cdots & b_{3j} & \cdots & b_{3p} \\ \vdots & \vdots & & \vdots & & \vdots \\ b_{n1} & b_{n2} & \cdots & b_{nj} & \cdots & b_{np} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} c_{11} & c_{12} & \cdots & c_{1j} & \cdots & c_{1p} \\ c_{21} & c_{22} & \cdots & c_{2j} & \cdots & c_{2p} \\ \vdots & \vdots & & \vdots & & \vdots \\ c_{i1} & c_{i2} & \cdots & c_{ij} & \cdots & c_{ip} \\ \vdots & \vdots & & \vdots & & \vdots \\ c_{m1} & c_{m2} & \cdots & c_{mj} & \cdots & c_{mp} \end{bmatrix}$$

$$a_{i1}b_{1j} + a_{i2}b_{2j} + a_{i3}b_{3j} + \cdots + a_{in}b_{nj} = c_{ij}$$

Ejemplo 7 Hallar el producto de dos matrices

Encuentre el producto AB usando $A = \begin{bmatrix} -1 & 3 \\ 4 & -2 \\ 5 & 0 \end{bmatrix}$ y $B = \begin{bmatrix} -3 & 2 \\ -4 & 1 \end{bmatrix}$.

Solución

Para hallar los elementos del producto, multiplique cada uno de los renglones de A por cada una de las columnas de B

$$AB = \begin{bmatrix} -1 & 3 \\ 4 & -2 \\ 5 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -3 & 2 \\ -4 & 1 \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} (-1)(-3) + (3)(-4) & (-1)(2) + (3)(1) \\ (4)(-3) + (-2)(-4) & (4)(2) + (-2)(1) \\ (5)(-3) + (0)(-4) & (5)(2) + (0)(1) \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} -9 & 1 \\ -4 & 6 \\ -15 & 10 \end{bmatrix}$$

PUNTO de repaso Ahora trate de hacer el Ejercicio 35.

Tip de estudio

En el Ejemplo 7, el producto AB está definido porque el número de columnas de A es igual al número de renglones de B. También, observe que el producto AB tiene orden 3×2.

Asegúrese de entender que para que el producto de dos matrices esté definido, el número de *columnas* de la primera matriz debe ser igual al número de *renglones* de la segunda matriz. Esto es, los dos índices intermedios deben ser iguales. Los dos índices externos dan el orden del producto, como se muestra a continuación.

$$\underset{m \times n}{A} \quad \times \quad \underset{n \times p}{B} \quad = \quad \underset{m \times p}{AB}$$

Iguales

Orden de AB

Ejemplo 8 Hallar el producto de dos matrices

Encuentre el producto AB donde

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 3 \\ 2 & -1 & -2 \end{bmatrix} \quad \text{y} \quad B = \begin{bmatrix} -2 & 4 \\ 1 & 0 \\ -1 & 1 \end{bmatrix}.$$

Solución

Observe que el orden de A es 2×3 y el de B es 3×2. Entonces, el producto AB tiene orden 2×2.

$$AB = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 3 \\ 2 & -1 & -2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -2 & 4 \\ 1 & 0 \\ -1 & 1 \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} 1(-2) + 0(1) + 3(-1) & 1(4) + 0(0) + 3(1) \\ 2(-2) + (-1)(1) + (-2)(-1) & 2(4) + (-1)(0) + (-2)(1) \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} -5 & 7 \\ -3 & 6 \end{bmatrix}$$

PUNTO *de repaso* Ahora trate de hacer el Ejercicio 33.

Ejemplo 9 Patrones en multiplicación de matrices

a. $\begin{bmatrix} 3 & 4 \\ -2 & 5 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3 & 4 \\ -2 & 5 \end{bmatrix}$

$2 \times 2 \quad 2 \times 2 \quad 2 \times 2$

b. $\begin{bmatrix} 6 & 2 & 0 \\ 3 & -1 & 2 \\ 1 & 4 & 6 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ -3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 10 \\ -5 \\ -9 \end{bmatrix}$

$3 \times 3 \quad 3 \times 1 \quad 3 \times 1$

c. El producto AB para las siguientes matrices no está definido.

$$A = \begin{bmatrix} -2 & 1 \\ 1 & -3 \\ 1 & 4 \end{bmatrix} \quad \text{y} \quad B = \begin{bmatrix} -2 & 3 & 1 & 4 \\ 0 & 1 & -1 & 2 \\ 2 & -1 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$3 \times 2 \qquad\qquad 3 \times 4$

PUNTO *de repaso* Ahora trate de hacer el Ejercicio 39.

Ejemplo 10 Patrones en multiplicación de matrices

a. $\begin{bmatrix}1 & -2 & -3\end{bmatrix}\begin{bmatrix}2\\-1\\1\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}1\end{bmatrix}$

$1 \times 3 \quad 3 \times 1 \quad 1 \times 1$

b. $\begin{bmatrix}2\\-1\\1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}1 & -2 & -3\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}2 & -4 & -6\\-1 & 2 & 3\\1 & -2 & -3\end{bmatrix}$

$3 \times 1 \quad 1 \times 3 \quad 3 \times 3$

PUNTO *de repaso* Ahora trate de hacer el Ejercicio 51.

En el Ejemplo 10, nótese que los dos productos son diferentes. Incluso si AB y BA están definidos, la multiplicación de matrices no es, en general, conmutativa. Esto es, para casi todas las matrices, $AB \neq BA$. Ésta es una forma en la que difieren el álgebra de números reales y el álgebra de matrices.

Propiedades de la multiplicación de matrices

Sean A, B y C matrices y sea c un escalar.

1. $A(BC) = (AB)C$ Propiedad asociativa de la multiplicación de matrices

2. $A(B + C) = AB + AC$ Propiedad distributiva

3. $(A + B)C = AC + BC$ Propiedad distributiva

4. $c(AB) = (cA)B = A(cB)$ Propiedad asociativa de la multiplicación por un escalar

Definición de matriz identidad

La matriz de $n \times n$ formada por números 1 en su diagonal principal y por números 0 en otras partes se denomina **matriz identidad de orden $n \times n$** y se denota con

$$I_n = \begin{bmatrix}1 & 0 & 0 & \cdots & 0\\0 & 1 & 0 & \cdots & 0\\0 & 0 & 1 & \cdots & 0\\\vdots & \vdots & \vdots & & \vdots\\0 & 0 & 0 & \cdots & 1\end{bmatrix}.$$ Matriz identidad

Nótese que una matriz identidad debe ser *cuadrada*. Cuando se entiende que el orden ha de ser $n \times n$, se puede denotar I_n simplemente con I.

Si A es una matriz de $n \times n$, la matriz identidad tiene la propiedad de que $AI_n = A$ y además $I_nA = A$. Por ejemplo,

$$\begin{bmatrix}3 & -2 & 5\\1 & 0 & 4\\-1 & 2 & -3\end{bmatrix}\begin{bmatrix}1 & 0 & 0\\0 & 1 & 0\\0 & 0 & 1\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}3 & -2 & 5\\1 & 0 & 4\\-1 & 2 & -3\end{bmatrix} \quad AI = A$$

y

$$\begin{bmatrix}1 & 0 & 0\\0 & 1 & 0\\0 & 0 & 1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}3 & -2 & 5\\1 & 0 & 4\\-1 & 2 & -3\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}3 & -2 & 5\\1 & 0 & 4\\-1 & 2 & -3\end{bmatrix}. \quad IA = A$$

Aplicaciones

La multiplicación de matrices se puede usar para representar un sistema de ecuaciones lineales. Nótese cómo el sistema

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + a_{13}x_3 = b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + a_{23}x_3 = b_2 \\ a_{31}x_1 + a_{32}x_2 + a_{33}x_3 = b_3 \end{cases}$$

se puede escribir como la ecuación de matrices $AX = B$, donde A es la *matriz de coeficientes del sistema*, y X y B son matrices columna.

$$\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \\ b_3 \end{bmatrix}$$

$$A \quad \times \quad X \quad = \quad B$$

Tip de estudio

La matriz columna B también se llama matriz *constante*. Sus elementos son los términos constantes del sistema de ecuaciones

Ejemplo 11 Resolver un sistema de ecuaciones lineales

Considere el siguiente sistema de ecuaciones lineales.

$$\begin{cases} x_1 - 2x_2 + x_3 = -4 \\ x_2 + 2x_3 = 4 \\ 2x_1 + 3x_2 - 2x_3 = 2 \end{cases}$$

a. Escriba este sistema como una ecuación de matrices, $AX = B$.

b. Use eliminación de Gauss-Jordan en la matriz aumentada $[A \vdots B]$ para despejar la matriz X.

Tip de estudio

La notación $[A \vdots B]$ representa la matriz aumentada formada cuando la matriz B se une a la matriz A. La notación $[I \vdots X]$ representa la forma escalonada por renglones reducida de la matriz aumentada que da la *solución* del sistema.

Solución

a. En forma de matriz, $AX = B$, el sistema se puede escribir como sigue.

$$\begin{bmatrix} 1 & -2 & 1 \\ 0 & 1 & 2 \\ 2 & 3 & -2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -4 \\ 4 \\ 2 \end{bmatrix}$$

b. La matriz aumentada se forma al unir la matriz B a la matriz A.

$$[A \vdots B] = \left[\begin{array}{ccc:c} 1 & -2 & 1 & -4 \\ 0 & 1 & 2 & 4 \\ 2 & 3 & -2 & 2 \end{array}\right]$$

Usando eliminación de Gauss-Jordan, se puede reescribir esta ecuación como

$$[I \vdots X] = \left[\begin{array}{ccc:c} 1 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \end{array}\right].$$

Por tanto, la solución del sistema de ecuaciones lineales es $x_1 = -1$, $x_2 = 2$ y $x_3 = 1$, y la solución de la ecuación matricial es

$$X = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -1 \\ 2 \\ 1 \end{bmatrix}.$$

PUNTO *de repaso* Ahora trate de hacer el Ejercicio 61.

Ejemplo 12 Gastos de un equipo de softbol

Dos escuadras de softbol envían listas del equipo a sus patrocinadores.

	Equipo de mujeres	*Equipo de hombres*
Bates	12	15
Pelotas	45	38
Guantes	15	17

Cada bate cuesta \$80, cada pelota cuesta \$6 y cada guante cuesta \$60. Use matrices para hallar el costo total de equipo por cada escuadra.

Solución

Las listas de equipo E y los costos por artículo C se pueden escribir en forma de matriz como

$$E = \begin{bmatrix} 12 & 15 \\ 45 & 38 \\ 15 & 17 \end{bmatrix}$$

y

$$C = [80 \quad 6 \quad 60].$$

El costo total de equipo por cada escuadra está dado por el producto

$$\begin{aligned} CE &= [80 \quad 6 \quad 60]\begin{bmatrix} 12 & 15 \\ 45 & 38 \\ 15 & 17 \end{bmatrix} \\ &= [80(12) + 6(45) + 60(15) \quad 80(15) + 6(38) + 60(17)] \\ &= [2130 \quad 2448]. \end{aligned}$$

Por tanto, el costo total de equipo para la escuadra de mujeres es \$2130 y el costo total de equipo para la de hombres es de \$2448.

PUNTO *de repaso* Ahora trate de hacer el Ejercicio 69.

Tip de estudio

Observe en el Ejemplo 12 que no se puede hallar el costo total usando el producto EC porque EC no está definido. Esto es, el número de columnas de E (2 columnas) no es igual al número de renglones de C (1 renglón)

Discusión en clase

Planteamiento de un problema Escriba un problema de aplicación de multiplicación de matrices que utilice la matriz

$$A = \begin{bmatrix} 20 & 42 & 33 \\ 17 & 30 & 50 \end{bmatrix}.$$

Intercambie problemas con otro estudiante de su grupo. Forme las matrices que representen el problema y resuélvalo. Interprete su solución en el contexto del problema. Verifique con el creador del problema para ver si usted está bien. Discuta otras formas de representar o abordar éste.

8.2 EJERCICIOS

En www.CalcChat.com vea las soluciones a los ejercicios impares.

VOCABULARIO

Llene los espacios en blanco.

1. Dos matrices son _____ si todas sus entradas correspondientes son iguales.
2. Cuando se realizan operaciones con matrices, es frecuente que los números reales se denominen _____.
3. Una matriz formada enteramente de ceros se llama matriz _____ y se denota con _____.
4. La matriz de $n \times n$ formada de números 1 en su diagonal principal y de números 0 en las demás partes se llama matriz _____ de orden $n \times n$.

En los Ejercicios 5 y 6, relacione la propiedad matricial con la forma correcta. A, B y C son matrices de orden $m \times n$, y c y d son escalares.

5. (a) $1A = A$ (i) Propiedad distributiva
   (b) $A + (B + C) = (A + B) + C$ (ii) Propiedad conmutativa de la suma de matrices
   (c) $(c + d)A = cA + dA$ (iii) Propiedad de la identidad escalar
   (d) $(cd)A = c(dA)$ (iv) Propiedad asociativa de la suma de matrices
   (e) $A + B = B + A$ (v) Propiedad asociativa de la multiplicación por un escalar
6. (a) $A + O = A$ (i) Propiedad distributiva
   (b) $c(AB) = A(cB)$ (ii) Identidad aditiva de la suma de matrices
   (c) $A(B + C) = AB + AC$ (iii) Propiedad asociativa de la multiplicación de matrices
   (d) $A(BC) = (AB)C$ (iv) Propiedad asociativa de la multiplicación por un escalar

HABILIDADES Y APLICACIONES

En los Ejercicios 7-10, encuentre x y y.

7. $\begin{bmatrix} x & -2 \\ 7 & y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -4 & -2 \\ 7 & 22 \end{bmatrix}$

8. $\begin{bmatrix} -5 & x \\ y & 8 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -5 & 13 \\ 12 & 8 \end{bmatrix}$

9. $\begin{bmatrix} 16 & 4 & 5 & 4 \\ -3 & 13 & 15 & 6 \\ 0 & 2 & 4 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 16 & 4 & 2x+1 & 4 \\ -3 & 13 & 15 & 3x \\ 0 & 2 & 3y-5 & 0 \end{bmatrix}$

10. $\begin{bmatrix} x+2 & 8 & -3 \\ 1 & 2y & 2x \\ 7 & -2 & y+2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2x+6 & 8 & -3 \\ 1 & 18 & -8 \\ 7 & -2 & 11 \end{bmatrix}$

En los Ejercicios 11-18, si es posible, encuentre (a) $A + B$, (b) $A - B$, (c) $3A$, y (d) $3A - 2B$.

11. $A = \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ 2 & -1 \end{bmatrix}$, $B = \begin{bmatrix} 2 & -1 \\ -1 & 8 \end{bmatrix}$

12. $A = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 1 \end{bmatrix}$, $B = \begin{bmatrix} -3 & -2 \\ 4 & 2 \end{bmatrix}$

13. $A = \begin{bmatrix} 8 & -1 \\ 2 & 3 \\ -4 & 5 \end{bmatrix}$, $B = \begin{bmatrix} 1 & 6 \\ -1 & -5 \\ 1 & 10 \end{bmatrix}$

14. $A = \begin{bmatrix} 1 & -1 & 3 \\ 0 & 6 & 9 \end{bmatrix}$, $B = \begin{bmatrix} -2 & 0 & -5 \\ -3 & 4 & -7 \end{bmatrix}$

15. $A = \begin{bmatrix} 4 & 5 & -1 & 3 & 4 \\ 1 & 2 & -2 & -1 & 0 \end{bmatrix}$,
$B = \begin{bmatrix} 1 & 0 & -1 & 1 & 0 \\ -6 & 8 & 2 & -3 & -7 \end{bmatrix}$

16. $A = \begin{bmatrix} -1 & 4 & 0 \\ 3 & -2 & 2 \\ 5 & 4 & -1 \\ 0 & 8 & -6 \\ -4 & -1 & 0 \end{bmatrix}$, $B = \begin{bmatrix} -3 & 5 & 1 \\ 2 & -4 & -7 \\ 10 & -9 & -1 \\ 3 & 2 & -4 \\ 0 & 1 & -2 \end{bmatrix}$

17. $A = \begin{bmatrix} 6 & 0 & 3 \\ -1 & -4 & 0 \end{bmatrix}$, $B = \begin{bmatrix} 8 & -1 \\ 4 & -3 \end{bmatrix}$

18. $A = \begin{bmatrix} 3 \\ 2 \\ -1 \end{bmatrix}$, $B = \begin{bmatrix} -4 & 6 & 2 \end{bmatrix}$

En los Ejercicios 19-24, evalúe la expresión.

19. $\begin{bmatrix} -5 & 0 \\ 3 & -6 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 7 & 1 \\ -2 & -1 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} -10 & -8 \\ 14 & 6 \end{bmatrix}$

20. $\begin{bmatrix} 6 & 8 \\ -1 & 0 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 & 5 \\ -3 & -1 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} -11 & -7 \\ 2 & -1 \end{bmatrix}$

21. $4\left(\begin{bmatrix} -4 & 0 & 1 \\ 0 & 2 & 3 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 2 & 1 & -2 \\ 3 & -6 & 0 \end{bmatrix}\right)$

22. $\frac{1}{2}([5 \quad -2 \quad 4 \quad 0] + [14 \quad 6 \quad -18 \quad 9])$

23. $-3\left(\begin{bmatrix} 0 & -3 \\ 7 & 2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} -6 & 3 \\ 8 & 1 \end{bmatrix}\right) - 2\begin{bmatrix} 4 & -4 \\ 7 & -9 \end{bmatrix}$

24. $-\begin{bmatrix} 4 & 11 \\ -2 & -1 \\ 9 & 3 \end{bmatrix} + \frac{1}{6}\left(\begin{bmatrix} -5 & -1 \\ 3 & 4 \\ 0 & 13 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 7 & 5 \\ -9 & -1 \\ 6 & -1 \end{bmatrix}\right)$

En los Ejercicios 25-28, use la capacidad matricial de una calculadora de gráficas para evaluar la expresión. Redondee el resultado a tres lugares decimales, si es necesario.

25. $\frac{3}{7}\begin{bmatrix} 2 & 5 \\ -1 & -4 \end{bmatrix} + 6\begin{bmatrix} -3 & 0 \\ 2 & 2 \end{bmatrix}$

26. $55\left(\begin{bmatrix} 14 & -11 \\ -22 & 19 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} -22 & 20 \\ 13 & 6 \end{bmatrix}\right)$

27. $-\begin{bmatrix} 3.211 & 6.829 \\ -1.004 & 4.914 \\ 0.055 & -3.889 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} -1.630 & -3.090 \\ 5.256 & 8.335 \\ -9.768 & 4.251 \end{bmatrix}$

28. $-\begin{bmatrix} 10 & 15 \\ -20 & 10 \\ 12 & 4 \end{bmatrix} + \frac{1}{8}\left(\begin{bmatrix} -13 & 11 \\ 7 & 0 \\ 6 & 9 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} -3 & 13 \\ -3 & 8 \\ -14 & 15 \end{bmatrix}\right)$

En los Ejercicios 29-32, despeje X en la ecuación, dadas

$$A = \begin{bmatrix} -2 & -1 \\ 1 & 0 \\ 3 & -4 \end{bmatrix} \quad \text{y} \quad B = \begin{bmatrix} 0 & 3 \\ 2 & 0 \\ -4 & -1 \end{bmatrix}.$$

29. $X = 3A - 2B$

30. $2X = 2A - B$

31. $2X + 3A = B$

32. $2A + 4B = -2X$

En los Ejercicios 33-40, si es posible, encuentre AB y diga el orden del resultado.

33. $A = \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ -3 & 4 \\ 1 & 6 \end{bmatrix}, \quad B = \begin{bmatrix} 0 & -1 & 0 \\ 4 & 0 & 2 \\ 8 & -1 & 7 \end{bmatrix}$

34. $A = \begin{bmatrix} 0 & -1 & 2 \\ 6 & 0 & 3 \\ 7 & -1 & 8 \end{bmatrix}, \quad B = \begin{bmatrix} 2 & -1 \\ 4 & -5 \\ 1 & 6 \end{bmatrix}$

35. $A = \begin{bmatrix} -1 & 6 \\ -4 & 5 \\ 0 & 3 \end{bmatrix}, \quad B = \begin{bmatrix} 2 & 3 \\ 0 & 9 \end{bmatrix}$

36. $A = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 4 & 0 \\ 0 & 0 & -2 \end{bmatrix}, \quad B = \begin{bmatrix} 3 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 5 \end{bmatrix}$

37. $A = \begin{bmatrix} 5 & 0 & 0 \\ 0 & -8 & 0 \\ 0 & 0 & 7 \end{bmatrix}, \quad B = \begin{bmatrix} \frac{1}{5} & 0 & 0 \\ 0 & -\frac{1}{8} & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1}{2} \end{bmatrix}$

38. $A = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 5 \\ 0 & 0 & -3 \\ 0 & 0 & 4 \end{bmatrix}, \quad B = \begin{bmatrix} 6 & -11 & 4 \\ 8 & 16 & 4 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$

39. $A = \begin{bmatrix} 10 \\ 12 \end{bmatrix}, \quad B = [6 \quad -2 \quad 1 \quad 6]$

40. $A = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 3 & -2 \\ 6 & 13 & 8 & -17 \end{bmatrix}, \quad B = \begin{bmatrix} 1 & 6 \\ 4 & 2 \end{bmatrix}$

En los Ejercicios 41-46, use la capacidad matricial de una calculadora de gráficas para hallar AB, si es posible.

41. $A = \begin{bmatrix} 7 & 5 & -4 \\ -2 & 5 & 1 \\ 10 & -4 & -7 \end{bmatrix}, \quad B = \begin{bmatrix} 2 & -2 & 3 \\ 8 & 1 & 4 \\ -4 & 2 & -8 \end{bmatrix}$

42. $A = \begin{bmatrix} 11 & -12 & 4 \\ 14 & 10 & 12 \\ 6 & -2 & 9 \end{bmatrix}, \quad B = \begin{bmatrix} 12 & 10 \\ -5 & 12 \\ 15 & 16 \end{bmatrix}$

43. $A = \begin{bmatrix} -3 & 8 & -6 & 8 \\ -12 & 15 & 9 & 6 \\ 5 & -1 & 1 & 5 \end{bmatrix}, \quad B = \begin{bmatrix} 3 & 1 & 6 \\ 24 & 15 & 14 \\ 16 & 10 & 21 \\ 8 & -4 & 10 \end{bmatrix}$

44. $A = \begin{bmatrix} -2 & 4 & 8 \\ 21 & 5 & 6 \\ 13 & 2 & 6 \end{bmatrix}, \quad B = \begin{bmatrix} 2 & 0 \\ -7 & 15 \\ 32 & 14 \\ 0.5 & 1.6 \end{bmatrix}$

45. $A = \begin{bmatrix} 9 & 10 & -38 & 18 \\ 100 & -50 & 250 & 75 \end{bmatrix},$

$B = \begin{bmatrix} 52 & -85 & 27 & 45 \\ 40 & -35 & 60 & 82 \end{bmatrix}$

46. $A = \begin{bmatrix} 16 & -18 \\ -4 & 13 \\ -9 & 21 \end{bmatrix}, \quad B = \begin{bmatrix} -7 & 20 & -1 \\ 7 & 15 & 26 \end{bmatrix}$

En los Ejercicios 47-52, si es posible, encuentre (a) AB, (b) BA y (c) A^2. (*Nota:* $A^2 = AA$.)

47. $A = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 4 & 2 \end{bmatrix}, \quad B = \begin{bmatrix} 2 & -1 \\ -1 & 8 \end{bmatrix}$

48. $A = \begin{bmatrix} 6 & 3 \\ -2 & -4 \end{bmatrix}, \quad B = \begin{bmatrix} -2 & 0 \\ 2 & 4 \end{bmatrix}$

49. $A = \begin{bmatrix} 3 & -1 \\ 1 & 3 \end{bmatrix}, \quad B = \begin{bmatrix} 1 & -3 \\ 3 & 1 \end{bmatrix}$

50. $A = \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}, \quad B = \begin{bmatrix} 1 & 3 \\ -3 & 1 \end{bmatrix}$

51. $A = \begin{bmatrix} 7 \\ 8 \\ -1 \end{bmatrix}, \quad B = [1 \quad 1 \quad 2]$

52. $A = [3 \quad 2 \quad 1], \quad B = \begin{bmatrix} 2 \\ 3 \\ 0 \end{bmatrix}$

En los Ejercicios 53-56, evalúe la expresión. Use la capacidad matricial de una calculadora de gráficas para verificar su respuesta.

53. $\begin{bmatrix} 3 & 1 \\ 0 & -2 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ -2 & 2 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 2 & 4 \end{bmatrix}$

54. $-3\left(\begin{bmatrix} 6 & 5 & -1 \\ 1 & -2 & 0 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 0 & 3 \\ -1 & -3 \\ 4 & 1 \end{bmatrix}\right)$

55. $\begin{bmatrix} 0 & 2 & -2 \\ 4 & 1 & 2 \end{bmatrix}\left(\begin{bmatrix} 4 & 0 \\ 0 & -1 \\ -1 & 2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} -2 & 3 \\ -3 & 5 \\ 0 & -3 \end{bmatrix}\right)$

56. $\begin{bmatrix} 3 \\ -1 \\ 5 \\ 7 \end{bmatrix}([5 \quad -6] + [7 \quad -1] + [-8 \quad 9])$

En los Ejercicios 57-64, (a) escriba el sistema de ecuaciones lineales como una ecuación de matrices, $AX = B$, y (b) use eliminación de Gauss-Jordan en la matriz aumentada $[A \vdots B]$ para despejar la matriz X.

57. $\begin{cases} -x_1 + x_2 = 4 \\ -2x_1 + x_2 = 0 \end{cases}$

58. $\begin{cases} 2x_1 + 3x_2 = 5 \\ x_1 + 4x_2 = 10 \end{cases}$

59. $\begin{cases} -2x_1 - 3x_2 = -4 \\ 6x_1 + x_2 = -36 \end{cases}$

60. $\begin{cases} -4x_1 + 9x_2 = -13 \\ x_1 - 3x_2 = 12 \end{cases}$

61. $\begin{cases} x_1 - 2x_2 + 3x_3 = 9 \\ -x_1 + 3x_2 - x_3 = -6 \\ 2x_1 - 5x_2 + 5x_3 = 17 \end{cases}$

62. $\begin{cases} x_1 + x_2 - 3x_3 = -1 \\ -x_1 + 2x_2 = 1 \\ x_1 - x_2 + x_3 = 2 \end{cases}$

63. $\begin{cases} x_1 - 5x_2 + 2x_3 = -20 \\ -3x_1 + x_2 - x_3 = 8 \\ -2x_2 + 5x_3 = -16 \end{cases}$

64. $\begin{cases} x_1 - x_2 + 4x_3 = 17 \\ x_1 + 3x_2 = -11 \\ -6x_2 + 5x_3 = 40 \end{cases}$

65. MANUFACTURA Una compañía tiene tres fábricas, cada una de las cuales fabrica guitarras acústicas y eléctricas. El número de unidades de guitarras producidas en la fábrica j en un día está representado por a_{ij} en la matriz

$$A = \begin{bmatrix} 70 & 50 & 25 \\ 35 & 100 & 70 \end{bmatrix}.$$

Encuentre los niveles de producción si ésta se aumenta en 20%.

66. MANUFACTURA Una compañía tiene cuatro fábricas, cada una de las cuales produce vehículos de uso general y camionetas pequeñas. El número de unidades del vehículo i producido en la fábrica j en un día está representado por a_{ij} en la matriz

$$A = \begin{bmatrix} 100 & 90 & 70 & 30 \\ 40 & 20 & 60 & 60 \end{bmatrix}.$$

Encuentre los niveles de producción si ésta se aumenta en 10%.

67. AGRICULTURA Un productor produce dos cosechas, manzanas y duraznos. Cada una de ellas es enviada a tres mercados para su venta. Estos mercados son el del Agricultor, el de la Fruta y el de la Granja. El número de búshels de manzanas enviadas a los tres mercados son 125, 100 y 75, respectivamente. El número de búshels de duraznos enviados a los tres mercados son 100, 175 y 125, respectivamente. La utilidad por búshel de manzanas es \$3.50 y por búshel de duraznos \$6.00.

(a) Escriba una matriz A que represente el número de búshels de cada cosecha i que son enviados a cada mercado j. Diga lo que representa cada elemento a_{ij} de la matriz.

(b) Escriba una matriz B que represente la utilidad por búshel de cada fruta. Diga lo que representa cada elemento b_{ij} de la matriz.

(c) Encuentre el producto BA y diga lo que representa cada elemento de la matriz.

68. INGRESOS Un fabricante de productos electrónicos produce tres modelos de televisores de pantalla de cristal líquido, que son enviados a dos almacenes. El número de unidades del modelo i que son enviadas al almacén j están representados por a_{ij} en la matriz

$$A = \begin{bmatrix} 5000 & 4000 \\ 6000 & 10\,000 \\ 8000 & 5000 \end{bmatrix}.$$

Los precios por unidad están representados por la matriz

$B = [\$699.95 \quad \$899.95 \quad \$1099.95]$.

Calcule BA e interprete el resultado.

69. INVENTARIO Una compañía vende cinco modelos de computadoras por medio de tres mercados de venta al menudeo. Los inventarios están representados por S.

$$S = \begin{array}{c} \overbrace{}^{\text{Modelo}} \\ \begin{matrix} A & B & C & D & E \end{matrix} \\ \begin{bmatrix} 3 & 2 & 2 & 3 & 0 \\ 0 & 2 & 3 & 4 & 3 \\ 4 & 2 & 1 & 3 & 2 \end{bmatrix} \begin{matrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{matrix} \end{array} \} \text{Mercado}$$

Los precios al mayoreo y al menudeo están representados por T

$$T = \begin{array}{c} \overbrace{}^{\text{Precio}} \\ \begin{matrix} \text{Mayoreo} & \text{Menudeo} \end{matrix} \\ \begin{bmatrix} \$840 & \$1100 \\ \$1200 & \$1350 \\ \$1450 & \$1650 \\ \$2650 & \$3000 \\ \$3050 & \$3200 \end{bmatrix} \begin{matrix} A \\ B \\ C \\ D \\ E \end{matrix} \end{array} \} \text{Modelo}$$

Calcule ST e interprete el resultado.

70. PREFERENCIAS DE VOTO La matriz

$$P = \begin{array}{c} \\ \text{R} \\ \text{D} \\ \text{I} \end{array} \overset{\overset{\text{De}}{\overbrace{\hphantom{000}}}}{\begin{bmatrix} \text{R} & \text{D} & \text{I} \\ 0.6 & 0.1 & 0.1 \\ 0.2 & 0.7 & 0.1 \\ 0.2 & 0.2 & 0.8 \end{bmatrix}} \begin{array}{l} \\ \text{R} \\ \text{D} \\ \text{I} \end{array} \left.\vphantom{\begin{bmatrix}0\\0\\0\end{bmatrix}}\right\} \text{Hacia}$$

se denomina *matriz estocástica*. Cada entrada $p_{ij}\,(i \neq j)$ representa la proporción de la población de electores que cambia del partido i al partido j, y p_{ii} representa la proporción que sigue fiel al partido de una elección a otra. Calcule e interprete P^2.

71. PREFERENCIAS DE VOTO Use una calculadora de gráficas para hallar P^3, P^4, P^5, P^6, P^7 y P^8 para la matriz dada en el Ejercicio 70. ¿Puede usted detectar un patrón cuando P aumenta a potencias superiores?

72. NECESIDADES DE MANO DE OBRA/SUELDO Una compañía que fabrica botes tiene las siguientes necesidades de mano de obra y sueldos.

Mano de obra por bote

$$S = \begin{array}{c} \\ \text{Pequeño} \\ \text{Mediano} \\ \text{Grande} \end{array} \overset{\overset{\text{Departamento}}{\overbrace{\hphantom{0000}}}}{\begin{bmatrix} \text{Corte} & \text{Ensamble} & \text{Empaque} \\ 1.0\text{ h} & 0.5\text{ h} & 0.2\text{ h} \\ 1.6\text{ h} & 1.0\text{ h} & 0.2\text{ h} \\ 2.5\text{ h} & 2.0\text{ h} & 1.4\text{ h} \end{bmatrix}} \left.\vphantom{\begin{bmatrix}0\\0\\0\end{bmatrix}}\right\} \text{Tamaño de bote}$$

Sueldos por hora

$$T = \overset{\overset{\text{Planta}}{\overbrace{\hphantom{00}}}}{\begin{bmatrix} \text{A} & \text{B} \\ \$15 & \$13 \\ \$12 & \$11 \\ \$11 & \$10 \end{bmatrix}} \begin{array}{l} \text{Corte} \\ \text{Ensamble} \\ \text{Empaque} \end{array} \left.\vphantom{\begin{bmatrix}0\\0\\0\end{bmatrix}}\right\} \text{Departamento}$$

Calcule ST e interprete el resultado.

73. UTILIDADES En un mercado de lácteos, el número de galones de leche descremada, leche al 2% y leche entera vendido en el fin de semana está representado por A.

$$A = \overset{\overset{\text{Leche descremada}}{\quad}\quad\overset{\text{leche al 2\%}}{\quad}\quad\overset{\text{Leche entera}}{\quad}}{\begin{bmatrix} 40 & 64 & 52 \\ 60 & 82 & 76 \\ 76 & 96 & 84 \end{bmatrix}} \begin{array}{l} \text{Viernes} \\ \text{Sábado} \\ \text{Domingo} \end{array}$$

Los precios de venta (en dólares por galón) y las utilidades (en dólares por galón) para los tres tipos de leche vendidos por el mercado de lácteos están representados por B.

$$B = \overset{\overset{\text{Precio de venta}}{\quad}\quad\overset{\text{Utilidad}}{\quad}}{\begin{bmatrix} \$3.45 & \$1.20 \\ \$3.65 & \$1.30 \\ \$3.85 & \$1.45 \end{bmatrix}} \begin{array}{l} \text{Leche descremada} \\ \text{Leche al 2\%} \\ \text{Leche entera} \end{array}$$

(a) Calcule AB e interprete el resultado.

(b) Encuentre la utilidad total del mercado de lácteos por ventas de leche para el fin de semana.

74. UTILIDADES En una tienda de conveniencia (abierta todo el día), el número de galones de gasolina de 87 octanos, 89 octanos y 93 octanos vendido el fin de semana está representado por A.

$$A = \overset{\overset{\text{Octanos}}{\overbrace{\hphantom{0000}}}}{\begin{bmatrix} 87 & 89 & 93 \\ 580 & 840 & 320 \\ 560 & 420 & 160 \\ 860 & 1020 & 540 \end{bmatrix}} \begin{array}{l} \\ \text{Viernes} \\ \text{Sábado} \\ \text{Domingo} \end{array}$$

Los precios de venta (en dólares por galón) y las utilidades (en dólares por galón) para los tres grados de gasolina vendidos por la tienda de conveniencia están representados por B

$$B = \overset{\overset{\text{Precio de venta}}{\quad}\quad\overset{\text{Utilidad}}{\quad}}{\begin{bmatrix} \$2.00 & \$0.08 \\ \$2.10 & \$0.09 \\ \$2.20 & \$0.10 \end{bmatrix}} \begin{array}{l} 87 \\ 89 \\ 93 \end{array} \left.\vphantom{\begin{bmatrix}0\\0\\0\end{bmatrix}}\right\} \text{Octanos}$$

(a) Calcule AB e interprete el resultado.

(b) Encuentre la utilidad de la tienda de conveniencia por ventas de gasolina para el fin de semana.

75. EJERCICIO El número de calorías quemadas por personas de diferentes pesos corporales, que realizan diferentes tipos de ejercicios aeróbicos durante un periodo de 20 minutos, se muestra en la matriz A.

$$A = \overset{\overset{\text{Calorías quemadas}}{\overbrace{\hphantom{0000}}}}{\begin{bmatrix} \text{Persona de 120 lb} & \text{Persona de 150 lb} \\ 109 & 136 \\ 127 & 159 \\ 64 & 79 \end{bmatrix}} \begin{array}{l} \text{Ciclismo} \\ \text{Trotar} \\ \text{Caminar} \end{array}$$

(a) Una persona de 120 lb y otra de 150 lb corrieron en bicicleta durante 40 minutos, trotaron 10 minutos y caminaron 60 minutos. Organice en una matriz B el tiempo que pasaron ejercitándose.

(b) Calcule BA e interprete el resultado.

76. SERVICIOS DE SALUD Los planes de servicios de salud ofrecidos este año por una planta local de manufactura son como sigue. Para personas, el plan completo cuesta $694.32, el plan estándar de la HMO (Health Management Organization) cuesta $451.80 y el plan HMO Plus cuesta $489.48. Para familias, el plan completo cuesta $1725.36, el plan estándar de la HMO cuesta $1187.76 y el plan HMO Plus cuesta $1248.12. La planta espera que el costo de los planes cambie el año siguiente como sigue. Para personas, el costo para el plan completo, estándar HMO y HMO Plus serán de $683.91, $463.10 y $499.27, respectivamente. Para familias, el costo para el plan completo, HMO estándar y HMO Plus serán de $1699.48, $1217.45 y $1273.08, respectivamente.

(a) Organice la información usando dos matrices A y B, donde A represente el costo del plan de atención de salud para este año y B represente el costo del plan de atención de salud para el año siguiente. Exprese lo que representa cada entrada de cada matriz.

(b) Calcule $A - B$ e interprete el resultado.

(c) Los empleados reciben cheques de pago mensualmente, de los cuales están deducidos los costos del plan de atención de salud. Use las matrices del inciso (a) para escribir matrices que muestren cuánto se deducirá del cheque de empleados este año y el siguiente.

(d) Suponga en cambio que el costo de los planes de atención de salud aumentan 4% el año siguiente. Escriba una matriz que muestre los nuevos pagos mensuales.

EXPLORACIÓN

¿VERDADERO O FALSO? En los Ejercicios 77 y 78, determine si la proposición es verdadera o falsa. Justifique su respuesta.

77. Dos matrices se pueden sumar sólo si tienen el mismo orden.

78. La multiplicación de matrices es conmutativa.

PIÉNSELO En los Ejercicios 79-86, sean las matrices A, B, C y D de órdenes 2×3, 2×3, 3×2 y 2×2, respectivamente. Determine si las matrices son del orden apropiado para realizar la o las operaciones. Si es así, dé el orden de la respuesta.

79. $A + 2C$ **80.** $B - 3C$

81. AB **82.** BC

83. $BC - D$ **84.** $CB - D$

85. $D(A - 3B)$ **86.** $(BC - D)A$

87. Considere las matrices A, B y C siguientes. Realice las operaciones indicadas y compare los resultados.

$$A = \begin{bmatrix} 3 & -1 \\ 4 & 7 \end{bmatrix}, \quad B = \begin{bmatrix} -2 & 0 \\ 8 & 1 \end{bmatrix}, \quad C = \begin{bmatrix} 5 & 2 \\ 2 & -6 \end{bmatrix}$$

(a) Encuentre $A + B$ y $B + A$.

(b) Encuentre $A + B$ y sume C a la matriz resultante. Encuentre $B + C$ y sume A a la matriz resultante.

(c) Encuentre $2A$ y $2B$ y sume las dos matrices resultantes. Encuentre $A + B$ y multiplique la matriz resultante por 2.

88. Use las siguientes matrices para hallar AB, BA, $(AB)C$ y $A(BC)$. ¿Qué le dicen a usted sus resultados acerca de la multiplicación, propiedad conmutativa y propiedad asociativa de matrices?

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{bmatrix}, \quad B = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 2 & 3 \end{bmatrix}, \quad C = \begin{bmatrix} 3 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$

89. PIÉNSELO Si a, b y c son números reales tales que $c \neq 0$ y $ac = bc$, entonces $a = b$. No obstante, si A, B y C son matrices diferentes de cero tales que $AC = BC$, entonces A *no es necesariamente* igual a B. Ilustre esto usando las siguientes matrices.

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}, \quad B = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}, \quad C = \begin{bmatrix} 2 & 3 \\ 2 & 3 \end{bmatrix}$$

90. PIÉNSELO Si a y b son números reales tales que $ab = 0$, entonces $a = 0$ o $b = 0$. No obstante, si A y B son matrices tales que $AB = O$, *no es necesariamente* cierto que $A = O$ o que $B = O$. Ilustre esto usando las siguientes matrices.

$$A = \begin{bmatrix} 3 & 3 \\ 4 & 4 \end{bmatrix}, \quad B = \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 1 \end{bmatrix}$$

91. Sean A y B matrices diagonales desiguales del mismo orden. (Una **matriz diagonal** es una matriz cuadrada en la que cada entrada sobre la diagonal principal es cero.) Determine los productos AB para varios pares de estas matrices. Haga una conjetura acerca de una regla rápida para tales productos.

92. Sea $i = \sqrt{-1}$ y sea

$$A = \begin{bmatrix} i & 0 \\ 0 & i \end{bmatrix} \quad \text{y} \quad B = \begin{bmatrix} 0 & -i \\ i & 0 \end{bmatrix}.$$

(a) Encuentre A^2, A^3 y A^4. Identifique cualesquiera similitudes con i^2, i^3 e i^4.

(b) Encuentre e identifique B^2.

93. Encuentre dos matrices A y B tales que $AB = BA$.

94. TOQUE FINAL Sean las matrices A y B de órdenes 3×2 y 2×2, respectivamente. Conteste las siguientes preguntas y explique su razonamiento.

(a) ¿Es posible que $A = B$?

(b) ¿$A + B$ está definida?

(c) ¿AB está definida? Si es así, ¿es posible que $AB = BA$?

8.3 Inversa de una matriz cuadrada

Lo que debe aprender

- Verificar que dos matrices sean inversas entre sí.
- Usar eliminación de Gauss-Jordan para hallar las inversas de matrices.
- Usar una fórmula para hallar las inversas de matrices de 2×2.
- Usar matrices inversas para resolver sistemas de ecuaciones lineales.

Por qué debe aprenderlo

Se pueden usar matrices inversas para modelar y resolver problemas de la vida real. Por ejemplo, en el Ejercicio 75 de la página 607 se usa una matriz inversa para hallar un modelo cuadrático para las proyecciones de inscripciones para universidades públicas en Estados Unidos.

Alberto L. Pomares/istockphoto.com

Inversa de una matriz cuadrada

Esta sección desarrolla aún más el álgebra de matrices. Para empezar, considere la ecuación de números reales $ax = b$. Para despejar x de esta ecuación, multiplique cada lado (miembro) de la ecuación por a^{-1} (siempre que $a \neq 0$).

$$\begin{aligned} ax &= b \\ (a^{-1}a)x &= a^{-1}b \\ (1)x &= a^{-1}b \\ x &= a^{-1}b \end{aligned}$$

El número a^{-1} se llama *inverso multiplicativo* de a porque $a^{-1}a = 1$. La definición de la **inversa multiplicativa de una matriz** es similar.

Definición de la inversa de una matriz cuadrada

Sea A una matriz de $n \times n$ y sea I_n la matriz identidad de $n \times n$. Si existe una matriz A^{-1} tal que

$$AA^{-1} = I_n = A^{-1}A$$

entonces A^{-1} se denomina **inversa** de A. El símbolo A^{-1} se lee "A inversa".

Ejemplo 1 La inversa de una matriz

Demuestre que B es la inversa de A, donde

$$A = \begin{bmatrix} -1 & 2 \\ -1 & 1 \end{bmatrix} \quad \text{y} \quad B = \begin{bmatrix} 1 & -2 \\ 1 & -1 \end{bmatrix}.$$

Solución

Para demostrar que B es la inversa de A, demuestre que $AB = I = BA$, como sigue.

$$AB = \begin{bmatrix} -1 & 2 \\ -1 & 1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 1 & -2 \\ 1 & -1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -1+2 & 2-2 \\ -1+1 & 2-1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$BA = \begin{bmatrix} 1 & -2 \\ 1 & -1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} -1 & 2 \\ -1 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -1+2 & 2-2 \\ -1+1 & 2-1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Como se puede ver, $AB = I = BA$. Éste es un ejemplo de una matriz cuadrada que tiene una inversa. Observe que no todas las matrices cuadradas tienen inversas.

PUNTO *de repaso* Ahora trate de hacer el Ejercicio 5.

Recuerde que no siempre es cierto que $AB = BA$, incluso si ambos productos están definidos. No obstante, si A y B son ambas matrices cuadradas y $AB = I_n$, se puede demostrar que $BA = I_n$. Entonces, en el Ejemplo 1 sólo es necesario verificar que $AB = I_2$.

Hallar matrices inversas

Si una matriz A tiene una inversa, A se denomina **invertible** (o **no singular**); de otro modo, A se llama **singular**. Una matriz no cuadrada no puede tener una inversa. Para ver esto, observe que si A es de orden $m \times n$ y B es de orden $n \times m$ (donde $m \neq n$), los productos AB y BA son de diferentes órdenes y, por tanto, no pueden ser iguales entre sí. No todas las matrices cuadradas tienen inversas (vea la matriz al final de la página 602). No obstante, si una matriz tiene una inversa, esa inversa es única. El Ejemplo 2 muestra la forma de usar un sistema de ecuaciones para hallar la inversa de una matriz.

Ejemplo 2 Hallar la inversa de una matriz

Encuentre la inversa de

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 4 \\ -1 & -3 \end{bmatrix}.$$

Solución

Para hallar la inversa de A, trate de despejar X de la ecuación de matrices $AX = I$.

$$\begin{matrix} A & & X & & I \end{matrix}$$
$$\begin{bmatrix} 1 & 4 \\ -1 & -3 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} x_{11} & x_{12} \\ x_{21} & x_{22} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$
$$\begin{bmatrix} x_{11} + 4x_{21} & x_{12} + 4x_{22} \\ -x_{11} - 3x_{21} & -x_{12} - 3x_{22} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Igualando elementos correspondientes se obtienen dos sistemas de ecuaciones lineales.

$$\begin{cases} x_{11} + 4x_{21} = 1 \\ -x_{11} - 3x_{21} = 0 \end{cases}$$ Sistema lineal con dos variables, x_{11} y x_{21}.

$$\begin{cases} x_{12} + 4x_{22} = 0 \\ -x_{12} - 3x_{22} = 1 \end{cases}$$ Sistema lineal con dos variables, x_{12} y x_{22}.

Resuelva el primer sistema usando operaciones elementales de renglón para determinar que $x_{11} = -3$ y $x_{21} = 1$. Del segundo sistema se puede determinar que $x_{12} = -4$ y $x_{22} = 1$. Por tanto, la inversa de A es

$$X = A^{-1} = \begin{bmatrix} -3 & -4 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}.$$

Se puede usar multiplicación de matrices para comprobar este resultado.

Comprobación

$$AA^{-1} = \begin{bmatrix} 1 & 4 \\ -1 & -3 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} -3 & -4 \\ 1 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \checkmark$$

$$A^{-1}A = \begin{bmatrix} -3 & -4 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 1 & 4 \\ -1 & -3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \checkmark$$

PUNTO *de repaso* Ahora trate de hacer el Ejercicio 15.

En el Ejemplo 2, observe que los dos sistemas de ecuaciones lineales tienen *la misma matriz A de coeficientes*. En lugar de resolver los dos sistemas representados por

$$\left[\begin{array}{cc|c} 1 & 4 & 1 \\ -1 & -3 & 0 \end{array}\right]$$

y

$$\left[\begin{array}{cc|c} 1 & 4 & 0 \\ -1 & -3 & 1 \end{array}\right]$$

por separado, se pueden resolver *simultáneamente* al *unir* la matriz identidad a la matriz de coeficientes para obtener

$$\begin{array}{cc} A & \quad I \\ \left[\begin{array}{cc|cc} 1 & 4 & 1 & 0 \\ -1 & -3 & 0 & 1 \end{array}\right]. \end{array}$$

Esta matriz "doblemente aumentada" puede representarse como $[A \vdots I]$. Al aplicar eliminación de Gauss-Jordan a esta matriz, se pueden resolver *ambos* sistemas con un solo proceso de eliminación.

$$\left[\begin{array}{cc|cc} 1 & 4 & 1 & 0 \\ -1 & -3 & 0 & 1 \end{array}\right]$$

$$R_1 + R_2 \rightarrow \left[\begin{array}{cc|cc} 1 & 4 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 1 \end{array}\right]$$

$$-4R_2 + R_1 \rightarrow \left[\begin{array}{cc|cc} 1 & 0 & -3 & -4 \\ 0 & 1 & 1 & 1 \end{array}\right]$$

Por tanto, de la matriz "doblemente aumentada" $[A \vdots I]$, se puede obtener la matriz $[I \vdots A^{-1}]$.

$$\begin{array}{cc} A & \quad I \\ \left[\begin{array}{cc|cc} 1 & 4 & 1 & 0 \\ -1 & -3 & 0 & 1 \end{array}\right] \end{array} \Rightarrow \begin{array}{cc} I & \quad A^{-1} \\ \left[\begin{array}{cc|cc} 1 & 0 & -3 & -4 \\ 0 & 1 & 1 & 1 \end{array}\right] \end{array}$$

Este procedimiento (o algoritmo) funciona para cualquier matriz cuadrada que tenga inversa.

TECNOLOGÍA

Casi todas las calculadoras de gráficas pueden hallar la inversa de una matriz cuadrada. Para hacerlo, puede ser necesario usar la tecla inversa $\boxed{x^{-1}}$. Consulte las secuencias específicas de tecleo en la guía del usuario de su calculadora.

Hallar una matriz inversa

Sea A una matriz cuadrada de orden n.

1. Escriba la matriz de $n \times 2n$ formada por la matriz dada A a la izquierda y la matriz identidad I de $n \times n$ a la derecha para obtener $[A \vdots I]$.
2. Si es posible, ahora reduzca A a I usando operaciones elementales de renglón en *toda* la matriz $[A \vdots I]$. El resultado será la matriz $[I \vdots A^{-1}]$. Si esto no es posible, A no es invertible.
3. Verifique su trabajo al multiplicar para ver que $AA^{-1} = I = A^{-1}A$.

Ejemplo 3 Hallar la inversa de una matriz

Encuentre la inversa de $A = \begin{bmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & -1 \\ 6 & -2 & -3 \end{bmatrix}$.

Solución

Empiece por unir la matriz identidad a A para formar la matriz

$$[A \vdots I] = \left[\begin{array}{ccc:ccc} 1 & -1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & -1 & 0 & 1 & 0 \\ 6 & -2 & -3 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right].$$

Use operaciones elementales de renglón para obtener la forma $[I \vdots A^{-1}]$, como sigue.

$$\begin{array}{r} \\ -R_1 + R_2 \rightarrow \\ -6R_1 + R_3 \rightarrow \end{array} \left[\begin{array}{ccc:ccc} 1 & -1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & 4 & -3 & -6 & 0 & 1 \end{array}\right]$$

$$\begin{array}{r} R_2 + R_1 \rightarrow \\ \\ -4R_2 + R_3 \rightarrow \end{array} \left[\begin{array}{ccc:ccc} 1 & 0 & -1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -2 & -4 & 1 \end{array}\right]$$

$$\begin{array}{r} R_3 + R_1 \rightarrow \\ R_3 + R_2 \rightarrow \\ \\ \end{array} \left[\begin{array}{ccc:ccc} 1 & 0 & 0 & -2 & -3 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & -3 & -3 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & -2 & -4 & 1 \end{array}\right] = [I \vdots A^{-1}]$$

Por tanto, la matriz A es invertible y su inversa es

$$A^{-1} = \begin{bmatrix} -2 & -3 & 1 \\ -3 & -3 & 1 \\ -2 & -4 & 1 \end{bmatrix}.$$

Confirme este resultado al multiplicar A por A^{-1} para obtener I, como sigue.

Comprobación

$$AA^{-1} = \begin{bmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & -1 \\ 6 & -2 & -3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -2 & -3 & 1 \\ -3 & -3 & 1 \\ -2 & -4 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} = I$$

ATENCIÓN

Asegúrese de verificar su solución porque es fácil cometer errores algebraicos cuando se usan operaciones elementales de renglón

PUNTO *de repaso* Ahora trate de hacer el Ejercicio 19.

El proceso que se muestra en el Ejemplo 3 se aplica a cualquier matriz A de $n \times n$. Cuando use este algoritmo, si la matriz A no se reduce a la matriz identidad, entonces A no tiene inversa. Por ejemplo, la siguiente matriz no tiene inversa.

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 3 & -1 & 2 \\ -2 & 3 & -2 \end{bmatrix}$$

Para confirmar que la matriz A no tiene inversa, junte la matriz identidad a A para formar $[A \vdots I]$ y realice operaciones elementales de renglón en la matriz. Después de hacerlo, verá que es imposible obtener la matriz identidad I a la izquierda. Por tanto, A no es invertible.

La inversa de una matriz de 2 × 2

Usar eliminación de Gauss-Jordan para hallar la inversa de una matriz funciona bien (incluso como técnica de computación) para matrices de orden 3 × 3 o mayores. Para matrices de 2 × 2, no obstante, muchas personas prefieren usar una fórmula para la inversa en lugar de eliminación de Gauss-Jordan. Esta sencilla fórmula, que funciona *sólo* para matrices de 2 × 2, se explica como sigue. Si A es una matriz de 2 × 2 dada por

$$A = \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}$$

entonces A es invertible si y sólo si $ad - bc \neq 0$. Además, si $ad - bc \neq 0$, la inversa está dada por

$$A^{-1} = \frac{1}{ad - bc}\begin{bmatrix} d & -b \\ -c & a \end{bmatrix}.$$

Fórmula para la inversa de la matriz A

El denominador $ad - bc$ se llama **determinante** de la matriz A de 2 × 2. Estudiaremos determinantes en la siguiente sección.

Ejemplo 4 Hallar la inversa de una matriz de 2 × 2

Si es posible, encuentre la inversa de cada matriz.

a. $A = \begin{bmatrix} 3 & -1 \\ -2 & 2 \end{bmatrix}$

b. $B = \begin{bmatrix} 3 & -1 \\ -6 & 2 \end{bmatrix}$

Solución

a. Para la matriz A, aplique la fórmula para la inversa de una matriz de 2 × 2 para obtener

$$\begin{aligned} ad - bc &= (3)(2) - (-1)(-2) \\ &= 4. \end{aligned}$$

Como esta cantidad no es cero, la inversa se forma al intercambiar las entradas de la diagonal principal, cambiar los signos de las otras dos entradas y multiplicar por el escalar $\frac{1}{4}$, como sigue.

$$A^{-1} = \frac{1}{4}\begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 2 & 3 \end{bmatrix}$$

Sustituir por a, b, c, d y el determinante.

$$= \begin{bmatrix} \frac{1}{2} & \frac{1}{4} \\ \frac{1}{2} & \frac{3}{4} \end{bmatrix}$$

Multiplicar por el escalar $\frac{1}{4}$.

b. Para la matriz B, tenemos

$$\begin{aligned} ad - bc &= (3)(2) - (-1)(-6) \\ &= 0 \end{aligned}$$

lo cual significa que B no es invertible.

PUNTO *de repaso* Ahora trate de hacer el Ejercicio 35.

Sistemas de ecuaciones lineales

Ya sabemos que un sistema de ecuaciones lineales puede tener exactamente una solución, un número infinito de soluciones o puede no tener solución. Si la matriz A de coeficientes de un sistema *cuadrado* (un sistema que tiene el mismo número de ecuaciones que de variables) es invertible, el sistema tiene una solución única, que se define como sigue.

Un sistema de ecuaciones con una solución única

Si A es una matriz invertible, el sistema de ecuaciones lineales representado por $AX = B$ tiene una solución única dada por

$$X = A^{-1}B.$$

TECNOLOGÍA

Para resolver un sistema de ecuaciones con calculadora de gráficas, ingrese las matrices A y B en el editor de matrices. En seguida, usando la tecla inversa, despeje X.

A $[x^{-1}]$ B [ENTER]

La pantalla mostrará la solución, la matriz X.

Ejemplo 5 Resolver un sistema mediante una matriz inversa

Usted va a invertir \$10 000 en bonos de clasificación AAA, bonos AA y bonos B y desea un rendimiento anual de \$730. El rendimiento promedio es 6% para los bonos AAA, 7.5% para los AA y 9.5% para los B. Usted invertirá dos veces en bonos AAA que en bonos B. Su inversión puede estar representada como

$$\begin{cases} x + y + z = 10\,000 \\ 0.06x + 0.075y + 0.095z = 730 \\ x - 2z = 0 \end{cases}$$

donde x, y y z representan las cantidades invertidas en bonos AAA, AA y B, respectivamente. Use una matriz inversa para resolver el sistema.

Solución

Empiece por escribir el sistema en la forma de matriz $AX = B$.

$$\begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0.06 & 0.075 & 0.095 \\ 1 & 0 & -2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 10\,000 \\ 730 \\ 0 \end{bmatrix}$$

A continuación, use eliminación de Gauss-Jordan para hallar A^{-1}.

$$A^{-1} = \begin{bmatrix} 15 & -200 & -2 \\ -21.5 & 300 & 3.5 \\ 7.5 & -100 & -1.5 \end{bmatrix}$$

Finalmente, multiplique B por A^{-1} a la izquierda para obtener la solución.

$$X = A^{-1}B$$

$$= \begin{bmatrix} 15 & -200 & -2 \\ -21.5 & 300 & 3.5 \\ 7.5 & -100 & -1.5 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 10\,000 \\ 730 \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 4000 \\ 4000 \\ 2000 \end{bmatrix}$$

La solución del sistema es $x = 4000$, $y = 4000$ y $z = 2000$. Por tanto, invertirá \$4000 en bonos AAA, \$4000 en bonos AA y \$2000 en bonos B.

PUNTO *de repaso* Ahora trate de hacer el Ejercicio 65.

8.3 EJERCICIOS

En www.CalcChat.com vea las soluciones a los ejercicios impares.

VOCABULARIO: Llene los espacios en blanco.

1. En una matriz _____, el número de renglones es igual al número de columnas.
2. Si existe una matriz A^{-1} de $n \times n$ tal que $AA^{-1} = I_n = A^{-1}A$, entonces A^{-1} se denomina _____ de A.
3. Si una matriz A tiene inversa, se llama invertible o _____; si no tiene inversa, se llama _____.
4. Si A es una matriz invertible, el sistema de ecuaciones lineales representado por $AX = B$ tiene una solución única dada por $X =$ _____.

HABILIDADES Y APLICACIONES

En los Ejercicios 5-12, demuestre que B es la inversa de A.

5. $A = \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 5 & 3 \end{bmatrix}, B = \begin{bmatrix} 3 & -1 \\ -5 & 2 \end{bmatrix}$

6. $A = \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 2 \end{bmatrix}, B = \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}$

7. $A = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{bmatrix}, B = \begin{bmatrix} -2 & 1 \\ \frac{3}{2} & -\frac{1}{2} \end{bmatrix}$

8. $A = \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ 2 & 3 \end{bmatrix}, B = \begin{bmatrix} \frac{3}{5} & \frac{1}{5} \\ -\frac{2}{5} & \frac{1}{5} \end{bmatrix}$

9. $A = \begin{bmatrix} 2 & -17 & 11 \\ -1 & 11 & -7 \\ 0 & 3 & -2 \end{bmatrix}, B = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 2 & 4 & -3 \\ 3 & 6 & -5 \end{bmatrix}$

10. $A = \begin{bmatrix} -4 & 1 & 5 \\ -1 & 2 & 4 \\ 0 & -1 & -1 \end{bmatrix}, B = \begin{bmatrix} -\frac{1}{2} & 1 & \frac{3}{2} \\ \frac{1}{4} & -1 & -\frac{11}{4} \\ -\frac{1}{4} & 1 & \frac{7}{4} \end{bmatrix}$

11. $A = \begin{bmatrix} -2 & 2 & 3 \\ 1 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 4 \end{bmatrix}, B = \frac{1}{3}\begin{bmatrix} -4 & -5 & 3 \\ -4 & -8 & 3 \\ 1 & 2 & 0 \end{bmatrix}$

12. $A = \begin{bmatrix} -1 & 1 & 0 & -1 \\ 1 & -1 & 1 & 0 \\ -1 & 1 & 2 & 0 \\ 0 & -1 & 1 & 1 \end{bmatrix}$,

$B = \frac{1}{3}\begin{bmatrix} -3 & 1 & 1 & -3 \\ -3 & -1 & 2 & -3 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ -3 & -2 & 1 & 0 \end{bmatrix}$

En los Ejercicios 13-24, encuentre la inversa de la matriz (si existe).

13. $\begin{bmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 3 \end{bmatrix}$

14. $\begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 7 \end{bmatrix}$

15. $\begin{bmatrix} 1 & -2 \\ 2 & -3 \end{bmatrix}$

16. $\begin{bmatrix} -7 & 33 \\ 4 & -19 \end{bmatrix}$

17. $\begin{bmatrix} 3 & 1 \\ 4 & 2 \end{bmatrix}$

18. $\begin{bmatrix} 4 & -1 \\ -3 & 1 \end{bmatrix}$

19. $\begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 3 & 5 & 4 \\ 3 & 6 & 5 \end{bmatrix}$

20. $\begin{bmatrix} 1 & 2 & 2 \\ 3 & 7 & 9 \\ -1 & -4 & -7 \end{bmatrix}$

21. $\begin{bmatrix} -5 & 0 & 0 \\ 2 & 0 & 0 \\ -1 & 5 & 7 \end{bmatrix}$

22. $\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 3 & 0 & 0 \\ 2 & 5 & 5 \end{bmatrix}$

23. $\begin{bmatrix} -8 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 4 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -5 \end{bmatrix}$

24. $\begin{bmatrix} 1 & 3 & -2 & 0 \\ 0 & 2 & 4 & 6 \\ 0 & 0 & -2 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 5 \end{bmatrix}$

En los Ejercicios 25-34, use la capacidad matricial de una calculadora de gráficas para hallar la inversa de la matriz (si existe).

25. $\begin{bmatrix} 1 & 2 & -1 \\ 3 & 7 & -10 \\ -5 & -7 & -15 \end{bmatrix}$

26. $\begin{bmatrix} 10 & 5 & -7 \\ -5 & 1 & 4 \\ 3 & 2 & -2 \end{bmatrix}$

27. $\begin{bmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 3 & 1 & 0 \\ -2 & 0 & 3 \end{bmatrix}$

28. $\begin{bmatrix} 3 & 2 & 2 \\ 2 & 2 & 2 \\ -4 & 4 & 3 \end{bmatrix}$

29. $\begin{bmatrix} -\frac{1}{2} & \frac{3}{4} & \frac{1}{4} \\ 1 & 0 & -\frac{3}{2} \\ 0 & -1 & \frac{1}{2} \end{bmatrix}$

30. $\begin{bmatrix} -\frac{5}{6} & \frac{1}{3} & \frac{11}{6} \\ 0 & \frac{2}{3} & 2 \\ 1 & -\frac{1}{2} & -\frac{5}{2} \end{bmatrix}$

31. $\begin{bmatrix} 0.1 & 0.2 & 0.3 \\ -0.3 & 0.2 & 0.2 \\ 0.5 & 0.4 & 0.4 \end{bmatrix}$

32. $\begin{bmatrix} 0.6 & 0 & -0.3 \\ 0.7 & -1 & 0.2 \\ 1 & 0 & -0.9 \end{bmatrix}$

33. $\begin{bmatrix} -1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & 0 & -1 \\ 2 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 1 \end{bmatrix}$

34. $\begin{bmatrix} 1 & -2 & -1 & -2 \\ 3 & -5 & -2 & -3 \\ 2 & -5 & -2 & -5 \\ -1 & 4 & 4 & 11 \end{bmatrix}$

En los Ejercicios 35-40, use la fórmula de la página 603 para hallar la inversa de la matriz de 2×2 (si existe).

35. $\begin{bmatrix} 2 & 3 \\ -1 & 5 \end{bmatrix}$

36. $\begin{bmatrix} 1 & -2 \\ -3 & 2 \end{bmatrix}$

37. $\begin{bmatrix} -4 & -6 \\ 2 & 3 \end{bmatrix}$

38. $\begin{bmatrix} -12 & 3 \\ 5 & -2 \end{bmatrix}$

39. $\begin{bmatrix} \frac{7}{2} & -\frac{3}{4} \\ \frac{1}{5} & \frac{4}{5} \end{bmatrix}$ **40.** $\begin{bmatrix} -\frac{1}{4} & \frac{9}{4} \\ \frac{5}{3} & \frac{8}{9} \end{bmatrix}$

En los Ejercicios 41-44, use la matriz inversa hallada en el Ejercicio 15 para resolver el sistema de ecuaciones lineales.

41. $\begin{cases} x - 2y = 5 \\ 2x - 3y = 10 \end{cases}$ **42.** $\begin{cases} x - 2y = 0 \\ 2x - 3y = 3 \end{cases}$

43. $\begin{cases} x - 2y = 4 \\ 2x - 3y = 2 \end{cases}$ **44.** $\begin{cases} x - 2y = 1 \\ 2x - 3y = -2 \end{cases}$

En los Ejercicios 45 y 46, use la matriz inversa hallada en el Ejercicio 19 para resolver el sistema de ecuaciones lineales.

45. $\begin{cases} x + y + z = 0 \\ 3x + 5y + 4z = 5 \\ 3x + 6y + 5z = 2 \end{cases}$ **46.** $\begin{cases} x + y + z = -1 \\ 3x + 5y + 4z = 2 \\ 3x + 6y + 5z = 0 \end{cases}$

En los Ejercicios 47 y 48, use la matriz inversa hallada en el Ejercicio 34 para resolver el sistema de ecuaciones lineales.

47. $\begin{cases} x_1 - 2x_2 - x_3 - 2x_4 = 0 \\ 3x_1 - 5x_2 - 2x_3 - 3x_4 = 1 \\ 2x_1 - 5x_2 - 2x_3 - 5x_4 = -1 \\ -x_1 + 4x_2 + 4x_3 + 11x_4 = 2 \end{cases}$

48. $\begin{cases} x_1 - 2x_2 - x_3 - 2x_4 = 1 \\ 3x_1 - 5x_2 - 2x_3 - 3x_4 = -2 \\ 2x_1 - 5x_2 - 2x_3 - 5x_4 = 0 \\ -x_1 + 4x_2 + 4x_3 + 11x_4 = -3 \end{cases}$

En los Ejercicios 49 y 50, use una calculadora de gráficas para resolver el sistema de ecuaciones lineales usando una matriz inversa.

49. $\begin{cases} x_1 + 2x_2 - x_3 + 3x_4 - x_5 = -3 \\ x_1 - 3x_2 + x_3 + 2x_4 - x_5 = -3 \\ 2x_1 + x_2 + x_3 - 3x_4 + x_5 = 6 \\ x_1 - x_2 + 2x_3 + x_4 - x_5 = 2 \\ 2x_1 + x_2 - x_3 + 2x_4 + x_5 = -3 \end{cases}$

50. $\begin{cases} x_1 + x_2 - x_3 + 3x_4 - x_5 = 3 \\ 2x_1 + x_2 + x_3 + x_4 + x_5 = 4 \\ x_1 + x_2 - x_3 + 2x_4 - x_5 = 3 \\ 2x_1 + x_2 + 4x_3 + x_4 - x_5 = -1 \\ 3x_1 + x_2 + x_3 - 2x_4 + x_5 = 5 \end{cases}$

En los Ejercicios 51-58, use una matriz inversa para resolver (si es posible) el sistema de ecuaciones lineales.

51. $\begin{cases} 3x + 4y = -2 \\ 5x + 3y = 4 \end{cases}$ **52.** $\begin{cases} 18x + 12y = 13 \\ 30x + 24y = 23 \end{cases}$

53. $\begin{cases} -0.4x + 0.8y = 1.6 \\ 2x - 4y = 5 \end{cases}$ **54.** $\begin{cases} 0.2x - 0.6y = 2.4 \\ -x + 1.4y = -8.8 \end{cases}$

55. $\begin{cases} -\frac{1}{4}x + \frac{3}{8}y = -2 \\ \frac{3}{2}x + \frac{3}{4}y = -12 \end{cases}$ **56.** $\begin{cases} \frac{5}{6}x - y = -20 \\ \frac{4}{3}x - \frac{7}{2}y = -51 \end{cases}$

57. $\begin{cases} 4x - y + z = -5 \\ 2x + 2y + 3z = 10 \\ 5x - 2y + 6z = 1 \end{cases}$ **58.** $\begin{cases} 4x - 2y + 3z = -2 \\ 2x + 2y + 5z = 16 \\ 8x - 5y - 2z = 4 \end{cases}$

En los Ejercicios 59-62, use la capacidad matricial de una calculadora de gráficas para resolver (si es posible) el sistema de ecuaciones lineales.

59. $\begin{cases} 5x - 3y + 2z = 2 \\ 2x + 2y - 3z = 3 \\ x - 7y + 8z = -4 \end{cases}$ **60.** $\begin{cases} 2x + 3y + 5z = 4 \\ 3x + 5y + 9z = 7 \\ 5x + 9y + 17z = 13 \end{cases}$

61. $\begin{cases} 3x - 2y + z = -29 \\ -4x + y - 3z = 37 \\ x - 5y + z = -24 \end{cases}$

62. $\begin{cases} -8x + 7y - 10z = -151 \\ 12x + 3y - 5z = 86 \\ 15x - 9y + 2z = 187 \end{cases}$

En los Ejercicios 63 y 64, demuestre que la matriz es invertible y encuentre su inversa.

63. $A = \begin{bmatrix} \operatorname{sen}\theta & \cos\theta \\ -\cos\theta & \operatorname{sen}\theta \end{bmatrix}$ **64.** $A = \begin{bmatrix} \sec\theta & \tan\theta \\ \tan\theta & \sec\theta \end{bmatrix}$

PORTAFOLIO DE INVERSIONES En los Ejercicios 65-68, considere una persona que invierte en bonos de clasificación AAA, bonos A y bonos B. Los rendimientos promedio son 6.5% en bonos AAA, 7% en bonos A y 9% en bonos B. La persona invierte el doble en bonos B que en bonos A. Con x, y y z represente las cantidades invertidas en bonos AAA, A y B, respectivamente.

$$\begin{cases} x + y + z = \textbf{(inversión total)} \\ 0.065x + 0.07y + 0.09z = \textbf{(rendimiento anual)} \\ 2y - z = 0 \end{cases}$$

Use la inversa de la matriz de coeficientes de este sistema para hallar la cantidad invertida en cada tipo de bono.

	Inversión total	*Rendimiento anual*
65.	\$10 000	\$705
66.	\$10 000	\$760
67.	\$12 000	\$835
68.	\$500 000	\$38 000

PRODUCCIÓN En los Ejercicios 69-72, un pequeño negocio doméstico elabora molletes, huesos y galletas para perros. Además de otros ingredientes, cada mollete requiere 2 unidades de carne, 3 de pollo y 2 de hígado. Cada hueso necesita 1 unidad de carne, 1 de pollo y 1 de hígado. Cada galleta necesita 2 unidades de carne, 1 de pollo y 1.5 de hígado. Encuentre el número de molletes, huesos y galletas que la compañía puede elaborar con las cantidades de ingredientes dadas.

69. 700 unidades de carne
500 unidades de pollo
600 unidades de hígado

70. 525 unidades de carne
480 unidades de pollo
500 unidades de hígado

71. 800 unidades de carne
750 unidades de pollo
725 unidades de hígado

72. 1000 unidades de carne
950 unidades de pollo
900 unidades de hígado

73. CAFÉ Un fabricante de café vende un paquete de 10 libras que contiene tres sabores en $26. El café de vainilla francesa cuesta $2 por libra, el café de sabor a avellana cuesta $2.50 por libra y el café con sabor a chocolate suizo cuesta $3.00 por libra. El paquete contiene la misma cantidad de avellana que de chocolate suizo. Con f represente el número de libras de vainilla francesa, con h el de libras de avellana y con s el de libras de chocolate suizo.

(a) Escriba un sistema de ecuaciones lineales que represente la situación.

(b) Escriba una ecuación de matrices que corresponda al sistema de usted.

(c) Resuelva su sistema de ecuaciones lineales usando una matriz inversa. Encuentre el número de libras de cada sabor de café en el paquete de 10 libras.

74. FLORES Una florista está creando 10 centros para las mesas en una recepción de boda. Las rosas cuestan $2.50 cada una, las lilas $4 cada una y los lirios $2 cada uno. El cliente tiene un presupuesto de $300 asignado para los centros y desea que cada uno de éstos contenga 12 flores, con el doble de rosas que de lirios y lilas combinados.

(a) Escriba un sistema de ecuaciones lineales que represente la situación.

(b) Escriba una ecuación de matrices que corresponda al sistema de usted.

(c) Resuelva su sistema de ecuaciones lineales usando una matriz inversa. Encuentre el número de flores de cada tipo que la florista pueda usar para crear los 10 centros.

75. INSCRIPCIÓN La tabla siguiente muestra la proyección de inscripciones (en millones) para universidades públicas en Estados Unidos para los años 2010 a 2012. (Fuente: U.S. National Center for Education Statistics, *Digest of Education Statistics*)

Año	Proyecciones de inscripción
2010	13.89
2011	14.04
2012	14.20

(a) Los datos pueden ser modelados por la función cuadrática $y = at^2 + bt + c$. Genere un sistema de ecuaciones lineales para los datos. Con t represente el año, con $t = 10$ correspondiente a 2010.

(b) Use la capacidad matricial de una calculadora de gráficas para hallar la matriz inversa para resolver el sistema del inciso (a) y encuentre la parábola de regresión de mínimos cuadrados $y = at^2 + bt + c$.

(c) Use una calculadora de gráficas para graficar la parábola con los datos.

(d) ¿Piensa usted que el modelo es un medio razonable de pronóstico de inscripciones para el futuro? Explique.

EXPLORACIÓN

76. TOQUE FINAL Si A es una matriz de 2×2 $A = \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}$, entonces A es invertible si y sólo si $ad - bc \neq 0$. Si $ad - bc \neq 0$, verifique que la inversa sea

$$A^{-1} = \frac{1}{ad - bc}\begin{bmatrix} d & -b \\ -c & a \end{bmatrix}.$$

¿VERDADERO O FALSO? En los Ejercicios 77 y 78, determine si la proposición es verdadera o falsa. Justifique su respuesta.

77. La multiplicación de una matriz invertible y su inversa es conmutativa.

78. Si se multiplican dos matrices cuadradas y se obtiene la matriz identidad, se puede suponer que las matrices son inversas entre sí.

79. ESCRITURA Explique cómo determinar si existe la inversa de una matriz de 2×2. Si es así, explique cómo hallarla.

80. ESCRITURA Explique verbalmente cómo escribir un sistema de tres ecuaciones lineales con tres variables como una ecuación de matrices, $AX = B$, así como la forma de resolver el sistema usando una matriz inversa.

81. Considere matrices de la forma

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & a_{22} & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & a_{33} & 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \cdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \cdots & a_{nn} \end{bmatrix}.$$

(a) Escriba una matriz de 2×2 y otra de 3×3 en la forma de A. Encuentre la inversa de cada una.

(b) Use el resultado del inciso (a) para hacer una conjetura acerca de las inversas de matrices en la forma de A.

PROYECTO: VER TELEVISIÓN Para resolver una aplicación extendida analizando el promedio de tiempo empleado en ver televisión en Estados Unidos, visite el sitio web de este texto en *academic.cengage.com.* (Fuente: The Nielsen Company)

8.4 Determinante de una matriz cuadrada

Lo que debe aprender

- Encontrar los determinantes de matrices de 2×2.
- Hallar menores y cofactores de matrices cuadradas.
- Hallar los determinantes de matrices cuadradas.

Por qué debe aprenderlo

Es frecuente el uso de determinantes en otras ramas de las matemáticas. Por ejemplo, los Ejercicios 85-90 de la página 615 muestran algunos tipos de determinantes útiles cuando se hacen cambios de variable en cálculo.

Determinante de una matriz de 2×2

Toda matriz *cuadrada* puede estar asociada con un número real llamado su **determinante**. Los determinantes tienen numerosos usos, y varios de ellos se estudiarán en esta sección y en la siguiente. Históricamente, el uso de determinantes surgió de patrones especiales de números que se presentan cuando se resuelven sistemas de ecuaciones lineales. Por ejemplo, el sistema

$$\begin{cases} a_1x + b_1y = c_1 \\ a_2x + b_2y = c_2 \end{cases}$$

tiene una solución

$$x = \frac{c_1b_2 - c_2b_1}{a_1b_2 - a_2b_1} \quad \text{y} \quad y = \frac{a_1c_2 - a_2c_1}{a_1b_2 - a_2b_1}$$

siempre que $a_1b_2 - a_2b_1 \neq 0$. Nótese que los denominadores de las dos fracciones son los mismos. Este denominador se llama *determinante* de la matriz de coeficientes del sistema.

Matriz de coeficientes *Determinante*

$$A = \begin{bmatrix} a_1 & b_1 \\ a_2 & b_2 \end{bmatrix} \qquad \det(A) = a_1b_2 - a_2b_1$$

El determinante de la matriz A también puede denotarse con unas barras verticales a ambos lados de la matriz, como se indica en la siguiente definición.

Definición del determinante de una matriz de 2×2

El determinante de la matriz

$$A = \begin{bmatrix} a_1 & b_1 \\ a_2 & b_2 \end{bmatrix}$$

está dado por

$$\det(A) = |A| = \begin{vmatrix} a_1 & b_1 \\ a_2 & b_2 \end{vmatrix} = a_1b_2 - a_2b_1.$$

En este texto, $\det(A)$ y $|A|$ se usan indistintamente para representar el determinante de A. Aunque las barras verticales también se pueden usar para denotar el valor absoluto de un número, el contexto mostrará cuál uso se pretende.

En el siguiente diagrama se muestra un método conveniente para recordar la fórmula para el determinante de una matriz de 2×2.

$$\det(A) = \begin{vmatrix} a_1 & b_1 \\ a_2 & b_2 \end{vmatrix} = a_1b_2 - a_2b_1$$

Nótese que el determinante es la diferencia de los productos de las dos diagonales de la matriz.

Ejemplo 1 El determinante de una matriz de 2×2

Encuentre el determinante de cada matriz.

a. $A = \begin{bmatrix} 2 & -3 \\ 1 & 2 \end{bmatrix}$

b. $B = \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 4 & 2 \end{bmatrix}$

c. $C = \begin{bmatrix} 0 & \frac{3}{2} \\ 2 & 4 \end{bmatrix}$

Solución

a. $\det(A) = \begin{vmatrix} 2 & -3 \\ 1 & 2 \end{vmatrix}$

$= 2(2) - 1(-3)$

$= 4 + 3 = 7$

b. $\det(B) = \begin{vmatrix} 2 & 1 \\ 4 & 2 \end{vmatrix}$

$= 2(2) - 4(1)$

$= 4 - 4 = 0$

c. $\det(C) = \begin{vmatrix} 0 & \frac{3}{2} \\ 2 & 4 \end{vmatrix}$

$= 0(4) - 2\left(\frac{3}{2}\right)$

$= 0 - 3 = -3$

PUNTO *de repaso* Ahora trate de hacer el Ejercicio 9.

Nótese en el Ejemplo 1 que el determinante de una matriz puede ser positivo, cero o negativo.

El determinante de una matriz de orden 1×1 se define simplemente como el elemento de la matriz. Por ejemplo, si $A = [-2]$, entonces $\det(A) = -2$.

TECNOLOGÍA

Casi todas las calculadoras de gráficas pueden evaluar el determinante de una matriz. Por ejemplo, se puede evaluar el determinante de

$$A = \begin{bmatrix} 2 & -3 \\ 1 & 2 \end{bmatrix}$$

al ingresar la matriz como $[A]$ y luego escoger el comando *determinant*. El resultado debe ser 7, como en el Ejemplo 1(a). Trate de evaluar los determinantes de otras matrices. Consulte las secuencias de tecleo específicas en la guía del usuario de su calculadora de gráficas.

Menores y cofactores

Para definir el determinante de una matriz cuadrada de orden 3×3 o superior es conveniente introducir los conceptos de menores y cofactores.

Patrón de signos para cofactores

$$\begin{bmatrix} + & - & + \\ - & + & - \\ + & - & + \end{bmatrix}$$

matriz de 3×3

$$\begin{bmatrix} + & - & + & - \\ - & + & - & + \\ + & - & + & - \\ - & + & - & + \end{bmatrix}$$

matriz de 4×4

$$\begin{bmatrix} + & - & + & - & + & \cdots \\ - & + & - & + & - & \cdots \\ + & - & + & - & + & \cdots \\ - & + & - & + & - & \cdots \\ + & - & + & - & + & \cdots \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \end{bmatrix}$$

matriz de $n \times n$

Menores y cofactores de una matriz cuadrada

Si A es una matriz cuadrada, el **menor** M_{ij} del elemento a_{ij} es el determinante de la matriz obtenido al eliminar el i-ésimo renglón y la j-ésima columna de A. El cofactor C_{ij} del elemento a_{ij} es

$$C_{ij} = (-1)^{i+j} M_{ij}.$$

En el patrón de signos para cofactores que se ve a la izquierda, observe que las posiciones *impares* (donde $i + j$ es impar) tienen signos negativos y las posiciones pares (donde $i + j$ es par) tienen signos positivos.

Ejemplo 2 Hallar los menores y cofactores de una matriz

Encuentre todos los menores y cofactores de

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 2 & 1 \\ 3 & -1 & 2 \\ 4 & 0 & 1 \end{bmatrix}.$$

Solución

Para hallar el menor M_{11}, elimine el primer renglón y la primera columna de A y evalúe el determinante de la matriz resultante.

$$\begin{bmatrix} 0 & 2 & 1 \\ 3 & -1 & 2 \\ 4 & 0 & 1 \end{bmatrix}, \quad M_{11} = \begin{vmatrix} -1 & 2 \\ 0 & 1 \end{vmatrix} = -1(1) - 0(2) = -1$$

Del mismo modo, para hallar M_{12}, elimine el primer renglón y la segunda columna.

$$\begin{bmatrix} 0 & 2 & 1 \\ 3 & -1 & 2 \\ 4 & 0 & 1 \end{bmatrix}, \quad M_{12} = \begin{vmatrix} 3 & 2 \\ 4 & 1 \end{vmatrix} = 3(1) - 4(2) = -5$$

Continuando en esta forma, se obtienen los menores.

$$M_{11} = -1 \qquad M_{12} = -5 \qquad M_{13} = 4$$
$$M_{21} = 2 \qquad M_{22} = -4 \qquad M_{23} = -8$$
$$M_{31} = 5 \qquad M_{32} = -3 \qquad M_{33} = -6$$

A continuación, para hallar los cofactores, combine estos menores con el patrón de tablero de signos de una matriz de 3×3 que se muestra arriba a la izquierda.

$$C_{11} = -1 \qquad C_{12} = 5 \qquad C_{13} = 4$$
$$C_{21} = -2 \qquad C_{22} = -4 \qquad C_{23} = 8$$
$$C_{31} = 5 \qquad C_{32} = 3 \qquad C_{33} = -6$$

PUNTO *de repaso* Ahora trate de hacer el Ejercicio 29.

El determinante de una matriz cuadrada

La definición siguiente se denomina *inductiva* porque usa determinantes de matrices de orden $n - 1$ para definir los determinantes de matrices de orden n.

Determinante de una matriz cuadrada

Si A es una matriz cuadrada (de orden 2×2 o mayor), el determinante de A es la suma de los elementos en cualquier renglón (o columna) de A multiplicada por sus respectivos cofactores. Por ejemplo, expandiendo a lo largo del primer renglón obtenemos

$$|A| = a_{11}C_{11} + a_{12}C_{12} + \cdots + a_{1n}C_{1n}.$$

La aplicación de esta definición para hallar un determinante se llama **expansión por cofactores.**

Trate de verificar que para una matriz 2×2

$$A = \begin{bmatrix} a_1 & b_1 \\ a_2 & b_2 \end{bmatrix}$$

esta definición del determinante da $|A| = a_1b_2 - a_2b_1$, como se definió previamente.

Ejemplo 3 El determinante de una matriz de orden 3×3

Encuentre el determinante de

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 2 & 1 \\ 3 & -1 & 2 \\ 4 & 0 & 1 \end{bmatrix}.$$

Solución

Observe que ésta es la misma matriz del Ejemplo 2. Ahí encontramos que los cofactores de los elementos del primer renglón eran

$$C_{11} = -1, \quad C_{12} = 5 \quad \text{y} \quad C_{13} = 4.$$

Por tanto, por la definición de un determinante, tenemos

$$\begin{aligned} |A| &= a_{11}C_{11} + a_{12}C_{12} + a_{13}C_{13} && \text{Expansión del primer renglónn} \\ &= 0(-1) + 2(5) + 1(4) \\ &= 14. \end{aligned}$$

PUNTO *de repaso* Ahora trate de hacer el Ejercicio 39.

En el Ejemplo 3, el determinante se encontró al expandir por los cofactores del primer renglón. Podría haberse usado cualquier renglón o columna. Por ejemplo, podríamos haber expandido a lo largo del segundo renglón para obtener

$$\begin{aligned} |A| &= a_{21}C_{21} + a_{22}C_{22} + a_{23}C_{23} && \text{Expansión del segundo renglón} \\ &= 3(-2) + (-1)(-4) + 2(8) \\ &= 14. \end{aligned}$$

Al expandir por cofactores, no es necesario hallar cofactores de elementos cero, porque cero por su cofactor es cero.

$$a_{ij}C_{ij} = (0)C_{ij} = 0$$

Entonces, el renglón (o columna) que contenga más ceros es por lo general la mejor opción para expansión por cofactores. Esto se demuestra en el siguiente ejemplo.

Ejemplo 4 Determinante de una matriz de orden 4 × 4

Encuentre el determinante de

$$A = \begin{bmatrix} 1 & -2 & 3 & 0 \\ -1 & 1 & 0 & 2 \\ 0 & 2 & 0 & 3 \\ 3 & 4 & 0 & 2 \end{bmatrix}.$$

Solución

Después de inspeccionar esta matriz, se puede ver que tres de los elementos de la tercera columna son ceros. Por tanto, se puede eliminar parte del trabajo en la expansión si se usa la tercera columna.

$$|A| = 3(C_{13}) + 0(C_{23}) + 0(C_{33}) + 0(C_{43})$$

Como C_{23}, C_{33} y C_{43} tienen coeficientes cero, sólo es necesario hallar el cofactor C_{13}. Para hacer esto, elimine el primer renglón y la tercera columna de A y evalúe el determinante de la matriz resultante.

$$C_{13} = (-1)^{1+3}\begin{vmatrix} -1 & 1 & 2 \\ 0 & 2 & 3 \\ 3 & 4 & 2 \end{vmatrix}$$ Eliminar el primer renglón y la tercera columna.

$$= \begin{vmatrix} -1 & 1 & 2 \\ 0 & 2 & 3 \\ 3 & 4 & 2 \end{vmatrix}$$ Simplificar.

La expansión por cofactores en el segundo renglón produce

$$C_{13} = 0(-1)^3\begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 4 & 2 \end{vmatrix} + 2(-1)^4\begin{vmatrix} -1 & 2 \\ 3 & 2 \end{vmatrix} + 3(-1)^5\begin{vmatrix} -1 & 1 \\ 3 & 4 \end{vmatrix}$$

$$= 0 + 2(1)(-8) + 3(-1)(-7)$$

$$= 5.$$

Por tanto, se obtiene

$$|A| = 3C_{13}$$

$$= 3(5)$$

$$= 15.$$

PUNTO *de repaso* Ahora trate de hacer el Ejercicio 49.

Trate de usar una calculadora de gráficas para confirmar el resultado del Ejemplo 4.

8.4 EJERCICIOS

En www.CalcChat.com vea las soluciones a los ejercicios impares.

VOCABULARIO: Llene los espacios en blanco.

1. $\det(A)$ y $|A|$ representan el _____ de la matriz A.
2. El _____ M_{ij} del elemento a_{ij} es el determinante de la matriz obtenida al eliminar el i-ésimo renglón y la j-ésima columna de la matriz cuadrada A.
3. El _____ C_{ij} del elemento a_{ij} de la matriz cuadrada A está dado por $(-1)^{i+j}M_{ij}$.
4. El método para hallar el determinante de una matriz de orden 2×2 o mayor se llama _____ por _____.

HABILIDADES Y APLICACIONES

En los Ejercicios 5-20, encuentre el determinante de la matriz.

5. $[4]$
6. $[-10]$
7. $\begin{bmatrix} 8 & 4 \\ 2 & 3 \end{bmatrix}$
8. $\begin{bmatrix} -9 & 0 \\ 6 & 2 \end{bmatrix}$
9. $\begin{bmatrix} 6 & 2 \\ -5 & 3 \end{bmatrix}$
10. $\begin{bmatrix} 3 & -3 \\ 4 & -8 \end{bmatrix}$
11. $\begin{bmatrix} -7 & 0 \\ 3 & 0 \end{bmatrix}$
12. $\begin{bmatrix} 4 & -3 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$
13. $\begin{bmatrix} 2 & 6 \\ 0 & 3 \end{bmatrix}$
14. $\begin{bmatrix} 2 & -3 \\ -6 & 9 \end{bmatrix}$
15. $\begin{bmatrix} -3 & -2 \\ -6 & -1 \end{bmatrix}$
16. $\begin{bmatrix} 4 & 7 \\ -2 & 5 \end{bmatrix}$
17. $\begin{bmatrix} -7 & 6 \\ \frac{1}{2} & 3 \end{bmatrix}$
18. $\begin{bmatrix} 0 & 6 \\ -3 & 2 \end{bmatrix}$
19. $\begin{bmatrix} -\frac{1}{2} & \frac{1}{3} \\ -6 & \frac{1}{3} \end{bmatrix}$
20. $\begin{bmatrix} \frac{2}{3} & \frac{4}{3} \\ -1 & -\frac{1}{3} \end{bmatrix}$

En los Ejercicios 21-24, use la capacidad matricial de una calculadora de gráficas para hallar el determinante de la matriz.

21. $\begin{bmatrix} 0.3 & 0.2 & 0.2 \\ 0.2 & 0.2 & 0.2 \\ -0.4 & 0.4 & 0.3 \end{bmatrix}$
22. $\begin{bmatrix} 0.1 & 0.2 & 0.3 \\ -0.3 & 0.2 & 0.2 \\ 0.5 & 0.4 & 0.4 \end{bmatrix}$
23. $\begin{bmatrix} 0.9 & 0.7 & 0 \\ -0.1 & 0.3 & 1.3 \\ -2.2 & 4.2 & 6.1 \end{bmatrix}$
24. $\begin{bmatrix} 0.1 & 0.1 & -4.3 \\ 7.5 & 6.2 & 0.7 \\ 0.3 & 0.6 & -1.2 \end{bmatrix}$

En los Ejercicios 25-32, encuentre todos los (a) menores y (b) cofactores de la matriz.

25. $\begin{bmatrix} 4 & 5 \\ 3 & -6 \end{bmatrix}$
26. $\begin{bmatrix} 0 & 10 \\ 3 & -4 \end{bmatrix}$
27. $\begin{bmatrix} 3 & 1 \\ -2 & -4 \end{bmatrix}$
28. $\begin{bmatrix} -6 & 5 \\ 7 & -2 \end{bmatrix}$
29. $\begin{bmatrix} 4 & 0 & 2 \\ -3 & 2 & 1 \\ 1 & -1 & 1 \end{bmatrix}$
30. $\begin{bmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 3 & 2 & 5 \\ 4 & -6 & 4 \end{bmatrix}$
31. $\begin{bmatrix} -4 & 6 & 3 \\ 7 & -2 & 8 \\ 1 & 0 & -5 \end{bmatrix}$
32. $\begin{bmatrix} -2 & 9 & 4 \\ 7 & -6 & 0 \\ 6 & 7 & -6 \end{bmatrix}$

En los Ejercicios 33-38, encuentre el determinante de la matriz por el método de expansión por factores. Expanda usando el renglón o columna indicados.

33. $\begin{bmatrix} -3 & 2 & 1 \\ 4 & 5 & 6 \\ 2 & -3 & 1 \end{bmatrix}$
(a) Renglón 1
(b) Columna 2

34. $\begin{bmatrix} -3 & 4 & 2 \\ 6 & 3 & 1 \\ 4 & -7 & -8 \end{bmatrix}$
(a) Renglón 2
(b) Columna 3

35. $\begin{bmatrix} 5 & 0 & -3 \\ 0 & 12 & 4 \\ 1 & 6 & 3 \end{bmatrix}$
(a) Renglón 2
(b) Columna 2

36. $\begin{bmatrix} 10 & -5 & 5 \\ 30 & 0 & 10 \\ 0 & 10 & 1 \end{bmatrix}$
(a) Renglón 3
(b) Columna 1

37. $\begin{bmatrix} 6 & 0 & -3 & 5 \\ 4 & 13 & 6 & -8 \\ -1 & 0 & 7 & 4 \\ 8 & 6 & 0 & 2 \end{bmatrix}$
(a) Renglón 2
(b) Columna 2

38. $\begin{bmatrix} 10 & 8 & 3 & -7 \\ 4 & 0 & 5 & -6 \\ 0 & 3 & 2 & 7 \\ 1 & 0 & -3 & 2 \end{bmatrix}$
(a) Renglón 3
(b) Columna 1

En los Ejercicios 39-54, encuentre el determinante de la matriz. Expanda por cofactores en el renglón o columna que parezca facilitar más los cálculos.

39. $\begin{bmatrix} 2 & -1 & 0 \\ 4 & 2 & 1 \\ 4 & 2 & 1 \end{bmatrix}$
40. $\begin{bmatrix} -2 & 2 & 3 \\ 1 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 4 \end{bmatrix}$
41. $\begin{bmatrix} 6 & 3 & -7 \\ 0 & 0 & 0 \\ 4 & -6 & 3 \end{bmatrix}$
42. $\begin{bmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 3 & 1 & 0 \\ -2 & 0 & 3 \end{bmatrix}$
43. $\begin{bmatrix} -1 & 8 & -3 \\ 0 & 3 & -6 \\ 0 & 0 & 3 \end{bmatrix}$
44. $\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -1 & -1 & 0 \\ 4 & 11 & 5 \end{bmatrix}$

45. $\begin{bmatrix} 1 & 4 & -2 \\ 3 & 2 & 0 \\ -1 & 4 & 3 \end{bmatrix}$

46. $\begin{bmatrix} 2 & -1 & 3 \\ 1 & 4 & 4 \\ 1 & 0 & 2 \end{bmatrix}$

47. $\begin{bmatrix} 2 & 4 & 6 \\ 0 & 3 & 1 \\ 0 & 0 & -5 \end{bmatrix}$

48. $\begin{bmatrix} -3 & 0 & 0 \\ 7 & 11 & 0 \\ 1 & 2 & 2 \end{bmatrix}$

49. $\begin{bmatrix} 2 & 6 & 6 & 2 \\ 2 & 7 & 3 & 6 \\ 1 & 5 & 0 & 1 \\ 3 & 7 & 0 & 7 \end{bmatrix}$

50. $\begin{bmatrix} 3 & 6 & -5 & 4 \\ -2 & 0 & 6 & 0 \\ 1 & 1 & 2 & 2 \\ 0 & 3 & -1 & -1 \end{bmatrix}$

51. $\begin{bmatrix} 5 & 3 & 0 & 6 \\ 4 & 6 & 4 & 12 \\ 0 & 2 & -3 & 4 \\ 0 & 1 & -2 & 2 \end{bmatrix}$

52. $\begin{bmatrix} 1 & 4 & 3 & 2 \\ -5 & 6 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 3 & -2 & 1 & 5 \end{bmatrix}$

53. $\begin{bmatrix} 3 & 2 & 4 & -1 & 5 \\ -2 & 0 & 1 & 3 & 2 \\ 1 & 0 & 0 & 4 & 0 \\ 6 & 0 & 2 & -1 & 0 \\ 3 & 0 & 5 & 1 & 0 \end{bmatrix}$

54. $\begin{bmatrix} 5 & 2 & 0 & 0 & -2 \\ 0 & 1 & 4 & 3 & 2 \\ 0 & 0 & 2 & 6 & 3 \\ 0 & 0 & 3 & 4 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 2 \end{bmatrix}$

En los Ejercicios 55-62, use la capacidad matricial de una calculadora de gráficas para evaluar el determinante.

55. $\begin{vmatrix} 3 & 8 & -7 \\ 0 & -5 & 4 \\ 8 & 1 & 6 \end{vmatrix}$

56. $\begin{vmatrix} 5 & -8 & 0 \\ 9 & 7 & 4 \\ -8 & 7 & 1 \end{vmatrix}$

57. $\begin{vmatrix} 7 & 0 & -14 \\ -2 & 5 & 4 \\ -6 & 2 & 12 \end{vmatrix}$

58. $\begin{vmatrix} 3 & 0 & 0 \\ -2 & 5 & 0 \\ 12 & 5 & 7 \end{vmatrix}$

59. $\begin{vmatrix} 1 & -1 & 8 & 4 \\ 2 & 6 & 0 & -4 \\ 2 & 0 & 2 & 6 \\ 0 & 2 & 8 & 0 \end{vmatrix}$

60. $\begin{vmatrix} 0 & -3 & 8 & 2 \\ 8 & 1 & -1 & 6 \\ -4 & 6 & 0 & 9 \\ -7 & 0 & 0 & 14 \end{vmatrix}$

61. $\begin{vmatrix} 3 & -2 & 4 & 3 & 1 \\ -1 & 0 & 2 & 1 & 0 \\ 5 & -1 & 0 & 3 & 2 \\ 4 & 7 & -8 & 0 & 0 \\ 1 & 2 & 3 & 0 & 2 \end{vmatrix}$

62. $\begin{vmatrix} -2 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -4 \end{vmatrix}$

En los Ejercicios 63-70, encuentre (a) $|A|$, (b) $|B|$, (c) AB y (d) $|AB|$.

63. $A = \begin{bmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 3 \end{bmatrix}, \quad B = \begin{bmatrix} 2 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix}$

64. $A = \begin{bmatrix} -2 & 1 \\ 4 & -2 \end{bmatrix}, \quad B = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 0 & -1 \end{bmatrix}$

65. $A = \begin{bmatrix} 4 & 0 \\ 3 & -2 \end{bmatrix}, \quad B = \begin{bmatrix} -1 & 1 \\ -2 & 2 \end{bmatrix}$

66. $A = \begin{bmatrix} 5 & 4 \\ 3 & -1 \end{bmatrix}, \quad B = \begin{bmatrix} 0 & 6 \\ 1 & -2 \end{bmatrix}$

67. $A = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 2 \\ -3 & -2 & 1 \\ 0 & 4 & 1 \end{bmatrix}, \quad B = \begin{bmatrix} 3 & -2 & 0 \\ 1 & -1 & 2 \\ 3 & 1 & 1 \end{bmatrix}$

68. $A = \begin{bmatrix} 3 & 2 & 0 \\ -1 & -3 & 4 \\ -2 & 0 & 1 \end{bmatrix}, \quad B = \begin{bmatrix} -3 & 0 & 1 \\ 0 & 2 & -1 \\ -2 & -1 & 1 \end{bmatrix}$

69. $A = \begin{bmatrix} -1 & 2 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}, \quad B = \begin{bmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{bmatrix}$

70. $A = \begin{bmatrix} 2 & 0 & 1 \\ 1 & -1 & 2 \\ 3 & 1 & 0 \end{bmatrix}, \quad B = \begin{bmatrix} 2 & -1 & 4 \\ 0 & 1 & 3 \\ 3 & -2 & 1 \end{bmatrix}$

En los Ejercicios 71-76, evalúe el o los determinantes para verificar la ecuación.

71. $\begin{vmatrix} w & x \\ y & z \end{vmatrix} = -\begin{vmatrix} y & z \\ w & x \end{vmatrix}$

72. $\begin{vmatrix} w & cx \\ y & cz \end{vmatrix} = c\begin{vmatrix} w & x \\ y & z \end{vmatrix}$

73. $\begin{vmatrix} w & x \\ y & z \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} w & x + cw \\ y & z + cy \end{vmatrix}$

74. $\begin{vmatrix} w & x \\ cw & cx \end{vmatrix} = 0$

75. $\begin{vmatrix} 1 & x & x^2 \\ 1 & y & y^2 \\ 1 & z & z^2 \end{vmatrix} = (y - x)(z - x)(z - y)$

76. $\begin{vmatrix} a + b & a & a \\ a & a + b & a \\ a & a & a + b \end{vmatrix} = b^2(3a + b)$

En los Ejercicios 77-84, despeje x.

77. $\begin{vmatrix} x & 2 \\ 1 & x \end{vmatrix} = 2$

78. $\begin{vmatrix} x & 4 \\ -1 & x \end{vmatrix} = 20$

79. $\begin{vmatrix} x & 1 \\ 2 & x - 2 \end{vmatrix} = -1$

80. $\begin{vmatrix} x + 1 & 2 \\ -1 & x \end{vmatrix} = 4$

81. $\begin{vmatrix} x - 1 & 2 \\ 3 & x - 2 \end{vmatrix} = 0$

82. $\begin{vmatrix} x - 2 & -1 \\ -3 & x \end{vmatrix} = 0$

83. $\begin{vmatrix} x + 3 & 2 \\ 1 & x + 2 \end{vmatrix} = 0$

84. $\begin{vmatrix} x + 4 & -2 \\ 7 & x - 5 \end{vmatrix} = 0$

En los Ejercicios 85-90, evalúe el determinante en el que los elementos son funciones. Los determinantes de este tipo se presentan cuando se hacen cambios de variable en cálculo.

85. $\begin{vmatrix} 4u & -1 \\ -1 & 2v \end{vmatrix}$

86. $\begin{vmatrix} 3x^2 & -3y^2 \\ 1 & 1 \end{vmatrix}$

87. $\begin{vmatrix} e^{2x} & e^{3x} \\ 2e^{2x} & 3e^{3x} \end{vmatrix}$

88. $\begin{vmatrix} e^{-x} & xe^{-x} \\ -e^{-x} & (1-x)e^{-x} \end{vmatrix}$

89. $\begin{vmatrix} x & \ln x \\ 1 & 1/x \end{vmatrix}$

90. $\begin{vmatrix} x & x \ln x \\ 1 & 1 + \ln x \end{vmatrix}$

EXPLORACIÓN

¿VERDADERO O FALSO? En los Ejercicios 91 y 92, determine si la proposición es verdadera o falsa. Justifique su respuesta.

91. Si una matriz cuadrada tiene un renglón entero de ceros, el determinante siempre será cero.

92. Si dos columnas de una matriz cuadrada son iguales, el determinante de la matriz será cero.

93. Encuentre las matrices cuadradas A y B para demostrar que $|A + B| \neq |A| + |B|$.

94. Considere matrices cuadradas en las que los elementos son enteros consecutivos. Un ejemplo de tal matriz es

$$\begin{bmatrix} 4 & 5 & 6 \\ 7 & 8 & 9 \\ 10 & 11 & 12 \end{bmatrix}.$$

(a) Use una calculadora de gráficas para evaluar los determinantes de cuatro matrices de este tipo. Haga una conjetura con base en los resultados.

(b) Verifique su conjetura.

95. ESCRITURA Escriba un breve párrafo que explique la diferencia entre una matriz cuadrada y su determinante.

96. PIÉNSELO Si A es una matriz de orden 3×3 tal que $|A| = 5$, ¿es posible hallar $|2A|$? Explique.

PROPIEDADES DE DETERMINANTES En los Ejercicios 97-99 se da una propiedad de determinantes (A y B son matrices cuadradas). Diga si la propiedad ha sido aplicada a los determinantes y use una calculadora de gráficas para verificar los resultados.

97. Si B se obtiene de A intercambiando dos renglones de A o dos columnas de A, entonces $|B| = -|A|$.

(a) $\begin{vmatrix} 1 & 3 & 4 \\ -7 & 2 & -5 \\ 6 & 1 & 2 \end{vmatrix} = -\begin{vmatrix} 1 & 4 & 3 \\ -7 & -5 & 2 \\ 6 & 2 & 1 \end{vmatrix}$

(b) $\begin{vmatrix} 1 & 3 & 4 \\ -2 & 2 & 0 \\ 1 & 6 & 2 \end{vmatrix} = -\begin{vmatrix} 1 & 6 & 2 \\ -2 & 2 & 0 \\ 1 & 3 & 4 \end{vmatrix}$

98. Si B se obtiene de A sumando un múltiplo de un renglón de A a otro renglón de A o sumando un múltiplo de una columna de A a otra columna de A, entonces $|B| = |A|$.

(a) $\begin{vmatrix} 1 & -3 \\ 5 & 2 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & -3 \\ 0 & 17 \end{vmatrix}$

(b) $\begin{vmatrix} 5 & 4 & 2 \\ 2 & -3 & 4 \\ 7 & 6 & 3 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 10 & -6 \\ 2 & -3 & 4 \\ 7 & 6 & 3 \end{vmatrix}$

99. Si B se obtiene de A multiplicando un renglón por una constante c diferente de cero o multiplicando una columna por una constante c diferente de cero, entonces $|B| = c|A|$.

(a) $\begin{vmatrix} 5 & 10 \\ 2 & -3 \end{vmatrix} = 5\begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 2 & -3 \end{vmatrix}$

(b) $\begin{vmatrix} 1 & 8 & -3 \\ 3 & -12 & 6 \\ 7 & 4 & 9 \end{vmatrix} = 12\begin{vmatrix} 1 & 2 & -1 \\ 3 & -3 & 2 \\ 7 & 1 & 3 \end{vmatrix}$

100. TOQUE FINAL Si A es una matriz de $n \times n$, explique cómo hallar lo siguiente.

(a) El menor M_{ij} del elemento a_{ij}

(b) El cofactor c_{ij} del elemento a_{ij}

(c) El determinante de A

En los Ejercicios 101-104, evalúe el determinante.

101. $\begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 5 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{vmatrix}$

102. $\begin{vmatrix} -2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 3 \end{vmatrix}$

103. $\begin{vmatrix} -1 & 2 & -5 \\ 0 & 3 & 4 \\ 0 & 0 & 3 \end{vmatrix}$

104. $\begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -4 & -1 & 0 \\ 5 & 1 & 5 \end{vmatrix}$

105. CONJETURA Una **matriz triangular** es una matriz cuadrada con todos los elementos cero ya sea abajo o arriba de su diagonal principal. Una matriz cuadrada es **triangular superior** si tiene todos los elementos cero debajo de su diagonal principal y es **triangular inferior** si tiene todos los elementos cero arriba de su diagonal principal. Una matriz que es triangular superior e inferior recibe el nombre de diagonal. Esto es, una **matriz diagonal** es una matriz cuadrada en la que todos sus elementos arriba y debajo de la diagonal principal son cero. En los Ejercicios 101-104, usted evaluó los determinantes de matrices triangulares. Haga una conjetura basada en sus resultados.

106. Use la capacidad matricial de una calculadora de gráficas para hallar el determinante de A. ¿Qué mensaje aparece en la pantalla? ¿Por qué la calculadora de gráficas presenta este mensaje?

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ -1 & 0 \\ 3 & -2 \end{bmatrix}$$

8.5 Aplicaciones de matrices y determinantes

Lo que debe aprender

- Usar la regla de Cramer para resolver sistemas de ecuaciones lineales.
- Usar determinantes para hallar áreas de triángulos.
- Usar un determinante para probar puntos colineales y hallar la ecuación de una recta que pase por dos puntos.
- Usar matrices para codificar y decodificar mensajes.

Por qué debe aprenderlo

Se puede usar la regla de Cramer para resolver problemas de la vida real. Por ejemplo, en el Ejercicio 69 de la página 627 la regla de Cramer se usa para hallar un modelo cuadrático para el consumo per cápita de agua embotellada en Estados Unidos.

MAFORD/istockphoto.com

Regla de Cramer

Hasta este punto, hemos estudiado tres métodos para resolver un sistema de ecuaciones lineales: sustitución, eliminación con ecuaciones y eliminación con matrices. En esta sección estudiaremos un método más, la **regla de Cramer**, llamada así en honor a Gabriel Cramer (1704-1752). Esta regla usa determinantes para escribir la solución de un sistema de ecuaciones lineales. Para ver cómo funciona la regla de Cramer, estudiemos de nuevo la solución descrita al principio de la sección 8.4. Ahí, se indicó que el sistema

$$\begin{cases} a_1x + b_1y = c_1 \\ a_2x + b_2y = c_2 \end{cases}$$

tiene una solución

$$x = \frac{c_1b_2 - c_2b_1}{a_1b_2 - a_2b_1} \text{ y } y = \frac{a_1c_2 - a_2c_1}{a_1b_2 - a_2b_1}$$

siempre que $a_1b_2 - a_2b_1 \neq 0$. Cada numerador y denominador en esta solución puede ser expresado como determinante, como sigue.

$$x = \frac{c_1b_2 - c_2b_1}{a_1b_2 - a_2b_1} = \frac{\begin{vmatrix} c_1 & b_1 \\ c_2 & b_2 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} a_1 & b_1 \\ a_2 & b_2 \end{vmatrix}} \qquad y = \frac{a_1c_2 - a_2c_1}{a_1b_2 - a_2b_1} = \frac{\begin{vmatrix} a_1 & c_1 \\ a_2 & c_2 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} a_1 & b_1 \\ a_2 & b_2 \end{vmatrix}}$$

Respecto al sistema original, el denominador para x y y es simplemente el determinante de la matriz de *coeficientes* del sistema. Este determinante está denotado por D. Los numeradores para x y y están denotados por D_x y D_y, respectivamente. Se forman usando la columna de constantes como sustituciones para los coeficientes de x y y, como sigue.

Matriz de coeficientes	D	D_x	D_y
$\begin{bmatrix} a_1 & b_1 \\ a_2 & b_2 \end{bmatrix}$	$\begin{vmatrix} a_1 & b_1 \\ a_2 & b_2 \end{vmatrix}$	$\begin{vmatrix} c_1 & b_1 \\ c_2 & b_2 \end{vmatrix}$	$\begin{vmatrix} a_1 & c_1 \\ a_2 & c_2 \end{vmatrix}$

Por ejemplo, dado el sistema

$$\begin{cases} 2x - 5y = 3 \\ -4x + 3y = 8 \end{cases}$$

la matriz de coeficientes, D, D_x y D_y son como sigue.

Matriz de coeficientes	D	D_x	D_y
$\begin{bmatrix} 2 & -5 \\ -4 & 3 \end{bmatrix}$	$\begin{vmatrix} 2 & -5 \\ -4 & 3 \end{vmatrix}$	$\begin{vmatrix} 3 & -5 \\ 8 & 3 \end{vmatrix}$	$\begin{vmatrix} 2 & 3 \\ -4 & 8 \end{vmatrix}$

La regla de Cramer se generaliza fácilmente a sistemas de n ecuaciones con n variables. El valor de cada variable está dado como el cociente entre dos determinantes. El denominador es el determinante de la matriz de coeficientes, y el numerador es el determinante de la matriz formada al sustituir la columna correspondiente a la variable (que se despeja) con la columna que representa las constantes. Por ejemplo, se ilustra la solución para x_3 en el siguiente sistema.

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + a_{13}x_3 = b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + a_{23}x_3 = b_2 \\ a_{31}x_1 + a_{32}x_2 + a_{33}x_3 = b_3 \end{cases} \qquad x_3 = \frac{|A_3|}{|A|} = \frac{\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & b_1 \\ a_{21} & a_{22} & b_2 \\ a_{31} & a_{32} & b_3 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}}$$

Regla de Cramer

Si un sistema de n ecuaciones lineales tiene una matriz A de coeficientes con un determinante $|A|$ diferente de cero, la solución del sistema es

$$x_1 = \frac{|A_1|}{|A|}, \quad x_2 = \frac{|A_2|}{|A|}, \quad \ldots, \quad x_n = \frac{|A_n|}{|A|}$$

donde la i-ésima columna de A_i es la columna de constantes del sistema de ecuaciones. Si el determinante de la matriz de coeficientes es cero, el sistema no tiene solución o tiene un número infinito de soluciones.

Ejemplo 1 Usar la regla de Cramer para un sistema de 2 × 2

Use la regla de Cramer para resolver el sistema de ecuaciones lineales.

$$\begin{cases} 4x - 2y = 10 \\ 3x - 5y = 11 \end{cases}$$

Solución

Para empezar, encuentre el determinante de la matriz de coeficientes.

$$D = \begin{vmatrix} 4 & -2 \\ 3 & -5 \end{vmatrix} = -20 - (-6) = -14$$

Como este determinante no es cero, se puede aplicar la regla de Cramer.

$$x = \frac{D_x}{D} = \frac{\begin{vmatrix} 10 & -2 \\ 11 & -5 \end{vmatrix}}{-14} = \frac{-50 - (-22)}{-14} = \frac{-28}{-14} = 2$$

$$y = \frac{D_y}{D} = \frac{\begin{vmatrix} 4 & 10 \\ 3 & 11 \end{vmatrix}}{-14} = \frac{44 - 30}{-14} = \frac{14}{-14} = -1$$

Por tanto, la solución es $x = 2$ y $y = -1$. Compruébelo en el sistema original.

PUNTO *de repaso* Ahora trate de hacer el Ejercicio 7.

Ejemplo 2 Usar la Regla de Cramer para un sistema de 3 × 3

Use la regla de Cramer para resolver el sistema de ecuaciones lineales.

$$\begin{cases} -x + 2y - 3z = 1 \\ 2x \quad\quad + z = 0 \\ 3x - 4y + 4z = 2 \end{cases}$$

Solución

Para hallar el determinante de la matriz de coeficientes

$$\begin{bmatrix} -1 & 2 & -3 \\ 2 & 0 & 1 \\ 3 & -4 & 4 \end{bmatrix}$$

expanda a lo largo del segundo renglón, como sigue.

$$\begin{aligned} D &= 2(-1)^3\begin{vmatrix} 2 & -3 \\ -4 & 4 \end{vmatrix} + 0(-1)^4\begin{vmatrix} -1 & -3 \\ 3 & 4 \end{vmatrix} + 1(-1)^5\begin{vmatrix} -1 & 2 \\ 3 & -4 \end{vmatrix} \\ &= -2(-4) + 0 - 1(-2) \\ &= 10 \end{aligned}$$

Como este determinante no es cero, se puede aplicar la regla de Cramer.

$$x = \frac{D_x}{D} = \frac{\begin{vmatrix} 1 & 2 & -3 \\ 0 & 0 & 1 \\ 2 & -4 & 4 \end{vmatrix}}{10} = \frac{8}{10} = \frac{4}{5}$$

$$y = \frac{D_y}{D} = \frac{\begin{vmatrix} -1 & 1 & -3 \\ 2 & 0 & 1 \\ 3 & 2 & 4 \end{vmatrix}}{10} = \frac{-15}{10} = -\frac{3}{2}$$

$$z = \frac{D_z}{D} = \frac{\begin{vmatrix} -1 & 2 & 1 \\ 2 & 0 & 0 \\ 3 & -4 & 2 \end{vmatrix}}{10} = \frac{-16}{10} = -\frac{8}{5}$$

La solución es $\left(\frac{4}{5}, -\frac{3}{2}, -\frac{8}{5}\right)$. Compruébelo en el sistema original como sigue.

Comprobación

$-\left(\frac{4}{5}\right) + 2\left(-\frac{3}{2}\right) - 3\left(-\frac{8}{5}\right) \stackrel{?}{=} 1$ Sustituir en la ecuación 1.

$-\frac{4}{5} - 3 + \frac{24}{5} = 1$ La ecuación 1 está bien. ✓

$2\left(\frac{4}{5}\right) + \left(-\frac{8}{5}\right) \stackrel{?}{=} 0$ Sustituir en la ecuación 2.

$\frac{8}{5} - \frac{8}{5} = 0$ La ecuación 2 está bien. ✓

$3\left(\frac{4}{5}\right) - 4\left(-\frac{3}{2}\right) + 4\left(-\frac{8}{5}\right) \stackrel{?}{=} 2$ Sustituir en la ecuación 3.

$\frac{12}{5} + 6 - \frac{32}{5} = 2$ La ecuación 3 está bien. ✓

PUNTO *de repaso* Ahora trate de hacer el Ejercicio 13.

Recuerde que la regla de Cramer no se aplica cuando el determinante de la matriz de coeficientes es cero. Esto crearía división entre cero, la cual no está definida.

Área de un triángulo

Otra aplicación de matrices y determinantes es hallar el área de un triángulo cuyos vértices están dados como puntos en un plano de coordenadas.

Área de un triángulo

El área de un triángulo con vértices (x_1, y_1), (x_2, y_2) y (x_3, y_3) es

$$\text{Área} = \pm\frac{1}{2}\begin{vmatrix} x_1 & y_1 & 1 \\ x_2 & y_2 & 1 \\ x_3 & y_3 & 1 \end{vmatrix}$$

donde el símbolo $\pm$ indica que el signo apropiado debe escogerse para obtener un área positiva.

Ejemplo 3 Hallar el área de un triángulo

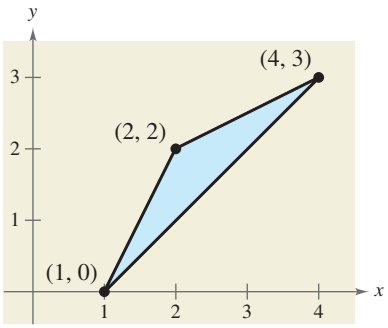


FIGURA 8.1

Encuentre el área de un triángulo cuyos vértices son (1, 0), (2, 2) y (4, 3), como se ve en la figura 8.1

Solución

Sean $(x_1, y_1) = (1, 0)$, $(x_2, y_2) = (2, 2)$ y $(x_3, y_3) = (4, 3)$. Entonces, para hallar el área del triángulo, evaluamos el determinante.

$$\begin{vmatrix} x_1 & y_1 & 1 \\ x_2 & y_2 & 1 \\ x_3 & y_3 & 1 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 2 & 2 & 1 \\ 4 & 3 & 1 \end{vmatrix}$$

$$= 1(-1)^2\begin{vmatrix} 2 & 1 \\ 3 & 1 \end{vmatrix} + 0(-1)^3\begin{vmatrix} 2 & 1 \\ 4 & 1 \end{vmatrix} + 1(-1)^4\begin{vmatrix} 2 & 2 \\ 4 & 3 \end{vmatrix}$$

$$= 1(-1) + 0 + 1(-2)$$

$$= -3.$$

Usando este valor se puede concluir que el área del triángulo es

$$\text{Área} = -\frac{1}{2}\begin{vmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 2 & 2 & 1 \\ 4 & 3 & 1 \end{vmatrix}$$

Escoger $(-)$ para que el área sea positiva.

$$= -\frac{1}{2}(-3)$$

$$= \frac{3}{2}\text{ unidades cuadradas.}$$

PUNTO *de repaso* Ahora trate de hacer el Ejercicio 25.

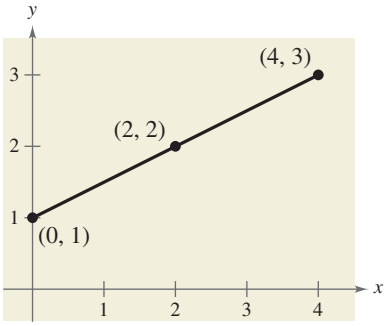


FIGURA 8.2

Rectas en un plano

¿Qué pasaría si los tres puntos del Ejemplo 3 hubieran estado sobre la misma recta? ¿Qué hubiera pasado si la fórmula del área se hubiera aplicado a esos tres puntos? La respuesta es que el determinante hubiera sido cero. Considere, por ejemplo, los tres puntos colineales (0, 1), (2, 2) y (4, 3), como se muestra en la figura 8.2. El área del "triángulo" que tiene estos tres puntos como vértices es

$$\frac{1}{2}\begin{vmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 2 & 2 & 1 \\ 4 & 3 & 1 \end{vmatrix} = \frac{1}{2}\left[0(-1)^2\begin{vmatrix} 2 & 1 \\ 3 & 1 \end{vmatrix} + 1(-1)^3\begin{vmatrix} 2 & 1 \\ 4 & 1 \end{vmatrix} + 1(-1)^4\begin{vmatrix} 2 & 2 \\ 4 & 3 \end{vmatrix}\right]$$

$$= \frac{1}{2}[0 - 1(-2) + 1(-2)]$$

$$= 0.$$

El resultado se generaliza como sigue.

Prueba para puntos colineales

Tres puntos (x_1, y_1), (x_2, y_2) y (x_3, y_3) son **colineales** (están sobre la misma recta) si y sólo si

$$\begin{vmatrix} x_1 & y_1 & 1 \\ x_2 & y_2 & 1 \\ x_3 & y_3 & 1 \end{vmatrix} = 0.$$

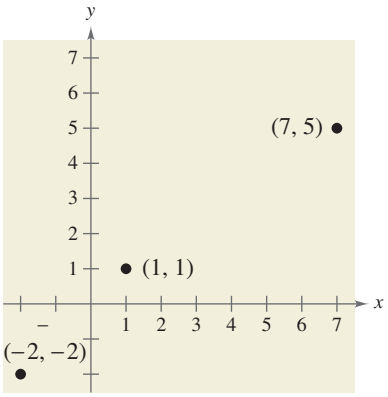


FIGURA 8.3

Ejemplo 4 Probar puntos colineales

Determine si los puntos $(-2, -2)$, $(1, 1)$ y $(7, 5)$ son colineales. (Vea Figura 8.3.)

Solución

Si hacemos $(x_1, y_1) = (-2, -2)$, $(x_2, y_2) = (1, 1)$ y $(x_3, y_3) = (7, 5)$, tendremos

$$\begin{vmatrix} x_1 & y_1 & 1 \\ x_2 & y_2 & 1 \\ x_3 & y_3 & 1 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} -2 & -2 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 7 & 5 & 1 \end{vmatrix}$$

$$= -2(-1)^2\begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 5 & 1 \end{vmatrix} + (-2)(-1)^3\begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 7 & 1 \end{vmatrix} + 1(-1)^4\begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 7 & 5 \end{vmatrix}$$

$$= -2(-4) + 2(-6) + 1(-2)$$

$$= -6.$$

Como el valor de este determinante *no es cero*, se puede concluir que los tres puntos no se encuentran sobre la misma recta. Además, el área del triángulo con vértices en estos puntos es $\left(-\frac{1}{2}\right)(-6) = 3$ unidades cuadradas.

PUNTO *de repaso* Ahora trate de hacer el Ejercicio 39.

La prueba para puntos colineales se puede adaptar a otro uso: si nos dan dos puntos en un sistema de coordenadas rectangulares, podemos hallar una ecuación de la recta que pase por ellos, como sigue.

Forma de dos puntos de la ecuación de una recta

Una ecuación de la recta que pasa por los puntos (x_1, y_1) y (x_2, y_2) está dada por

$$\begin{vmatrix} x & y & 1 \\ x_1 & y_1 & 1 \\ x_2 & y_2 & 1 \end{vmatrix} = 0.$$

Ejemplo 5 Hallar una ecuación de una recta

Encuentre una ecuación de la recta que pasa por los puntos (2, 4) y (−1, 3), como se muestra en la figura 8.4.

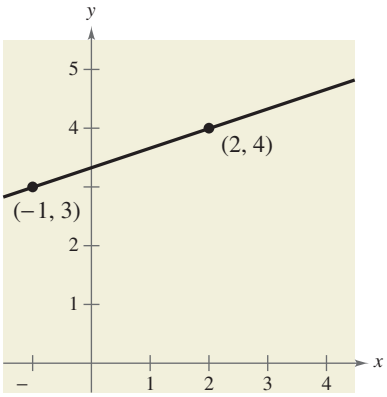


FIGURA 8.4

Solución

Sean $(x_1, y_1) = (2, 4)$ y $(x_2, y_2) = (-1, 3)$. Al aplicar la fórmula del determinante para la ecuación de una recta resulta

$$\begin{vmatrix} x & y & 1 \\ 2 & 4 & 1 \\ -1 & 3 & 1 \end{vmatrix} = 0.$$

Para evaluar este determinante se puede expandir por cofactores a lo largo del primer renglón para obtener lo siguiente.

$$x(-1)^2\begin{vmatrix} 4 & 1 \\ 3 & 1 \end{vmatrix} + y(-1)^3\begin{vmatrix} 2 & 1 \\ -1 & 1 \end{vmatrix} + 1(-1)^4\begin{vmatrix} 2 & 4 \\ -1 & 3 \end{vmatrix} = 0$$

$$x(1)(1) + y(-1)(3) + (1)(1)(10) = 0$$

$$x - 3y + 10 = 0$$

Por tanto, una ecuación de la recta es

$$x - 3y + 10 = 0.$$

PUNTO *de repaso* Ahora trate de hacer el Ejercicio 47.

Nótese que este método de hallar la ecuación de una recta funciona para todas las rectas, incluidas las horizontales y las verticales. Por ejemplo, la ecuación de la recta vertical que pasa por (2, 0) y (2, 2) es

$$\begin{vmatrix} x & y & 1 \\ 2 & 0 & 1 \\ 2 & 2 & 1 \end{vmatrix} = 0$$

$$4 - 2x = 0$$

$$x = 2.$$

Criptografía

Un **criptograma** es un mensaje escrito según un código secreto. (La palabra griega *kriptos* significa "oculto".) Se puede usar multiplicación de matrices para codificar y decodificar mensajes. Para empezar, es necesario asignar un número a cada letra del alfabeto (con 0 asignado a un espacio en blanco), como sigue.

0 = _	9 = I	18 = R
1 = A	10 = J	19 = S
2 = B	11 = K	20 = T
3 = C	12 = L	21 = U
4 = D	13 = M	22 = V
5 = E	14 = N	23 = W
6 = F	15 = O	24 = X
7 = G	16 = P	25 = Y
8 = H	17 = Q	26 = Z

Entonces el mensaje se convierte en números y se divide en **matrices codificadas de renglón**, cada uno de los cuales tiene n elementos, como se demuestra en el Ejemplo 6.

Ejemplo 6 Formar matrices no codificadas de renglón

Escriba las matrices de orden 1×3 no codificadas de renglón para el mensaje

MEET ME MONDAY (NOS VEMOS EL LUNES).

Solución

Si se divide el mensaje (incluidos los espacios en blanco, pero ignorando la puntuación) en grupos de tres, resultan las siguientes matrices no codificadas de renglón.

$$[13 \quad 5 \quad 5] \quad [20 \quad 0 \quad 13] \quad [5 \quad 0 \quad 13] \quad [15 \quad 14 \quad 4] \quad [1 \quad 25 \quad 0]$$
$$\text{M} \quad \text{E} \quad \text{E} \quad \text{T} \quad \text{M} \quad \text{E} \quad \text{M} \quad \text{O} \quad \text{N} \quad \text{D} \quad \text{A} \quad \text{Y}$$

Nótese que se usa un espacio en blanco para llenar la última matriz no codificada de renglón.

PUNTO *de repaso* Ahora trate de hacer el Ejercicio 55(a).

Para codificar un mensaje, use las técnicas demostradas en la sección 8.3 para escoger una matriz convertible de $n \times n$ tal como

$$A = \begin{bmatrix} 1 & -2 & 2 \\ -1 & 1 & 3 \\ 1 & -1 & -4 \end{bmatrix}$$

y multiplique por A las matrices no codificadas de renglón (a la derecha) para obtener **matrices codificadas de renglón**. A continuación veamos un ejemplo.

Matriz no codificada		*Matriz A codificadora*				*Matriz codificada*		
[13	5	5]	$\begin{bmatrix} 1 & -2 & 2 \\ -1 & 1 & 3 \\ 1 & -1 & -4 \end{bmatrix}$	=	[13	−26	21]

Ejemplo 7 Codificar un mensaje

Use la siguiente matriz invertible para codificar el mensaje MEET ME MONDAY (NOS VEMOS EL LUNES).

$$A = \begin{bmatrix} 1 & -2 & 2 \\ -1 & 1 & 3 \\ 1 & -1 & -4 \end{bmatrix}$$

Solución

Las matrices codificadas de renglón se obtienen multiplicando por A cada una de las matrices no codificadas de renglón halladas en el Ejemplo 6, como sigue.

Matriz no codificada		*Matriz A codificadora*				*Matriz codificada*		
$[13$	5	$5]$	$\begin{bmatrix} 1 & -2 & 2 \\ -1 & 1 & 3 \\ 1 & -1 & -4 \end{bmatrix}$	$=$	$[13$	-26	$21]$
$[20$	0	$13]$	$\begin{bmatrix} 1 & -2 & 2 \\ -1 & 1 & 3 \\ 1 & -1 & -4 \end{bmatrix}$	$=$	$[33$	-53	$-12]$
$[5$	0	$13]$	$\begin{bmatrix} 1 & -2 & 2 \\ -1 & 1 & 3 \\ 1 & -1 & -4 \end{bmatrix}$	$=$	$[18$	-23	$-42]$
$[15$	14	$4]$	$\begin{bmatrix} 1 & -2 & 2 \\ -1 & 1 & 3 \\ 1 & -1 & -4 \end{bmatrix}$	$=$	$[5$	-20	$56]$
$[1$	25	$0]$	$\begin{bmatrix} 1 & -2 & 2 \\ -1 & 1 & 3 \\ 1 & -1 & -4 \end{bmatrix}$	$=$	$[-24$	23	$77]$

Por tanto, la secuencia de matrices codificadas de renglón es

$$[13 \ -26 \ 21][33 \ -53 \ -12][18 \ -23 \ -42][5 \ -20 \ 56][-24 \ 23 \ 77].$$

Por último, eliminando la notación de matrices resulta el siguiente criptograma.

$$13 \ -26 \ 21 \ 33 \ -53 \ -12 \ 18 \ -23 \ -42 \ 5 \ -20 \ 56 \ -24 \ 23 \ 77$$

PUNTO *de repaso* Ahora trate de hacer el Ejercicio 55(b).

Para quienes no conozcan la matriz A codificadora, decodificar el criptograma hallado en el Ejemplo 7 es difícil. Pero para un receptor autorizado que conoce la matriz A codificadora, la decodificación es fácil. El receptor sólo tiene que multiplicar por A^{-1} las matrices codificadas de renglón (a la derecha) para recuperar las matrices no codificadas de renglón. A continuación veamos un ejemplo.

$$\underbrace{[13 \ -26 \ 21]}_{\text{Codificado}} \underbrace{\begin{bmatrix} -1 & -10 & -8 \\ -1 & -6 & -5 \\ 0 & -1 & -1 \end{bmatrix}}_{A^{-1}} = \underbrace{[13 \quad 5 \quad 5]}_{\text{No codificado}}$$

NOTA HISTÓRICA

Bettmann/Corbis

Durante la Segunda Guerra Mundial, unos soldados navajos crearon un código usando su lengua nativa para enviar mensajes entre batallones. Se asignaron palabras nativas para representar caracteres en el alfabeto inglés y crearon varias expresiones para términos militares importantes, por ejemplo, *pez de hierro* para indicar *submarino*. Sin los parlantes navajos de códigos, la Segunda Guerra Mundial pudo haber tenido un resultado muy diferente.

Ejemplo 8 Decodificar un mensaje

Use la inversa de la matriz

$$A = \begin{bmatrix} 1 & -2 & 2 \\ -1 & 1 & 3 \\ 1 & -1 & -4 \end{bmatrix}$$

para decodificar el criptograma

$$13 \ -26 \ 21 \ 33 \ -53 \ -12 \ 18 \ -23 \ -42 \ 5 \ -20 \ 56 \ -24 \ 23 \ 77.$$

Solución

Primero hallamos A^{-1} usando las técnicas demostradas en la sección 8.3. A^{-1} es la matriz decodificadora. A continuación dividimos el mensaje en grupos de tres para formar las matrices codificadas de renglón. Por último, multiplicamos por A^{-1} cada una de las matrices codificadas de renglón (a la derecha).

Matriz codificada		*Matriz A^{-1} decodificadora*		*Matriz decodificada*
$[13 \ -26 \ 21]$	$\begin{bmatrix} -1 & -10 & -8 \\ -1 & -6 & -5 \\ 0 & -1 & -1 \end{bmatrix}$		$=$	$[13 \ 5 \ 5]$
$[33 \ -53 \ -12]$	$\begin{bmatrix} -1 & -10 & -8 \\ -1 & -6 & -5 \\ 0 & -1 & -1 \end{bmatrix}$		$=$	$[20 \ 0 \ 13]$
$[18 \ -23 \ -42]$	$\begin{bmatrix} -1 & -10 & -8 \\ -1 & -6 & -5 \\ 0 & -1 & -1 \end{bmatrix}$		$=$	$[5 \ 0 \ 13]$
$[5 \ -20 \ 56]$	$\begin{bmatrix} -1 & -10 & -8 \\ -1 & -6 & -5 \\ 0 & -1 & -1 \end{bmatrix}$		$=$	$[15 \ 14 \ 4]$
$[-24 \ 23 \ 77]$	$\begin{bmatrix} -1 & -10 & -8 \\ -1 & -6 & -5 \\ 0 & -1 & -1 \end{bmatrix}$		$=$	$[1 \ 25 \ 0]$

Por tanto, el mensaje es como sigue.

$$[13 \ 5 \ 5] \ [20 \ 0 \ 13] \ [5 \ 0 \ 13] \ [15 \ 14 \ 4] \ [1 \ 25 \ 0]$$

M E E T M E M O N D A Y

PUNTO *de repaso* Ahora trate de hacer el Ejercicio 63.

DISCUSIÓN EN CLASE

Criptografía Use la biblioteca de su escuela, internet o alguna otra fuente de consulta para investigar información acerca de otro tipo de criptografía. Escriba un párrafo breve que describa cómo se usan las matemáticas para codificar y decodificar mensajes.

8.5 EJERCICIOS

En www.CalcChat.com vea las soluciones a los ejercicios impares.

VOCABULARIO: Llene los espacios en blanco.

1. El método de usar determinantes para resolver un sistema de ecuaciones lineales se denomina _____ _____ _____.
2. Tres puntos son _____ si están sobre la misma recta.
3. El área A de un triángulo con vértices (x_1, y_1), (x_2, y_2) y (x_3, y_3) está dada por _____.
4. Un mensaje escrito de acuerdo con un código secreto se llama _____.
5. Para codificar un mensaje, escoja una matriz invertible A y multiplique por A las matrices _____ de renglón (a la derecha) para obtener matrices _____ de renglón.
6. Si un mensaje se codifica usando una matriz invertible A, entonces se puede decodificar si se multiplican las matrices codificadas de renglón por _____ (a la derecha).

HABILIDADES Y APLICACIONES

En los Ejercicios 7-16, use la regla de Cramer para resolver (si es posible) el sistema de ecuaciones.

7. $\begin{cases} -7x + 11y = -1 \\ 3x - 9y = 9 \end{cases}$

8. $\begin{cases} 4x - 3y = -10 \\ 6x + 9y = 12 \end{cases}$

9. $\begin{cases} 3x + 2y = -2 \\ 6x + 4y = 4 \end{cases}$

10. $\begin{cases} 6x - 5y = 17 \\ -13x + 3y = -76 \end{cases}$

11. $\begin{cases} -0.4x + 0.8y = 1.6 \\ 0.2x + 0.3y = 2.2 \end{cases}$

12. $\begin{cases} 2.4x - 1.3y = 14.63 \\ -4.6x + 0.5y = -11.51 \end{cases}$

13. $\begin{cases} 4x - y + z = -5 \\ 2x + 2y + 3z = 10 \\ 5x - 2y + 6z = 1 \end{cases}$

14. $\begin{cases} 4x - 2y + 3z = -2 \\ 2x + 2y + 5z = 16 \\ 8x - 5y - 2z = 4 \end{cases}$

15. $\begin{cases} x + 2y + 3z = -3 \\ -2x + y - z = 6 \\ 3x - 3y + 2z = -11 \end{cases}$

16. $\begin{cases} 5x - 4y + z = -14 \\ -x + 2y - 2z = 10 \\ 3x + y + z = 1 \end{cases}$

En los Ejercicios 17-20, use calculadora de gráficas y la regla de Cramer para resolver (si es posible) el sistema de ecuaciones.

17. $\begin{cases} 3x + 3y + 5z = 1 \\ 3x + 5y + 9z = 2 \\ 5x + 9y + 17z = 4 \end{cases}$

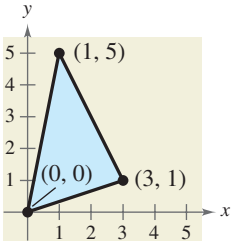
18. $\begin{cases} x + 2y - z = -7 \\ 2x - 2y - 2z = -8 \\ -x + 3y + 4z = 8 \end{cases}$

19. $\begin{cases} 2x - y + z = 5 \\ x - 2y - z = 1 \\ 3x + y + z = 4 \end{cases}$

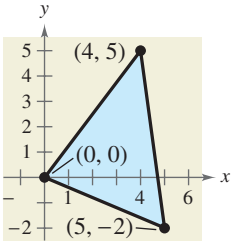
20. $\begin{cases} 3x - y - 3z = 1 \\ 2x + y + 2z = -4 \\ x + y - z = 5 \end{cases}$

En los Ejercicios 21-32, use un determinante y los vértices dados de un triángulo para hallar el área del triángulo.

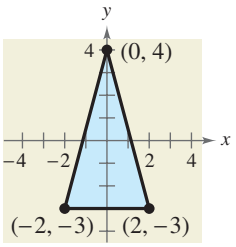
21.



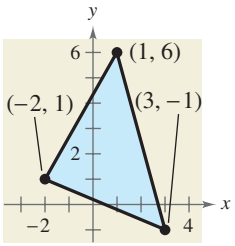
22.



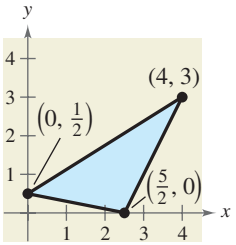
23.



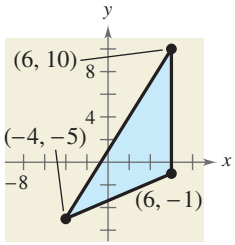
24.



25.



26.



27. $(-2, 4), (2, 3), (-1, 5)$
28. $(0, -2), (-1, 4), (3, 5)$
29. $(-3, 5), (2, 6), (3, -5)$
30. $(-2, 4), (1, 5), (3, -2)$
31. $(-4, 2), (0, \frac{7}{2}), (3, -\frac{1}{2})$
32. $(\frac{9}{2}, 0), (2, 6), (0, -\frac{3}{2})$

En los Ejercicios 33 y 34, encuentre un valor de y tal que el triángulo con los vértices dados tenga un área de 4 unidades cuadradas.

33. $(-5, 1), (0, 2), (-2, y)$
34. $(-4, 2), (-3, 5), (-1, y)$

En los Ejercicios 35 y 36, encuentre un valor de y tal que el triángulo con los vértices dados tenga un área de 6 unidades cuadradas.

35. $(-2, -3), (1, -1), (-8, y)$
36. $(1, 0), (5, -3), (-3, y)$

37. **ÁREA DE UNA REGIÓN** Una región grande de bosque ha sido infectada por polillas "lagartas". La región es aproximadamente triangular, como se ve en la figura de la página siguiente. Del vértice A, situado más al Norte de la región, las distancias a los otros vértices son 25 millas al Sur y 10 millas al Este (para el vértice B), y 20 millas al Sur y 28 millas al Este (para el vértice C). Use una calculadora de gráficas para aproximar el número de millas cuadradas en esta región.

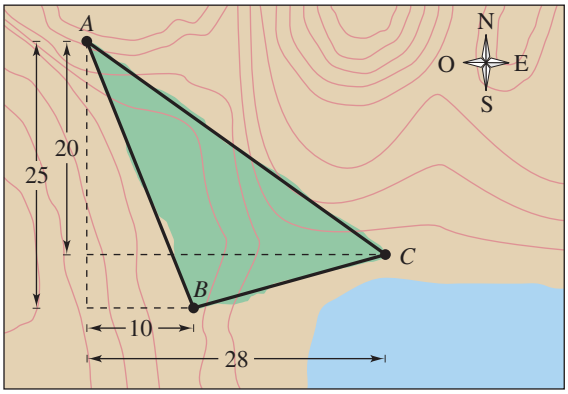
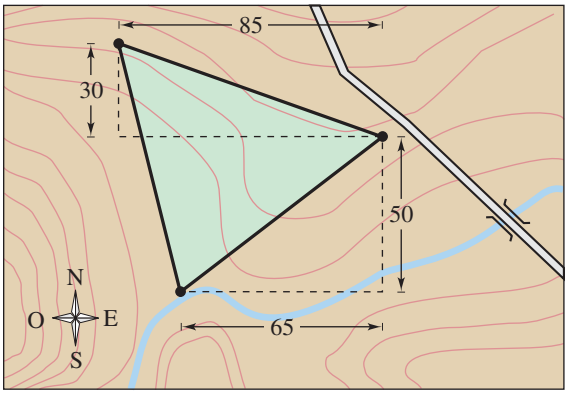


FIGURA PARA EJERCICIO 37

38. ÁREA DE UNA REGIÓN Usted es propietario de un terreno triangular, como se muestra en la figura. Para estimar el número de pies cuadrados del terreno, usted empieza en un vértice, camina 65 pies al Este y 50 pies al Norte al segundo vértice y luego camina 85 pies al Oeste y 30 pies al Norte para el tercer vértice. Use una calculadora de gráficas para determinar cuántos pies cuadrados hay en el terreno.



En los Ejercicios 39-44, use un determinante para establecer si los puntos son colineales.

39. $(3, -1), (0, -3), (12, 5)$ **40.** $(3, -5), (6, 1), (4, 2)$

41. $\left(2, -\frac{1}{2}\right), (-4, 4), (6, -3)$ **42.** $\left(0, \frac{1}{2}\right), (2, -1), \left(-4, \frac{7}{2}\right)$

43. $(0, 2), (1, 2.4), (-1, 1.6)$ **44.** $(2, 3), (3, 3.5), (-1, 2)$

En los Ejercicios 45 y 46, encuentre y tal que los puntos sean colineales.

45. $(2, -5), (4, y), (5, -2)$ **46.** $(-6, 2), (-5, y), (-3, 5)$

En los Ejercicios 47-52, use un determinante para hallar una ecuación de la recta que pasa por los puntos.

47. $(0, 0), (5, 3)$ **48.** $(0, 0), (-2, 2)$

49. $(-4, 3), (2, 1)$ **50.** $(10, 7), (-2, -7)$

51. $\left(-\frac{1}{2}, 3\right), \left(\frac{5}{2}, 1\right)$ **52.** $\left(\frac{2}{3}, 4\right), (6, 12)$

En los Ejercicios 53 y 54, (a) escriba las matrices no codificadas de renglón de 1×2 para el mensaje. (b) A continuación codifique el mensaje usando la matriz codificadora.

	Mensaje	*Matriz codificadora*
53.	COME HOME SOON	$\begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 5 \end{bmatrix}$
54.	HELP IS ON THE WAY	$\begin{bmatrix} -2 & 3 \\ -1 & 1 \end{bmatrix}$

En los Ejercicios 55 y 56, (a) escriba las matrices no codificadas de renglón de 1×3 para el mensaje. (b) A continuación codifique el mensaje usando la matriz codificadora.

	Mensaje	*Matriz codificadora*
55.	CALL ME TOMORROW	$\begin{bmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & -1 \\ -6 & 2 & 3 \end{bmatrix}$
56.	PLEASE SEND MONEY	$\begin{bmatrix} 4 & 2 & 1 \\ -3 & -3 & -1 \\ 3 & 2 & 1 \end{bmatrix}$

En los Ejercicios 57-60, escriba un criptograma para el mensaje usando la matriz A.

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 2 \\ 3 & 7 & 9 \\ -1 & -4 & -7 \end{bmatrix}$$

57. LANDING SUCCESSFUL

58. ICEBERG DEAD AHEAD

59. HAPPY BIRTHDAY

60. OPERATION OVERLOAD

En los Ejercicios 61-64, use A^{-1} para decodificar el criptograma.

61. $A = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 5 \end{bmatrix}$

11 21 64 112 25 50 29 53 23 46
40 75 55 92

62. $A = \begin{bmatrix} 2 & 3 \\ 3 & 4 \end{bmatrix}$

85 120 6 8 10 15 84 117 42 56 90
125 60 80 30 45 19 26

63. $A = \begin{bmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & -1 \\ -6 & 2 & 3 \end{bmatrix}$

9 −1 −9 38 −19 −19 28 −9 −19
−80 25 41 −64 21 31 9 −5 −4

64. $A = \begin{bmatrix} 3 & -4 & 2 \\ 0 & 2 & 1 \\ 4 & -5 & 3 \end{bmatrix}$

112 −140 83 19 −25 13 72 −76 61 95
−118 71 20 21 38 35 −23 36 42 −48 32

En los Ejercicios 65 y 66, decodifique el criptograma usando la inversa de la matriz A.

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 2 \\ 3 & 7 & 9 \\ -1 & -4 & -7 \end{bmatrix}$$

65. 20 17 −15 −12 −56 −104 1 −25 −65
62 143 181

66. 13 −9 −59 61 112 106 −17 −73 −131 11
24 29 65 144 172

67. El siguiente criptograma fue codificado con una matriz de 2×2.

8 21 −15 −10 −13 −13 5 10 5 25 5 19
−1 6 20 40 −18 −18 1 16

La última palabra del mensaje es _RON. ¿Cuál es el mensaje?

68. El siguiente criptograma fue codificado con una matriz de 2×2.

5 2 25 11 −2 −7 −15 −15 32 14 −8
−13 38 19 −19 −19 37 16

La última palabra del mensaje es _SUE. ¿Cuál es el mensaje?

69. ANÁLISIS DE DATOS: AGUA EMBOTELLADA La tabla siguiente muestra el consumo per cápita de agua embotellada y (en galones) en Estados Unidos, de 2000 a 2007. (Fuente: Economic Research Service, U.S. Department of Agriculture)

Año	Consumo, y
2000	16.7
2001	18.2
2002	20.1
2003	21.6
2004	23.2
2005	25.5
2006	27.7
2007	29.1

(a) Use la técnica demostrada en los Ejercicios 77-80 de la sección 7.3 para crear un sistema de ecuaciones lineales para los datos. Con t represente el año, con $t = 0$ correspondiente a 2000.

(b) Use la regla de Cramer para resolver el sistema del inciso (a) y hallar la parábola de regresión de mínimos cuadrados $y = at^2 + bt + c$.

(c) Use una calculadora de gráficas para graficar la parábola del inciso (b).

(d) Use la gráfica del inciso (c) para estimar cuándo pasará de 35 galones el consumo per cápita de agua embotellada.

70. PRODUCTOS PARA EL CABELLO Una compañía fabricante de productos para el cabello vende tres tipos de productos en \$30, \$20 y \$10 por unidad. En un año, el total de ingresos por los tres productos fue de \$800 000, que correspondieron a la venta de 40 000 unidades. La compañía vendió la mitad de unidades de \$30 que de unidades de \$20 del producto. Use la regla de Cramer para resolver un sistema de ecuaciones lineales para hallar cuántas unidades se vendieron de cada producto.

EXPLORACIÓN

¿VERDADERO O FALSO? **En los Ejercicios 71-74, determine si la proposición es verdadera o falsa. Justifique su respuesta.**

71. En la regla de Cramer, el numerador es el determinante de la matriz de coeficientes.

72. No se puede usar la regla de Cramer al resolver un sistema de ecuaciones lineales si el determinante de la matriz de coeficientes es cero.

73. En un sistema de ecuaciones lineales, si el determinante de la matriz de coeficientes es cero, el sistema no tiene solución.

74. Los puntos $(-5, -13)$, $(0, 2)$ y $(3, 11)$ son colineales.

75. ESCRITURA Use la biblioteca de su escuela, internet o alguna otra fuente de consulta para investigar unos cuantos usos actuales, reales, de la criptografía. Escriba un breve resumen de estos usos. Incluya una descripción de la forma en que los mensajes son codificados y decodificados en cada caso.

76. TOQUE FINAL

(a) Exprese la regla de Cramer para resolver un sistema de ecuaciones lineales.

(b) En este punto del texto, usted ha aprendido varios métodos para resolver sistemas de ecuaciones lineales. Brevemente describa cuál(es) método(s) encuentra más fácil(es) de usar y cuál(es) más difícil(es).

77. Use determinantes para hallar el área de un triángulo con vértices $(3, -1)$, $(7, -1)$ y $(7, 5)$. Confirme su respuesta al determinar los puntos en un plano de coordenadas y usando la fórmula

$$\text{Área} = \tfrac{1}{2}(\text{base})(\text{altura}).$$

8 Resumen del capítulo

	¿Qué aprendió?	Explicación/Ejemplos	Ejercicios de repaso
Sección 8.1	Escribir matrices e identificar su orden *(p. 570)*.	$\begin{bmatrix} -1 & 1 \\ 4 & 7 \end{bmatrix}$ $[-2 \quad 3 \quad 0]$ $\begin{bmatrix} 4 & -3 \\ 5 & 0 \\ -2 & 1 \end{bmatrix}$ $\begin{bmatrix} 8 \\ -8 \end{bmatrix}$ 2×2 1×3 3×2 2×1	1–8
	Realizar operaciones elementales de renglón en matrices *(p. 572)*.	**Operaciones elementales de renglón** **1.** Intercambiar dos renglones. **2.** Multiplicar un renglón por una constante diferente de cero. **3.** Sumar un múltiplo de un reglón a otro renglón.	9, 10
	Usar matrices y eliminación gaussiana para resolver sistemas de ecuaciones lineales *(p. 575)*.	**Eliminación gaussiana con sustitución hacia atrás** **1.** Escribir la matriz aumentada del sistema de ecuaciones lineales. **2.** Usar operaciones elementales de renglón para reescribir la matriz aumentada en forma escalonada por renglones. **3.** Escribir el sistema de ecuaciones lineales correspondiente a la matriz en forma escalonada por renglones y usar sustitución hacia atrás para hallar la solución.	11–28
	Usar matrices y eliminación de Gauss-Jordan para resolver sistemas de ecuaciones lineales *(p. 577)*.	La eliminación de Gauss-Jordan continúa el proceso de reducción en una matriz en forma escalonada por renglones hasta obtener una forma escalonada por renglones *reducida*. (Vea Ejemplo 8.)	29–36
Sección 8.2	Decidir si dos matrices son iguales *(p. 584)*.	Dos matrices son iguales si sus elementos correspondientes son iguales.	37–40
	Sumar y restar matrices y multiplicar matrices por escalares *(p. 585)*.	**Definición de suma de matrices** Si $A = [a_{ij}]$ y $B = [b_{ij}]$ son matrices de orden $m \times n$, su suma es la matriz de $m \times n$ dada por $A + B = [a_{ij} + b_{ij}]$. **Definición de multiplicación por un escalar** Si $A = [a_{ij}]$ es una matriz de $m \times n$ y c es un escalar, el múltiplo escalar de A por c es la matriz de $m \times n$ dada por $cA = [c_{ij}]$	41–54
	Multiplicar dos matrices *(p. 589)*.	**Multiplicación de matrices** Si $A = [a_{ij}]$ es una matriz de $m \times n$ y $B = [b_{ij}]$ es una matriz de $n \times p$ el producto AB es una matriz de $m \times p$ $AB = [c_{ij}]$ donde $c_{ij} = a_{i1}b_{1j} + a_{i2}b_{2j} + a_{i3}b_{3j} + \cdots + a_{in}b_{nj}$.	55–68
	Usar operaciones con matrices para modelar y resolver problemas de la vida real *(p. 592)*.	Las operaciones con matrices se pueden usar para hallar el costo total del equipo para dos escuadras de softbol. (Vea Ejemplo 12.)	69–72
Sección 8.3	Verificar que dos matrices sean inversas entre sí *(p. 599)*.	**Inversa de una matriz cuadrada** Sea A una matriz de $n \times n$ y sea I_n la matriz identidad de $n \times n$. Si existe una matriz A^{-1} tal que $AA^{-1} = I_n = A^{-1}A$ entonces A^{-1} es la inversa de A.	73–76

	¿Qué aprendió?	Explicación/Ejemplos	Ejercicios de repaso
Sección 8.3	Usar eliminación de Gauss-Jordan para hallar las inversas de matrices *(p. 600)*.	**Hallar una matriz inversa** Sea A una matriz cuadrada de orden n. **1.** Escribir una matriz de $n \times 2n$ formada por la matriz dada A en la izquierda y la matriz identidad I de $n \times n$ a la derecha para obtener $[A \vdots I]$. **2.** Si es posible, reduzca renglones de A a I usando operaciones elementales de renglón en *toda* la matriz $[A \vdots I]$. El resultado será la matriz $[I \vdots A^{-1}]$. Si esto no es posible, A no es invertible. **3.** Verifique su trabajo para ver que $AA^{-1} = I = A^{-1}A$.	77–84
	Usar una fórmula para hallar las inversas de matrices de 2×2 *(p. 603)*.	Si $A = \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}$ y $ad - bc \neq 0$, entonces $A^{-1} = \frac{1}{ad - bc}\begin{bmatrix} d & -b \\ -c & a \end{bmatrix}$.	85–92
	Usar matrices inversas para resolver sistemas de ecuaciones lineales *(p. 604)*.	Si A es una matriz invertible, el sistema de ecuaciones lineales representado por $AX = B$ tiene una solución única dada por $X = A^{-1}B$.	93–110
Sección 8.4	Hallar los determinantes de matrices de 2×2 *(p. 608)*.	El determinante de la matriz $A = \begin{bmatrix} a_1 & b_1 \\ a_2 & b_2 \end{bmatrix}$ está dado por $\det(A) = \lvert A \rvert = \begin{vmatrix} a_1 & b_1 \\ a_2 & b_2 \end{vmatrix} = a_1b_2 - a_2b_1$.	111–114
	Hallar menores y cofactores de matrices cuadradas *(p. 610)*.	Si A es una matriz cuadrada, el menor M_{ij} del elemento a_{ij} es el determinante de la matriz obtenido al eliminar el i-ésimo renglón y la j-ésima columna de A. El cofactor C_{ij} del elemento a_{ij} es $C_{ij} = (-1)^{i+j}M_{ij}$.	115–118
	Hallar los determinantes de matrices cuadradas *(p. 611)*.	Si A es una matriz cuadrada (de orden 2×2 o superior), el determinante de A es la suma de los elementos de cualquier renglón (o columna) de A multiplicados por sus respectivos cofactores.	119–128
Sección 8.5	Usar la regla de Cramer para resolver sistemas de ecuaciones lineales *(p. 616)*.	La regla de Cramer usa determinantes para escribir la solución de un sistema de ecuaciones lineales.	129–132
	Usar determinantes para hallar las áreas de triángulos *(p. 619)*.	El área de un triángulo con vértices (x_1, y_1), (x_2, y_2) y (x_3, y_3) es $\text{Área} = \pm\frac{1}{2}\begin{vmatrix} x_1 & y_1 & 1 \\ x_2 & y_2 & 1 \\ x_3 & y_3 & 1 \end{vmatrix}$ donde el símbolo $\pm$ indica que debe escogerse el signo apropiado para obtener un área positiva.	133–136
	Usar un determinante para probar puntos colineales y hallar una ecuación de una recta que pase por dos puntos *(p. 620)*.	Tres puntos (x_1, y_1), (x_2, y_2) y (x_3, y_3) son colineales (se hallan sobre la misma recta) si y sólo si $\begin{vmatrix} x_1 & y_1 & 1 \\ x_2 & y_2 & 1 \\ x_3 & y_3 & 1 \end{vmatrix} = 0$.	137–142
	Usar matrices para codificar y decodificar mensajes *(p. 622)*.	Se puede usar la inversa de una matriz para decodificar un criptograma. (Vea Ejemplo 8.)	143–146

8 Ejercicios de repaso

En www.CalcChat.com vea las soluciones a los ejercicios impares.

8.1 En los Ejercicios 1-4, determine el orden de la matriz.

1. $\begin{bmatrix} -4 \\ 0 \\ 5 \end{bmatrix}$

2. $\begin{bmatrix} 3 & -1 & 0 & 6 \\ -2 & 7 & 1 & 4 \end{bmatrix}$

3. $[3]$

4. $[6 \quad 2 \quad -5 \quad 8 \quad 0]$

En los Ejercicios 5 y 6, escriba la matriz aumentada para el sistema de ecuaciones lineales.

5. $\begin{cases} 3x - 10y = 15 \\ 5x + 4y = 22 \end{cases}$

6. $\begin{cases} 8x - 7y + 4z = 12 \\ 3x - 5y + 2z = 20 \\ 5x + 3y - 3z = 26 \end{cases}$

En los Ejercicios 7 y 8, escriba el sistema de ecuaciones lineales representado por la matriz aumentada. (Use variables x, y, z y w si es aplicable.)

7. $\left[\begin{array}{ccc:c} 5 & 1 & 7 & -9 \\ 4 & 2 & 0 & 10 \\ 9 & 4 & 2 & 3 \end{array}\right]$

8. $\left[\begin{array}{cccc:c} 13 & 16 & 7 & 3 & 2 \\ 1 & 21 & 8 & 5 & 12 \\ 4 & 10 & -4 & 3 & -1 \end{array}\right]$

En los Ejercicios 9 y 10, escriba la matriz en forma escalonada por renglones. (Recuerde que la forma escalonada por renglones no es única.)

9. $\begin{bmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 3 \\ 2 & 2 & 2 \end{bmatrix}$

10. $\begin{bmatrix} 4 & 8 & 16 \\ 3 & -1 & 2 \\ -2 & 10 & 12 \end{bmatrix}$

En los Ejercicios 11-14, escriba el sistema de ecuaciones lineales representado por la matriz aumentada. A continuación use sustitución hacia atrás para resolver el sistema. (Use variables x, y y z.)

11. $\left[\begin{array}{ccc:c} 1 & 2 & 3 & 9 \\ 0 & 1 & -2 & 2 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{array}\right]$

12. $\left[\begin{array}{ccc:c} 1 & 3 & -9 & 4 \\ 0 & 1 & -1 & 10 \\ 0 & 0 & 1 & -2 \end{array}\right]$

13. $\left[\begin{array}{ccc:c} 1 & -5 & 4 & 1 \\ 0 & 1 & 2 & 3 \\ 0 & 0 & 1 & 4 \end{array}\right]$

14. $\left[\begin{array}{ccc:c} 1 & -8 & 0 & -2 \\ 0 & 1 & -1 & -7 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \end{array}\right]$

En los Ejercicios 15-28, use matrices y eliminación gaussiana con sustitución hacia atrás para resolver el sistema de ecuaciones (si es posible).

15. $\begin{cases} 5x + 4y = 2 \\ -x + y = -22 \end{cases}$

16. $\begin{cases} 2x - 5y = 2 \\ 3x - 7y = 1 \end{cases}$

17. $\begin{cases} 0.3x - 0.1y = -0.13 \\ 0.2x - 0.3y = -0.25 \end{cases}$

18. $\begin{cases} 0.2x - 0.1y = 0.07 \\ 0.4x - 0.5y = -0.01 \end{cases}$

19. $\begin{cases} -x + 2y = 3 \\ 2x - 4y = 6 \end{cases}$

20. $\begin{cases} -x + 2y = 3 \\ 2x - 4y = -6 \end{cases}$

21. $\begin{cases} x - 2y + z = 7 \\ 2x + y - 2z = -4 \\ -x + 3y + 2z = -3 \end{cases}$

22. $\begin{cases} x - 2y + z = 4 \\ 2x + y - 2z = -24 \\ -x + 3y + 2z = 20 \end{cases}$

23. $\begin{cases} 2x + y + 2z = 4 \\ 2x + 2y = 5 \\ 2x - y + 6z = 2 \end{cases}$

24. $\begin{cases} x + 2y + 6z = 1 \\ 2x + 5y + 15z = 4 \\ 3x + y + 3z = -6 \end{cases}$

25. $\begin{cases} 2x + 3y + z = 10 \\ 2x - 3y - 3z = 22 \\ 4x - 2y + 3z = -2 \end{cases}$

26. $\begin{cases} 2x + 3y + 3z = 3 \\ 6x + 6y + 12z = 13 \\ 12x + 9y - z = 2 \end{cases}$

27. $\begin{cases} 2x + y + z = 6 \\ -2y + 3z - w = 9 \\ 3x + 3y - 2z - 2w = -11 \\ x + z + 3w = 14 \end{cases}$

28. $\begin{cases} x + 2y + w = 3 \\ -3y + 3z = 0 \\ 4x + 4y + z + 2w = 0 \\ 2x + z = 3 \end{cases}$

En los Ejercicios 29-34, use matrices y eliminación de Gauss-Jordan para resolver el sistema de ecuaciones.

29. $\begin{cases} x + 2y - z = 3 \\ x - y - z = -3 \\ 2x + y + 3z = 10 \end{cases}$

30. $\begin{cases} x - 3y + z = 2 \\ 3x - y - z = -6 \\ -x + y - 3z = -2 \end{cases}$

31. $\begin{cases} -x + y + 2z = 1 \\ 2x + 3y + z = -2 \\ 5x + 4y + 2z = 4 \end{cases}$

32. $\begin{cases} 4x + 4y + 4z = 5 \\ 4x - 2y - 8z = 1 \\ 5x + 3y + 8z = 6 \end{cases}$

33. $\begin{cases} 2x - y + 9z = -8 \\ -x - 3y + 4z = -15 \\ 5x + 2y - z = 17 \end{cases}$

34. $\begin{cases} -3x + y + 7z = -20 \\ 5x - 2y - z = 34 \\ -x + y + 4z = -8 \end{cases}$

En los Ejercicios 35 y 36, use la capacidad matricial de una calculadora de gráficas para reducir la matriz aumentada correspondiente al sistema de ecuaciones y resuelva el sistema.

35. $\begin{cases} 3x - y + 5z - 2w = -44 \\ x + 6y + 4z - w = 1 \\ 5x - y + z + 3w = -15 \\ 4y - z - 8w = 58 \end{cases}$

36. $\begin{cases} 4x + 12y + 2z = 20 \\ x + 6y + 4z = 12 \\ x + 6y + z = 8 \\ -2x - 10y - 2z = -10 \end{cases}$

8.2 En los Ejercicios 37-40, encuentre x y y.

37. $\begin{bmatrix} -1 & x \\ y & 9 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -1 & 12 \\ -7 & 9 \end{bmatrix}$

38. $\begin{bmatrix} -1 & 0 \\ x & 5 \\ -4 & y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -1 & 0 \\ 8 & 5 \\ -4 & 0 \end{bmatrix}$

39. $\begin{bmatrix} x+3 & -4 & 4y \\ 0 & -3 & 2 \\ -2 & y+5 & 6x \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 5x-1 & -4 & 44 \\ 0 & -3 & 2 \\ -2 & 16 & 6 \end{bmatrix}$

40. $\begin{bmatrix} -9 & 4 & 2 & -5 \\ 0 & -3 & 7 & -4 \\ 6 & -1 & 1 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -9 & 4 & x-10 & -5 \\ 0 & -3 & 7 & 2y \\ \frac{1}{2}x & -1 & 1 & 0 \end{bmatrix}$

En los Ejercicios 41-44, si es posible, encuentre (a) $A + B$, (b) $A - B$, (c) $4A$, y (d) $A + 3B$.

41. $A = \begin{bmatrix} 2 & -2 \\ 3 & 5 \end{bmatrix}, \quad B = \begin{bmatrix} -3 & 10 \\ 12 & 8 \end{bmatrix}$

42. $A = \begin{bmatrix} 4 & 3 \\ -6 & 1 \\ 10 & 1 \end{bmatrix}, \quad B = \begin{bmatrix} 3 & 11 \\ 15 & 25 \\ 20 & 29 \end{bmatrix}$

43. $A = \begin{bmatrix} 5 & 4 \\ -7 & 2 \\ 11 & 2 \end{bmatrix}, \quad B = \begin{bmatrix} 0 & 3 \\ 4 & 12 \\ 20 & 40 \end{bmatrix}$

44. $A = \begin{bmatrix} 6 & -5 & 7 \end{bmatrix}, \quad B = \begin{bmatrix} -1 \\ 4 \\ 8 \end{bmatrix}$

En los Ejercicios 45-48, realice las operaciones con matrices. Si no es posible, explique por qué.

45. $\begin{bmatrix} 7 & 3 \\ -1 & 5 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 10 & -20 \\ 14 & -3 \end{bmatrix}$

46. $\begin{bmatrix} -11 & 16 & 19 \\ -7 & -2 & 1 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 6 & 0 \\ 8 & -4 \\ -2 & 10 \end{bmatrix}$

47. $-2\begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 5 & -4 \\ 6 & 0 \end{bmatrix} + 8\begin{bmatrix} 7 & 1 \\ 1 & 2 \\ 1 & 4 \end{bmatrix}$

48. $-\begin{bmatrix} 8 & -1 & 8 \\ -2 & 4 & 12 \\ 0 & -6 & 0 \end{bmatrix} - 5\begin{bmatrix} -2 & 0 & -4 \\ 3 & -1 & 1 \\ 6 & 12 & -8 \end{bmatrix}$

En los Ejercicios 49 y 50, use la capacidad matricial de una calculadora de gráficas para evaluar la expresión.

49. $3\begin{bmatrix} 8 & -2 & 5 \\ 1 & 3 & -1 \end{bmatrix} + 6\begin{bmatrix} 4 & -2 & -3 \\ 2 & 7 & 6 \end{bmatrix}$

50. $-5\begin{bmatrix} 2 & 0 \\ 7 & -2 \\ 8 & 2 \end{bmatrix} + 4\begin{bmatrix} 4 & -2 \\ 6 & 11 \\ -1 & 3 \end{bmatrix}$

En los Ejercicios 51-54, despeje X de la ecuación, dadas

$$A = \begin{bmatrix} -4 & 0 \\ 1 & -5 \\ -3 & 2 \end{bmatrix} \quad \text{y} \quad B = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ -2 & 1 \\ 4 & 4 \end{bmatrix}.$$

51. $X = 2A - 3B$

52. $6X = 4A + 3B$

53. $3X + 2A = B$

54. $2A - 5B = 3X$

En los Ejercicios 55-58, encuentre AB, si es posible.

55. $A = \begin{bmatrix} 2 & -2 \\ 3 & 5 \end{bmatrix}, \quad B = \begin{bmatrix} -3 & 10 \\ 12 & 8 \end{bmatrix}$

56. $A = \begin{bmatrix} 5 & 4 \\ -7 & 2 \\ 11 & 2 \end{bmatrix}, \quad B = \begin{bmatrix} 4 & 12 \\ 20 & 40 \\ 15 & 30 \end{bmatrix}$

57. $A = \begin{bmatrix} 5 & 4 \\ -7 & 2 \\ 11 & 2 \end{bmatrix}, \quad B = \begin{bmatrix} 4 & 12 \\ 20 & 40 \end{bmatrix}$

58. $A = \begin{bmatrix} 6 & -5 & 7 \end{bmatrix}, \quad B = \begin{bmatrix} -1 \\ 4 \\ 8 \end{bmatrix}$

En los Ejercicios 59-66, realice las operaciones con matrices, si es posible. Si no lo es, explique por qué.

59. $\begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 5 & -4 \\ 6 & 0 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 6 & -2 & 8 \\ 4 & 0 & 0 \end{bmatrix}$

60. $\begin{bmatrix} 1 & 5 & 6 \\ 2 & -4 & 0 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 6 & -2 & 8 \\ 4 & 0 & 0 \end{bmatrix}$

61. $\begin{bmatrix} 1 & 5 & 6 \\ 2 & -4 & 0 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 6 & 4 \\ -2 & 0 \\ 8 & 0 \end{bmatrix}$

62. $\begin{bmatrix} 1 & 3 & 2 \\ 0 & 2 & -4 \\ 0 & 0 & 3 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 4 & -3 & 2 \\ 0 & 3 & -1 \\ 0 & 0 & 2 \end{bmatrix}$

63. $\begin{bmatrix} 1 & 2 & -1 \\ 0 & 4 & -2 \\ 1 & 1 & 3 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 1 & -1 & 2 \end{bmatrix}$

64. $\begin{bmatrix} 4 & -2 & 6 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} -2 & 1 \\ 0 & -3 \\ 2 & 0 \end{bmatrix}$

65. $\begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 6 & 0 \end{bmatrix}\left(\begin{bmatrix} 4 & 2 \\ -3 & 1 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} -2 & 4 \\ 0 & 4 \end{bmatrix}\right)$

66. $-3\begin{bmatrix} 1 & -1 \\ 4 & 2 \end{bmatrix}\left(\begin{bmatrix} 0 & 3 \\ 1 & 2 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 5 & -3 \end{bmatrix}\right)$

En los Ejercicios 67 y 68, use la capacidad matricial de una calculadora de gráficas para hallar el producto.

67. $\begin{bmatrix} 4 & 1 \\ 11 & -7 \\ 12 & 3 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 3 & -5 & 6 \\ 2 & -2 & -2 \end{bmatrix}$

68. $\begin{bmatrix} -2 & 3 & 10 \\ 4 & -2 & 2 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 1 & 1 \\ -5 & 2 \\ 3 & 2 \end{bmatrix}$

69. MANUFACTURA Una empresa de llantas tiene tres fábricas, cada una de las cuales produce dos modelos de llantas. El número de unidades del modelo i producido en la fábrica j en un día está representado por a_{ij} en la matriz

$$A = \begin{bmatrix} 80 & 120 & 140 \\ 40 & 100 & 80 \end{bmatrix}.$$

Encuentre los niveles de producción si ésta se disminuye en 5%.

70. MANUFACTURA Una compañía de herramientas eléctricas tiene cuatro plantas de manufactura, cada una de las cuales produce tres tipos de herramientas eléctricas sin cables de línea. El número i de unidades de la herramienta eléctrica sin cables de línea producido en la planta j en un día está representado por a_{ij} en la matriz

$$A = \begin{bmatrix} 80 & 70 & 90 & 40 \\ 50 & 30 & 80 & 20 \\ 90 & 60 & 100 & 50 \end{bmatrix}.$$

Encuentre los niveles de producción si ésta se aumenta en 20%.

71. MANUFACTURA Una compañía fabricante de aparatos electrónicos produce tres modelos de audífonos que son enviados a dos almacenes. El número de unidades del modelo i que son enviados al almacén j está representado por a_{ij} en la matriz

$$A = \begin{bmatrix} 8200 & 7400 \\ 6500 & 9800 \\ 5400 & 4800 \end{bmatrix}.$$

El precio por unidad está representado por la matriz

$$B = [\$79.99 \quad \$109.95 \quad \$189.99].$$

Calcule BA e interprete el resultado.

72. CARGOS POR USO DE CELULARES Los cargos de quien llama paga (en dólares por minuto) de dos compañías de telefonía celular, por llamadas dentro del área de cobertura, llamadas de *roaming* regional y llamadas fuera de la zona de cobertura están representados por C.

$$C = \begin{array}{c} \text{Compañía} \\ \overbrace{} \\ \begin{matrix} \text{A} & \text{B} \end{matrix} \\ \begin{bmatrix} 0.07 & 0.095 \\ 0.10 & 0.08 \\ 0.28 & 0.25 \end{bmatrix} \begin{matrix} \text{Dentro} \\ \text{\textit{Roaming} regional} \\ \text{Fuera} \end{matrix} \end{array} \left.\vphantom{\begin{matrix} a \\ b \\ c \end{matrix}}\right\} \text{Zona de cobertura}$$

Cada mes, usted planea usar 120 minutos en llamadas dentro de la zona de cobertura, 80 minutos en llamadas de *roaming* regional y 20 minutos en llamadas fuera de la zona de cobertura.

(a) Escriba una matriz T que represente los tiempos gastados en teléfono para cada tipo de llamada.

(b) Calcule TC e interprete el resultado.

8.3 En los Ejercicios 73-76, demuestre que B es la inversa de A.

73. $A = \begin{bmatrix} -4 & -1 \\ 7 & 2 \end{bmatrix}, \quad B = \begin{bmatrix} -2 & -1 \\ 7 & 4 \end{bmatrix}$

74. $A = \begin{bmatrix} 5 & -1 \\ 11 & -2 \end{bmatrix}, \quad B = \begin{bmatrix} -2 & 1 \\ -11 & 5 \end{bmatrix}$

75. $A = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \\ 6 & 2 & 3 \end{bmatrix}, \quad B = \begin{bmatrix} -2 & -3 & 1 \\ 3 & 3 & -1 \\ 2 & 4 & -1 \end{bmatrix}$

76. $A = \begin{bmatrix} 1 & -1 & 0 \\ -1 & 0 & -1 \\ 8 & -4 & 2 \end{bmatrix}, \quad B = \begin{bmatrix} -2 & 1 & \frac{1}{2} \\ -3 & 1 & \frac{1}{2} \\ 2 & -2 & -\frac{1}{2} \end{bmatrix}$

En los Ejercicios 77-80, encuentre la inversa de la matriz (si existe).

77. $\begin{bmatrix} -6 & 5 \\ -5 & 4 \end{bmatrix}$

78. $\begin{bmatrix} -3 & -5 \\ 2 & 3 \end{bmatrix}$

79. $\begin{bmatrix} 2 & 0 & 3 \\ -1 & 1 & 1 \\ 2 & -2 & 1 \end{bmatrix}$

80. $\begin{bmatrix} 0 & -2 & 1 \\ -5 & -2 & -3 \\ 7 & 3 & 4 \end{bmatrix}$

En los Ejercicios 81-84, use la capacidad matricial de una calculadora de gráficas para hallar la inversa de la matriz (si existe).

81. $\begin{bmatrix} -1 & -2 & -2 \\ 3 & 7 & 9 \\ 1 & 4 & 7 \end{bmatrix}$

82. $\begin{bmatrix} 1 & 4 & 6 \\ 2 & -3 & 1 \\ -1 & 18 & 16 \end{bmatrix}$

83. $\begin{bmatrix} 1 & 3 & 1 & 6 \\ 4 & 4 & 2 & 6 \\ 3 & 4 & 1 & 2 \\ -1 & 2 & -1 & -2 \end{bmatrix}$

84. $\begin{bmatrix} 8 & 0 & 2 & 8 \\ 4 & -2 & 0 & -2 \\ 1 & 2 & 1 & 4 \\ -1 & 4 & 1 & 1 \end{bmatrix}$

En los Ejercicios 85-92, use la fórmula siguiente para hallar la inversa de la matriz, si existe.

$$A^{-1} = \frac{1}{ad - bc}\begin{bmatrix} d & -b \\ -c & a \end{bmatrix}$$

85. $\begin{bmatrix} -7 & 2 \\ -8 & 2 \end{bmatrix}$

86. $\begin{bmatrix} 10 & 4 \\ 7 & 3 \end{bmatrix}$

87. $\begin{bmatrix} -12 & 6 \\ 10 & -5 \end{bmatrix}$

88. $\begin{bmatrix} -18 & -15 \\ -6 & -5 \end{bmatrix}$

89. $\begin{bmatrix} -\frac{1}{2} & 20 \\ \frac{3}{10} & -6 \end{bmatrix}$

90. $\begin{bmatrix} -\frac{3}{4} & \frac{5}{2} \\ -\frac{4}{5} & -\frac{8}{3} \end{bmatrix}$

91. $\begin{bmatrix} 0.5 & 0.1 \\ -0.2 & -0.4 \end{bmatrix}$

92. $\begin{bmatrix} 1.6 & -3.2 \\ 1.2 & -2.4 \end{bmatrix}$

En los Ejercicios 93-104, use una matriz inversa para resolver (si es posible) el sistema de ecuaciones lineales.

93. $\begin{cases} -x + 4y = 8 \\ 2x - 7y = -5 \end{cases}$

94. $\begin{cases} 5x - y = 13 \\ -9x + 2y = -24 \end{cases}$

95. $\begin{cases} -3x + 10y = 8 \\ 5x - 17y = -13 \end{cases}$

96. $\begin{cases} 4x - 2y = -10 \\ -19x + 9y = 47 \end{cases}$

97. $\begin{cases} \frac{1}{2}x + \frac{1}{3}y = 2 \\ -3x + 2y = 0 \end{cases}$

98. $\begin{cases} -\frac{5}{6}x + \frac{3}{8}y = -2 \\ 4x - 3y = 0 \end{cases}$

99. $\begin{cases} 0.3x + 0.7y = 10.2 \\ 0.4x + 0.6y = 7.6 \end{cases}$

100. $\begin{cases} 3.5x - 4.5y = 8 \\ 2.5x - 7.5y = 25 \end{cases}$

101. $\begin{cases} 3x + 2y - z = 6 \\ x - y + 2z = -1 \\ 5x + y + z = 7 \end{cases}$

102. $\begin{cases} -x + 4y - 2z = 12 \\ 2x - 9y + 5z = -25 \\ -x + 5y - 4z = 10 \end{cases}$

103. $\begin{cases} -2x + y + 2z = -13 \\ -x - 4y + z = -11 \\ -y - z = 0 \end{cases}$

104. $\begin{cases} 3x - y + 5z = -14 \\ -x + y + 6z = 8 \\ -8x + 4y - z = 44 \end{cases}$

En los Ejercicios 105-110, use la capacidad matricial de una calculadora de gráficas para resolver (si es posible) el sistema de ecuaciones lineales.

105. $\begin{cases} x + 2y = -1 \\ 3x + 4y = -5 \end{cases}$

106. $\begin{cases} x + 3y = 23 \\ -6x + 2y = -18 \end{cases}$

107. $\begin{cases} \frac{6}{5}x - \frac{4}{7}y = \frac{6}{5} \\ -\frac{12}{5}x + \frac{12}{7}y = -\frac{17}{5} \end{cases}$

108. $\begin{cases} 5x + 10y = 7 \\ 2x + y = -98 \end{cases}$

109. $\begin{cases} -3x - 3y - 4z = 2 \\ y + z = -1 \\ 4x + 3y + 4z = -1 \end{cases}$

110. $\begin{cases} x - 3y - 2z = 8 \\ -2x + 7y + 3z = -19 \\ x - y - 3z = 3 \end{cases}$

8.4 En los Ejercicios 111-114, encuentre el determinante de la matriz.

111. $\begin{bmatrix} 8 & 5 \\ 2 & -4 \end{bmatrix}$

112. $\begin{bmatrix} -9 & 11 \\ 7 & -4 \end{bmatrix}$

113. $\begin{bmatrix} 50 & -30 \\ 10 & 5 \end{bmatrix}$

114. $\begin{bmatrix} 14 & -24 \\ 12 & -15 \end{bmatrix}$

En los Ejercicios 115-118, encuentre todos los (a) menores y (b) cofactores de la matriz.

115. $\begin{bmatrix} 2 & -1 \\ 7 & 4 \end{bmatrix}$

116. $\begin{bmatrix} 3 & 6 \\ 5 & -4 \end{bmatrix}$

117. $\begin{bmatrix} 3 & 2 & -1 \\ -2 & 5 & 0 \\ 1 & 8 & 6 \end{bmatrix}$

118. $\begin{bmatrix} 8 & 3 & 4 \\ 6 & 5 & -9 \\ -4 & 1 & 2 \end{bmatrix}$

En los Ejercicios 119-128, encuentre el determinante de la matriz. Expanda por cofactores en el renglón o columna que parezca hacer más fácil el cálculo.

119. $\begin{bmatrix} -2 & 0 & 0 \\ 2 & -1 & 0 \\ -1 & 1 & -3 \end{bmatrix}$

120. $\begin{bmatrix} 0 & 1 & -2 \\ 0 & 1 & 2 \\ -1 & -1 & 3 \end{bmatrix}$

121. $\begin{bmatrix} 4 & 1 & -1 \\ 2 & 3 & 2 \\ 1 & -1 & 0 \end{bmatrix}$

122. $\begin{bmatrix} -1 & -2 & 1 \\ 2 & 3 & 0 \\ -5 & -1 & 3 \end{bmatrix}$

123. $\begin{bmatrix} -2 & 4 & 1 \\ -6 & 0 & 2 \\ 5 & 3 & 4 \end{bmatrix}$

124. $\begin{bmatrix} 1 & 1 & 4 \\ -4 & 1 & 2 \\ 0 & 1 & -1 \end{bmatrix}$

125. $\begin{bmatrix} 1 & 2 & -1 & 0 \\ 1 & 2 & -4 & 1 \\ 2 & -4 & -3 & 1 \\ 2 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$

126. $\begin{bmatrix} 1 & -2 & 1 & 2 \\ 4 & 1 & 4 & 1 \\ 2 & 3 & 3 & 0 \\ 0 & -2 & -4 & 2 \end{bmatrix}$

127. $\begin{bmatrix} 3 & 0 & -4 & 0 \\ 0 & 8 & 1 & 2 \\ 6 & 1 & 8 & 2 \\ 0 & 3 & -4 & 1 \end{bmatrix}$

128. $\begin{bmatrix} -5 & 6 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & 2 \\ -3 & 4 & -5 & 1 \\ 1 & 6 & 0 & 3 \end{bmatrix}$

8.5 En los Ejercicios 129-132, use la regla de Cramer para resolver (si es posible) el sistema de ecuaciones.

129. $\begin{cases} 5x - 2y = 6 \\ -11x + 3y = -23 \end{cases}$

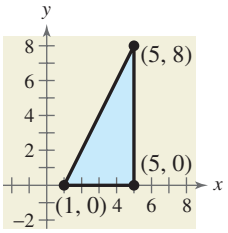
130. $\begin{cases} 3x + 8y = -7 \\ 9x - 5y = 37 \end{cases}$

131. $\begin{cases} -2x + 3y - 5z = -11 \\ 4x - y + z = -3 \\ -x - 4y + 6z = 15 \end{cases}$

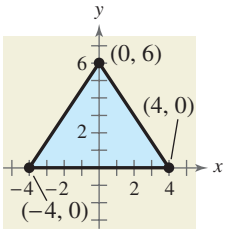
132. $\begin{cases} 5x - 2y + z = 15 \\ 3x - 3y - z = -7 \\ 2x - y - 7z = -3 \end{cases}$

En los Ejercicios 133-136, use un determinante y los vértices dados de un triángulo para hallar el área del triángulo.

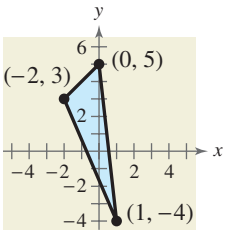
133.



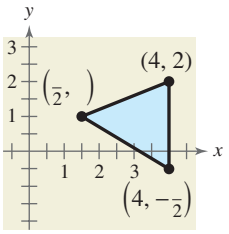
134.



135.



136.



En los Ejercicios 137 y 138, use un determinante para establecer si los puntos son colineales.

137. $(-1, 7), (3, -9), (-3, 15)$

138. $(0, -5), (-2, -6), (8, -1)$

En los Ejercicios 139-142, use un determinante para hallar una ecuación de la recta que pasa por los puntos.

139. $(-4, 0), (4, 4)$

140. $(2, 5), (6, -1)$

141. $\left(-\frac{5}{2}, 3\right), \left(\frac{7}{2}, 1\right)$

142. $(-0.8, 0.2), (0.7, 3.2)$

En los Ejercicios 143 y 144, (a) escriba las matrices no codificadas de renglón de 1×3 para el mensaje y (b) codifique el mensaje usando la matriz codificadora.

	Mensaje	*Matriz codificadora*
143.	LOOK OUT BELOW	$\begin{bmatrix} 2 & -2 & 0 \\ 3 & 0 & -3 \\ -6 & 2 & 3 \end{bmatrix}$
144.	HEAD DUE WEST	$\begin{bmatrix} 1 & 2 & 2 \\ 3 & 7 & 9 \\ -1 & -4 & -7 \end{bmatrix}$

En los Ejercicios 145 y 146, decodifique el criptograma usando la inversa de la matriz

$$A = \begin{bmatrix} -5 & 4 & -3 \\ 10 & -7 & 6 \\ 8 & -6 & 5 \end{bmatrix}.$$

145. $-5 \quad 11 \quad -2 \quad 370 \quad -265 \quad 225 \quad -57 \quad 48 \quad -33 \quad 32 \quad -15 \quad 20 \quad 245 \quad -171 \quad 147$

146. $145 \quad -105 \quad 92 \quad 264 \quad -188 \quad 160 \quad 23 \quad -16 \quad 15 \quad 129 \quad -84 \quad 78 \quad -9 \quad 8 \quad -5 \quad 159 \quad -118 \quad 100 \quad 219 \quad -152 \quad 133 \quad 370 \quad -265 \quad 225 \quad -105 \quad 84 \quad -63$

EXPLORACIÓN

¿VERDADERO O FALSO? En los Ejercicios 147 y 148, determine si la proposición es verdadera o falsa. Justifique su respuesta.

147. Es posible hallar el determinante de una matriz de 4×5.

148. $\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} + c_1 & a_{32} + c_2 & a_{33} + c_3 \end{vmatrix} =$

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ c_1 & c_2 & c_3 \end{vmatrix}$$

149. Use la capacidad matricial de una calculadora de gráficas para hallar la inversa de la matriz siguiente

$$A = \begin{bmatrix} 1 & -3 \\ -2 & 6 \end{bmatrix}.$$

¿Qué mensaje aparece en la pantalla? ¿Por qué la pantalla de la calculadora lo presenta?

150. ¿Bajo qué condiciones una matriz tiene inversa?

151. **ESCRITURA** ¿Qué significa el cofactor de un elemento de una matriz? ¿Cómo se usan cofactores para hallar el determinante de la matriz?

152. A tres personas se les pide resuelvan un sistema de ecuaciones usando una matriz aumentada. Cada persona redujo la matriz a forma escalonada por renglones. Las matrices reducidas fueron

$$\left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & \vdots & 3 \\ 0 & 1 & \vdots & 1 \end{array}\right], \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & \vdots & 1 \\ 0 & 1 & \vdots & 1 \end{array}\right],$$

y

$$\left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & \vdots & 3 \\ 0 & 0 & \vdots & 0 \end{array}\right].$$

¿Las tres matrices pueden estar bien? Explique.

153. **PIÉNSELO** Describa la forma escalonada por renglones de una matriz aumentada que corresponde a un sistema de ecuaciones lineales que tiene una solución única.

154. Despeje λ de la siguiente ecuación.

$$\begin{vmatrix} 2 - \lambda & 5 \\ 3 & -8 - \lambda \end{vmatrix} = 0$$

8 EXAMEN DEL CAPÍTULO

En www.CalcChat.com vea las soluciones a los ejercicios impares.

Tome este examen como si lo hiciera en clase. Cuando termine, verifique su trabajo contra las respuestas dadas al final del libro.

En los Ejercicios 1 y 2, escriba la matriz en forma escalonada por renglones reducida.

1. $\begin{bmatrix} 1 & -1 & 5 \\ 6 & 2 & 3 \\ 5 & 3 & -3 \end{bmatrix}$

2. $\begin{bmatrix} 1 & 0 & -1 & 2 \\ -1 & 1 & 1 & -3 \\ 1 & 1 & -1 & 1 \\ 3 & 2 & -3 & 4 \end{bmatrix}$

3. Escriba la matriz aumentada correspondiente al sistema de ecuaciones y resuelva el sistema.

$$\begin{cases} 4x + 3y - 2z = 14 \\ -x - y + 2z = -5 \\ 3x + y - 4z = 8 \end{cases}$$

4. Encuentre (a) $A - B$, (b) $3A$, (c) $3A - 2B$ y (d) AB (si es posible).

$$A = \begin{bmatrix} 6 & 5 \\ -5 & -5 \end{bmatrix}, \quad B = \begin{bmatrix} 5 & 0 \\ -5 & -1 \end{bmatrix}$$

En los Ejercicios 5 y 6, encuentre la inversa de la matriz (si existe).

5. $\begin{bmatrix} -4 & 3 \\ 5 & -2 \end{bmatrix}$

6. $\begin{bmatrix} -2 & 4 & -6 \\ 2 & 1 & 0 \\ 4 & -2 & 5 \end{bmatrix}$

7. Use el resultado del ejercicio 5 para resolver el sistema.

$$\begin{cases} -4x + 3y = 6 \\ 5x - 2y = 24 \end{cases}$$

En los Ejercicios 8 a 10, evalúe el determinante de la matriz.

8. $\begin{bmatrix} -6 & 4 \\ 10 & 12 \end{bmatrix}$

9. $\begin{bmatrix} \frac{5}{2} & \frac{13}{4} \\ -8 & \frac{6}{5} \end{bmatrix}$

10. $\begin{bmatrix} 6 & -7 & 2 \\ 3 & -2 & 0 \\ 1 & 5 & 1 \end{bmatrix}$

En los Ejercicios 11 y 12, use la regla de Cramer para resolver (si es posible) el sistema de ecuaciones.

11. $\begin{cases} 7x + 6y = 9 \\ -2x - 11y = -49 \end{cases}$

12. $\begin{cases} 6x - y + 2z = -4 \\ -2x + 3y - z = 10 \\ 4x - 4y + z = -18 \end{cases}$

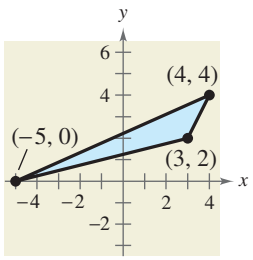


FIGURA PARA EJERCICIO 13

13. Use un determinante para hallar el área del triángulo en la figura.

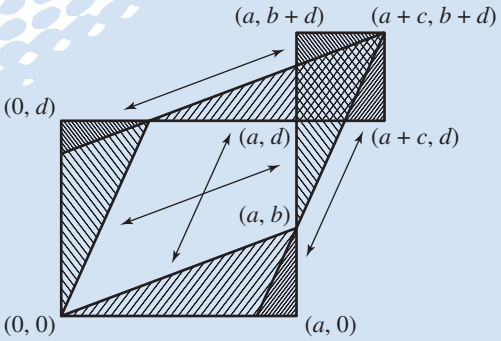
14. Encuentre las matrices no codificadas de renglón de 1×3, para el mensaje KNOCK ON WOOD (TOCA MADERA). A continuación codifique el mensaje usando la matriz A siguiente.

$$A = \begin{bmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & -1 \\ 6 & -2 & -3 \end{bmatrix}$$

15. Cien litros de una solución al 50% se obtiene al mezclar una solución al 60% con una solución al 20%. ¿Cuántos litros de cada solución deben usarse para obtener la mezcla deseada?

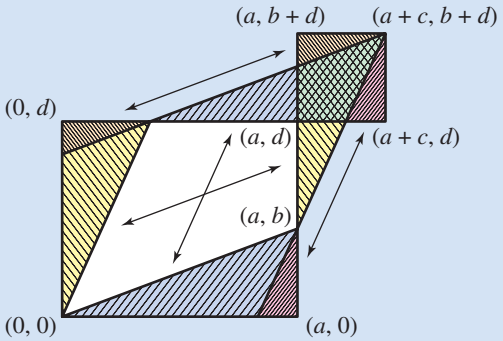
DEMOSTRACIONES EN MATEMÁTICAS

Demostraciones sin palabras son figuras o diagramas que dan una interpretación visual de por qué un teorema o proposición es verdadera. También pueden ser un punto de partida para escribir una demostración formal. Lo siguiente demuestra que un determinante de 2×2 es el área de un paralelogramo.



$$\begin{vmatrix} a & b \\ c & d \end{vmatrix} = ad - bc = \|\square\| - \|\square\| = \|\square\|$$

La siguiente es una versión, codificada en color, de la demostración junto con una breve explicación de por qué funciona.



$$\begin{vmatrix} a & b \\ c & d \end{vmatrix} = ad - bc = \|\square\| - \|\square\| = \|\square\|$$

Área de $\square$ = Área de $\triangle$ anaranjado + área de $\triangle$ amarillo + área de $\triangle$ azul + área de $\triangle$ rosa + área de cuadrilátero blanco

Área de $\square$ = Área de $\triangle$ anaranjado + área de $\triangle$ rosa + área de cuadrilátero verde

Área de $\square$ = Área de cuadrilátero blanco + área de $\triangle$ azul + área de $\triangle$ amarillo − área de cuadrilátero verde
= Área de $\square$ − área de $\square$

Tomado de "Proof Without Words", de Solomon W. Golomb, *Mathematics Magazine*, marzo de 1985, vol. 58, núm. 2, pág. 107. Reproducido con autorización.

RESOLUCIÓN DE PROBLEMAS

Este conjunto de ejercicios, difíciles y que invitan a meditar, amplía y explora más a fondo los conceptos aprendidos en este capítulo.

1. Las columnas de la matriz T muestran las coordenadas de los vértices de un triángulo. La matriz A es una matriz de transformación.

$$A = \begin{bmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} \qquad T = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 1 & 4 & 2 \end{bmatrix}$$

(a) Encuentre AT y AAT. A continuación, trace el triángulo original y los dos triángulos transformados. ¿Qué transformación representa A?

(b) Dado el triángulo determinado por AAT, describa el proceso de transformación que produce el triángulo determinado por AT y a continuación el triángulo determinado por T

2. Las matrices muestran el número de personas (en miles) que vivían en cada región de Estados Unidos en el año 2000, así como el de las proyectadas (en miles) para vivir en cada región en el año 2015. Las poblaciones regionales están separadas en tres categorías de edades. (Fuente: U.S. Census Bureau)

2000

	0–17	18–64	65 +
Noreste	13 048	33 174	7372
Medio Oeste	16 648	39 486	8259
Sur	25 567	62 232	12 438
Montañas	4935	11 208	2030
Pacífico	12 097	28 037	4892

2015

	0–17	18–64	65 +
Noreste	12 441	35 288	8837
Medio Oeste	16 363	42 249	9957
Sur	29 372	73 495	17 574
Montañas	6016	14 231	3338
Pacífico	12 826	33 294	7085

(a) La población total en el año 2000 era aproximadamente 281 422 000 y la población total proyectada en el año 2015 es 322 366 000. Reescriba las matrices para dar la información como porcentajes de la población total.

(b) Escriba una matriz que dé el cambio proyectado en el porcentaje de la población en cada región y grupo de edad del año 2000 al año 2015.

(c) Con base en el resultado del inciso (b), ¿cuál(es) región(es) y grupo(s) de edad están proyectados para mostrar crecimiento relativo del año 2000 al año 2015?

3. Determine si la matriz es idempotente (su valor no cambia después de multiplicarse por sí misma). Una matriz cuadrada es **idempotente** si $A^2 = A$.

(a) $\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$ (b) $\begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}$

(c) $\begin{bmatrix} 2 & 3 \\ -1 & -2 \end{bmatrix}$ (d) $\begin{bmatrix} 2 & 3 \\ 1 & 2 \end{bmatrix}$

4. Sea $A = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ -2 & 1 \end{bmatrix}$.

(a) Demuestre que $A^2 - 2A + 5I = O$, donde I es la matriz identidad de orden 2.

(b) Demuestre que $A^{-1} = \frac{1}{5}(2I - A)$.

(c) Demuestre en general que para cualquier matriz cuadrada que satisfaga

$$A^2 - 2A + 5I = O$$

la inversa de A está dada por

$$A^{-1} = \tfrac{1}{5}(2I - A).$$

5. Dos compañías competidoras ofrecen televisión por satélite a una ciudad de 100 000 familias. El sistema satelital Gold tiene 25 000 suscriptores y la red satelital Galaxy tiene 30 000. (Las otras 45 000 familias no están suscritas.) Los cambios de porcentaje en suscripciones satelitales cada año se muestran en la matriz siguiente.

		Cambios porcentuales: A Gold	A Galaxy	No suscrito
Cambios porcentuales	De Gold	0.70	0.15	0.15
	De Galaxy	0.20	0.80	0.15
	De no suscrito	0.10	0.05	0.70

(a) Encuentre el número de suscriptores que tendrá cada compañía en 1 año usando multiplicación de matrices. Explique cómo obtuvo su respuesta.

(b) Encuentre el número de suscriptores que tendrá cada compañía en 2 años usando multiplicación de matrices. Explique cómo obtuvo su respuesta.

(c) Encuentre el número de suscriptores que tendrá cada compañía en 3 años usando multiplicación de matrices. Explique cómo obtuvo su respuesta.

(d) ¿Qué está pasando con el número de suscriptores a cada compañía? ¿Qué está pasando al número de no suscriptores?

6. Encuentre x tal que la matriz sea igual a su propia inversa.

$$A = \begin{bmatrix} 3 & x \\ -2 & -3 \end{bmatrix}$$

7. Encuentre x tal que la matriz sea singular.

$$A = \begin{bmatrix} 4 & x \\ -2 & -3 \end{bmatrix}$$

8. Encuentre un ejemplo de una matriz singular de 2×2 que satisfaga $A^2 = A$.

9. Compruebe la siguiente ecuación.

$$\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ a & b & c \\ a^2 & b^2 & c^2 \end{vmatrix} = (a-b)(b-c)(c-a)$$

10. Compruebe la siguiente ecuación.

$$\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ a & b & c \\ a^3 & b^3 & c^3 \end{vmatrix} = (a-b)(b-c)(c-a)(a+b+c)$$

11. Compruebe la siguiente ecuación.

$$\begin{vmatrix} x & 0 & c \\ -1 & x & b \\ 0 & -1 & a \end{vmatrix} = ax^2 + bx + c$$

12. Use la ecuación del ejercicio 11 como modelo para hallar un determinante que sea igual a $ax^3 + bx^2 + cx + d$.

13. Las masas atómicas de tres compuestos se muestran en la tabla. Use un sistema lineal y la regla de Cramer para hallar las masas atómicas del azufre (S), nitrógeno (N) y flúor (F).

Compuesto	Fórmula	Masa atómica
Tetranitrato de tetrasulfuro	S_4N_4	184
Hexafluoruro de azufre	SF_6	146
Tetrafluoruro de dinitrógeno	N_2F_4	104

14. Un paquete de iluminación de un pasillo incluye un transformador, cierto tramo de alambre y cierto número de luces en el alambre. El precio de cada paquete de iluminación depende de la longitud del alambre y del número de luces en éste. Use la siguiente información para hallar el costo de un transformador, el costo por pie de alambre y el costo de una luz. Suponga que el costo de cada elemento es igual en cada paquete de iluminación.

- Un paquete que contiene un transformador, 25 pies de alambre y 5 luces cuesta $20.
- Un paquete que contiene un transformador, 50 pies de alambre y 15 luces cuesta $35.
- Un paquete que contiene un transformador, 100 pies de alambre y 20 luces cuesta $50.

15. La **transpuesta** de una matriz, denotada A^T, se forma al escribir sus columnas como renglones. Encuentre la transpuesta de cada matriz y verifique que $(AB)^T = B^TA^T$.

$$A = \begin{bmatrix} -1 & 1 & -2 \\ 2 & 0 & 1 \end{bmatrix}, \quad B = \begin{bmatrix} -3 & 0 \\ 1 & 2 \\ 1 & -1 \end{bmatrix}$$

16. Use la inversa de la matriz A para decodificar el criptograma.

$$A = \begin{bmatrix} 1 & -2 & 2 \\ 1 & 1 & -3 \\ 1 & -1 & 4 \end{bmatrix}$$

23 13 −34 31 −34 63 25 −17 61
24 14 −37 41 −17 −8 20 −29 40
38 −56 116 13 −11 1 22 −3 −6
41 −53 85 28 −32 16

17. Un experto en códigos interceptó el siguiente mensaje codificado.

45 −35 38 −30 18 −18 35 −30 81 −60
42 −28 75 −55 2 −2 22 −21 15 −10

Sea

$$A^{-1} = \begin{bmatrix} w & x \\ y & z \end{bmatrix}.$$

(a) Usted sabe que $[45 \quad -35]A^{-1} = [10 \quad 15]$ y que $[38 \quad -30]A^{-1} = [8 \quad 14]$, donde A^{-1} es la inversa de la matriz codificadora A. Escriba y resuelva dos sistemas de ecuaciones para hallar w, x, y y z.

(b) Decodifique el mensaje.

18. Sea

$$A = \begin{bmatrix} 6 & 4 & 1 \\ 0 & 2 & 3 \\ 1 & 1 & 2 \end{bmatrix}.$$

Use una calculadora de gráficas para hallar A^{-1}. Compare $|A^{-1}|$ con $|A|$. Haga una conjetura acerca del determinante de la inversa de una matriz.

19. Sea A una matriz de $n \times n$ cada uno de cuyos renglones se suma a cero. Encuentre $|A|$.

20. Considere matrices de la forma

$$A = \begin{bmatrix} 0 & a_{12} & a_{13} & a_{14} & \cdots & a_{1n} \\ 0 & 0 & a_{23} & a_{24} & \cdots & a_{2n} \\ 0 & 0 & 0 & a_{34} & \cdots & a_{3n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \cdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \cdots & a_{(n-1)n} \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 \end{bmatrix}.$$

(a) Escriba una matriz de 2×2 y una matriz de 3×3 en la forma de A.

(b) Use una calculadora de gráficas para elevar cada una de las matrices a potencias superiores. Describa el resultado.

(c) Use el resultado del inciso (b) para hacer una conjetura acerca de potencias de A si A es una matriz de 4×4. Use una calculadora de gráficas para probar su conjetura.

(d) Use los resultados de los incisos (b) y (c) para hacer una conjetura acerca de potencias de A si A es una matriz de $n \times n$.

9 Sucesiones, series y probabilidad

9.1 Sucesiones y series
9.2 Sucesiones aritméticas y sumas parciales
9.3 Sucesiones geométricas y series
9.4 Inducción matemática
9.5 El teorema del binomio
9.6 Principios de conteo
9.7 Probabilidad

En matemáticas

Se usan sucesiones y series para describir patrones algebraicos. La inducción matemática se emplea para demostrar fórmulas. El teorema del binomio se utiliza para calcular coeficientes binomiales. La teoría de probabilidad se usa para determinar la probabilidad de un evento.

En la vida real

Los conceptos expuestos en este capítulo se usan para modelar depreciación, ventas, interés compuesto, crecimiento de la población y otros aspectos de la vida real. Por ejemplo, la deuda federal de Estados Unidos puede modelarse mediante una sucesión, la cual puede ocuparse luego para identificar patrones en los datos. (Vea el Ejercicio 125, página 649.)

Jonathan Larsen/Shutterstock

EN CARRERAS

Hay numerosas carreras que usan los conceptos presentados en este capítulo. A continuación se indican algunas.

- Economista en finanzas públicas
  Ejercicios 127-130, pág. 669
- Jugador profesional de póquer
  Ejemplo 9, página 695
- Técnico en aseguramiento de calidad
  Ejemplo 11, página 706
- Investigador de encuestas
  Ejercicio 45, página 708

9.1 Sucesiones y series

Lo que debe aprender

- Usar notación de sucesiones para escribir los términos correspondientes.
- Usar notación factorial.
- Usar notación sigma para escribir sumas.
- Hallar las sumas de series
- Usar sucesiones y series para modelar y resolver problemas de la vida real.

Por qué debe aprenderlo

Se pueden usar sucesiones y series para modelar problemas de la vida real. Por ejemplo, en el Ejercicio 123 en la página 649 se usan sucesiones para modelar el número de tiendas Best Buy de 2002 a 2007.

Sucesiones

En matemáticas, la palabra *sucesión* se utiliza en forma muy semejante al idioma común y corriente. Decir que un conjunto se hace aparecer en lista en sucesión quiere decir que está ordenado de modo que tiene un primer miembro, segundo miembro, tercer miembro, etcétera. Dos ejemplos son 1, 2, 3, 4, . . . y 1, 3, 5, 7, . . .

Matemáticamente hablando, se puede considerar una sucesión como una *función* cuyo dominio es el conjunto de los enteros positivos.

$$f(1) = a_1,\ f(2) = a_2,\ f(3) = a_3,\ f(4) = a_4, \ldots, f(n) = a_n, \ldots$$

Más que usar notación de funciones, sin embargo, las sucesiones por lo general se escriben usando notación de subíndices, como se indica en la siguiente definición.

Definición de sucesión

Una **sucesión infinita** es una función cuyo dominio es el conjunto de los enteros positivos. Los valores de función

$$a_1, a_2, a_3, a_4, \ldots, a_n, \ldots$$

son los **términos** de la sucesión. Si el dominio de la función está formado sólo por los primeros n enteros positivos, la sucesión es una **sucesión finita.**

A veces es conveniente empezar a poner subíndices en una sucesión con 0 en lugar de 1 para que los términos de la sucesión sean $a_0, a_1, a_2, a_3, \ldots$. Cuando éste es el caso, el dominio incluye el 0.

Ejemplo 1 Escribir los términos de una sucesión

Escriba los primeros cuatro términos de las sucesiones dadas por

a. $a_n = 3n - 2$ **b.** $a_n = 3 + (-1)^n$.

Solución

a. Los primeros cuatro términos de la sucesión dada por $a_n = 3n - 2$ son

$a_1 = 3(1) - 2 = 1$ 1er término

$a_2 = 3(2) - 2 = 4$ 2º término

$a_3 = 3(3) - 2 = 7$ 3er término

$a_4 = 3(4) - 2 = 10.$ 4º término

b. Los primeros cuatro términos de la sucesión dada por $a_n = 3 + (-1)^n$ son

$a_1 = 3 + (-1)^1 = 3 - 1 = 2$ 1er término

$a_2 = 3 + (-1)^2 = 3 + 1 = 4$ 2º término

$a_3 = 3 + (-1)^3 = 3 - 1 = 2$ 3er término

$a_4 = 3 + (-1)^4 = 3 + 1 = 4.$ 4º término

PUNTO *de repaso* Ahora trate de hacer el Ejercicio 9.

Tip de estudio

Los subíndices de una sucesión constituyen el dominio de ésta y sirven para identificar la ubicación de los términos dentro de la sucesión. Por ejemplo, a_4 es el cuarto término de la sucesión, y a_n es el n-ésimo término. Se puede usar cualquier variable como subíndice. Los subíndices de variables que más se utilizan en notación de sucesiones y series son i, j, k y n.

Ejemplo 2 Una sucesión cuyos términos se alternan en signos

Escriba los primeros cinco términos de la sucesión dada por $a_n = \dfrac{(-1)^n}{2n + 1}$.

Solución

Los cinco primeros términos de la sucesión son como sigue.

$$a_1 = \frac{(-1)^1}{2(1) + 1} = \frac{-1}{2 + 1} = -\frac{1}{3} \qquad \text{1er término}$$

$$a_2 = \frac{(-1)^2}{2(2) + 1} = \frac{1}{4 + 1} = \frac{1}{5} \qquad \text{2º término}$$

$$a_3 = \frac{(-1)^3}{2(3) + 1} = \frac{-1}{6 + 1} = -\frac{1}{7} \qquad \text{3er término}$$

$$a_4 = \frac{(-1)^4}{2(4) + 1} = \frac{1}{8 + 1} = \frac{1}{9} \qquad \text{4º término}$$

$$a_5 = \frac{(-1)^5}{2(5) + 1} = \frac{-1}{10 + 1} = -\frac{1}{11} \qquad \text{5º término}$$

PUNTO *de repaso* Ahora trate de hacer el Ejercicio 25.

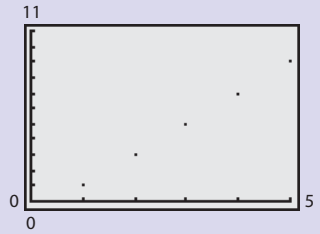
Simplemente poner en lista los primeros pocos términos no es suficiente para definir una sucesión única; *debe darse el n-ésimo* término. Para ver esto, considere las siguientes sucesiones que tienen los mismos primeros tres términos las dos.

$$\frac{1}{2}, \frac{1}{4}, \frac{1}{8}, \frac{1}{16}, \ldots, \frac{1}{2^n}, \ldots$$

$$\frac{1}{2}, \frac{1}{4}, \frac{1}{8}, \frac{1}{15}, \ldots, \frac{6}{(n + 1)(n^2 - n + 6)}, \ldots$$

TECNOLOGÍA

Para graficar una sucesión usando una calculadora de gráficas, ponga el modo en *sequence* y *dot* e ingrese la sucesión. La gráfica de la sucesión del Ejemplo 3(a) se muestra abajo. Se puede usar la función *trace* o la función *value* para identificar los términos.



Ejemplo 3 Hallar el *n*-ésimo término de una sucesión

Escriba una expresión para el aparente n-ésimo término (a_n) de cada sucesión.

a. $1, 3, 5, 7, \ldots$ **b.** $2, -5, 10, -17, \ldots$

Solución

a. n: 1 2 3 4 . . . n

Términos: 1 3 5 7 . . . a_n

Patrón aparente: cada término es 1 menos que dos veces n, lo cual implica que

$$a_n = 2n - 1.$$

b. n: 1 2 3 4. . . n

Términos: 2 −5 10 −17 . . . a_n

Patrón aparente: los términos tienen signos alternados, siendo negativos los de posiciones pares. Cada término es 1 más que el cuadrado de n, lo cual implica que

$$a_n = (-1)^{n+1}(n^2 + 1)$$

PUNTO *de repaso* Ahora trate de hacer el Ejercicio 47.

Algunas sucesiones se definen de manera **recursiva**. Para definir recursivamente una sucesión es necesario tener uno o más de los primeros términos. Todos los demás términos de la sucesión se definen entonces usando términos previos. Una bien conocida sucesión recursiva es la de Fibonacci, que se muestra en el Ejemplo 4.

Ejemplo 4 La sucesión de Fibonacci: una sucesión recursiva

La sucesión de Fibonacci se define recursivamente como sigue.

$$a_0 = 1,\ a_1 = 1,\ a_k = a_{k-2} + a_{k-1}, \text{ donde } k \geq 2$$

Escriba los primeros seis términos de esta sucesión.

Solución

$a_0 = 1$	Se da el término 0.
$a_1 = 1$	Se da el 1er término.
$a_2 = a_{2-2} + a_{2-1} = a_0 + a_1 = 1 + 1 = 2$	Usar la fórmula recursiva.
$a_3 = a_{3-2} + a_{3-1} = a_1 + a_2 = 1 + 2 = 3$	Usar la fórmula recursiva.
$a_4 = a_{4-2} + a_{4-1} = a_2 + a_3 = 2 + 3 = 5$	Usar la fórmula recursiva.
$a_5 = a_{5-2} + a_{5-1} = a_3 + a_4 = 3 + 5 = 8$	Usar la fórmula recursiva.

PUNTO *de repaso* Ahora trate de hacer el Ejercicio 65.

Notación factorial

Algunas sucesiones muy importantes en matemáticas comprenden términos que se definen con tipos especiales de productos llamados **factoriales**.

Definición de factorial

Si n es un entero positivo, ***n factorial*** se define como

$$n! = 1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4 \cdot \cdots (n-1) \cdot n.$$

Como un caso especial, el factorial de cero se define como $0! = 1$.

A continuación veamos algunos valores de $n!$ para los primeros enteros no negativos. Observe que $0!$ es 1 por definición.

$$0! = 1$$

$$1! = 1$$

$$2! = 1 \cdot 2 = 2$$

$$3! = 1 \cdot 2 \cdot 3 = 6$$

$$4! = 1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4 = 24$$

$$5! = 1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4 \cdot 5 = 120$$

El valor de n no tiene que ser muy grande antes que el valor de $n!$ se haga extremadamente grande. Por ejemplo, $10! = 3\,628\,800$.

Los factoriales siguen las mismas convenciones para el orden de las operaciones que los exponentes. Por ejemplo,

$$2n! = 2(n!) = 2(1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4 \cdot \cdots \cdot n)$$

mientras que $(2n)! = 1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4 \cdot \cdots \cdot 2n$.

Ejemplo 5 Escribir los términos de una sucesión que contenga factoriales

Escriba los primeros cinco términos de la sucesión dados por

$$a_n = \frac{2^n}{n!}.$$

Empiece con $n = 0$.

Solución algebraica

$$a_0 = \frac{2^0}{0!} = \frac{1}{1} = 1 \quad \text{Término 0}$$

$$a_1 = \frac{2^1}{1!} = \frac{2}{1} = 2 \quad \text{1er término}$$

$$a_2 = \frac{2^2}{2!} = \frac{4}{2} = 2 \quad \text{2º término}$$

$$a_3 = \frac{2^3}{3!} = \frac{8}{6} = \frac{4}{3} \quad \text{3er término}$$

$$a_4 = \frac{2^4}{4!} = \frac{16}{24} = \frac{2}{3} \quad \text{4º término}$$

PUNTO *de repaso* Ahora trate de hacer el Ejercicio 71.

Solución numérica

Ponga su calculadora de gráficas en el modo *sequence* e ingrese la sucesión en ella, como se muestra en la Figura 9.1. Use la función *table* (en modo *ask*) para crear una tabla que muestre los términos de la sucesión u_n para $n = 0, 1, 2, 3$ y 4.

FIGURA 9.1

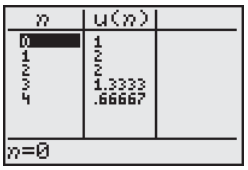


FIGURA 9.2

De la Figura 9.2, se pueden estimar los primeros cinco términos de la sucesión como sigue.

$$u_0 = 1,\ u_1 = 2,\ u_2 = 2,\ u_3 \approx 1.3333 \approx \tfrac{4}{3},\ u_4 \approx 0.66667 \approx \tfrac{2}{3}$$

Cuando trabaje con fracciones que contengan factoriales, con frecuencia hallará que las fracciones se pueden reducir para simplificar los cálculos.

Ejemplo 6 Evaluar expresiones factoriales

Evalúe cada una de las siguientes expresiones factoriales.

a. $\dfrac{8!}{2! \cdot 6!}$ **b.** $\dfrac{2! \cdot 6!}{3! \cdot 5!}$ **c.** $\dfrac{n!}{(n-1)!}$

Solución

a. $\dfrac{8!}{2! \cdot 6!} = \dfrac{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4 \cdot 5 \cdot 6 \cdot 7 \cdot 8}{1 \cdot 2 \cdot 1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4 \cdot 5 \cdot 6} = \dfrac{7 \cdot 8}{2} = 28$

b. $\dfrac{2! \cdot 6!}{3! \cdot 5!} = \dfrac{1 \cdot 2 \cdot 1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4 \cdot 5 \cdot 6}{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4 \cdot 5} = \dfrac{6}{3} = 2$

c. $\dfrac{n!}{(n-1)!} = \dfrac{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdots (n-1) \cdot n}{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdots (n-1)} = n$

PUNTO *de repaso* Ahora trate de hacer el Ejercicio 81.

Ayuda de álgebra

Observe en el Ejemplo 6(a) que se puede simplificar el cálculo como sigue:

$$\frac{8!}{2! \cdot 6!} = \frac{8 \cdot 7 \cdot 6!}{2! \cdot 6!} = \frac{8 \cdot 7}{2 \cdot 1} = 28$$

TECNOLOGIA

Casi todas las calculadoras de gráficas tienen capacidad para sumar los primeros n términos de una sucesión. Busque en la guía del usuario de su calculadora la función *sum sequence* o *series*.

Notación sigma

Hay una notación conveniente para la suma de los términos de una sucesión finita. Recibe el nombre de **notación de suma** o **notación sigma** porque implica el uso de la letra griega mayúscula sigma, que se escribe Σ.

Definición de notación de suma

La suma de los primeros n términos de una sucesión se representa con

$$\sum_{i=1}^{n} a_i = a_1 + a_2 + a_3 + a_4 + \cdots + a_n$$

donde i se llama **índice de la suma**, n es el **límite superior de la suma** y 1 es el **límite inferior de la suma**.

Tip de estudio

La notación de suma es una instrucción para sumar los términos de una sucesión. De la definición de la derecha, el límite superior nos dice dónde termina la suma. La notación de suma nos ayuda a generar los términos apropiados de la sucesión antes de hallar la suma real, que puede no ser clara.

Ejemplo 7 Notación de suma

Encuentre cada una de las sumas siguientes.

a. $\sum_{i=1}^{5} 3i$ **b.** $\sum_{k=3}^{6} (1 + k^2)$ **c.** $\sum_{i=0}^{8} \frac{1}{i!}$

Solución

a. $$\sum_{i=1}^{5} 3i = 3(1) + 3(2) + 3(3) + 3(4) + 3(5)$$
$$= 3(1 + 2 + 3 + 4 + 5)$$
$$= 3(15)$$
$$= 45$$

b. $$\sum_{k=3}^{6} (1 + k^2) = (1 + 3^2) + (1 + 4^2) + (1 + 5^2) + (1 + 6^2)$$
$$= 10 + 17 + 26 + 37$$
$$= 90$$

c. $$\sum_{i=0}^{8} \frac{1}{i!} = \frac{1}{0!} + \frac{1}{1!} + \frac{1}{2!} + \frac{1}{3!} + \frac{1}{4!} + \frac{1}{5!} + \frac{1}{6!} + \frac{1}{7!} + \frac{1}{8!}$$
$$= 1 + 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{6} + \frac{1}{24} + \frac{1}{120} + \frac{1}{720} + \frac{1}{5040} + \frac{1}{40\,320}$$
$$\approx 2.71828$$

Para esta suma, observe que es muy cercana al número irracional $e \approx 2.718281828$. Se puede demostrar que a medida que se sumen más términos de la sucesión cuyo n-ésimo término es $1/n!$ la suma se acerca más y más a e.

PUNTO *de repaso* Ahora trate de hacer el Ejercicio 85.

En el Ejemplo 7, observe que el límite inferior de una sumatoria no tiene que ser 1. También observe que el índice de la sumatoria no tiene que ser la letra i. Por ejemplo, en el inciso (b), la letra k es el índice.

Tip de estudio

Las variaciones en los límites superior e inferior de una suma pueden producir notaciones de aspecto muy diferente para *la misma suma*. Por ejemplo, las siguientes dos sumas tienen los mismos términos.

$$\sum_{i=1}^{3} 3(2^i) = 3(2^1 + 2^2 + 2^3)$$

$$\sum_{i=0}^{2} 3(2^{i+1}) = 3(2^1 + 2^2 + 2^3)$$

Propiedades de la suma

1. $\sum_{i=1}^{n} c = cn$, c es una constante **2.** $\sum_{i=1}^{n} ca_i = c\sum_{i=1}^{n} a_i$, c es una constante.

3. $\sum_{i=1}^{n} (a_i + b_i) = \sum_{i=1}^{n} a_i + \sum_{i=1}^{n} b_i$ **4.** $\sum_{i=1}^{n} (a_i - b_i) = \sum_{i=1}^{n} a_i - \sum_{i=1}^{n} b_i$

Para la demostración de estas propiedades, vea la página 720.

Series

Numerosas aplicaciones comprenden la suma de los términos de una sucesión finita o infinita. Esta suma recibe el nombre de **serie.**

Definición de serie

Considere la sucesión infinita $a_1, a_2, a_3, \ldots, a_i, \ldots$

1. La suma de los primeros n términos de la sucesión se denomina **serie finita** o ***n*-ésima suma parcial** de la sucesión y se denota con

$$a_1 + a_2 + a_3 + \cdots + a_n = \sum_{i=1}^{n} a_i.$$

2. La suma de todos los términos de la sucesión infinita se llama **serie infinita** y se denota con

$$a_1 + a_2 + a_3 + \cdots + a_i + \cdots = \sum_{i=1}^{\infty} a_i.$$

Ejemplo 8 Hallar la suma de una serie

Para la serie $\sum_{i=1}^{\infty} \frac{3}{10^i}$, encuentre (a) la tercera suma parcial y (b) la suma.

Solución

a. La tercera suma parcial es

$$\sum_{i=1}^{3} \frac{3}{10^i} = \frac{3}{10^1} + \frac{3}{10^2} + \frac{3}{10^3} = 0.3 + 0.03 + 0.003 = 0.333.$$

b. La suma de la serie es

$$\begin{aligned}\sum_{i=1}^{\infty} \frac{3}{10^i} &= \frac{3}{10^1} + \frac{3}{10^2} + \frac{3}{10^3} + \frac{3}{10^4} + \frac{3}{10^5} + \cdots \\ &= 0.3 + 0.03 + 0.003 + 0.0003 + 0.00003 + \cdots \\ &= 0.33333\ldots = \frac{1}{3}.\end{aligned}$$

PUNTO *de repaso* Ahora trate de hacer el Ejercicio 113.

Aplicaciones

Las sucesiones tienen numerosas aplicaciones en negocios y ciencias. Dos de estas aplicaciones se ilustran en los ejemplos 9 y 10.

Ejemplo 9 Interés compuesto

Se hace un depósito de $5000 en una cuenta que gana 3% de interés capitalizado trimestralmente. El saldo en la cuenta después de n trimestres está dado por

$$A_n = 5000\left(1 + \frac{0.03}{4}\right)^n, \quad n = 0, 1, 2, \ldots$$

a. Escriba los primeros tres términos de la sucesión.

b. Encuentre el saldo en la cuenta después de 10 años al calcular el 40avo término de la sucesión.

Solución

a. Los primeros tres términos de la sucesión son como sigue.

$$A_0 = 5000\left(1 + \frac{0.03}{4}\right)^0 = \$5000.00$$ Depósito original

$$A_1 = 5000\left(1 + \frac{0.03}{4}\right)^1 = \$5037.50$$ Saldo al primer trimestre

$$A_2 = 5000\left(1 + \frac{0.03}{4}\right)^2 = \$5075.28$$ Saldo al segundo trimestre

b. El 40avo término de la sucesión es

$$A_{40} = 5000\left(1 + \frac{0.03}{4}\right)^{40} = \$6741.74.$$ Saldo a 10 años

PUNTO *de repaso* Ahora trate de hacer el Ejercicio 121.

Ejemplo 10 Población de Estados Unidos

Para los años 1980 a 2007, la población residente de Estados Unidos se puede aproximar con el modelo

$$a_n = 226.6 + 2.33n + 0.019n^2, \quad n = 0, 1, \ldots, 27$$

donde a_n es la población (en millones) y n representa el año, con $n = 0$ para 1980. Encuentre los últimos cinco términos de esta sucesión finita, que representan la población de Estados Unidos para los años 2003 a 2007. (Fuente: U.S. Census Bureau)

Solución

Los últimos cinco términos de esta sucesión finita son los siguientes.

$$a_{23} = 226.6 + 2.33(23) + 0.019(23)^2 \approx 290.2$$ Población en 2003

$$a_{24} = 226.6 + 2.33(24) + 0.019(24)^2 \approx 293.5$$ Población en 2004

$$a_{25} = 226.6 + 2.33(25) + 0.019(25)^2 \approx 296.7$$ Población en 2005

$$a_{26} = 226.6 + 2.33(26) + 0.019(26)^2 \approx 300.0$$ Población en 2006

$$a_{27} = 226.6 + 2.33(27) + 0.019(27)^2 \approx 303.4$$ Población en 2007

PUNTO *de repaso* Ahora trate de hacer el Ejercicio 125.

9.1 EJERCICIOS

En www.CalcChat.com vea las soluciones a los ejercicios impares.

VOCABULARIO: Llene los espacios en blanco.

1. Una _____ _____ es una función cuyo dominio es el conjunto de los enteros positivos.
2. Los valores de la función $a_1, a_2, a_3, a_4, \ldots$ se llaman _____ de una sucesión.
3. Una sucesión es _____ si su dominio consta sólo de los primeros n enteros positivos.
4. Si nos dan uno o más de los primeros términos de una sucesión, y todos los otros términos de la sucesión se definen usando términos previos, entonces se dice que la sucesión está definida _____.
5. Si n es un entero positivo, n _____ se define como $n! = 1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4 \cdots (n-1) \cdot n$.
6. La notación empleada para representar la suma de los términos de una sucesión finita es una notación _____ o sigma.
7. Para la suma $\sum_{i=1}^{n} a_i$, i se llama el _____ de la suma, n es el límite _____ de la suma, y 1 es el límite _____.
8. La suma de términos de una sucesión finita o infinita se llama _____.

HABILIDADES Y APLICACIONES

En los Ejercicios 9-32, escriba los primeros cinco términos de la sucesión. (Suponga que n empieza con 1.)

9. $a_n = 2n + 5$
10. $a_n = 4n - 7$
11. $a_n = 2^n$
12. $a_n = \left(\frac{1}{2}\right)^n$
13. $a_n = (-2)^n$
14. $a_n = \left(-\frac{1}{2}\right)^n$
15. $a_n = \dfrac{n+2}{n}$
16. $a_n = \dfrac{n}{n+2}$
17. $a_n = \dfrac{6n}{3n^2 - 1}$
18. $a_n = \dfrac{2n}{n^2 + 1}$
19. $a_n = \dfrac{1 + (-1)^n}{n}$
20. $a_n = 1 + (-1)^n$
21. $a_n = 2 - \dfrac{1}{3^n}$
22. $a_n = \dfrac{2^n}{3^n}$
23. $a_n = \dfrac{1}{n^{3/2}}$
24. $a_n = \dfrac{10}{n^{2/3}}$
25. $a_n = \dfrac{(-1)^n}{n^2}$
26. $a_n = (-1)^n\left(\dfrac{n}{n+1}\right)$
27. $a_n = \frac{2}{3}$
28. $a_n = 0.3$
29. $a_n = n(n-1)(n-2)$
30. $a_n = n(n^2 - 6)$
31. $a_n = \dfrac{(-1)^{n+1}}{n^2 + 1}$
32. $a_n = \dfrac{(-1)^{n+1}}{2n + 1}$

En los Ejercicios 33-36, encuentre el término indicado de la sucesión.

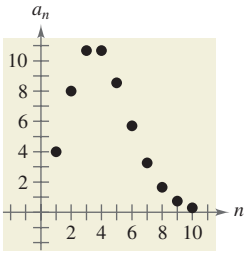
33. $a_n = (-1)^n(3n - 2)$
    $a_{25} =$ ____
34. $a_n = (-1)^{n-1}[n(n-1)]$
    $a_{16} =$ ____
35. $a_n = \dfrac{4n}{2n^2 - 3}$
    $a_{11} =$ ____
36. $a_n = \dfrac{4n^2 - n + 3}{n(n-1)(n+2)}$
    $a_{13} =$ ____

En los Ejercicios 37-42, use una calculadora de gráficas para graficar los primeros 10 términos de la sucesión. (Suponga que n empieza con 1.)

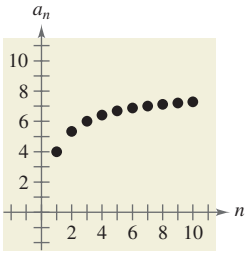
37. $a_n = \dfrac{2}{3}n$
38. $a_n = 2 - \dfrac{4}{n}$
39. $a_n = 16(-0.5)^{n-1}$
40. $a_n = 8(0.75)^{n-1}$
41. $a_n = \dfrac{2n}{n+1}$
42. $a_n = \dfrac{3n^2}{n^2 + 1}$

En los Ejercicios 43-46, relacione la sucesión con la gráfica de sus primeros 10 términos. [Las gráficas están marcadas (a), (b), (c) y (d).]

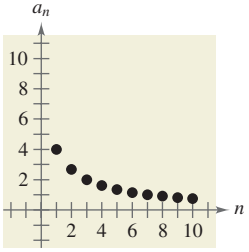
(a)



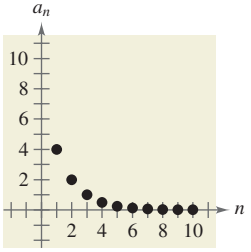
(b)



(c)



(d)



43. $a_n = \dfrac{8}{n+1}$
44. $a_n = \dfrac{8n}{n+1}$
45. $a_n = 4(0.5)^{n-1}$
46. $a_n = \dfrac{4^n}{n!}$

En los Ejercicios 47-62, escriba una expresión para el n-ésimo término aparente de la sucesión. (Suponga que n empieza con 1.)

47. $1, 4, 7, 10, 13, \ldots$

48. $3, 7, 11, 15, 19, \ldots$

49. $0, 3, 8, 15, 24, \ldots$

50. $2, -4, 6, -8, 10, \ldots$

51. $-\frac{2}{3}, \frac{3}{4}, -\frac{4}{5}, \frac{5}{6}, -\frac{6}{7}, \ldots$

52. $\frac{1}{2}, -\frac{1}{4}, \frac{1}{8}, -\frac{1}{16}, \ldots$

53. $\frac{2}{1}, \frac{3}{3}, \frac{4}{5}, \frac{5}{7}, \frac{6}{9}, \ldots$

54. $\frac{1}{3}, \frac{2}{9}, \frac{4}{27}, \frac{8}{81}, \ldots$

55. $1, \frac{1}{4}, \frac{1}{9}, \frac{1}{16}, \frac{1}{25}, \ldots$

56. $1, \frac{1}{2}, \frac{1}{6}, \frac{1}{24}, \frac{1}{120}, \ldots$

57. $1, -1, 1, -1, 1, \ldots$

58. $1, 2, \frac{2^2}{2}, \frac{2^3}{6}, \frac{2^4}{24}, \frac{2^5}{120}, \ldots$

59. $1, 3, 1, 3, 1, \ldots$

60. $3, \frac{3}{2}, 1, \frac{3}{4}, \frac{3}{5}, \ldots$

61. $1 + \frac{1}{1}, 1 + \frac{1}{2}, 1 + \frac{1}{3}, 1 + \frac{1}{4}, 1 + \frac{1}{5}, \ldots$

62. $1 + \frac{1}{2}, 1 + \frac{3}{4}, 1 + \frac{7}{8}, 1 + \frac{15}{16}, 1 + \frac{31}{32}, \ldots$

En los Ejercicios 63-66, escriba los primeros cinco términos de la sucesión definidos recursivamente.

63. $a_1 = 28, \quad a_{k+1} = a_k - 4$

64. $a_1 = 15, \quad a_{k+1} = a_k + 3$

65. $a_1 = 3, \quad a_{k+1} = 2(a_k - 1)$

66. $a_1 = 32, \quad a_{k+1} = \frac{1}{2}a_k$

En los Ejercicios 67-70, escriba los primeros cinco términos de la sucesión definidos recursivamente. Use el patrón para escribir el n-ésimo término de la sucesión como función de n. (Suponga que n empieza con 1.)

67. $a_1 = 6, \quad a_{k+1} = a_k + 2$

68. $a_1 = 25, \quad a_{k+1} = a_k - 5$

69. $a_1 = 81, \quad a_{k+1} = \frac{1}{3}a_k$

70. $a_1 = 14, \quad a_{k+1} = (-2)a_k$

En los Ejercicios 71-76, escriba los primeros cinco términos de la sucesión. (Suponga que n empieza con 0.)

71. $a_n = \dfrac{1}{n!}$

72. $a_n = \dfrac{n!}{2n + 1}$

73. $a_n = \dfrac{1}{(n + 1)!}$

74. $a_n = \dfrac{n^2}{(n + 1)!}$

75. $a_n = \dfrac{(-1)^{2n}}{(2n)!}$

76. $a_n = \dfrac{(-1)^{2n+1}}{(2n + 1)!}$

En los Ejercicios 77-84, simplifique la expresión factorial.

77. $\dfrac{4!}{6!}$

78. $\dfrac{5!}{8!}$

79. $\dfrac{12!}{4! \cdot 8!}$

80. $\dfrac{10! \cdot 3!}{4! \cdot 6!}$

81. $\dfrac{(n + 1)!}{n!}$

82. $\dfrac{(n + 2)!}{n!}$

83. $\dfrac{(2n - 1)!}{(2n + 1)!}$

84. $\dfrac{(3n + 1)!}{(3n)!}$

En los Ejercicios 85-96, encuentre la suma.

85. $\sum_{i=1}^{5} (2i + 1)$

86. $\sum_{i=1}^{6} (3i - 1)$

87. $\sum_{k=1}^{4} 10$

88. $\sum_{k=1}^{5} 6$

89. $\sum_{i=0}^{4} i^2$

90. $\sum_{i=0}^{5} 3i^2$

91. $\sum_{k=0}^{3} \dfrac{1}{k^2 + 1}$

92. $\sum_{j=3}^{5} \dfrac{1}{j^2 - 3}$

93. $\sum_{k=2}^{5} (k + 1)^2(k - 3)$

94. $\sum_{i=1}^{4} [(i - 1)^2 + (i + 1)^3]$

95. $\sum_{i=1}^{4} 2^i$

96. $\sum_{j=0}^{4} (-2)^j$

En los Ejercicios 97-102, use calculadora para hallar la suma.

97. $\sum_{n=0}^{5} \dfrac{1}{2n + 1}$

98. $\sum_{j=1}^{10} \dfrac{3}{j + 1}$

99. $\sum_{k=0}^{4} \dfrac{(-1)^k}{k + 1}$

100. $\sum_{k=0}^{4} \dfrac{(-1)^k}{k!}$

101. $\sum_{n=0}^{25} \dfrac{1}{4^n}$

102. $\sum_{n=0}^{25} \dfrac{1}{5^{n+1}}$

En los Ejercicios 103-112, use notación sigma para escribir la suma.

103. $\dfrac{1}{3(1)} + \dfrac{1}{3(2)} + \dfrac{1}{3(3)} + \cdots + \dfrac{1}{3(9)}$

104. $\dfrac{5}{1 + 1} + \dfrac{5}{1 + 2} + \dfrac{5}{1 + 3} + \cdots + \dfrac{5}{1 + 15}$

105. $\left[2\left(\frac{1}{8}\right) + 3\right] + \left[2\left(\frac{2}{8}\right) + 3\right] + \cdots + \left[2\left(\frac{8}{8}\right) + 3\right]$

106. $\left[1 - \left(\frac{1}{6}\right)^2\right] + \left[1 - \left(\frac{2}{6}\right)^2\right] + \cdots + \left[1 - \left(\frac{6}{6}\right)^2\right]$

107. $3 - 9 + 27 - 81 + 243 - 729$

108. $1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{4} - \frac{1}{8} + \cdots - \frac{1}{128}$

109. $\dfrac{1}{1^2} - \dfrac{1}{2^2} + \dfrac{1}{3^2} - \dfrac{1}{4^2} + \cdots - \dfrac{1}{20^2}$

110. $\dfrac{1}{1 \cdot 3} + \dfrac{1}{2 \cdot 4} + \dfrac{1}{3 \cdot 5} + \cdots + \dfrac{1}{10 \cdot 12}$

111. $\frac{1}{4} + \frac{3}{8} + \frac{7}{16} + \frac{15}{32} + \frac{31}{64}$

112. $\frac{1}{2} + \frac{2}{4} + \frac{6}{8} + \frac{24}{16} + \frac{120}{32} + \frac{720}{64}$

En los Ejercicios 113-116, encuentre la suma parcial indicada de la serie.

113. $\sum_{i=1}^{\infty} 5\left(\frac{1}{2}\right)^i$
Cuarta suma parcial

114. $\sum_{i=1}^{\infty} 2\left(\frac{1}{3}\right)^i$
Quinta suma parcial

115. $\sum_{n=1}^{\infty} 4\left(-\frac{1}{2}\right)^n$
Cuarta suma parcial

116. $\sum_{n=1}^{\infty} 8\left(-\frac{1}{4}\right)^n$
Tercera suma parcial

En los Ejercicios 117-120, encuentre la suma de la serie infinita.

117. $\sum_{i=1}^{\infty} 6\left(\frac{1}{10}\right)^i$

118. $\sum_{k=1}^{\infty} \left(\frac{1}{10}\right)^k$

119. $\sum_{k=1}^{\infty} 7\left(\frac{1}{10}\right)^k$

120. $\sum_{i=1}^{\infty} 2\left(\frac{1}{10}\right)^i$

121. INTERÉS COMPUESTO Usted deposita \$25 000 en una cuenta que gana 7% de interés compuesto mensualmente. El saldo en la cuenta después de n meses está dado por

$$A_n = 25\,000\left(1 + \frac{0.07}{12}\right)^n, \quad n = 1, 2, 3, \ldots$$

(a) Escriba los primeros seis términos de la sucesión.

(b) Encuentre el saldo de la cuenta después de 5 años al calcular el 60avo término de la sucesión.

(c) ¿El saldo en la cuenta después de 10 años es el doble del saldo después de 5 años? Explique.

122. INTERÉS COMPUESTO Se hace un depósito de \$10 000 en una cuenta que gana 8.5% de interés capitalizado trimestralmente. El saldo de la cuenta después de n trimestres está dado por

$$A_n = 10\,000\left(1 + \frac{0.085}{4}\right)^n, \quad n = 1, 2, 3, \ldots$$

(a) Escriba los primeros ocho términos de la sucesión.

(b) Encuentre el saldo de la cuenta después de 10 años al calcular el 40avo término de la sucesión.

(c) ¿El saldo en la cuenta después de 20 años es el doble del saldo después de 10 años? Explique.

123. ANÁLISIS DE DATOS: NÚMERO DE TIENDAS La tabla siguiente muestra el número a_n de tiendas Best Buy de 2002 a 2007. (Fuente: Best Buy Company, Inc.)

Año	Número de tiendas, a_n
2002	548
2003	595
2004	668
2005	786
2006	822
2007	923

(a) Use el comando *regression* de una calculadora de gráficas para hallar una sucesión lineal que modele los datos. Con n represente el año, con $n = 2$ correspondiente a 2002.

(b) Use el comando *regression* de una calculadora de gráficas para hallar una sucesión cuadrática que modele los datos.

(c) Evalúe las sucesiones de los incisos (a) y (b) para $n = 2, 3, \ldots, 7$. Compare estos valores con los mostrados en la tabla. ¿Cuál modelo se ajusta mejor a los datos? Explique.

(d) ¿Cuál modelo piensa usted que predice mejor el número de tiendas Best Buy en el futuro? Use el modelo escogido por usted para predecir el número de tiendas Best Buy en 2013.

124. MEDICINA El número a_n (en miles) de casos de sida reportados de 2000 a 2007 se pueden aproximar con el modelo

$$a_n = 0.0768n^3 - 3.150n^2 + 41.56n - 136.4,$$

$$n = 10, 11, \ldots, 17$$

donde n es el año, con $n = 10$ correspondiente a 2000. (Fuente: U.S. Centers for Disease Control and Prevention)

(a) Encuentre los términos de esta sucesión finita. Use el comando *statistical plotting* de una calculadora de gráficas para construir una gráfica de barras que represente la sucesión.

(b) ¿Qué dice la gráfica en el inciso (a) acerca de casos reportados de sida?

125. DEUDA FEDERAL De 1995 a 2007, la deuda federal de Estados Unidos subió de casi 5 billones de dólares a casi 9 billones de dólares. La deuda federal a_n (en miles de millones de dólares) de 1995 a 2007 se aproxima con el modelo

$$a_n = 1.0904n^3 - 6.348n^2 + 41.76n + 4871.3,$$

$$n = 5, 6, \ldots, 17$$

donde n es el año, con $n = 5$ correspondiente a 1995. (Fuente: U.S. Office of Management and Budget)

(a) Encuentre los términos de esta sucesión finita. Use el comando *statistical plotting* de una calculadora de gráficas para construir una gráfica de barras que represente la sucesión.

(b) ¿Qué dice el patrón de la gráfica de barras del inciso (a) acerca del futuro de la deuda federal?

126. INGRESOS Los ingresos a_n (en millones de dólares) de Amazon.com de 2001 a 2008 se muestran en la figura de la página siguiente. Los ingresos pueden aproximarse con el modelo

$$a_n = 296.477n^2 - 469.11n + 3606.2,$$

$$n = 1, 2, \ldots, 8$$

donde n es el año, con $n = 1$ correspondiente a 2001. Use este modelo para aproximar el ingreso total de 2001 a 2008. Compare esta suma con el resultado de sumar los ingresos mostrados en la figura de la página siguiente. (Fuente: Amazon.com)

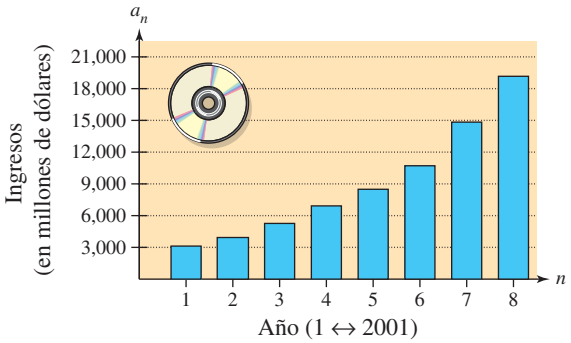


FIGURA PARA EL EJERCICIO 126

EXPLORACIÓN

¿VERDADERO O FALSO? En los Ejercicios 127 y 128, determine si la proposición es verdadera o falsa. Justifique su respuesta.

127. $\sum_{i=1}^{4}(i^2 + 2i) = \sum_{i=1}^{4} i^2 + 2\sum_{i=1}^{4} i$

128. $\sum_{j=1}^{4} 2^j = \sum_{j=3}^{6} 2^{j-2}$

SUCESIÓN DE FIBONACCI En los Ejercicios 129 y 130, use la sucesión de Fibonacci. (Vea el Ejemplo 4.)

129. Escriba los primeros 12 términos de la sucesión a_n de Fibonacci y los primeros 10 términos de la sucesión dada por

$$b_n = \frac{a_{n+1}}{a_n}, \quad n \geq 1.$$

130. Usando la definición para b_n del Ejercicio 129, demuestre que b_n se puede definir recursivamente con

$$b_n = 1 + \frac{1}{b_{n-1}}.$$

MEDIA ARITMÉTICA En los Ejercicios 131-134, use la siguiente definición de media aritmética $\bar{x}$ de un conjunto de n mediciones $x_1, x_2, x_3, \ldots, x_n$.

$$\bar{x} = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} x_i$$

131. Encuentre la media aritmética de los seis saldos de la cuenta de cheques \$327.15, \$785.69, \$433.04, \$265.38, \$604.12 y \$590.30. Use el potencial estadístico de una calculadora de gráficas para verificar su resultado.

132. Encuentre la media aritmética de los siguientes precios por galón de gasolina regular sin plomo en cinco gasolineras en una ciudad: \$1.899, \$1.959, \$1.919, \$1.939 y \$1.999. Use el potencial estadístico de una calculadora de gráficas para verificar su resultado.

133. DEMOSTRACIÓN Demuestre que $\sum_{i=1}^{n}(x_i - \bar{x}) = 0$.

134. DEMOSTRACIÓN Demuestre que

$$\sum_{i=1}^{n}(x_i - \bar{x})^2 = \sum_{i=1}^{n} x_i^2 - \frac{1}{n}\left(\sum_{i=1}^{n} x_i\right)^2.$$

En los Ejercicios 135-138, encuentre los primeros cinco términos de la sucesión.

135. $a_n = \dfrac{x^n}{n!}$

136. $a_n = \dfrac{(-1)^n x^{2n+1}}{2n+1}$

137. $a_n = \dfrac{(-1)^n x^{2n}}{(2n)!}$

138. $a_n = \dfrac{(-1)^n x^{2n+1}}{(2n+1)!}$

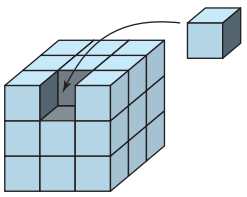
139. ¿Escriba los primeros cinco términos de la sucesión cuyo n-ésimo término es

$$a_n = \frac{(-1)^{n+1}}{2n+1}.$$

¿Son iguales que los primeros cinco términos de la sucesión del Ejemplo 2? Si no es así, ¿cómo difieren?

140. TOQUE FINAL Verbalmente, explique la diferencia entre una sucesión y una serie. Dé ejemplos de cada una.

141. Se crea un cubo de $3 \times 3 \times 3$ usando 27 cubos unitarios (un cubo unitario tiene una longitud, ancho y altura de 1 unidad) y sólo las caras de cada cubo que son visibles están pintadas de azul, como se ve en la figura.



(a) Complete la tabla siguiente para determinar cuántos cubos unitarios del cubo de $3 \times 3 \times 3$ tienen 0 caras azules, 1 cara azul, 2 caras azules y 3 caras azules.

Número de caras azules del cubo	0	1	2	3
$3 \times 3 \times 3$				

(b) Haga lo mismo para un cubo de $4 \times 4 \times 4$, un cubo de $5 \times 5 \times 5$ y un cubo de $6 \times 6 \times 6$. Sume los resultados a la tabla citada líneas antes.

(c) ¿Qué tipo de patrón se observa en la tabla?

(d) Escriba una fórmula que pudiera usted usar para determinar los valores de columna para un cubo de $n \times n \times n$.

9.2 Sucesiones aritméticas y sumas parciales

Lo que debe aprender

- Reconocer, escribir y hallar los n-ésimos términos de sucesiones aritméticas.
- Hallar las n-ésimas sumas parciales de sucesiones aritméticas.
- Usar sucesiones aritméticas para modelar y resolver problemas de la vida real.

Por qué debe aprenderlo

Las sucesiones aritméticas tienen aplicaciones prácticas en la vida real. Por ejemplo, en el Ejercicio 91 de la página 658 se usa una sucesión aritmética para modelar la capacidad en asientos de un auditorio.

© mediacolor's/Alamy

Sucesiones aritméticas

Una sucesión cuyos términos consecutivos tienen una diferencia común se denomina **sucesión aritmética.**

Definición de sucesión aritmética

Una sucesión es **aritmética** si las diferencias entre términos consecutivos son iguales. Por tanto, la sucesión

$$a_1, a_2, a_3, a_4, \ldots, a_n, \ldots$$

es aritmética si hay un número d tal que

$$a_2 - a_1 = a_3 - a_2 = a_4 - a_3 = \cdots = d.$$

El número d es la **diferencia común** de la sucesión aritmética.

Ejemplo 1 Ejemplos de sucesiones aritméticas

a. La sucesión cuyo n-ésimo término es $4n + 3$ es aritmética. Para esta sucesión, la diferencia común entre términos consecutivos es 4.

$$\underbrace{7, 11}, 15, 19, \ldots, 4n + 3, \ldots \qquad \text{Empezar con } n = 1.$$

$$11 - 7 = 4$$

b. La sucesión cuyo n-ésimo término es $7 - 5n$ es aritmética. Para esta sucesión, la diferencia común entre términos consecutivos es -5.

$$\underbrace{2, -3}, -8, -13, \ldots, 7 - 5n, \ldots \qquad \text{Empezar con } n = 1.$$

$$-3 - 2 = -5$$

c. La sucesión cuyo n-ésimo término es $\frac{1}{4}(n + 3)$ es aritmética. Para esta sucesión, la diferencia común entre términos consecutivos es $\frac{1}{4}$.

$$\underbrace{1, \frac{5}{4}}, \frac{3}{2}, \frac{7}{4}, \ldots, \frac{n + 3}{4}, \ldots \qquad \text{Empezar con } n = 1.$$

$$\tfrac{5}{4} - 1 = \tfrac{1}{4}$$

PUNTO *de repaso* Ahora trate de hacer el Ejercicio 5.

La sucesión 1, 4, 9, 16,. . . , cuyo n-ésimo término es n^2, *no es* aritmética. La diferencia entre los primeros dos términos es

$$a_2 - a_1 = 4 - 1 = 3$$

pero la diferencia entre los términos segundo y tercero es

$$a_3 - a_2 = 9 - 4 = 5.$$

El *n*-ésimo término de una sucesión aritmética

El n-ésimo término de una sucesión aritmética tiene la forma

$$a_n = a_1 + (n - 1)d$$

donde d es la diferencia común entre términos consecutivos de la sucesión y a_1 es el primer término.

Tip de estudio

El n-ésimo término de una sucesión aritmética se puede deducir del patrón siguiente.

$a_1 = a_1$ 1er término

$a_2 = a_1 + d$ 2º término

$a_3 = a_1 + 2d$ 3er término

$a_4 = a_1 + 3d$ 4º término

$a_5 = a_1 + 4d$ 5º término

1 menos

$\vdots$

$a_n = a_1 + (n - 1)d$ n-ésimo término

1 menos

Ejemplo 2 Hallar el *n*-ésimo término de una sucesión aritmética

Encuentre una fórmula para el n-ésimo término de la sucesión aritmética cuya diferencia común es 3 y cuyo primer término es 2.

Solución

Sabemos que la fórmula para obtener el n-ésimo término es $a_n = a_1 + (n - 1)d$. Además, como la diferencia común es $d = 3$ y el primer término es $a_1 = 2$, la fórmula debe tener la forma

$$a_n = 2 + 3(n - 1).$$ Sustituir 2 por a_1 y 3 por d.

Entonces, la fórmula para el n-ésimo término es

$$a_n = 3n - 1.$$

Por lo tanto, la sucesión tiene la siguiente forma.

$$2, 5, 8, 11, 14, \ldots, 3n - 1, \ldots$$

PUNTO *de repaso* Ahora trate de hacer el Ejercicio 25.

Tip de estudio

Se puede hallar a_1 en el Ejemplo 3 usando el n-ésimo término de una sucesión aritmética, como sigue.

$$a_n = a_1 + (n - 1)d$$
$$a_4 = a_1 + (4 - 1)d$$
$$20 = a_1 + (4 - 1)5$$
$$20 = a_1 + 15$$
$$5 = a_1$$

Ejemplo 3 Escribir los términos de una sucesión aritmética

El cuarto término de una sucesión aritmética es 20, y el 13avo término es 65. Escriba los primeros 11 términos de esta sucesión.

Solución

Sabemos que $a_4 = 20$ y $a_{13} = 65$. Por tanto, se debe sumar la diferencia común d nueve veces al cuarto término para obtener el 13avo término. Por tanto, los términos cuarto y 13avo de la sucesión están relacionados por

$$a_{13} = a_4 + 9d.$$ a_4 y a_{13} tienen separación de 9 términos.

Usando $a_4 = 20$ y $a_{13} = 65$, se puede concluir que $d = 5$, lo cual implica que la sucesión es como sigue.

a_1	a_2	a_3	a_4	a_5	a_6	a_7	a_8	a_9	a_{10}	a_{11} . . .
5	10	15	20	25	30	35	40	45	50	55 . . .

PUNTO *de repaso* Ahora trate de hacer el Ejercicio 39.

Si se conoce el n-ésimo término de una sucesión aritmética *y además* conocemos la diferencia común de la sucesión, se puede hallar el $(n + 1)$-ésimo término usando la *fórmula de recursión*

$$a_{n+1} = a_n + d.$$ Fórmula de recursión

Con esta fórmula se puede hallar cualquier término de una sucesión aritmética *siempre que* se conozca el término precedente. Por ejemplo, si conocemos el primer término se puede hallar el segundo. Entonces, conociendo el segundo término se puede hallar el tercero y así sucesivamente.

Ejemplo 4 Usar una fórmula de recursión

Encuentre el noveno término de una sucesión aritmética que empiece con 2 y 9.

Solución

Para esta sucesión, la diferencia común es

$$d = 9 - 2 = 7.$$

Hay dos formas de hallar el noveno término. Una de ellas es simplemente escribir los primeros nueve términos (sumando 7 repetidamente).

2, 9, 16, 23, 30, 37, 44, 51, 58

Otra forma de determinar el noveno término es primero hallar una fórmula para el n-ésimo término. Como la diferencia común es $d = 7$ y el primer término es $a_1 = 2$, la fórmula debe tener la forma

$$a_n = 2 + 7(n - 1).$$ Sustituir 2 por a_1 y 7 por d.

Por tanto, una fórmula para el n-ésimo término es

$$a_n = 7n - 5$$

lo cual implica que el noveno término es

$$a_9 = 7(9) - 5 = 58.$$

PUNTO *de repaso* Ahora trate de hacer el Ejercicio 47.

La suma de una sucesión aritmética finita

Hay una sencilla fórmula para obtener la *suma* de una sucesión aritmética finita.

ATENCIÓN

Nótese que esta fórmula funciona sólo para sucesiones aritméticas

La suma de una sucesión aritmética finita

La suma de una sucesión aritmética finita con n términos es

$$S_n = \frac{n}{2}(a_1 + a_n).$$

Para una demostración de esta fórmula para obtener la suma de una sucesión aritmética finita, vea en la página 721.

Ejemplo 5 Hallar la suma de una sucesión aritmética finita

Encuentre la suma: $1 + 3 + 5 + 7 + 9 + 11 + 13 + 15 + 17 + 19$.

Solución

Para empezar, observe que la sucesión es aritmética (con una diferencia común de 2). Además, la sucesión tiene 10 términos. Por tanto, la suma de la sucesión es

$$S_n = \frac{n}{2}(a_1 + a_n)$$ Fórmula para la suma de una sucesión aritmética

$$= \frac{10}{2}(1 + 19)$$ Sustituir 10 por n, 1 por a_1 y 19 por a_n.

$$= 5(20) = 100.$$ Simplificar.

PUNTO *de repaso* Ahora trate de hacer el Ejercicio 51.

Ejemplo 6 Hallar la suma de una sucesión aritmética finita

Encuentre la suma de los enteros (a) de 1 a 100 y (b) de 1 a N.

Solución

a. Los enteros de 1 a 100 forman una sucesión aritmética que tiene 100 términos. Por tanto, se puede usar la fórmula para la suma de una sucesión aritmética, como sigue.

$$S_n = 1 + 2 + 3 + 4 + 5 + 6 + \cdots + 99 + 100$$

$$= \frac{n}{2}(a_1 + a_n)$$ Fórmula para la suma de una sucesión aritmética

$$= \frac{100}{2}(1 + 100)$$ Sustituir 100 por n, 1 por a_1, 100 por a_n.

$$= 50(101) = 5050$$ Simplificar.

b. $S_n = 1 + 2 + 3 + 4 + \cdots + N$

$$= \frac{n}{2}(a_1 + a_n)$$ Fórmula para la suma de una sucesión aritmética

$$= \frac{N}{2}(1 + N)$$ Sustituir N por n, 1 por a_1 y N por a_n.

PUNTO *de repaso* Ahora trate de hacer el Ejercicio 55.

NOTA HISTÓRICA

The Granger Collection

Un maestro de Carl Friedrich Gauss (1777-1855) le pidió sumara todos los enteros del 1 al 100. Cuando Gauss regresó con la respuesta correcta después de unos cuantos momentos, el maestro sólo pudo mirarlo en asombrado silencio. Esto es lo que hizo Gauss:

$$\begin{array}{rl} S_n = & 1 + 2 + 3 + \cdots + 100 \\ S_n = & 100 + 99 + 98 + \cdots + 1 \\ \hline 2S_n = & 101 + 101 + 101 + \cdots + 101 \end{array}$$

$$S_n = \frac{100 \times 101}{2} = 5050$$

La suma de los primeros n términos de una sucesión infinita es la *n-ésima suma parcial.* La n-ésima suma parcial se puede hallar usando la fórmula para la suma de una sucesión aritmética finita.

Ejemplo 7 Hallar una suma parcial de una sucesión aritmética

Encuentre la 150ava suma parcial de la sucesión aritmética

$$5, 16, 27, 38, 49, \ldots$$

Solución

Para esta sucesión aritmética, $a_1 = 5$ y $d = 16 - 5 = 11$. Por tanto,

$$a_n = 5 + 11(n - 1)$$

y el n-ésimo término es $a_n = 11n - 6$. Por tanto, $a_{150} = 11(150) - 6 = 1644$, y la suma de los primeros 150 términos es

$$S_{150} = \frac{n}{2}(a_1 + a_{150}) \qquad \text{Fórmula de la } n\text{-ésima suma parcial}$$

$$= \frac{150}{2}(5 + 1644) \qquad \text{Sustituir 150 por } n, \text{ 5 por } a_1 \text{ y 1644 por } a_{150}.$$

$$= 75(1649) \qquad \text{Simplificar.}$$

$$= 123\,675. \qquad n\text{-ésima suma parcial.}$$

PUNTO *de repaso* Ahora trate de hacer el Ejercicio 69.

Aplicaciones

Ejemplo 8 Dinero de un premio

En un torneo de golf, 16 golfistas ganan con las puntuaciones más bajas. El primer lugar recibe un premio en efectivo de \$1000; el segundo, recibe un premio de \$950; el tercero, recibe \$900, y así sucesivamente. ¿Cuál es la cantidad total de dinero en premios?

Solución

Los premios en efectivo forman una sucesión aritmética en la que el primer término es $a_1 = 1000$ y la diferencia común es $d = -50$. Como

$$a_n = 1000 + (-50)(n - 1)$$

se puede determinar que, en este caso, la fórmula para obtener el n-ésimo término de la sucesión es $a_n = -50n + 1050$. En consecuencia, el 16avo término de la sucesión es $a_{16} = -50(16) + 1050 = 250$, y la cantidad total de dinero en premios es

$$S_{16} = 1000 + 950 + 900 + \cdots + 250$$

$$S_{16} = \frac{n}{2}(a_1 + a_{16}) \qquad \text{Fórmula de la } n\text{-ésima suma parcial}$$

$$= \frac{16}{2}(1000 + 250) \qquad \text{Sustituir 16 por } n, \text{ 1000 por } a_1 \text{ y 250 por } a_{16}.$$

$$= 8(1250) = \$10\,000. \qquad \text{Simplificar.}$$

PUNTO *de repaso* Ahora trate de hacer el Ejercicio 97.

Ejemplo 9 Ventas totales

Un pequeño negocio vende $10 000 en productos para el cuidado de la piel durante su primer año. El propietario del negocio ha establecido una meta de aumentar ventas anuales en $7500 cada año durante 9 años. Suponiendo que se alcance esta meta, encuentre el total de ventas durante los primeros 10 años que este negocio opere.

Solución

Las ventas anuales forman una sucesión aritmética en la que $a_1 = 10\,000$ y $d = 7500$. Por tanto,

$$a_n = 10\,000 + 7500(n - 1)$$

y el n-ésimo término de la sucesión es

$$a_n = 7500n + 2500.$$

Esto implica que el décimo término de la sucesión es

$$a_{10} = 7500(10) + 2500$$
$$= 77\,500.$$ Ver Figura 9.3.

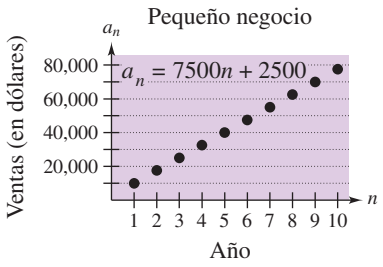


FIGURA 9.3

La suma de los primeros 10 términos de la sucesión es

$$S_{10} = \frac{n}{2}(a_1 + a_{10})$$ Fórmula de la n-ésima suma parcial

$$= \frac{10}{2}(10\,000 + 77\,500)$$ Sustituir 10 por n, 10 000 por a_1 y 77 500 por a_{10}.

$$= 5(87\,500)$$ Simplificar.

$$= 437\,500.$$ Simplificar.

Así, las ventas totales durante los 10 primeros años ascenderán a $437 500.

PUNTO *de repaso* Ahora trate de hacer el Ejercicio 99.

DISCUSIÓN EN CLASE

Relaciones numéricas Decida si es posible llenar los espacios en blanco en cada una de las sucesiones tales que la sucesión resultante sea aritmética. Si es así, encuentre una fórmula de recursión para la sucesión.

a. $-7, \_\_, \_\_, \_\_, \_\_, \_\_, 11$

b. $17, \_\_, \_\_, \_\_, \_\_, \_\_, \_\_, \_\_, \_\_, 71$

c. $2, 6, \_\_, \_\_, 162$

d. $4, 7.5, \_\_, \_\_, \_\_, \_\_, \_\_, \_\_, \_\_, \_\_, 39$

e. $8, 12, \_\_, \_\_, \_\_, 60.75$

9.2 EJERCICIOS

En www.CalcChat.com vea las soluciones a los ejercicios impares.

VOCABULARIO: Llene los espacios en blanco.

1. Una sucesión se llama _____ si las diferencias entre términos consecutivos son iguales. Esta diferencia se denomina diferencia _____.
2. El n-ésimo término de una sucesión aritmética tiene la forma _____.
3. Si se conoce el n-ésimo término de una sucesión aritmética y además se conoce la diferencia común de la sucesión, se puede hallar el $(n + 1)$-ésimo término usando la fórmula _____ _____ $a_{n+1} = a_n + d$.
4. La formula $S_n = \frac{n}{2}(a_1 + a_n)$ se puede usar para hallar la suma de los primeros n términos de una sucesión aritmética, llamados los _____ de una _____ _____ _____.

HABILIDADES Y APLICACIONES

En los Ejercicios 5-14, determine si la sucesión es aritmética. Si es así, encuentre la diferencia común.

5. $10, 8, 6, 4, 2, \ldots$
6. $4, 9, 14, 19, 24, \ldots$
7. $1, 2, 4, 8, 16, \ldots$
8. $80, 40, 20, 10, 5, \ldots$
9. $\frac{9}{4}, 2, \frac{7}{4}, \frac{3}{2}, \frac{5}{4}, \ldots$
10. $3, \frac{5}{2}, 2, \frac{3}{2}, 1, \ldots$
11. $3.7, 4.3, 4.9, 5.5, 6.1, \ldots$
12. $5.3, 5.7, 6.1, 6.5, 6.9, \ldots$
13. $\ln 1, \ln 2, \ln 3, \ln 4, \ln 5, \ldots$
14. $1^2, 2^2, 3^2, 4^2, 5^2, \ldots$

En los Ejercicios 15-22, escriba los primeros cinco términos de la sucesión. Determine si ésta es aritmética. Si es así, encuentre la diferencia común. (Suponga que n empieza con 1.)

15. $a_n = 5 + 3n$
16. $a_n = 100 - 3n$
17. $a_n = 3 - 4(n - 2)$
18. $a_n = 1 + (n - 1)4$
19. $a_n = (-1)^n$
20. $a_n = 2^{n-1}$
21. $a_n = \dfrac{(-1)^n 3}{n}$
22. $a_n = (2^n)n$

En los Ejercicios 23-32, encuentre una fórmula para a_n para la sucesión aritmética.

23. $a_1 = 1, d = 3$
24. $a_1 = 15, d = 4$
25. $a_1 = 100, d = -8$
26. $a_1 = 0, d = -\frac{2}{3}$
27. $4, \frac{3}{2}, -1, -\frac{7}{2}, \ldots$
28. $10, 5, 0, -5, -10, \ldots$
29. $a_1 = 5, a_4 = 15$
30. $a_1 = -4, a_5 = 16$
31. $a_3 = 94, a_6 = 85$
32. $a_5 = 190, a_{10} = 115$

En los Ejercicios 33-40, escriba los primeros cinco términos de la sucesión aritmética.

33. $a_1 = 5, d = 6$
34. $a_1 = 5, d = -\frac{3}{4}$
35. $a_1 = -2.6, d = -0.4$
36. $a_1 = 16.5, d = 0.25$
37. $a_1 = 2, a_{12} = 46$
38. $a_4 = 16, a_{10} = 46$
39. $a_8 = 26, a_{12} = 42$
40. $a_3 = 19, a_{15} = -1.7$

En los Ejercicios 41-46, escriba los primeros cinco términos de la sucesión aritmética definida recursivamente.

41. $a_1 = 15, \quad a_{n+1} = a_n + 4$
42. $a_1 = 6, \quad a_{n+1} = a_n + 5$
43. $a_1 = 200, \quad a_{n+1} = a_n - 10$
44. $a_1 = 72, \quad a_{n+1} = a_n - 6$
45. $a_1 = \frac{5}{8}, \quad a_{n+1} = a_n - \frac{1}{8}$
46. $a_1 = 0.375, \quad a_{n+1} = a_n + 0.25$

En los Ejercicios 47-50, se dan los primeros dos términos de la sucesión aritmética. Encuentre el término faltante.

47. $a_1 = 5, a_2 = 11, a_{10} =$ ____
48. $a_1 = 3, a_2 = 13, a_9 =$ ____
49. $a_1 = 4.2, a_2 = 6.6, a_7 =$ ____
50. $a_1 = -0.7, a_2 = -13.8, a_8 =$ ____

En los Ejercicios 51-58, encuentre la suma de la sucesión aritmética finita.

51. $2 + 4 + 6 + 8 + 10 + 12 + 14 + 16 + 18 + 20$
52. $1 + 4 + 7 + 10 + 13 + 16 + 19$
53. $-1 + (-3) + (-5) + (-7) + (-9)$
54. $-5 + (-3) + (-1) + 1 + 3 + 5$
55. La suma de los primeros 50 enteros pares positivos.
56. La suma de los primeros 100 enteros impares negativos.
57. La suma de los enteros -100 a 30.
58. La suma de los enteros de -10 a 50.

En los Ejercicios 59-66, encuentre la n-ésima suma parcial indicada de la sucesión aritmética.

59. 8, 20, 32, 44, . . . , $n = 10$

60. $-6, -2, 2, 6, \ldots, n = 50$

61. 4.2, 3.7, 3.2, 2.7, . . . , $n = 12$

62. 0.5, 1.3, 2.1, 2.9, . . . , $n = 10$

63. 40, 37, 34, 31, . . . , $n = 10$

64. 75, 70, 65, 60, . . . , $n = 25$

65. $a_1 = 100, \ a_{25} = 220, \ n = 25$

66. $a_1 = 15, \ a_{100} = 307, \ n = 100$

En los Ejercicios 67-74, encuentre la suma parcial.

67. $\sum_{n=1}^{50} n$

68. $\sum_{n=1}^{100} 2n$

69. $\sum_{n=10}^{100} 6n$

70. $\sum_{n=51}^{100} 7n$

71. $\sum_{n=11}^{30} n - \sum_{n=1}^{10} n$

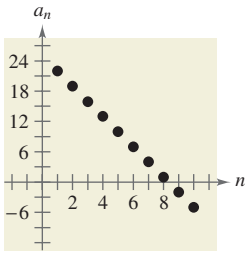
72. $\sum_{n=51}^{100} n - \sum_{n=1}^{50} n$

73. $\sum_{n=1}^{500} (n + 8)$

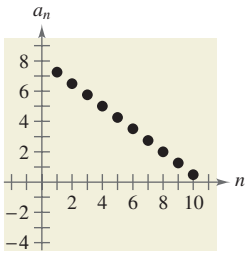
74. $\sum_{n=1}^{250} (1000 - n)$

En los Ejercicios 75-78, relacione la sucesión aritmética con su gráfica. [Las gráficas están marcadas (a), (b), (c) y (d).]

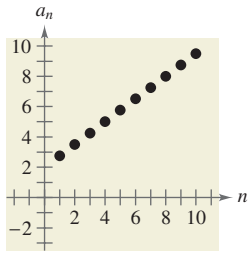
(a)



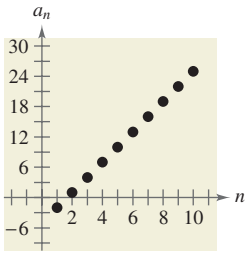
(b)



(c)



(d)



75. $a_n = -\frac{3}{4}n + 8$

76. $a_n = 3n - 5$

77. $a_n = 2 + \frac{3}{4}n$

78. $a_n = 25 - 3n$

En los Ejercicios 79-82, use una calculadora de gráficas para graficar los 10 primeros términos de la sucesión. (Suponga que n comienza en 1.)

79. $a_n = 15 - \frac{3}{2}n$

80. $a_n = -5 + 2n$

81. $a_n = 0.2n + 3$

82. $a_n = -0.3n + 8$

En los Ejercicios 83-88, use una calculadora de gráficas para encontrar la suma parcial.

83. $\sum_{n=1}^{20} (2n + 1)$

84. $\sum_{n=0}^{50} (50 - 2n)$

85. $\sum_{n=1}^{100} \frac{n + 1}{2}$

86. $\sum_{n=0}^{100} \frac{4 - n}{4}$

87. $\sum_{i=1}^{60} \left(250 - \frac{2}{5}i\right)$

88. $\sum_{j=1}^{200} (10.5 + 0.025j)$

OFERTA DE TRABAJO En los Ejercicios 89 y 90, considere una oferta de trabajo con el salario inicial dado y el incremento anual dado.

(a) Determine el salario durante el sexto año de trabajo.

(b) Determine la compensación total de la empresa a lo largo de los seis años de trabajo.

	Salario inicial	*Incremento anual*
89.	\$32 500	\$1500
90.	\$36 800	\$1750

91. CAPACIDAD DE ASIENTOS Determine la capacidad de asientos de un auditorio con 30 filas de butacas si hay 20 en la primera fila, 24 en la segunda, 28 en la tercera y así sucesivamente.

92. CAPACIDAD DE ASIENTOS Determine la capacidad de asientos de un auditorio con 36 filas de butacas si hay 15 en la primera fila, 18 en la segunda, 21 en la tercera y así sucesivamente.

93. PATRÓN DE LADRILLOS Un patio de ladrillos tiene aproximadamente la forma de un trapecio (vea la figura). El patio tiene 18 filas de ladrillos. La primera fila tiene 14 ladrillos y la 18ava tiene 31. ¿Cuántos ladrillos hay en el patio?

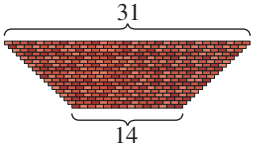


FIGURA PARA 93

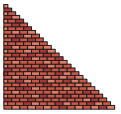


FIGURA PARA 94

94. PATRÓN DE LADRILLOS Se hace una pared triangular de ladrillo cortando algunos de éstos a la mitad y usando en la primera columna de una fila alternada (vea figura en la página previa). La pared tiene 28 filas. La fila superior es de medio ladrillo de ancho y la fila inferior es de 14 ladrillos de ancho. ¿Cuántos ladrillos se usan en la pared terminada?

95. CUERPOS EN CAÍDA Un cuerpo con insignificante resistencia al aire se deja caer desde un avión. Durante el primer segundo de la caída, el objeto cae 4.9 metros; durante el siguiente segundo, cae 14.7 metros; durante el tercer segundo, cae 24.5 metros; durante el cuarto segundo, cae 34.3 metros. Si continúa este patrón aritmético, ¿cuántos metros caerá el cuerpo en 10 segundos?

96. CUERPOS EN CAÍDA Un cuerpo con insignificante resistencia al aire se deja caer desde lo alto de la Torre Sears en Chicago, a una altura de 1454 pies. Durante el primer segundo de caída, el cuerpo cae 16 pies; en el siguiente segundo cae 48 pies; en el tercer segundo, cae 80 pies; durante el cuarto segundo, cae 112 pies. Si continúa este patrón aritmético, ¿cuántos pies caerá el cuerpo en 7 segundos?

97. DINERO DE PREMIOS Una feria de condado lleva a cabo una competencia en la que los primeros ocho panaderos reciben premios en efectivo. El primer lugar recibe un premio en efectivo de $200, el segundo recibe $175, el tercero recibe $150, y así sucesivamente.

(a) Escriba una sucesión a_n que represente el premio en efectivo otorgado en términos del lugar n en el que lo coloca la pieza horneada.

(b) Encuentre la cantidad total de dinero en efectivo otorgado en la competencia.

98. DINERO DE PREMIOS Una liga de jugadores de boliche de una ciudad está llevando a cabo un torneo en el que son premiados los mejores 12 jugadores que tienen los totales más altos en tres juegos. El primer premio ganará $1200; el segundo, $1100; el tercero, $1000, y así sucesivamente.

(a) Escriba una sucesión a_n que represente el premio en efectivo otorgado en términos del lugar n en el que termina el jugador de boliche.

(b) Encuentre la cantidad total de dinero en efectivo otorgada en el torneo.

99. UTILIDAD TOTAL Una pequeña compañía que fabrica barredoras de nieve obtiene una utilidad de $8000 durante su primer año. El propietario de la compañía establece una meta de aumentar la utilidad en $1500 cada año durante 5 años. Suponiendo que se logre esta meta, encuentre la utilidad total durante los primeros 6 años de este negocio. ¿Qué clase de factores económicos podrían impedir que la compañía logre su meta de utilidades? ¿Hay algunos otros factores que pudieran impedir que la compañía logre su meta? Explique.

100. VENTAS TOTALES Un empresario vende $15 000 en recuerdos de deportes durante un año y establece una meta para aumentar sus ventas anuales en $5000 cada año durante 9 años. Suponiendo que se logre esta meta, encuentre el total de ventas durante los primeros 10 años de este negocio. ¿Qué clase de factores económicos podrían impedir que el negocio logre sus metas?

101. DINERO EN PRÉSTAMO Usted solicita $2000 en préstamo a un amigo para comprar una nueva laptop, y ha convenido en pagar el préstamo con pagos mensuales de $200 más 1% de interés sobre el saldo no pagado.

(a) Encuentre el pago de los primeros seis meses que usted hará, y el saldo no pagado (insoluto) después de cada mes.

(b) Encuentre la cantidad total de intereses pagada en el plazo del préstamo.

102. DINERO EN PRÉSTAMO Usted solicita $5000 en préstamo a sus padres para comprar un auto usado. Los arreglos del préstamo son tales que usted hará pagos de $250 por mes más 1% de interés sobre el saldo no pagado.

(a) Encuentre los pagos mensuales del primer año que hará, así como el saldo no pagado después de cada mes.

(b) Encuentre la cantidad total de interés pagada en el plazo del préstamo.

103. ANALISIS DE DATOS: INGRESO PERSONAL En la tabla se muestra el ingreso personal per cápita a_n en Estados Unidos de 2002 a 2008. (Fuente: U.S. Bureau of Economic Analysis)

Año	Ingresos personales per cápita, a_n
2002	$30 834
2003	$31 519
2004	$33 159
2005	$34 691
2006	$36 791
2007	$38 654
2008	$39 742

(a) Encuentre una sucesión aritmética que modele los datos. Con n represente el año, con $n = 2$ correspondiente a 2002.

(b) Use una calculadora de gráficas para graficar los términos de la sucesión finita hallada en el inciso (a).

(c) Use la sucesión del inciso (a) para estimar el ingreso personal per cápita en 2009.

(d) Use la biblioteca de su escuela, internet o alguna otra fuente de consulta para hallar el ingreso personal real per cápita en 2009, y compare este valor con la estimación hecha en el inciso (c).

104. ANÁLISIS DE DATOS: VENTAS La tabla siguiente muestra las ventas a_n (en miles de millones de dólares) de Coca-Cola Enterprises, Inc. de 2000 a 2007. (Fuente: Coca-Cola Enterprises, Inc.)

Año	Ventas, a_n
2000	14.8
2001	15.7
2002	16.9
2003	17.3
2004	18.2
2005	18.7
2006	19.8
2007	20.9

(a) Construya una gráfica de barras que muestre las ventas anuales de 2000 a 2007.

(b) Encuentre una sucesión que modele los datos. Con n represente el año, con $n = 0$ correspondiente a 2000.

(c) Use una calculadora de gráficas para hallar los términos de la sucesión finita hallada en el inciso (b).

(d) Use notación de suma para representar las ventas *totales* de 2000 a 2007. Encuentre las ventas totales.

EXPLORACIÓN

¿VERDADERO O FALSO? En los Ejercicios 105 y 106, determine si la proposición es verdadera o falsa. Justifique su respuesta.

105. Dada una sucesión aritmética para la cual sólo se conocen los primeros dos términos, es posible hallar el n-ésimo término.

106. Si la única información conocida acerca de una sucesión aritmética finita es su primer y su último términos, entonces es posible hallar la suma de la sucesión.

En los Ejercicios 107 y 108, encuentre los primeros 10 términos de la sucesión.

107. $a_1 = x, d = 2x$

108. $a_1 = -y, d = 5y$

109. REDACCIÓN Explique cómo usar los primeros dos términos de una sucesión aritmética para hallar el n-ésimo término.

110. TOQUE FINAL Verbalmente, describa las características de una sucesión aritmética. Dé un ejemplo de una sucesión que sea aritmética y una que *no lo sea*.

111. (a) Grafique los primeros 10 términos de la sucesión aritmética $a_n = 2 + 3n$.

(b) Grafique la ecuación de la recta $y = 3x + 2$.

(c) Discuta cualesquiera diferencias entre la gráfica de

$$a_n = 2 + 3n$$

y la gráfica de

$$y = 3x + 2.$$

(d) Compare la pendiente de la recta del inciso (b) con la diferencia común de la sucesión del inciso (a). ¿Qué se puede concluir acerca de la pendiente de una recta y la diferencia común de una sucesión aritmética?

112. RECONOCIMIENTO DE UN PATRÓN

(a) Calcule las siguientes sumas de enteros pares positivos consecutivos.

$1 + 3 =$

$1 + 3 + 5 =$

$1 + 3 + 5 + 7 =$

$1 + 3 + 5 + 7 + 9 =$

$1 + 3 + 5 + 7 + 9 + 11 =$

(b) Use las sumas del inciso (a) para hacer una conjetura acerca de las sumas de enteros pares positivos consecutivos. Verifique su conjetura para la suma

$1 + 3 + 5 + 7 + 9 + 11 + 13 =$.

(c) Verifique algebraicamente su conjetura.

113. PIÉNSELO La suma de los primeros 20 términos de una sucesión aritmética con una diferencia de 3 es 650. Encuentre el primer término.

114. PIÉNSELO La suma de los primeros n términos de una sucesión aritmética con primer término a_1 y diferencia común d es S_n. Determine la suma si cada término se aumenta en 5. Explique.

PROYECTO: PRECIOS DE VIVIENDAS Para trabajar una aplicación extendida que analice los precios medios de venta de casas unifamiliares nuevas, de propiedad privada, vendidas en Estados Unidos de 1991 a 2007, visite el sitio web de este texto en *academic.cengage.com*. (Fuente: U.S. Census Bureau)

9.3 Sucesiones geométricas y series

Lo que debe aprender

- Reconocer, escribir y hallar los n-ésimos términos de sucesiones geométricas.
- Hallar la suma de una sucesión geométrica finita.
- Hallar la suma de una serie geométrica infinita.
- Usar sucesiones geométricas para modelar y resolver problemas de la vida real.

Por qué debe aprenderlo

Se pueden usar sucesiones geométricas para modelar y resolver problemas de la vida real. En el Ejercicio 113 de la página 668 usaremos una sucesión geométrica para modelar la población de China.

© Bob Krist/Corbis

¡ATENCIÓN

Asegúrese de entender que la sucesión 1, 4, 9, 16, . . . , cuyo n-ésimo término es n^2, *no es geométrica*. La razón entre el segundo y el primer término es

$$\frac{a_2}{a_1} = \frac{4}{1} = 4$$

pero la razón entre el tercer y el segundo término es

$$\frac{a_3}{a_2} = \frac{9}{4}.$$

Sucesiones geométricas

En la sección 9.2 aprendimos que una sucesión cuyos términos consecutivos tienen una *diferencia* común es una sucesión aritmética. En esta sección estudiaremos otro tipo importante de sucesión llamado **sucesión geométrica.** Los términos consecutivos de una sucesión geométrica tienen una *razón* común.

Definición de sucesión geométrica

Una sucesión es **geométrica** si las razones entre términos consecutivos son iguales. Por tanto, la sucesión $a_1, a_2, a_3, a_4, \ldots, a_n, \ldots$ es geométrica si hay un número r tal que

$$\frac{a_2}{a_1} = \frac{a_3}{a_2} = \frac{a_4}{a_3} = \cdots = r, \quad r \neq 0.$$

El número r es la **razón común** de la sucesión.

Ejemplo 1 Ejemplos de sucesiones geométricas

a. La sucesión cuyo n-ésimo término es 2^n es geométrica. Para esta sucesión, la razón común entre términos consecutivos es 2.

$$\underbrace{2, 4}_{\frac{4}{2} = 2}, 8, 16, \ldots, 2^n, \ldots \qquad \text{Empezar con } n = 1.$$

b. La sucesión cuyo n-ésimo término es $4(3^n)$ es geométrica. Para esta sucesión, la razón común entre términos consecutivos es 3.

$$\underbrace{12, 36}_{\frac{36}{12} = 3}, 108, 324, \ldots, 4(3^n), \ldots \qquad \text{Empezar con } n = 1.$$

c. La sucesión cuyo n-ésimo término es $\left(-\frac{1}{3}\right)^n$ es geométrica. Para esta sucesión, la razón común entre términos consecutivos es $-\frac{1}{3}$.

$$\underbrace{-\frac{1}{3}, \frac{1}{9}}_{\frac{1/9}{-1/3} = -\frac{1}{3}}, -\frac{1}{27}, \frac{1}{81}, \ldots, \left(-\frac{1}{3}\right)^n, \ldots \qquad \text{Empezar con } n = 1.$$

PUNTO *de repaso* Ahora trate de hacer el Ejercicio 5.

En el Ejemplo 1, observe que cada una de las sucesiones geométricas tiene un n-ésimo término que es de la forma ar^n, donde la razón común de la sucesión es r. Una sucesión geométrica puede ser considerada como una función exponencial cuyo dominio es el conjunto de los números naturales.

El *n*-ésimo término de una sucesión geométrica

El n-ésimo término de una sucesión geométrica tiene la forma

$$a_n = a_1 r^{n-1}$$

donde r es la razón común entre términos consecutivos de la sucesión. Por tanto, toda sucesión geométrica se puede escribir en la forma siguiente.

$$\underset{\downarrow}{a_1},\ \underset{\downarrow}{a_2},\ \underset{\downarrow}{a_3},\ \underset{\downarrow}{a_4},\ \underset{\downarrow}{a_5},\ldots,\ \underset{\downarrow}{a_n},\ldots$$

$$a_1,\ a_1r,\ a_1r^2,\ a_1r^3,\ a_1r^4,\ \ldots,\ a_1r^{n-1},\ \ldots$$

Si se conoce el n-ésimo término de una sucesión geométrica, se puede hallar el $(n+1)$-ésimo término al multiplicar por r. Esto es, $a_{n+1} = a_n r$.

Ejemplo 2 Hallar los términos de una sucesión geométrica

Escriba los primeros cinco términos de la sucesión geométrica cuyo primer término es $a_1 = 3$ y cuya razón común es $r = 2$. A continuación, grafique los términos en un conjunto de ejes de coordenadas.

Solución

Empezando con 3, repetidamente multiplique por 2 para obtener lo siguiente.

$a_1 = 3$ 1er término

$a_2 = 3(2^1) = 6$ 2º término

$a_3 = 3(2^2) = 12$ 3er término

$a_4 = 3(2^3) = 24$ 4º término

$a_5 = 3(2^4) = 48$ 5º término

La Figura 9.4 muestra los primeros cinco términos de esta sucesión geométrica.

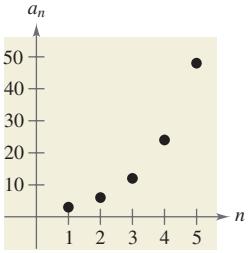


FIGURA 9.4

PUNTO *de repaso* Ahora trate de hacer el Ejercicio 17.

Ejemplo 3 Hallar un término de una sucesión geométrica

Encuentre el 15avo término de la sucesión geométrica cuyo primer término es 20 y cuya razón común es 1.05.

Solución algebraica

$a_{15} = a_1 r^{n-1}$ Fórmula de sucesión geométrica

$= 20(1.05)^{15-1}$ Sustituir 20 por a_1, 1.05 por r y 15 por n.

≈ 39.60 Usar calculadora.

PUNTO *de repaso* Ahora trate de hacer el Ejercicio 35.

Solución numérica

En este caso, $r = 1.05$ y $a_1 = 20$. Así, $a_n = 20(1.05)^{n-1}$. Use la función *table* de una calculadora de gráficas para crear una tabla que muestre los valores de $u_n = 20(1.05)^{n-1}$ para $n = 1$ hasta $n = 15$. De la figura 9.5, el número en el 15avo renglón es aproximadamente 39.60, por lo que el 15avo término de la sucesión geométrica es alrededor de 39.60.

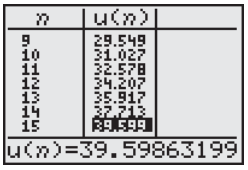


FIGURA 9.5

Ejemplo 4 Hallar un término de una sucesión geométrica

Encuentre el 12avo término de la sucesión geométrica

$$5, 15, 45, \ldots$$

Solución

La razón común de esta sucesión es

$$r = \frac{15}{5} = 3.$$

Como el primer término es $a_1 = 5$, se puede determinar que el 12avo término $(n = 12)$ es

$$\begin{aligned} a_n &= a_1 r^{n-1} && \text{Fórmula para sucesión geométrica} \\ a_{12} &= 5(3)^{12-1} && \text{Sustituir 5 por } a_1\text{, 3 por } r \text{ y 12 por } n. \\ &= 5(177\,147) && \text{Usar calculadora.} \\ &= 885\,735. && \text{Simplificar.} \end{aligned}$$

PUNTO *de repaso* Ahora trate de hacer el Ejercicio 45.

Si se conocen *cualesquier* dos términos de una sucesión geométrica, se puede usar esa información para hallar una fórmula para obtener el n-ésimo término.

Ejemplo 5 Hallar un término de una sucesión geométrica

El cuarto término de una sucesión geométrica es 125 y el décimo término es 125/64. Encuentre el 14avo término. (Suponga que los términos de la sucesión son positivos.)

Solución

El décimo término está relacionado con el cuarto término por medio de la ecuación

$$a_{10} = a_4 r^6 \qquad \text{Multiplicar el cuarto término por } r^{10-4}.$$

Como $a_{10} = 125/64$ y $a_4 = 125$, se puede despejar r como sigue.

$$\begin{aligned} \frac{125}{64} &= 125r^6 && \text{Sustituir } \tfrac{125}{64} \text{ por } a_{10} \text{ y } 125 \text{ por } a_4. \\ \frac{1}{64} &= r^6 && \text{Dividir cada lado entre 125.} \\ \frac{1}{2} &= r && \text{Obtener la raíz sexta de cada lado.} \end{aligned}$$

Se puede obtener el 14avo término al multiplicar el décimo término por r^4.

$$\begin{aligned} a_{14} &= a_{10} r^4 && \text{Multiplicar el décimo término por } r^{14-10}. \\ &= \frac{125}{64}\left(\frac{1}{2}\right)^4 && \text{Sustituir } \tfrac{125}{64} \text{ por } a_{10} \text{ y } \tfrac{1}{2} \text{ por } r. \\ &= \frac{125}{64}\left(\frac{1}{16}\right) && \text{Evaluar la potencia.} \\ &= \frac{125}{1024} && \text{Simplificar.} \end{aligned}$$

PUNTO *de repaso* Ahora trate de hacer el Ejercicio 53.

Ayuda de álgebra

Recuerde que r es la razón común entre términos consecutivos de una sucesión geométrica. Por tanto, en el Ejemplo 5,

$$\begin{aligned} a_{10} &= a_1 r^9 \\ &= a_1 \cdot r \cdot r \cdot r \cdot r^6 \\ &= a_1 \cdot \frac{a_2}{a_1} \cdot \frac{a_3}{a_2} \cdot \frac{a_4}{a_3} \cdot r^6 \\ &= a_4 r^6. \end{aligned}$$

La suma de una sucesión geométrica finita

La fórmula para la suma de una sucesión geométrica *finita* es como sigue.

La suma de una sucesión geométrica finita

La suma de la sucesión geométrica finita

$$a_1,\ a_1r,\ a_1r^2,\ a_1r^3,\ a_1r^4, \ldots, a_1r^{n-1}$$

con razón común $r \neq 1$ está dada por $S_n = \sum_{i=1}^{n} a_1 r^{i-1} = a_1\left(\frac{1 - r^n}{1 - r}\right)$.

Para una demostración de esta fórmula para obtener la suma de una sucesión geométrica, vea la página 721.

Ejemplo 6 Hallar la suma de una sucesión geométrica finita

Encuentre la suma $\sum_{i=1}^{12} 4(0.3)^{i-1}$.

Solución

Al escribir unos pocos términos, tendremos

$$\sum_{i=1}^{12} 4(0.3)^{i-1} = 4(0.3)^0 + 4(0.3)^1 + 4(0.3)^2 + \cdots + 4(0.3)^{11}.$$

A continuación, como $a_1 = 4$, $r = 0.3$ y $n = 12$, se puede aplicar la fórmula para la suma de una sucesión geométrica finita para obtener

$$S_n = a_1\left(\frac{1 - r^n}{1 - r}\right)$$ Fórmula para la suma de una sucesión

$$\sum_{i=1}^{12} 4(0.3)^{i-1} = 4\left[\frac{1 - (0.3)^{12}}{1 - 0.3}\right]$$ Sustituir 4 por a_1, 0.3 por r y 12 por n.

$$\approx 5.714.$$ Usar calculadora.

PUNTO *de repaso* Ahora trate de hacer el Ejercicio 71.

Cuando use la fórmula para la suma de una sucesión geométrica finita, tenga cuidado de verificar que la suma sea de la forma

$$\sum_{i=1}^{n} a_1\, r^{i-1}.$$ El exponente para r es $i - 1$.

Si la suma no es de esta forma, se debe ajustar la fórmula. Por ejemplo, si la suma del Ejemplo 6 fuera $\sum_{i=1}^{12} 4(0.3)^i$, entonces se evaluaría la suma como sigue.

$$\begin{aligned}\sum_{i=1}^{12} 4(0.3)^i &= 4(0.3) + 4(0.3)^2 + 4(0.3)^3 + \cdots + 4(0.3)^{12} \\ &= 4(0.3) + [4(0.3)](0.3) + [4(0.3)](0.3)^2 + \cdots + [4(0.3)](0.3)^{11} \\ &= 4(0.3)\left[\frac{1 - (0.3)^{12}}{1 - 0.3}\right] \approx 1.714 \qquad a_1 = 4(0.3),\ r = 0.3,\ n = 12\end{aligned}$$

Serie geométrica

La suma de los términos de una *sucesión* geométrica infinita se denomina **serie geométrica infinita** o simplemente **serie geométrica.**

La fórmula para la suma de una *sucesión* geométrica *finita* puede, dependiendo del valor de r, extenderse para producir una fórmula para la suma de una *serie* geométrica *infinita*. Específicamente, si la razón común r tiene la propiedad de que $|r| < 1$, se puede demostrar que r^n se hace arbitrariamente cercana a cero cuando n aumenta sin límite. En consecuencia,

$$a_1\left(\frac{1 - r^n}{1 - r}\right) \longrightarrow a_1\left(\frac{1 - 0}{1 - r}\right) \quad \text{cuando} \quad n \longrightarrow \infty.$$

Este resultado se resume como sigue.

La suma de una serie geométrica infinita

Si $|r| < 1$, la serie geométrica infinita

$$a_1 + a_1r + a_1r^2 + a_1r^3 + \cdots + a_1r^{n-1} + \cdots$$

tiene la suma

$$S = \sum_{i=0}^{\infty} a_1r^i = \frac{a_1}{1 - r}.$$

Nótese que si $|r| \geq 1$, la serie no tiene una suma.

Ejemplo 7 Hallar la suma de una serie geométrica infinita

Encuentre la suma.

a. $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} 4(0.6)^n$

b. $3 + 0.3 + 0.03 + 0.003 + \cdots$

Solución

a. $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} 4(0.6)^n = 4 + 4(0.6) + 4(0.6)^2 + 4(0.6)^3 + \cdots + 4(0.6)^n + \cdots$

$$= \frac{4}{1 - 0.6} \qquad \frac{a_1}{1 - r}$$

$$= 10$$

b. $3 + 0.3 + 0.03 + 0.003 + \cdots = 3 + 3(0.1) + 3(0.1)^2 + 3(0.1)^3 + \cdots$

$$= \frac{3}{1 - 0.1} \qquad \frac{a_1}{1 - r}$$

$$= \frac{10}{3}$$

$$\approx 3.33$$

PUNTO *de repaso* Ahora trate de hacer el Ejercicio 93.

Aplicación

Tip de estudio

Recuerde de la sección 3.1 que la fórmula para el interés compuesto (para n capitalizaciones por año) es

$$A = P\left(1 + \frac{r}{n}\right)^{nt}.$$

Por tanto, en el Ejemplo 8, \$50 es el capital P, 0.06 es la tasa de interés r, 12 es el número de capitalizaciones por año n, y 2 es el tiempo en años. Si se sustituyen estos valores en la fórmula, se obtiene

$$A = 50\left(1 + \frac{0.06}{12}\right)^{12(2)}$$
$$= 50\left(1 + \frac{0.06}{12}\right)^{24}.$$

Ejemplo 8 Anualidad creciente

Se hace un depósito de \$50 el primer día de cada mes en una cuenta que paga 6% de interés, capitalizado mensualmente. ¿Cuál es el saldo al término de 2 años? (Este tipo de plan de ahorros se denomina **anualidad creciente.**)

Solución

El primer depósito ganará interés durante 24 meses y su saldo será

$$A_{24} = 50\left(1 + \frac{0.06}{12}\right)^{24}$$
$$= 50(1.005)^{24}.$$

El segundo depósito ganará interés durante 23 meses y su saldo será

$$A_{23} = 50\left(1 + \frac{0.06}{12}\right)^{23}$$
$$= 50(1.005)^{23}.$$

El último depósito ganará interés sólo 1 mes y su saldo será

$$A_1 = 50\left(1 + \frac{0.06}{12}\right)^{1}$$
$$= 50(1.005).$$

El saldo total en la anualidad será la suma de los saldos de los 24 depósitos. Si utilizamos la fórmula para la suma de una sucesión geométrica finita, con $A_1 = 50(1.005)$ y $r = 1.005$, tendremos

$$S_{24} = 50(1.005)\left[\frac{1 - (1.005)^{24}}{1 - 1.005}\right]$$

Sustituya $50(1.005)$ por A_1, 1.005 por r y 24 por n.

$$= \$1277.96.$$

Simplificar.

PUNTO *de repaso* Ahora trate de hacer el Ejercicio 121.

Discusión en clase

Un experimento Necesitará una cuerda o hilo, unas tijeras y una cinta métrica. Mida cualquier tramo del hilo de al menos 5 pies de largo. Doble el hilo y córtelo a la mitad. Tome una de las mitades resultantes, dóblela y córtela a la mitad. Continúe este proceso hasta que ya no se pueda cortar un tramo de hilo a la mitad. ¿Cuántos cortes fue posible hacer? Construya una sucesión de los tramos de hilo resultantes después de cada corte, empezando con el tramo original del hilo. Encuentre una fórmula para el n-ésimo término de esta sucesión. ¿Cuántos cortes podrían hacerse teóricamente? Discuta por qué no fue posible hacer esos cortes.

9.3 EJERCICIOS

En www.CalcChat.com vea las soluciones a los ejercicios impares.

VOCABULARIO: Llene los espacios en blanco.

1. Una sucesión se denomina _____ si la razón entre términos consecutivos es igual. Esta razón se denomina _____ _____.
2. El n-ésimo término de una sucesión geométrica tiene la forma _____.
3. La fórmula para la suma de una sucesión geométrica finita está dada por _____.
4. La suma de los términos de una sucesión geométrica infinita se llama _____ _____.

HABILIDADES Y APLICACIONES

En los Ejercicios 5-16, determine si la sucesión es geométrica. Si es así, encuentre la razón común.

5. $2, 10, 50, 250, \ldots$
6. $7, 21, 63, 189, \ldots$
7. $3, 12, 21, 30, \ldots$
8. $25, 20, 15, 10, \ldots$
9. $1, -\frac{1}{2}, \frac{1}{4}, -\frac{1}{8}, \ldots$
10. $5, 1, 0.2, 0.04, \ldots$
11. $\frac{1}{8}, \frac{1}{4}, \frac{1}{2}, 1, \ldots$
12. $9, -6, 4, -\frac{8}{3}, \ldots$
13. $1, \frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \frac{1}{4}, \ldots$
14. $\frac{1}{5}, \frac{2}{7}, \frac{3}{9}, \frac{4}{11}, \ldots$
15. $1, -\sqrt{7}, 7, -7\sqrt{7}, \ldots$
16. $2, \frac{4}{\sqrt{3}}, \frac{8}{3}, \frac{16}{3\sqrt{3}}, \ldots$

En los Ejercicios 17-28, escriba los primeros cinco términos de la sucesión geométrica.

17. $a_1 = 4, r = 3$
18. $a_1 = 8, r = 2$
19. $a_1 = 1, r = \frac{1}{2}$
20. $a_1 = 1, r = \frac{1}{3}$
21. $a_1 = 5, r = -\frac{1}{10}$
22. $a_1 = 6, r = -\frac{1}{4}$
23. $a_1 = 1, r = e$
24. $a_1 = 2, r = \pi$
25. $a_1 = 3, r = \sqrt{5}$
26. $a_1 = 4, r = -\frac{1}{\sqrt{2}}$
27. $a_1 = 2, r = \frac{x}{4}$
28. $a_1 = 5, r = 2x$

En los Ejercicios 29-34, escriba los primeros cinco términos de la sucesión geométrica. Determine la razón común y escriba el n-ésimo término de la sucesión como función de n.

29. $a_1 = 64, \quad a_{k+1} = \frac{1}{2}a_k$
30. $a_1 = 81, \quad a_{k+1} = \frac{1}{3}a_k$
31. $a_1 = 9, \quad a_{k+1} = 2a_k$
32. $a_1 = 5, \quad a_{k+1} = -2a_k$
33. $a_1 = 6, \quad a_{k+1} = -\frac{3}{2}a_k$
34. $a_1 = 80, \quad a_{k+1} = -\frac{1}{2}a_k$

En los Ejercicios 35-44, escriba una expresión para el n-ésimo término de la sucesión geométrica. A continuación, encuentre el término indicado.

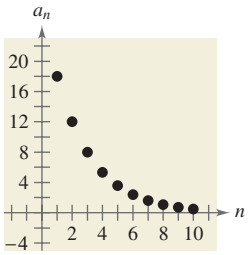
35. $a_1 = 4, r = \frac{1}{2}, n = 10$
36. $a_1 = 5, r = \frac{7}{2}, n = 8$
37. $a_1 = 6, r = -\frac{1}{3}, n = 12$
38. $a_1 = 64, r = -\frac{1}{4}, n = 10$
39. $a_1 = 100, r = e^x, n = 9$
40. $a_1 = 1, r = e^{-x}, n = 4$
41. $a_1 = 1, r = \sqrt{2}, n = 12$
42. $a_1 = 1, r = \sqrt{3}, n = 8$
43. $a_1 = 500, r = 1.02, n = 40$
44. $a_1 = 1000, r = 1.005, n = 60$

En los Ejercicios 45-56, encuentre el n-ésimo término indicado de la sucesión geométrica.

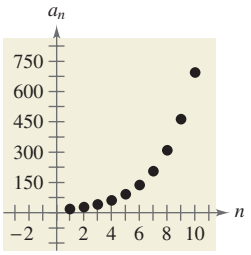
45. 9º término: $11, 33, 99, \ldots$
46. 7º término: $3, 36, 432, \ldots$
47. 10º término: $5, 30, 180, \ldots$
48. 22º término: $4, 8, 16, \ldots$
49. 8º término: $\frac{1}{2}, -\frac{1}{8}, \frac{1}{32}, -\frac{1}{128}, \ldots$
50. 7º término: $\frac{8}{5}, -\frac{16}{25}, \frac{32}{125}, -\frac{64}{625}, \ldots$
51. 3er término: $a_1 = 16, a_4 = \frac{27}{4}$
52. 1er término: $a_2 = 3, a_5 = \frac{3}{64}$
53. 6º término: $a_4 = -18, a_7 = \frac{2}{3}$
54. 7º término: $a_3 = \frac{16}{3}, a_5 = \frac{64}{27}$
55. 5º término: $a_2 = 2, a_3 = -\sqrt{2}$
56. 9º término: $a_3 = 11, a_4 = -11\sqrt{11}$

En los Ejercicios 57-60, relacione la sucesión geométrica con su gráfica. [Las gráficas están marcadas (a),(b),(c) y (d).]

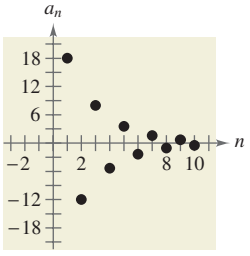
(a)



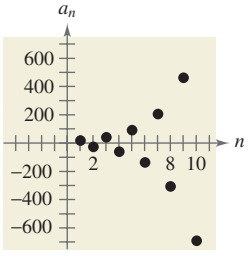
(b)



(c)



(d)



57. $a_n = 18\left(\frac{2}{3}\right)^{n-1}$
58. $a_n = 18\left(-\frac{2}{3}\right)^{n-1}$
59. $a_n = 18\left(\frac{3}{2}\right)^{n-1}$
60. $a_n = 18\left(-\frac{3}{2}\right)^{n-1}$

En los Ejercicios 61-66, use una calculadora de gráficas para graficar los primeros 10 términos de la sucesión.

61. $a_n = 12(-0.75)^{n-1}$
62. $a_n = 10(1.5)^{n-1}$
63. $a_n = 12(-0.4)^{n-1}$
64. $a_n = 20(-1.25)^{n-1}$
65. $a_n = 2(1.3)^{n-1}$
66. $a_n = 10(1.2)^{n-1}$

En los Ejercicios 67-86, encuentre la suma de la sucesión geométrica finita.

67. $\sum_{n=1}^{7} 4^{n-1}$
68. $\sum_{n=1}^{10} \left(\frac{3}{2}\right)^{n-1}$
69. $\sum_{n=1}^{6} (-7)^{n-1}$
70. $\sum_{n=1}^{8} 5\left(-\frac{5}{2}\right)^{n-1}$
71. $\sum_{i=1}^{7} 64\left(-\frac{1}{2}\right)^{i-1}$
72. $\sum_{i=1}^{10} 2\left(\frac{1}{4}\right)^{i-1}$
73. $\sum_{i=1}^{6} 32\left(\frac{1}{4}\right)^{i-1}$
74. $\sum_{i=1}^{12} 16\left(\frac{1}{2}\right)^{i-1}$
75. $\sum_{n=0}^{20} 3\left(\frac{3}{2}\right)^{n}$
76. $\sum_{n=0}^{40} 5\left(\frac{3}{5}\right)^{n}$
77. $\sum_{n=0}^{15} 2\left(\frac{4}{3}\right)^{n}$
78. $\sum_{n=0}^{20} 10\left(\frac{1}{5}\right)^{n}$
79. $\sum_{n=0}^{5} 300(1.06)^{n}$
80. $\sum_{n=0}^{6} 500(1.04)^{n}$
81. $\sum_{n=0}^{40} 2\left(-\frac{1}{4}\right)^{n}$
82. $\sum_{n=0}^{50} 10\left(\frac{2}{3}\right)^{n-1}$
83. $\sum_{i=1}^{10} 8\left(-\frac{1}{4}\right)^{i-1}$
84. $\sum_{i=0}^{25} 8\left(-\frac{1}{2}\right)^{i}$
85. $\sum_{i=1}^{10} 5\left(-\frac{1}{3}\right)^{i-1}$
86. $\sum_{i=1}^{100} 15\left(\frac{2}{3}\right)^{i-1}$

En los Ejercicios 87-92, use notación de suma para escribir la suma.

87. $10 + 30 + 90 + \cdots + 7290$
88. $9 + 18 + 36 + \cdots + 1152$
89. $2 - \frac{1}{2} + \frac{1}{8} - \cdots + \frac{1}{2048}$
90. $15 - 3 + \frac{3}{5} - \cdots - \frac{3}{625}$
91. $0.1 + 0.4 + 1.6 + \cdots + 102.4$
92. $32 + 24 + 18 + \cdots + 10.125$

En los Ejercicios 93-106, encuentre la suma de la serie geométrica infinita.

93. $\sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{1}{2}\right)^{n}$
94. $\sum_{n=0}^{\infty} 2\left(\frac{2}{3}\right)^{n}$
95. $\sum_{n=0}^{\infty} \left(-\frac{1}{2}\right)^{n}$
96. $\sum_{n=0}^{\infty} 2\left(-\frac{2}{3}\right)^{n}$
97. $\sum_{n=0}^{\infty} 4\left(\frac{1}{4}\right)^{n}$
98. $\sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{1}{10}\right)^{n}$
99. $\sum_{n=0}^{\infty} (0.4)^{n}$
100. $\sum_{n=0}^{\infty} 4(0.2)^{n}$
101. $\sum_{n=0}^{\infty} -3(0.9)^{n}$
102. $\sum_{n=0}^{\infty} -10(0.2)^{n}$
103. $8 + 6 + \frac{9}{2} + \frac{27}{8} + \cdots$
104. $9 + 6 + 4 + \frac{8}{3} + \cdots$
105. $\frac{1}{9} - \frac{1}{3} + 1 - 3 + \cdots$
106. $-\frac{125}{36} + \frac{25}{6} - 5 + 6 - \cdots$

En los Ejercicios 107-110, encuentre la representación numérica racional del decimal repetitivo.

107. $0.\overline{36}$
108. $0.\overline{297}$
109. $0.3\overline{18}$
110. $1.3\overline{8}$

RAZONAMIENTO GRÁFICO En los Ejercicios 111 y 112, use una calculadora de gráficas para graficar la función. Identifique la asíntota horizontal de la gráfica y determine su relación con la suma.

111. $f(x) = 6\left[\frac{1 - (0.5)^x}{1 - (0.5)}\right]$, $\sum_{n=0}^{\infty} 6\left(\frac{1}{2}\right)^{n}$

112. $f(x) = 2\left[\frac{1 - (0.8)^x}{1 - (0.8)}\right]$, $\sum_{n=0}^{\infty} 2\left(\frac{4}{5}\right)^{n}$

113. ANÁLISIS DE DATOS: POBLACIÓN La tabla siguiente muestra la población a_n a mitad de año en China (en millones) de 2002 a 2008. (Fuente: U.S. Census Bureau)

Año	Población, a_n
2002	1284.3
2003	1291.5
2004	1298.8
2005	1306.3
2006	1314.0
2007	1321.9
2008	1330.0

(a) Use la función *exponential regression* de una calculadora de gráficas para hallar una sucesión geométrica que modele los datos. Con n represente el año, con $n = 2$ correspondiente a 2002.

(b) Use la sucesión del inciso (a) para describir el índice al cual está creciendo la población de China.

(c) Use la sucesión del inciso (a) para predecir la población de China en 2015. La U.S. Census Bureau predice que la población de ese país será de 1393.4 millones en 2015. ¿Cómo se compara este valor con su predicción?

(d) Use la sucesión del inciso (a) para determinar cuándo llegará a 1350 millones la población de China.

114. INTERÉS COMPUESTO Un capital de $5000 se invierte a 6% de interés. Encuentre la cantidad después de 10 años si el interés se capitaliza (a) anualmente, (b) semestralmente, (d) trimestralmente, (d) mensualmente y (e) diario.

115. INTERÉS COMPUESTO Un capital de $2500 se invierte a 2% de interés. Encuentre la cantidad después de 20 años si el interés se capitaliza (a) anualmente, (b) semestralmente, (c) trimestralmente, (d) mensualmente y (e) diario.

116. DEPRECIACIÓN Una compañía de máquinas-herramienta y troqueles compra una máquina en $175 000 que se deprecia a razón de 30% anual. (En otras palabras, al final de cada año el valor depreciado es 70% de lo que era al principio del año.) Encuentre el valor depreciado de la máquina después de 5 años completos.

117. ANUALIDADES Se hace un depósito de $100 al iniciar cada mes en una cuenta que paga 6% de interés, capitalizado mensualmente. El saldo A en la cuenta al término de 5 años es

$$A = 100\left(1 + \frac{0.06}{12}\right)^{1} + \cdots + 100\left(1 + \frac{0.06}{12}\right)^{60}.$$

Encuentre A.

118. ANUALIDADES Se hace un depósito de $50 al iniciar cada mes en una cuenta que paga 8% de interés, capitalizado mensualmente. El saldo A en la cuenta al término de 5 años es

$$A = 50\left(1 + \frac{0.08}{12}\right)^{1} + \cdots + 50\left(1 + \frac{0.08}{12}\right)^{60}.$$

Encuentre A.

119. ANUALIDADES Se hace un depósito de P dólares al iniciar cada mes en una cuenta que paga una tasa de interés de r, capitalizado mensualmente. El saldo A en la cuenta al término de t años es

$$A = P\left(1 + \frac{r}{12}\right) + P\left(1 + \frac{r}{12}\right)^{2} + \cdots + P\left(1 + \frac{r}{12}\right)^{12t}.$$

Demuestre que el saldo es

$$A = P\left[\left(1 + \frac{r}{12}\right)^{12t} - 1\right]\left(1 + \frac{12}{r}\right).$$

120. ANUALIDADES Se hace un depósito de P dólares al iniciar cada mes en una cuenta que paga una tasa de interés de r, capitalizado continuamente. El saldo A en la cuenta al término de t años es

$$A = Pe^{r/12} + Pe^{2r/12} + \cdots + Pe^{12tr/12}.$$

Demuestre que el saldo es $A = \dfrac{Pe^{r/12}(e^{rt} - 1)}{e^{r/12} - 1}$.

ANUALIDADES En los Ejercicios 121-124, considere hacer depósitos mensuales de P dólares en una cuenta de ahorros con una tasa r de interés anual. Use los resultados de los Ejercicios 119 y 120 para hallar el saldo A después de t años si el interés se capitaliza (a) mensualmente y (b) continuamente.

121. $P = \$50,\ r = 5\%,\ t = 20$ años

122. $P = \$75,\ r = 3\%,\ t = 25$ años

123. $P = \$100,\ r = 2\%,\ t = 40$ años

124. $P = \$20,\ r = 4.5\%,\ t = 50$ años

125. ANUALIDADES Considere un depósito anual de P dólares en una cuenta con una tasa r de interés anual, capitalizada mensualmente. Al término de cada mes se hace un retiro de W dólares y la cuenta quedará sin saldo en t años. La cantidad del depósito inicial requerido es

$$P = W\left(1 + \frac{r}{12}\right)^{-1} + W\left(1 + \frac{r}{12}\right)^{-2} + \cdots + W\left(1 + \frac{r}{12}\right)^{-12t}.$$

Demuestre que el depósito inicial es

$$P = W\left(\frac{12}{r}\right)\left[1 - \left(1 + \frac{r}{12}\right)^{-12t}\right].$$

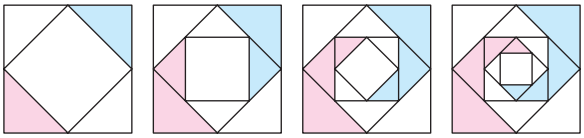
126. ANUALIDADES Determine la cantidad necesaria en una cuenta de jubilación, para una persona que se jubila a los 65 años de edad y desea un ingreso de $2000 mensuales de la cuenta durante 20 años. Use el resultado del ejercicio 125 y suponga que la cuenta gana 9% capitalizado mensualmente.

EFECTO MULTIPLICADOR En los Ejercicios 127-130, use la siguiente información. El gobierno del estado ha hecho un descuento de impuestos a dueños de propiedades, con la esperanza de que cada dueño gaste alrededor de p% del descuento y, a su vez, cada persona que reciba esa cantidad gaste p% de lo que reciba, y así sucesivamente. Los economistas conocen este intercambio de dinero y su circulación dentro de la economía como "efecto multiplicador". El efecto multiplicador opera con la idea de que los gastos de una persona son el ingreso de otra. Para el descuento de impuestos dado, encuentre la cantidad total devuelta a la economía del estado si este efecto continúa sin fin.

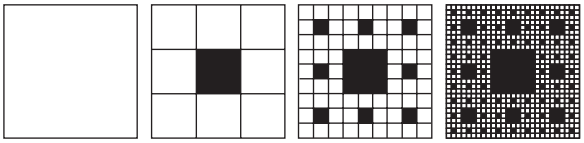
	Descuento de impuesto	p%
127.	$400	75%
128.	$250	80%
129.	$600	72.5%
130.	$450	77.5%

131. GEOMETRÍA Los lados de un cuadrado miden 16 pulgadas de largo. Se forma un nuevo cuadrado al enlazar los puntos medios de los lados del cuadrado ori-

ginal y dos de los triángulos resultantes se sombrean (vea figura). Si este proceso se repite cinco veces más, determine el área total de la región sombreada.



132. GEOMETRÍA Los lados de un cuadrado miden 27 pulgadas de largo. Se forman nuevos cuadrados al dividir el original en nueve cuadrados. El cuadrado del centro se sombrea entonces (vea figura). Si este proceso se repite tres veces más, determine el área total de la región sombreada.



133. SALARIO Una firma de inversiones ofrece un empleo vacante con un salario de \$45 000 para el primer año. Suponga que durante los siguientes 39 años hay un aumento de 5% cada año. Encuentre la compensación total del periodo de 40 años.

134. SALARIO Una compañía de servicios de tecnología ofrece un empleo vacante con un salario de \$52 700 para el primer año. Suponga que durante los siguientes 24 años hay un aumento de 3% cada año. Encuentre la compensación total del periodo de 25 años.

135. DISTANCIA Un saltador de *bungee* se lanza del puente New River Gorge en Virginia del Oeste, que tiene una altura de 876 pies. La cuerda se estira 850 pies y el saltador rebota 75% de la distancia de caída.

(a) Después de saltar y rebotar 10 veces, ¿qué distancia se ha movido el saltador hacia abajo?, ¿cuánto se ha movido hacia arriba? ¿Cuál es la distancia total recorrida hacia abajo y hacia arriba?

(b) Aproxime la distancia total hacia abajo y hacia arriba que el saltador viaja antes de quedar en reposo.

136. DISTANCIA Una pelota se deja caer desde una altura de 16 pies. Cada vez que baja h pies, rebota $0.81h$ pies.

(a) Encuentre la distancia vertical total recorrida por la pelota.

(b) La pelota tarda los tiempos siguientes (en segundos) en cada caída.

$$s_1 = -16t^2 + 16, \quad s_1 = 0 \text{ si } t = 1$$
$$s_2 = -16t^2 + 16(0.81), \quad s_2 = 0 \text{ si } t = 0.9$$
$$s_3 = -16t^2 + 16(0.81)^2, \quad s_3 = 0 \text{ si } t = (0.9)^2$$
$$s_4 = -16t^2 + 16(0.81)^3, \quad s_4 = 0 \text{ si } t = (0.9)^3$$
$$\vdots \qquad\qquad \vdots$$
$$s_n = -16t^2 + 16(0.81)^{n-1}, \quad s_n = 0 \text{ si } t = (0.9)^{n-1}$$

Empezando con s_2, la pelota tarda el mismo tiempo en rebotar hacia arriba que en bajar y, por tanto, el tiempo total transcurrido antes que llegue al reposo es

$$t = 1 + 2\sum_{n=1}^{\infty}(0.9)^n.$$

Encuentre el tiempo total.

EXPLORACIÓN

¿VERDADERO O FALSO? En los Ejercicios 137 y 138, determine si la proposición es verdadera o falsa. Justifique su respuesta.

137. Una sucesión es geométrica si las razones entre diferencias consecutivas de términos consecutivos son iguales.

138. Se puede hallar el n-ésimo término de una sucesión geométrica al multiplicar su razón común por el primer término de la sucesión elevada a la potencia $(n - 1)$.

139. RAZONAMIENTO GRÁFICO Considere la gráfica de

$$y = \left(\frac{1 - r^x}{1 - r}\right).$$

(a) Use una calculadora de gráficas para graficar y para $r = \frac{1}{2}, \frac{2}{3}$ y $\frac{4}{5}$. ¿Qué pasa cuando $x \to \infty$?

(b) Use una calculadora de gráficas para graficar y para $r = 1.5, 2$ y 3. ¿Qué pasa cuando $x \to \infty$?

140. TOQUE FINAL

(a) Escribe un breve párrafo que describa las similitudes y diferencias entre una sucesión geométrica y una serie geométrica. Dé un ejemplo de cada una.

(b) Escriba un breve párrafo que describa la diferencia entre una serie geométrica finita y una serie geométrica infinita. ¿Siempre es posible hallar la suma de una serie geométrica finita? ¿Siempre es posible hallar la suma de una serie geométrica infinita? Explique.

141. ESCRITURA Escriba un breve párrafo que explique por qué los términos de una sucesión geométrica disminuyen en magnitud cuando $-1 < r < 1$.

142. Encuentre dos series geométricas con sumas de 4.

PROYECTO: VIVIENDAS DESOCUPADAS Para resolver una aplicación extendida que analice el número de viviendas desocupadas en Estados Unidos de 1990 a 2007, visite el sitio web de este texto en *academic.cengage.com*. (Fuente: U.S. Census Bureau)

9.4 Inducción matemática

Lo que debe aprender

- Usar inducción matemática para demostrar proposiciones donde aparezca un entero positivo n.
- Reconocer patrones y escribir el n-ésimo término de una sucesión.
- Hallar las sumas de potencias de enteros.
- Hallar diferencias finitas de sucesiones.

Por qué debe aprenderlo

Se pueden usar diferencias finitas para determinar qué tipo de modelo se puede usar para representar una sucesión. Por ejemplo, en el Ejercicio 79 en la página 680 usaremos diferencias finitas para hallar un modelo que represente el número de residentes de Alaska de 2002 a 2007.

Introducción

En esta sección estudiaremos una forma de demostración matemática llamada **inducción matemática.** Es importante que note claramente la necesidad lógica que hay de la inducción, por lo cual debe ver más de cerca el problema estudiado en el Ejemplo 5 de la sección 9.2

$$S_1 = 1 = 1^2$$

$$S_2 = 1 + 3 = 2^2$$

$$S_3 = 1 + 3 + 5 = 3^2$$

$$S_4 = 1 + 3 + 5 + 7 = 4^2$$

$$S_5 = 1 + 3 + 5 + 7 + 9 = 5^2$$

A juzgar por el patrón formado por estas cinco primeras sumas, se ve que la suma de los primeros n enteros impares es

$$S_n = 1 + 3 + 5 + 7 + 9 + \cdots + (2n - 1) = n^2.$$

Aunque esta fórmula particular *es* válida, es importante ver que reconocer un patrón y luego simplemente *saltar a la conclusión* de que éste debe ser verdadero para todos los valores de n *no es* un método lógicamente válido de demostración. Hay numerosos ejemplos en los que el patrón parece desarrollarse para pequeños valores de n y luego, en algún punto, falla. Uno de los casos más famosos de esto fue la conjetura del matemático francés Pierre de Fermat (1601-1665), quien especuló que todos los números de la forma

$$F_n = 2^{2^n} + 1, \quad n = 0, 1, 2, \ldots$$

eran primos. Para $n = 0$, 1, 2, 3 y 4 la conjetura es verdadera.

$$F_0 = 3$$

$$F_1 = 5$$

$$F_2 = 17$$

$$F_3 = 257$$

$$F_4 = 65\,537$$

La magnitud del siguiente número de Fermat ($F_5 = 4\,294\,967\,267$) es tan grande que fue difícil que Fermat determinara si era o no primo. No obstante, otro bien conocido matemático, Leonhard Euler (1707-1783), encontró después la factorización

$$F_5 = 4\,294\,967\,297$$

$$= 641(6\,700\,417)$$

que demostró que F_5 no es primo y que, por tanto, la conjetura de Fermat era falsa.

Sólo porque una regla, patrón o fórmula parezca funcionar para varios valores de n no se puede simplemente decidir que sea válido para todos los valores de n sin pasar por una *demostración legítima.* La inducción matemática es un método de demostración.

Tip de estudio

Es importante reconocer que para demostrar una proposición por inducción son necesarias las dos partes del principio de inducción matemática.

El principio de inducción matemática

Sea P_n una proposición que involucra el entero positivo n. Si

1. P_1 es verdadera, y

2. para todo entero positivo k, la verdad de P_k implica la verdad de P_{k+1}

entonces la propoción P_n debe ser verdadera para todos los enteros positivos n.

Para aplicar el principio de inducción matemática, es necesario estar en aptitud de determinar la proposición P_{k+1} para una proposición P_k determinada. Para determinar P_{k+1}, sustituya la cantidad $k + 1$ por k en la proposición P_k.

Ejemplo 1 Un ejemplo preliminar

Encuentre la proposición P_{k+1} para cada proposición P_k.

a. $P_k: S_k = \dfrac{k^2(k+1)^2}{4}$

b. $P_k: S_k = 1 + 5 + 9 + \cdots + [4(k-1) - 3] + (4k - 3)$

c. $P_k: k + 3 < 5k^2$

d. $P_k: 3^k \geq 2k + 1$

Solución

a. $P_{k+1}: S_{k+1} = \dfrac{(k+1)^2(k+1+1)^2}{4}$ Sustituir k por $k + 1$.

$= \dfrac{(k+1)^2(k+2)^2}{4}$ Simplificar.

b. $P_{k+1}: S_{k+1} = 1 + 5 + 9 + \cdots + \{4[(k+1) - 1] - 3\} + [4(k+1) - 3]$

$= 1 + 5 + 9 + \cdots + (4k - 3) + (4k + 1)$

c. $P_{k+1}: (k+1) + 3 < 5(k+1)^2$

$k + 4 < 5(k^2 + 2k + 1)$

d. $P_{k+1}: 3^{k+1} \geq 2(k+1) + 1$

$3^{k+1} \geq 2k + 3$

PUNTO de repaso Ahora trate de hacer el Ejercicio 5.

Una ilustración bien conocida que se usa para explicar por qué funciona el principio de inducción matemática es la interminable fila de fichas de dominó (vea Figura 9.6). Si la fila en realidad contiene un número infinito de fichas de dominó, es evidente que no se podría derribar toda la fila con sólo tirar *una ficha* a la vez. No obstante, suponga que fuera cierto que cada ficha pudiera derribar a la siguiente al caer. Entonces se podrían derriba todas simplemente con empujar la primera ficha e iniciar una reacción en cadena. La inducción matemática funciona en la misma forma. Si la verdad de P_k implica la verdad de P_{k+1} y si P_1 es verdadera, la reacción en cadena continúa como sigue: P_1 implica P_2, P_2 implica P_3, P_3 implica P_4, etcétera.

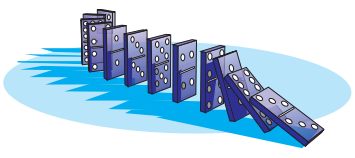


FIGURA 9.6

Cuando use inducción matemática para demostrar una fórmula de *suma* (como en el Ejemplo 2), es útil considerar S_{k+1} como

$$S_{k+1} = S_k + a_{k+1}$$

donde a_{k+1} es el $(k + 1)$-ésimo término de la suma original.

Ejemplo 2 Usar inducción matemática

Use inducción matemática para demostrar la siguiente fórmula.

$$S_n = 1 + 3 + 5 + 7 + \cdots + (2n - 1)$$
$$= n^2$$

Solución

La inducción matemática consta de dos partes. Primero, se debe demostrar que la fórmula es verdadera cuando $n = 1$.

1. Cuando $n = 1$, la fórmula es válida porque

$$S_1 = 1 = 1^2.$$

La segunda parte de la inducción matemática tiene dos pasos. El primero es *suponer* que la fórmula es válida para algún entero k. El segundo paso es usar esta suposición para demostrar que la fórmula es válida para el *siguiente* entero, $k + 1$.

2. Suponiendo que la fórmula

$$S_k = 1 + 3 + 5 + 7 + \cdots + (2k - 1)$$
$$= k^2$$

es verdadera, se debe demostrar que la fórmula $S_{k+1} = (k + 1)^2$ es verdadera.

$$\begin{aligned} S_{k+1} &= 1 + 3 + 5 + 7 + \cdots + (2k - 1) + [2(k + 1) - 1] \\ &= [1 + 3 + 5 + 7 + \cdots + (2k - 1)] + (2k + 2 - 1) \\ &= S_k + (2k + 1) && \text{Agrupar términos para formar } S_k. \\ &= k^2 + 2k + 1 && \text{Sustituir } S_k \text{ por } k^2. \\ &= (k + 1)^2 \end{aligned}$$

Combinando los resultados de los incisos (1) y (2) se puede concluir por inducción matemática que la fórmula es válida para todos los valores enteros positivos de n.

PUNTO *de repaso* Ahora trate de hacer el Ejercicio 11.

Ocasionalmente ocurre que una proposición que contiene números naturales no es verdadera para los primeros $k - 1$ enteros positivos, pero sí lo es para todos los valores de $n \geq k$. En estos casos, se usa una ligera variación del principio de inducción matemática en la que se comprueba P_k en lugar de P_1. Esta variación se conoce como *principio extendido de inducción matemática*. Para ver la validez de esto, nótese en la Figura 9.6 que todas las fichas de dominó excepto la primera $k - 1$ pueden ser derribadas al derribar la k-ésima ficha. Esto sugiere que se puede demostrar que una proposición P_n es verdadera para $n \geq k$ al demostrar queP_k es verdadera y que P_k implica P_{k+1}. En los Ejercicios 25-30 de esta sección se pide aplicar esta extensión de inducción matemática.

Ejemplo 3 Usar inducción matemática

Use inducción matemática para demostrar la fórmula

$$S_n = 1^2 + 2^2 + 3^2 + 4^2 + \cdots + n^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}$$

para todos los enteros $n \geq 1$.

Solución

1. Cuando $n = 1$, la fórmula es válida porque

$$S_1 = 1^2 = \frac{1(2)(3)}{6}.$$

2. Suponiendo que

$$S_k = 1^2 + 2^2 + 3^2 + 4^2 + \cdots + k^2 \qquad a_k = k^2$$
$$= \frac{k(k+1)(2k+1)}{6}$$

se debe demostrar que

$$S_{k+1} = \frac{(k+1)(k+1+1)[2(k+1)+1]}{6}$$
$$= \frac{(k+1)(k+2)(2k+3)}{6}.$$

Para hacer esto, escriba lo siguiente.

$$S_{k+1} = S_k + a_{k+1}$$
$$= (1^2 + 2^2 + 3^2 + 4^2 + \cdots + k^2) + (k+1)^2 \qquad \text{Sustituir por } S_k.$$
$$= \frac{k(k+1)(2k+1)}{6} + (k+1)^2 \qquad \text{Por suposición}$$
$$= \frac{k(k+1)(2k+1) + 6(k+1)^2}{6} \qquad \text{Combinar fracciones}$$
$$= \frac{(k+1)[k(2k+1) + 6(k+1)]}{6} \qquad \text{Factorizar}$$
$$= \frac{(k+1)(2k^2 + 7k + 6)}{6} \qquad \text{Simplificar}$$
$$= \frac{(k+1)(k+2)(2k+3)}{6} \qquad S_k \text{ implica } S_{k+1}.$$

Combinando los resultados de los incisos (1) y (2), se puede concluir por inducción matemática que la fórmula es válida para *todos* los enteros $n \geq 1$.

PUNTO *de repaso* Ahora trate de hacer el Ejercicio 17.

Al demostrar una fórmula usando inducción matemática la única proposición que es *necesario* comprobar es P_1. Pero, como prueba, es buena idea tratar de comprobar algunas otras. Por citar un caso, en el Ejemplo 3, trate de comprobar P_2 y P_3.

Tip de estudio

Recuerde que al sumar expresiones racionales, primero se debe hallar el mínimo común denominador (MCD). En el Ejemplo 3, el MCD es 6.

Ejemplo 4 Probar una desigualdad por inducción matemática

Demuestre que $n < 2^n$ para todos los enteros positivos n.

Solución

1. Para $n = 1$ y $n = 2$, la proposición es verdadera porque

$$1 < 2^1 \quad \text{y} \quad 2 < 2^2.$$

2. Suponiendo que

$$k < 2^k$$

es necesario demostrar que $k + 1 < 2^{k+1}$. Para $n = k$, tenemos

$$2^{k+1} = 2(2^k) > 2(k) = 2k. \qquad \text{Por suposición}$$

Como $2k = k + k > k + 1$ para toda $k > 1$, se deduce que

$$2^{k+1} > 2k > k + 1 \quad \text{o} \quad k + 1 < 2^{k+1}.$$

Combinando los resultados de los incisos (1) y (2), se puede concluir por inducción matemática que $n < 2^n$ para todos los enteros $n \geq 1$.

PUNTO *de repaso* Ahora trate de hacer el Ejercicio 25.

Tip de estudio

Para verificar un resultado que usted demostró por inducción matemática es útil hacer una lista de la proposición para varios valores de n. Por citar un caso, en el Ejemplo 4 podría ponerse en lista

$$1 < 2^1 = 2, \quad 2 < 2^2 = 4,$$

$$3 < 2^3 = 8, \quad 4 < 2^4 = 16,$$

$$5 < 2^5 = 32, \quad 6 < 2^6 = 64.$$

De esta lista, nuestra intuición confirma que la proposición $n < 2^n$ es razonable.

Ejemplo 5 Demostrar un factor por inducción matemática

Demuestre que 3 es un factor de $4^n - 1$ para todos los enteros positivos n.

Solución

1. Para $n = 1$, la proposición es verdadera porque

$$4^1 - 1 = 3.$$

Entonces, 3 es un factor.

2. Suponiendo que 3 es un factor de $4^k - 1$, se debe demostrar que 3 es un factor de $4^{k+1} - 1$. Para hacer esto, escriba lo siguiente.

$$\begin{aligned} 4^{k+1} - 1 &= 4^{k+1} - 4^k + 4^k - 1 && \text{Restar y sumar } 4^k. \\ &= 4^k(4 - 1) + (4^k - 1) && \text{Reagrupar términos} \\ &= 4^k \cdot 3 + (4^k - 1) && \text{Simplificar} \end{aligned}$$

Como 3 es un factor de $4^k \cdot 3$ y es también un factor de $4^k - 1$, se deduce que 3 es un factor de $4^{k+1} - 1$. Combinando los resultados de los incisos (1) y (2), se puede concluir por inducción matemática que 3 es un factor de $4^n - 1$ para todos los enteros positivos n.

PUNTO *de repaso* Ahora trate de hacer el Ejercicio 37.

Reconocimiento de patrones

Aun cuando escoger una fórmula con base en unas cuantas observaciones *no* garantiza su validez, el reconocimiento de patrones *es* importante. Una vez que tengamos un patrón o fórmula que consideremos que funciona, se puede tratar de usar inducción matemática para demostrarlo.

Hallar una fórmula para el *n*-ésimo término de la sucesión

Para hallar una fórmula para el n-ésimo término de una sucesión, considere estas guías.

1. Calcule los primeros términos de la sucesión. A veces es buena idea escribir los términos en forma simplificada y en forma factorizada.
2. Trate de hallar un patrón reconocible para los términos y escriba una fórmula para el n-ésimo término de la sucesión. Ésta es su *hipótesis* o *conjetura*. Puede tratar de calcular uno o más términos de la sucesión para probar su hipótesis.
3. Use inducción matemática para demostrar su hipótesis.

Ejemplo 6 Hallar una fórmula para una suma finita

Encuentre una fórmula para la suma finita y demuestre su validez.

$$\frac{1}{1 \cdot 2} + \frac{1}{2 \cdot 3} + \frac{1}{3 \cdot 4} + \frac{1}{4 \cdot 5} + \cdots + \frac{1}{n(n+1)}$$

Solución

Empiece por escribir las primeras sumas.

$$S_1 = \frac{1}{1 \cdot 2} = \frac{1}{2} = \frac{1}{1+1}$$

$$S_2 = \frac{1}{1 \cdot 2} + \frac{1}{2 \cdot 3} = \frac{4}{6} = \frac{2}{3} = \frac{2}{2+1}$$

$$S_3 = \frac{1}{1 \cdot 2} + \frac{1}{2 \cdot 3} + \frac{1}{3 \cdot 4} = \frac{9}{12} = \frac{3}{4} = \frac{3}{3+1}$$

$$S_4 = \frac{1}{1 \cdot 2} + \frac{1}{2 \cdot 3} + \frac{1}{3 \cdot 4} + \frac{1}{4 \cdot 5} = \frac{48}{60} = \frac{4}{5} = \frac{4}{4+1}$$

De esta sucesión, parece que la fórmula para la k-ésima suma es

$$S_k = \frac{1}{1 \cdot 2} + \frac{1}{2 \cdot 3} + \frac{1}{3 \cdot 4} + \frac{1}{4 \cdot 5} + \cdots + \frac{1}{k(k+1)} = \frac{k}{k+1}.$$

Para demostrar la validez de esta hipótesis use inducción matemática. Observe que usted ya ha comprobado la fórmula para $n = 1$, de modo que puede empezar por suponer que es válida para $n = k$ y tratar de demostrar que también lo es para $n = k + 1$.

$$S_{k+1} = \left[\frac{1}{1 \cdot 2} + \frac{1}{2 \cdot 3} + \frac{1}{3 \cdot 4} + \frac{1}{4 \cdot 5} + \cdots + \frac{1}{k(k+1)}\right] + \frac{1}{(k+1)(k+2)}$$

$$= \frac{k}{k+1} + \frac{1}{(k+1)(k+2)} \qquad \text{Por suposición}$$

$$= \frac{k(k+2)+1}{(k+1)(k+2)} = \frac{k^2+2k+1}{(k+1)(k+2)} = \frac{(k+1)^2}{(k+1)(k+2)} = \frac{k+1}{k+2}$$

Entonces, por inducción matemática se puede concluir que la hipótesis es válida.

PUNTO *de repaso* Ahora trate de hacer el Ejercicio 43.

Sumas de potencias de enteros

La fórmula del Ejemplo 3 es una de un conjunto de útiles fórmulas de sumas. Ésta y otras fórmulas que se refieren a la sumas de varias potencias de los primeros n enteros positivos son como sigue.

Sumas de potencias de enteros

1. $1 + 2 + 3 + 4 + \cdots + n = \dfrac{n(n + 1)}{2}$

2. $1^2 + 2^2 + 3^2 + 4^2 + \cdots + n^2 = \dfrac{n(n + 1)(2n + 1)}{6}$

3. $1^3 + 2^3 + 3^3 + 4^3 + \cdots + n^3 = \dfrac{n^2(n + 1)^2}{4}$

4. $1^4 + 2^4 + 3^4 + 4^4 + \cdots + n^4 = \dfrac{n(n+1)(2n+1)(3n^2+3n-1)}{30}$

5. $1^5 + 2^5 + 3^5 + 4^5 + \cdots + n^5 = \dfrac{n^2(n + 1)^2(2n^2 + 2n - 1)}{12}$

Ejemplo 7 Hallar la suma de potencias de enteros

Encuentre cada suma.

a. $\displaystyle\sum_{i=1}^{7} i^3 = 1^3 + 2^3 + 3^3 + 4^3 + 5^3 + 6^3 + 7^3$

b. $\displaystyle\sum_{i=1}^{4} (6i - 4i^2)$

Solución

a. Usando la fórmula para la suma de los cubos de los primeros n enteros positivos se obtiene

$$\sum_{i=1}^{7} i^3 = 1^3 + 2^3 + 3^3 + 4^3 + 5^3 + 6^3 + 7^3$$

$$= \frac{7^2(7 + 1)^2}{4} = \frac{49(64)}{4} = 784. \qquad \text{Fórmula 3}$$

b.
$$\sum_{i=1}^{4} (6i - 4i^2) = \sum_{i=1}^{4} 6i - \sum_{i=1}^{4} 4i^2$$

$$= 6\sum_{i=1}^{4} i - 4\sum_{i=1}^{4} i^2$$

$$= 6\left[\frac{4(4 + 1)}{2}\right] - 4\left[\frac{4(4 + 1)(8 + 1)}{6}\right] \qquad \text{Fórmulas 1 y 2}$$

$$= 6(10) - 4(30)$$

$$= 60 - 120 = -60$$

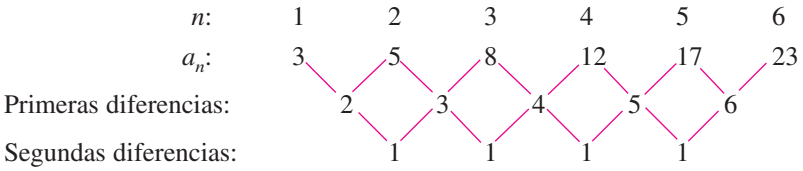
PUNTO *de repaso* Ahora trate de hacer el Ejercicio 55.

Diferencias finitas

Tip de estudio

Para un modelo lineal, las *primeras* diferencias deben ser el mismo número diferente de cero. Para un modelo cuadrático, las *segundas* diferencias son el mismo número diferente de cero.

Las **primeras diferencias** de una sucesión se encuentran al restar términos consecutivos. Las **segundas diferencias** se encuentran al restar primeras diferencias consecutivas. Las diferencias primera y segunda de la sucesión 3, 5, 8, 12, 17, 23, . . . son como sigue.



Para esta sucesión, las segundas diferencias son todas iguales. Cuando esto ocurre, la sucesión tiene un modelo *cuadrático* perfecto. Si las primeras diferencias son todas iguales, la sucesión tiene un modelo *lineal*. Esto es, es aritmética.

Ejemplo 8 Hallar un modelo cuadrático

Encuentre el modelo cuadrático para la sucesión

3, 5, 8, 12, 17, 23, ...

Solución

Sabemos de las segundas diferencias mostradas líneas antes que el modelo es cuadrático y tiene la forma

$$a_n = an^2 + bn + c.$$

Al sustituir 1, 2 y 3 por n se puede obtener un sistema de tres ecuaciones lineales con tres variables.

$a_1 = a(1)^2 + b(1) + c = 3$ Sustituir 1 por n.

$a_2 = a(2)^2 + b(2) + c = 5$ Sustituir 2 por n.

$a_3 = a(3)^2 + b(3) + c = 8$ Sustituir 3 por n.

Ahora tenemos un sistema de tres ecuaciones con a, b y c.

$$\begin{cases} a + b + c = 3 & \text{Ecuación 1} \\ 4a + 2b + c = 5 & \text{Ecuación 2} \\ 9a + 3b + c = 8 & \text{Ecuación 3} \end{cases}$$

Usando las técnicas estudiadas en el capítulo 7, se puede hallar que la solución es $a = \frac{1}{2}$, $b = \frac{1}{2}$ y $c = 2$. Por tanto, el modelo cuadrático es

$$a_n = \frac{1}{2}n^2 + \frac{1}{2}n + 2.$$

Trate de verificar los valores de a_1, a_2 y a_3.

PUNTO *de repaso* Ahora trate de hacer el Ejercicio 73.

9.4 EJERCICIOS

En www.CalcChat.com vea las soluciones a los ejercicios impares.

VOCABULARIO: Llene los espacios en blanco.

1. El primer paso para demostrar una fórmula por _____ _____ es que la fórmula sea verdadera cuando $n = 1$.
2. Las _____diferencias de una sucesión se encuentran al restar términos consecutivos.
3. Una sucesión es _____ si las primeras diferencias son todas el mismo número diferente de cero.
4. Si las diferencias _____ de una sucesión son todas el mismo número diferente de cero, entonces la sucesión tiene un modelo cuadrático perfecto.

HABILIDADES Y APLICACIONES

En los Ejercicios 5-10, encuentre P_{k+1} para la P_k dada

5. $P_k = \dfrac{5}{k(k+1)}$
6. $P_k = \dfrac{1}{2(k+2)}$
7. $P_k = \dfrac{k^2(k+3)^2}{6}$
8. $P_k = \dfrac{k}{3}(2k+1)$
9. $P_k = \dfrac{3}{(k+2)(k+3)}$
10. $P_k = \dfrac{k^2}{2(k+1)^2}$

En los Ejercicios 11-24, use inducción matemática para demostrar la fórmula para todo entero positivo n.

11. $2 + 4 + 6 + 8 + \cdots + 2n = n(n+1)$
12. $3 + 7 + 11 + 15 + \cdots + (4n-1) = n(2n+1)$
13. $2 + 7 + 12 + 17 + \cdots + (5n-3) = \dfrac{n}{2}(5n-1)$
14. $1 + 4 + 7 + 10 + \cdots + (3n-2) = \dfrac{n}{2}(3n-1)$
15. $1 + 2 + 2^2 + 2^3 + \cdots + 2^{n-1} = 2^n - 1$
16. $2(1 + 3 + 3^2 + 3^3 + \cdots + 3^{n-1}) = 3^n - 1$
17. $1 + 2 + 3 + 4 + \cdots + n = \dfrac{n(n+1)}{2}$
18. $1^3 + 2^3 + 3^3 + 4^3 + \cdots + n^3 = \dfrac{n^2(n+1)^2}{4}$
19. $1^2 + 3^2 + 5^2 + \cdots + (2n-1)^2 = \dfrac{n(2n-1)(2n+1)}{3}$
20. $\left(1 + \dfrac{1}{1}\right)\left(1 + \dfrac{1}{2}\right)\left(1 + \dfrac{1}{3}\right)\cdots\left(1 + \dfrac{1}{n}\right) = n + 1$
21. $\displaystyle\sum_{i=1}^{n} i^5 = \dfrac{n^2(n+1)^2(2n^2+2n-1)}{12}$
22. $\displaystyle\sum_{i=1}^{n} i^4 = \dfrac{n(n+1)(2n+1)(3n^2+3n-1)}{30}$
23. $\displaystyle\sum_{i=1}^{n} i(i+1) = \dfrac{n(n+1)(n+2)}{3}$
24. $\displaystyle\sum_{i=1}^{n} \dfrac{1}{(2i-1)(2i+1)} = \dfrac{n}{2n+1}$

En los Ejercicios 25-30, demuestre la desigualdad para los valores enteros de n indicados.

25. $n! > 2^n, \quad n \geq 4$
26. $\left(\frac{4}{3}\right)^n > n, \quad n \geq 7$
27. $\dfrac{1}{\sqrt{1}} + \dfrac{1}{\sqrt{2}} + \dfrac{1}{\sqrt{3}} + \cdots + \dfrac{1}{\sqrt{n}} > \sqrt{n}, \quad n \geq 2$
28. $\left(\dfrac{x}{y}\right)^{n+1} < \left(\dfrac{x}{y}\right)^n, \quad n \geq 1 \text{ y } 0 < x < y$
29. $(1+a)^n \geq na, \quad n \geq 1 \text{ y } a > 0$
30. $2n^2 > (n+1)^2, \quad n \geq 3$

En los Ejercicios 31-42, use inducción matemática para demostrar la propiedad para todos los enteros positivos n.

31. $(ab)^n = a^n b^n$
32. $\left(\dfrac{a}{b}\right)^n = \dfrac{a^n}{b^n}$
33. Si $x_1 \neq 0, \ x_2 \neq 0, \ldots, x_n \neq 0$, entonces $(x_1 x_2 x_3 \cdots x_n)^{-1} = x_1^{-1} x_2^{-1} x_3^{-1} \cdots x_n^{-1}$.
34. Si $x_1 > 0, \ x_2 > 0, \ldots, x_n > 0$, entonces $\ln(x_1 x_2 \cdots x_n) = \ln x_1 + \ln x_2 + \cdots + \ln x_n$.
35. Ley distributiva generalizada: $x(y_1 + y_2 + \cdots + y_n) = xy_1 + xy_2 + \cdots + xy_n$
36. $(a+bi)^n$ y $(a-bi)^n$ son conjugados complejos para toda $n \geq 1$.
37. Un factor de $(n^3 + 3n^2 + 2n)$ es 3.
38. Un factor de $(n^3 - n + 3)$ es 3.
39. Un factor de $(n^4 - n + 4)$ es 2.
40. Un factor de $(2^{2n+1} + 1)$ es 3.
41. Un factor de $(2^{4n-2} + 1)$ es 5.
42. Un factor de $(2^{2n-1} + 3^{2n-1})$ is 5.

En los Ejercicios 43-48, encuentre una fórmula para la suma de los primeros n términos de la sucesión.

43. $1, 5, 9, 13, \ldots$
44. $25, 22, 19, 16, \ldots$
45. $1, \frac{9}{10}, \frac{81}{100}, \frac{729}{1000}, \ldots$
46. $3, -\frac{9}{2}, \frac{27}{4}, -\frac{81}{8}, \ldots$

47. $\frac{1}{4}, \frac{1}{12}, \frac{1}{24}, \frac{1}{40}, \ldots, \frac{1}{2n(n+1)}, \ldots$

48. $\frac{1}{2 \cdot 3}, \frac{1}{3 \cdot 4}, \frac{1}{4 \cdot 5}, \frac{1}{5 \cdot 6}, \ldots, \frac{1}{(n+1)(n+2)}, \ldots$

En los Ejercicios 49-58, encuentre la suma usando las fórmulas para las sumas de potencias de enteros.

49. $\sum_{n=1}^{15} n$

50. $\sum_{n=1}^{30} n$

51. $\sum_{n=1}^{6} n^2$

52. $\sum_{n=1}^{10} n^3$

53. $\sum_{n=1}^{5} n^4$

54. $\sum_{n=1}^{8} n^5$

55. $\sum_{n=1}^{6} (n^2 - n)$

56. $\sum_{n=1}^{20} (n^3 - n)$

57. $\sum_{i=1}^{6} (6i - 8i^3)$

58. $\sum_{j=1}^{10} \left(3 - \frac{1}{2}j + \frac{1}{2}j^2\right)$

En los Ejercicios 59-64, decida si la sucesión puede estar representada perfectamente por un modelo lineal o cuadrático. Si es así, encuentre el modelo.

59. 5, 13, 21, 29, 37, 45, . . .

60. 2, 9, 16, 23, 30, 37, . . .

61. 6, 15, 30, 51, 78, 111, . . .

62. 0, 6, 16, 30, 48, 70, . . .

63. -2, 1, 6, 13, 22, 33, . . .

64. -1, 8, 23, 44, 71, 104, . . .

En los Ejercicios 65-72, escriba los primeros seis términos de la sucesión empezando con el término dado. A continuación, calcule las diferencias primera y segunda de la sucesión. Diga si ésta tiene un modelo lineal, un modelo cuadrático, o ninguno de éstos.

65. $a_1 = 0$
$a_n = a_{n-1} + 3$

66. $a_1 = 2$
$a_n = a_{n-1} + 2$

67. $a_1 = 3$
$a_n = a_{n-1} - n$

68. $a_2 = -3$
$a_n = -2a_{n-1}$

69. $a_0 = 2$
$a_n = (a_{n-1})^2$

70. $a_0 = 0$
$a_n = a_{n-1} + n$

71. $a_1 = 2$
$a_n = n - a_{n-1}$

72. $a_1 = 0$
$a_n = a_{n-1} + 2n$

En los Ejercicios 73-78, encuentre un modelo cuadrático para la sucesión con los términos indicados.

73. $a_0 = 3,\ a_1 = 3, a_4 = 15$

74. $a_0 = 7,\ a_1 = 6,\ a_3 = 10$

75. $a_0 = -3,\ a_2 = 1,\ a_4 = 9$

76. $a_0 = 3,\ a_2 = 0,\ a_6 = 36$

77. $a_1 = 0,\ a_2 = 8, a_4 = 30$

78. $a_0 = -3,\ a_2 = -5, a_6 = -57$

79. ANÁLISIS DE DATOS: RESIDENTES La tabla siguiente muestra el número a_n (en miles) de residentes de Alaska de 2002 a 2007. (Fuente: U.S. Census Bureau)

Año	Número de residentes, a_n
2002	643
2003	651
2004	662
2005	669
2006	677
2007	683

(a) Encuentre las primeras diferencias de los datos mostrados en la tabla.

(b) Use su resultado del inciso (a) para determinar si se puede usar un modelo lineal para aproximar los datos. Si es así, encuentre algebraicamente un modelo. Con n represente el año, con $n = 2$ correspondiente a 2002.

(c) Use el comando *regression* de una calculadora de gráficas para hallar un modelo lineal para los datos. Compare este modelo con el del inciso (b).

(d) Use los modelos hallados en los incisos (b) y (c) para estimar el número de residentes en 2013. ¿Cómo se comparan estos valores?

EXPLORACIÓN

80. TOQUE FINAL Explique en sus propias palabras qué significa demostración por inducción matemática.

¿VERDADERO O FALSO? En los Ejercicios 81-85, determine si la proposición es verdadera o falsa. Justifique su respuesta.

81. Si la proposición P_1 es verdadera pero la verdadera proposición P_6 *no implica* que P_7 sea verdadera, entonces P_n no es necesariamente cierta para todos los enteros positivos n.

82. Si la proposición P_k es verdadera y P_k implica que P_{k+1}, entonces P_1 también es verdadera.

83. Si las segundas diferencias de una sucesión son todas ellas cero, entonces la sucesión es aritmética.

84. Una sucesión con n términos tiene $n - 1$ segundas diferencias.

85. Si una sucesión es aritmética, entonces las primeras diferencias de la sucesión son todas cero.

9.5 El teorema del binomio

Lo que debe aprender

- Usar el teorema del binomio para calcular coeficientes binomiales
- Usar el triángulo de Pascal para calcular coeficientes binomiales.
- Usar coeficientes binomiales para escribir expansiones binomiales.

Por qué debe aprenderlo

Se pueden usar coeficientes binomiales para modelar y resolver problemas de la vida real. Por ejemplo, en el Ejercicio 91 de la página 687 usaremos coeficientes binomiales para escribir la expansión de modelo que represente el promedio de cantidades en dólares para apoyo a niños, colectadas por caso en Estados Unidos.

© Vince Streano/Corbis

Coeficientes binomiales

Recuerde que un *binomio* es un polinomio que tiene dos términos. En esta sección estudiaremos una fórmula que da un método rápido de elevar un binomio a una potencia. Para empezar, vea la expansión de $(x + y)^n$ para varios valores de n.

$$(x + y)^0 = 1$$
$$(x + y)^1 = x + y$$
$$(x + y)^2 = x^2 + 2xy + y^2$$
$$(x + y)^3 = x^3 + 3x^2y + 3xy^2 + y^3$$
$$(x + y)^4 = x^4 + 4x^3y + 6x^2y^2 + 4xy^3 + y^4$$
$$(x + y)^5 = x^5 + 5x^4y + 10x^3y^2 + 10x^2y^3 + 5xy^4 + y^5$$

Hay varias observaciones que se pueden hacer acerca de estas expansiones.

1. En cada expansión hay $n + 1$ términos.

2. En cada expansión, x y y desempeñan funciones simétricas. Las potencias de x disminuyen en 1 en términos sucesivos, mientras que las potencias de y aumentan en 1.

3. La suma de las potencias de cada término es n. Por ejemplo, en la expansión de $(x + y)^5$, la suma de las potencias de cada término es.

$$(x + y)^5 = x^5 + \overbrace{5x^4y^1}^{4+1=5} + \overbrace{10x^3y^2}^{3+2=5} + 10x^2y^3 + 5x^1y^4 + y^5$$

4. Los coeficientes aumentan y luego disminuyen en forma simétrica.

Los coeficientes de una expansión binomial se denominan **coeficientes binomiales.** Para hallarlos se puede usar el **teorema del binomio.**

El teorema del binomio

En la expansión de $(x + y)^n$

$$(x + y)^n = x^n + nx^{n-1}y + \cdots + {}_nC_r\, x^{n-r}y^r + \cdots + nxy^{n-1} + y^n$$

el coeficiente de $x^{n-r}y^r$ es

$${}_nC_r = \frac{n!}{(n-r)!r!}.$$

El símbolo $\binom{n}{r}$ se usa con frecuencia en lugar de ${}_nC_r$ para denotar coeficientes binomiales.

Para una demostración del teorema del binomio, vea la página 722.

TECNOLOGÍA

Casi todas las calculadoras de gráficas están programadas para evaluar ${}_nC_r$. Consulte la guía del usuario de su calculadora y luego evalúe ${}_8C_5$. Debe obtener una respuesta de 56.

Ejemplo 1 Hallar coeficientes binomiales

Encuentre cada uno de los coeficientes binomiales siguientes.

a. ${}_8C_2$ **b.** $\binom{10}{3}$ **c.** ${}_7C_0$ **d.** $\binom{8}{8}$

Solución

a. ${}_8C_2 = \dfrac{8!}{6! \cdot 2!} = \dfrac{(8 \cdot 7) \cdot 6!}{6! \cdot 2!} = \dfrac{8 \cdot 7}{2 \cdot 1} = 28$

b. $\binom{10}{3} = \dfrac{10!}{7! \cdot 3!} = \dfrac{(10 \cdot 9 \cdot 8) \cdot 7!}{7! \cdot 3!} = \dfrac{10 \cdot 9 \cdot 8}{3 \cdot 2 \cdot 1} = 120$

c. ${}_7C_0 = \dfrac{7!}{7! \cdot 0!} = 1$ **d.** $\binom{8}{8} = \dfrac{8!}{0! \cdot 8!} = 1$

PUNTO *de repaso* Ahora trate de hacer el Ejercicio 5.

Cuando $r \neq 0$ y $r \neq n$, como en los incisos (a) y (b), hay un patrón sencillo para evaluar coeficientes binomiales que funciona porque siempre habrá términos factoriales que se dividen de la expresión.

$$ {}_8C_2 = \frac{\overbrace{8 \cdot 7}^{\text{2 factores}}}{\underbrace{2 \cdot 1}_{\text{2 factores}}} \quad \text{y} \quad \binom{10}{3} = \frac{\overbrace{10 \cdot 9 \cdot 8}^{\text{3 factores}}}{\underbrace{3 \cdot 2 \cdot 1}_{\text{3 factores}}} $$

Ejemplo 2 Hallar coeficientes binomiales

Encuentre cada uno de los coeficientes binomiales siguientes.

a. ${}_7C_3$ **b.** $\binom{7}{4}$ **c.** ${}_{12}C_1$ **d.** $\binom{12}{11}$

Solución

a. ${}_7C_3 = \dfrac{7 \cdot 6 \cdot 5}{3 \cdot 2 \cdot 1} = 35$

b. $\binom{7}{4} = \dfrac{7 \cdot 6 \cdot 5 \cdot 4}{4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1} = 35$

c. ${}_{12}C_1 = \dfrac{12}{1} = 12$

d. $\binom{12}{11} = \dfrac{12!}{1! \cdot 11!} = \dfrac{(12) \cdot 11!}{1! \cdot 11!} = \dfrac{12}{1} = 12$

PUNTO *de repaso* Ahora trate de hacer el Ejercicio 11.

No es coincidencia que los resultados de los incisos (a) y (b) del Ejemplo 2 sean iguales y que los resultados de los incisos (c) y (d) sean iguales. En general, es cierto que

$$ {}_nC_r = {}_nC_{n-r}. $$

Esto demuestra la propiedad de simetría de los coeficientes binomiales que ya identificamos antes.

Triángulo de Pascal

Hay una forma práctica de recordar el patrón para coeficientes binomiales. Si escribimos los coeficientes en una forma triangular, obtenemos el siguiente conjunto que se denomina **triángulo de Pascal**. Este triángulo recibe ese nombre en honor al matemático francés Blaise Pascal (1623-1662).

$$
\begin{array}{ccccccccccccccc}
 & & & & & & 1 & & & & & & & & \\
 & & & & & 1 & & 1 & & & & & & & \\
 & & & & 1 & & 2 & & 1 & & & & & & \\
 & & & 1 & & 3 & & 3 & & 1 & & & & & \\
 & & 1 & & 4 & & 6 & & 4 & & 1 & & & & \\
 & 1 & & 5 & & 10 & & 10 & & 5 & & 1 & & & 4 + 6 = 10 \\
1 & & 6 & & 15 & & 20 & & 15 & & 6 & & 1 & & \\
1 & & 7 & & 21 & & 35 & & 35 & & 21 & & 7 & & 1 \quad 15 + 6 = 21
\end{array}
$$

Los números primero y último de cada renglón del triángulo de Pascal son 1. Los números alternados de cada renglón se forman al sumar los dos números que están inmediatamente arriba de ese número. Pascal observó que los números de este triángulo son precisamente los mismos que son los coeficientes de expansiones binomiales, como sigue.

$$(x + y)^0 = 1 \qquad \text{0-avo renglón}$$

$$(x + y)^1 = 1x + 1y \qquad \text{1er renglón}$$

$$(x + y)^2 = 1x^2 + 2xy + 1y^2 \qquad \text{2º renglón}$$

$$(x + y)^3 = 1x^3 + 3x^2y + 3xy^2 + 1y^3 \qquad \text{3er renglón}$$

$$(x + y)^4 = 1x^4 + 4x^3y + 6x^2y^2 + 4xy^3 + 1y^4 \qquad \vdots$$

$$(x + y)^5 = 1x^5 + 5x^4y + 10x^3y^2 + 10x^2y^3 + 5xy^4 + 1y^5$$

$$(x + y)^6 = 1x^6 + 6x^5y + 15x^4y^2 + 20x^3y^3 + 15x^2y^4 + 6xy^5 + 1y^6$$

$$(x + y)^7 = 1x^7 + 7x^6y + 21x^5y^2 + 35x^4y^3 + 35x^3y^4 + 21x^2y^5 + 7xy^6 + 1y^7$$

El renglón superior del triángulo de Pascal se llama *renglón cero* porque corresponde a la expansión binomial $(x + y)^0 = 1$. Del mismo modo, el siguiente renglón se llama *primer renglón* porque corresponde a la expresión binomial $(x + y)^1 = 1(x) + 1(y)$. En general, el *n-ésimo renglón* del triángulo de Pascal da los coeficientes de $(x + y)^n$.

Ejemplo 3 Usar triángulo de Pascal

Use el séptimo renglón del triángulo de Pascal para hallar los coeficientes binomiales.

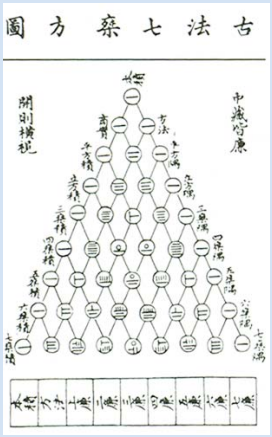
$${}_8C_0,\ {}_8C_1,\ {}_8C_2,\ {}_8C_3,\ {}_8C_4,\ {}_8C_5,\ {}_8C_6,\ {}_8C_7,\ {}_8C_8$$

Solución

$$
\begin{array}{ccccccccc}
1 & 7 & 21 & 35 & 35 & 21 & 7 & 1 & \\
1 & 8 & 28 & 56 & 70 & 56 & 28 & 8 & 1 \\
{}_8C_0 & {}_8C_1 & {}_8C_2 & {}_8C_3 & {}_8C_4 & {}_8C_5 & {}_8C_6 & {}_8C_7 & {}_8C_8
\end{array}
$$

PUNTO *de repaso* Ahora trate de hacer el Ejercicio 15.

NOTA HISTÓRICA



Espejo precioso El triángulo "de Pascal" y formas del teorema del binomio eran ya conocidas en las culturas del Oriente antes que Occidente "descubriera" el teorema. Un texto chino titulado *Espejo precioso* contiene un triángulo de expansiones binomiales hasta la octava potencia.

Expansiones binomiales

Como se menciona al principio de esta sección, cuando escribimos los coeficientes para un binomio que está elevado a una potencia estamos **expandiendo un binomio**. Las fórmulas para coeficientes binomiales dan una forma fácil de expandir binomios, como se demuestra en los siguientes cuatro ejemplos.

Ejemplo 4 Expandir un binomio

Escriba la expansión de la expresión

$$(x + 1)^3.$$

Solución

Los coeficientes binomiales del tercer renglón del triángulo de Pascal son

$$1, 3, 3, 1.$$

Entonces, la expansión es como sigue.

$$\begin{aligned}(x + 1)^3 &= (1)x^3 + (3)x^2(1) + (3)x(1^2) + (1)(1^3)\\ &= x^3 + 3x^2 + 3x + 1\end{aligned}$$

PUNTO *de repaso* Ahora trate de hacer el Ejercicio 19.

Para expandir binomios que representen *diferencias* más que sumas, se alternan signos. A continuación veamos dos ejemplos.

$$(x - 1)^3 = x^3 - 3x^2 + 3x - 1$$

$$(x - 1)^4 = x^4 - 4x^3 + 6x^2 - 4x + 1$$

Ejemplo 5 Expandir un binomio

Escriba la expansión de cada una de las expresiones siguientes.

a. $(2x - 3)^4$

b. $(x - 2y)^4$

Solución

Los coeficientes binomiales del cuarto renglón del triángulo de Pascal son

$$1, 4, 6, 4, 1.$$

Por tanto, las expansiones son como sigue.

a. $$\begin{aligned}(2x - 3)^4 &= (1)(2x)^4 - (4)(2x)^3(3) + (6)(2x)^2(3^2) - (4)(2x)(3^3) + (1)(3^4)\\ &= 16x^4 - 96x^3 + 216x^2 - 216x + 81\end{aligned}$$

b. $$\begin{aligned}(x - 2y)^4 &= (1)x^4 - (4)x^3(2y) + (6)x^2(2y)^2 - (4)x(2y)^3 + (1)(2y)^4\\ &= x^4 - 8x^3y + 24x^2y^2 - 32xy^3 + 16y^4\end{aligned}$$

PUNTO *de repaso* Ahora trate de hacer el Ejercicio 31.

Ayuda de álgebra

La propiedad de los exponentes

$$(ab)^m = a^m b^m$$

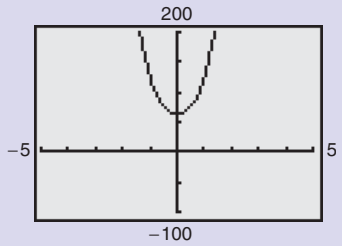
se usa en las soluciones para el Ejemplo 5. Por citar un caso, en el Ejemplo 5(a)

$$(2x)^4 = 2^4x^4 = 16x^4.$$

Se pueden repasar las propiedades de los exponentes en el Apéndice A.2.

TECNOLOGÍA

Se puede usar una calculadora de gráficas para verificar la expansión del Ejemplo 6. Grafique la expresión binomial original y la expansión en la misma pantalla. Las gráficas deben coincidir, como se muestra a continuación.



Ejemplo 6 Expandir un binomio

Escriba la expansión de $(x^2 + 4)^3$.

Solución

Use el tercer renglón del triángulo de Pascal, como sigue.

$$(x^2 + 4)^3 = (1)(x^2)^3 + (3)(x^2)^2(4) + (3)x^2(4^2) + (1)(4^3)$$
$$= x^6 + 12x^4 + 48x^2 + 64$$

PUNTO *de repaso* Ahora trate de hacer el Ejercicio 33.

A veces será necesario hallar un término específico en una expansión binomial. En lugar de escribir toda la expansión se puede usar el hecho de que, del teorema del binomio, el $(r + 1)$-ésimo término es ${}_nC_r\, x^{n-r}\, y^r$.

Ejemplo 7 Hallar un término en una expansión binomial

a. Encuentre el sexto término de $(a + 2b)^8$.

b. Encuentre el coeficiente del término a^6b^5 en la expansión de $(3a - 2b)^{11}$.

Solución

a. Recuerde que la fórmula es para el $(r + 1)$-ésimo término, de modo que r es uno menos que el número del término que se necesita. Por tanto, para hallar el sexto término de la expansión binomial, use $r = 5$, $n = 8$, $x = a$ y $y = 2b$, como se muestra.

$${}_8C_5\, a^{8-5}(2b)^5 = 56 \cdot a^3 \cdot (2b)^5 = 56(2^5)a^3b^5 = 1792a^3b^5.$$

b. En este caso, $n = 11$, $r = 5$, $x = 3a$ y $y = -2b$. Sustituya estos valores para obtener

$${}_nC_r\, x^{n-r}\, y^r = {}_{11}C_5(3a)^6(-2b)^5$$
$$= (462)(729a^6)(-32b^5)$$
$$= -10\,777\,536a^6b^5.$$

Por tanto, el coeficiente es $-10\,777\,536$.

PUNTO *de repaso* Ahora trate de hacer el Ejercicio 47.

Discusión en clase

Análisis de error Usted es profesor de matemáticas y recibe las siguientes soluciones de uno de sus estudiantes en un cuestionario. Encuentre el error(es) en cada solución. Discuta formas para que su estudiante pueda evitarlo(s) en el futuro.

a. Encuentre el segundo término de la expansión de $(2x - 3y)^5$.

~~$5(2x)^4(3y)^2 = 720x^4y^2$~~

b. Encuentre el cuarto término de la expansión de $\left(\frac{1}{2}x + 7y\right)^6$.

~~${}_6C_4\left(\frac{1}{2}x\right)^2(7y)^4 = 9003.75x^2y^4$~~

9.5 EJERCICIOS

En www.CalcChat.com vea las soluciones a los ejercicios impares.

VOCABULARIO: Llene los espacios en blanco.

1. Los coeficientes de una expansión binomial se llaman _____ _____.
2. Para hallar coeficientes binomiales se puede usar el _____ _____ o _____ _____.
3. La notación empleada para denotar un coeficiente binomial es _____ o _____.
4. Cuando escriba los coeficientes para un binomio que está elevado a una potencia, usted está _____ un _____.

HABILIDADES Y APLICACIONES

En los Ejercicios 5-14, calcule el coeficiente binomial.

5. ${}_5C_3$
6. ${}_8C_6$
7. ${}_{12}C_0$
8. ${}_{20}C_{20}$
9. ${}_{20}C_{15}$
10. ${}_{12}C_5$
11. $\binom{10}{4}$
12. $\binom{10}{6}$
13. $\binom{100}{98}$
14. $\binom{100}{2}$

En los Ejercicios 15-18, evalúe usando el triángulo de Pascal.

15. $\binom{6}{5}$
16. $\binom{9}{6}$
17. ${}_7C_4$
18. ${}_{10}C_2$

En los Ejercicios 19-40, use el teorema del binomio para expandir y simplificar la expresión.

19. $(x + 1)^4$
20. $(x + 1)^6$
21. $(a + 6)^4$
22. $(a + 5)^5$
23. $(y - 4)^3$
24. $(y - 2)^5$
25. $(x + y)^5$
26. $(c + d)^3$
27. $(2x + y)^3$
28. $(7a + b)^3$
29. $(r + 3s)^6$
30. $(x + 2y)^4$
31. $(3a - 4b)^5$
32. $(2x - 5y)^5$
33. $(x^2 + y^2)^4$
34. $(x^2 + y^2)^6$
35. $\left(\frac{1}{x} + y\right)^5$
36. $\left(\frac{1}{x} + 2y\right)^6$
37. $\left(\frac{2}{x} - y\right)^4$
38. $\left(\frac{2}{x} - 3y\right)^5$
39. $2(x - 3)^4 + 5(x - 3)^2$
40. $(4x - 1)^3 - 2(4x - 1)^4$

En los Ejercicios 41-44, expanda el binomio usando el triángulo de Pascal para determinar los coeficientes.

41. $(2t - s)^5$
42. $(3 - 2z)^4$
43. $(x + 2y)^5$
44. $(3v + 2)^6$

En los Ejercicios 45-52, encuentre el n-ésimo término de la expansión del binomio.

45. $(x + y)^{10}, \quad n = 4$
46. $(x - y)^6, \quad n = 7$
47. $(x - 6y)^5, \quad n = 3$
48. $(x - 10z)^7, \quad n = 4$
49. $(4x + 3y)^9, \quad n = 8$
50. $(5a + 6b)^5, \quad n = 5$
51. $(10x - 3y)^{12}, \quad n = 10$
52. $(7x + 2y)^{15}, \quad n = 7$

En los Ejercicios 53-60, encuentre el coeficiente a del término de la expansión del binomio.

Binomio	*Término*
53. $(x + 3)^{12}$	ax^5
54. $(x^2 + 3)^{12}$	ax^8
55. $(4x - y)^{10}$	ax^2y^8
56. $(x - 2y)^{10}$	ax^8y^2
57. $(2x - 5y)^9$	ax^4y^5
58. $(3x - 4y)^8$	ax^6y^2
59. $(x^2 + y)^{10}$	ax^8y^6
60. $(z^2 - t)^{10}$	az^4t^8

En los Ejercicios 61-66, use el teorema del binomio para expandir y simplificar la expresión.

61. $\left(\sqrt{x} + 5\right)^3$
62. $\left(2\sqrt{t} - 1\right)^3$
63. $(x^{2/3} - y^{1/3})^3$
64. $(u^{3/5} + 2)^5$
65. $\left(3\sqrt{t} + \sqrt[4]{t}\right)^4$
66. $(x^{3/4} - 2x^{5/4})^4$

En los Ejercicios 67-72, expanda la expresión en el cociente de diferencia y simplifique.

$$\frac{f(x + h) - f(x)}{h}$$ Cociente de diferencia

67. $f(x) = x^3$
68. $f(x) = x^4$
69. $f(x) = x^6$
70. $f(x) = x^8$
71. $f(x) = \sqrt{x}$
72. $f(x) = \frac{1}{x}$

En los Ejercicios 73-78, use el teorema del binomio para expandir el número complejo. Simplifique su resultado.

73. $(1 + i)^4$

74. $(2 - i)^5$

75. $(2 - 3i)^6$

76. $\left(5 + \sqrt{-9}\right)^3$

77. $\left(-\frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2}i\right)^3$

78. $\left(5 - \sqrt{3}i\right)^4$

APROXIMACIÓN En los Ejercicios 79-82, use el teorema del binomio para aproximar la cantidad precisa a tres lugares decimales. Por ejemplo, en el Ejercicio 79, use la expansión

$$(1.02)^8 = (1 + 0.02)^8 = 1 + 8(0.02) + 28(0.02)^2 + \cdots$$

79. $(1.02)^8$

80. $(2.005)^{10}$

81. $(2.99)^{12}$

82. $(1.98)^9$

RAZONAMIENTO LÓGICO En los Ejercicios 83 y 84, use una calculadora de gráficas para graficar f y g en la misma pantalla. ¿Cuál es la relación entre las dos gráficas? Use el teorema del binomio para escribir la función polinomial g en forma normal.

83. $f(x) = x^3 - 4x, \quad g(x) = f(x + 4)$

84. $f(x) = -x^4 + 4x^2 - 1, \quad g(x) = f(x - 3)$

PROBABILIDAD En los Ejercicios 85-88, considere n intentos independientes de un experimento en los que cada intento tiene dos posibles resultados: "éxito" o "fracaso". La probabilidad de éxito en cada intento es p, y la de fracaso es $q = 1 - p$. En este contexto, el término ${}_nC_k\, p^k q^{n-k}$ en la expansión de $(p + q)^n$ da la probabilidad de k éxitos en los n intentos del experimento.

85. Una moneda que no está "cargada" se lanza al aire siete veces. Para hallar la probabilidad de obtener cuatro caras, evalúe el término

$${}_7C_4\left(\tfrac{1}{2}\right)^4\left(\tfrac{1}{2}\right)^3$$

en la expansión de $\left(\frac{1}{2} + \frac{1}{2}\right)^7$.

86. La probabilidad de que un jugador de béisbol conecte un *hit* en cualquier turno determinado al bate es $\frac{1}{4}$. Para hallar la probabilidad de que el jugador conecte tres *hits* en los siguientes diez turnos al bate, evalúe el término

$${}_{10}C_3\left(\tfrac{1}{4}\right)^3\left(\tfrac{3}{4}\right)^7$$

en la expansión de $\left(\frac{1}{4} + \frac{3}{4}\right)^{10}$.

87. La probabilidad de que un representante de ventas haga una venta a cualquier cliente es $\frac{1}{3}$. El representante hace ocho contactos al día. Para hallar la probabilidad de que haga cuatro ventas evalúe el término

$${}_8C_4\left(\tfrac{1}{3}\right)^4\left(\tfrac{2}{3}\right)^4$$

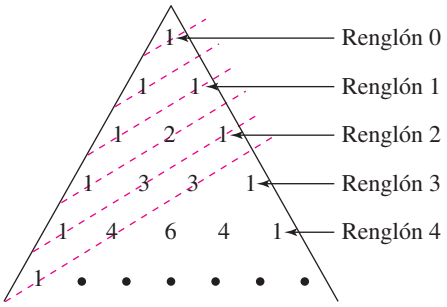
en la expansión de $\left(\frac{1}{3} + \frac{2}{3}\right)^8$.

88. Para hallar la probabilidad de que el representante de ventas del Ejercicio 87 haga cuatro ventas si la probabilidad de una venta a un cliente es $\frac{1}{2}$, evalúe el término

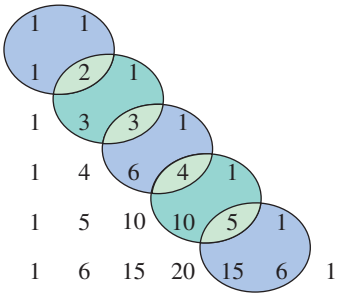
$${}_8C_4\left(\tfrac{1}{2}\right)^4\left(\tfrac{1}{2}\right)^4$$

en la expresión de $\left(\frac{1}{2} + \frac{1}{2}\right)^8$.

89. HALLAR UN PATRÓN Describa el patrón formado por las sumas de los números a lo largo de los segmentos diagonales del triángulo de Pascal (vea figura).



90. HALLAR UN PATRÓN Use cada uno de los grupos circulados de números de la figura para formar una matriz de 2×2. Encuentre el determinante de cada matriz. Describa el patrón.



91. APOYO A NIÑOS El promedio de la cantidad $f(t)$ de apoyo a niños recolectada por caso en Estados Unidos, de 2000 a 2007, puede ser aproximado con el modelo

$$f(t) = -4.702t^2 + 110.18t + 1026.7, \quad 0 \le t \le 7$$

donde t representa el año, con $t = 0$ correspondiente a 2000. (Fuente: U.S. Department of Health and Human Services)

(a) Usted desea ajustar el modelo para que $t = 0$ corresponda a 2005 más que a 2000. Para hacer esto, desplaza la gráfica de f cinco unidades *a la izquierda* para obtener $g(t) = f(t + 5)$. Escriba $g(t)$ en forma normal.

(b) Use una calculadora de gráficas para graficar f y g en la misma pantalla.

(c) Use las gráficas para estimar cuándo el promedio de las colectas para apoyo a niños excedieron de $1525.

92. ANÁLISIS DE DATOS: ELECTRICIDAD La tabla siguiente muestra los precios promedio $f(t)$ (en centavos por kilowatt hora) de electricidad residencial en Estados Unidos de 2000 a 2007. (Fuente: Energy Information Administration)

Año	Precio promedio, $f(t)$
2000	8.24
2001	8.58
2002	8.44
2003	8.72
2004	8.95
2005	9.45
2006	10.40
2007	10.64

(a) Use el comaando *regression* de una calculadora de gráficas para hallar un modelo cúbico para los datos. Con t represente el año, con $t = 0$ correspondiente a 2000.

(b) Use la calculadora de gráficas para determinar los datos y el modelo en la misma pantalla.

(c) Usted desea ajustar el modelo para que $t = 0$ corresponda a 2005 más que a 2000. Para hacer esto, desplaza la gráfica de f cinco unidades *a la izquierda* para obtener $g(t) = f(t + 5)$. Escriba $g(t)$ en forma normal.

(d) Use la calculadora de gráficas para graficar g en la misma pantalla que f.

(e) Use ambos modelos para estimar el precio promedio en 2008. ¿Obtiene la misma respuesta?

(f) ¿Sus respuestas al inciso (e) le parecen razonables? Explique.

(g) ¿Qué factores piensa usted que pueden haber contribuido al cambio en el precio promedio?

EXPLORACIÓN

¿VERDADERO O FALSO? En los Ejercicios 93-95, determine si la proposición es verdadera o falsa. Justifique su respuesta.

93. El teorema del binomio podría usarse para producir cada uno de los renglones del triángulo de Pascal.

94. Un binomio que representa una diferencia no siempre puede expandirse de manera precisa usando el teorema del binomio.

95. El término x^{10} y el término x^{14} de la expansión de $(x^2 + 3)^{12}$ tienen coeficientes idénticos.

96. ESCRITURA Verbalmente, explique cómo formar los renglones del triángulo de Pascal.

97. Forme los renglones 8-10 del triángulo de Pascal.

98. PIÉNSELO ¿Cuántos términos hay en la expansión de $(x + y)^n$?

99. RAZONAMIENTO GRÁFICO ¿Cuáles dos funciones tienen gráficas idénticas y por qué? Use una calculadora de gráficas para graficar las funciones en el orden dado y en la misma pantalla. Compare las gráficas.

(a) $f(x) = (1 - x)^3$

(b) $g(x) = 1 - x^3$

(c) $h(x) = 1 + 3x + 3x^2 + x^3$

(d) $k(x) = 1 - 3x + 3x^2 - x^3$

(e) $p(x) = 1 + 3x - 3x^2 + x^3$

100. TOQUE FINAL ¿Cómo difieren las expansiones de $(x + y)^n$ y $(x - y)^n$? Apoye su explicación con un ejemplo.

PRUEBA En los Ejercicios 101-104, demuestre la propiedad para todos los enteros r y n donde $0 \le r \le n$.

101. ${}_nC_r = {}_nC_{n-r}$

102. ${}_nC_0 - {}_nC_1 + {}_nC_2 - \cdots \pm {}_nC_n = 0$

103. ${}_{n+1}C_r = {}_nC_r + {}_nC_{r-1}$

104. La suma de los números del n-ésimo renglón del triángulo de Pascal es 2^n.

105. Complete la tabla y describa el resultado.

n	r	${}_nC_r$	${}_nC_{n-r}$
9	5		
7	1		
12	4		
6	0		
10	7		

¿Qué característica del triángulo de Pascal está ilustrada por esta tabla?

106. Otra forma del teorema del binomio es

$$(x + y)^n = x^n + \frac{nx^{n-1}y}{1!} + \frac{n(n-1)x^{n-2}y^2}{2!} + \frac{n(n-1)(n-2)x^{n-3}y^3}{3!} + \cdots + y^n.$$

Use esta forma del teorema del binomio para expandir y simplificar cada expresión.

(a) $(2x + 3)^6$

(b) $(x + ay)^4$

(c) $(x - ay)^5$

(d) $(1 + x)^{12}$

9.6 Principios de conteo

Lo que debe aprender

- Resolver problemas de conteo sencillos.
- Usar el principio fundamental de conteo para resolver problemas de conteo.
- Usar permutaciones para resolver problemas de conteo.
- Usar combinaciones para resolver problemas de conteo.

Por qué debe aprenderlo

Se pueden usar principios de conteo para resolver problemas que se presentan en la vida real. Por ejemplo, en el Ejercicio 78 de la página 698 se pide al lector usar principios de conteo para determinar el número de formas posibles de seleccionar los números ganadores en la lotería Powerball.

© Michael Simpson/Getty Images

Problemas de conteo sencillos

Esta sección y la sección 9.7 presentan una breve introducción a algunos de los principios básicos de conteo y sus aplicaciones a la probabilidad. En la sección 9.7 veremos que mucho de la probabilidad tiene que ver con contar el número de formas en las que puede ocurrir un evento. Los siguientes dos ejemplos describen problemas sencillos de conteo.

Ejemplo 1 Seleccionar pares de números al azar

Ocho pequeños trozos de papel se numeran del 1 al 8 y se ponen en una caja; uno de ellos se saca de la caja, se toma nota del mismo y se *reemplaza en la caja*. Entonces, se saca un segundo trozo de la caja y su número se anota. Por último, los dos números se suman. ¿De cuántas formas diferentes se puede tener una suma igual a 12?

Solución

Para resolver este problema, cuente las formas diferentes en que se puede obtener una suma de 12 usando dos números del 1 al 8.

Primer número	4	5	6	7	8
Segundo número	8	7	6	5	4

De esta lista, se puede ver que una suma de 12 puede presentarse en cinco formas.

PUNTO *de repaso* Ahora trate de hacer el Ejercicio 11.

Ejemplo 2 Seleccionar pares de números al azar

Ocho trozos de papel se numeran del 1 al 8 y se colocan en una caja. Dos de ellos se sacan de la caja *al mismo tiempo* y los números que tienen marcados se anotan y se suman. ¿De cuántas formas diferentes puede obtenerse una suma igual a 12?

Solución

Para resolver este problema, cuente las formas diferentes en que se puede obtener una suma de 12 *usando dos números diferentes* del 1 al 8.

Primer número	4	5	7	8
Segundo número	8	7	5	4

Por tanto, una suma de 12 se puede obtener en cuatro formas.

PUNTO *de repaso* Ahora trate de hacer el Ejercicio 13.

La diferencia entre los problemas de conteo en los ejemplos 1 y 2 se puede describir diciendo que la selección aleatoria en el Ejemplo 1 ocurre **con reemplazo**, en tanto que la selección aleatoria en el Ejemplo 2 ocurre **sin reemplazo**, lo cual elimina la posibilidad de escoger dos veces el 6.

El principio fundamental de conteo

Los ejemplos 1 y 2 describen problemas sencillos de conteo en los que se puede *hacer una lista* de cada forma posible en que puede presentarse un evento. Cuando se puede, ésta es siempre la mejor manera de resolver un problema de conteo. No obstante, algunos eventos pueden presentarse en tantas formas diferentes que no es factible escribir toda la lista. En tales casos debemos apoyarnos en fórmulas y principios de conteo; el más importante de éstos es el **principio fundamental de conteo.**

Principio fundamental de conteo

Sean E_1 y E_2 dos eventos. El primero E_1 puede presentarse en m_1 formas. Después que E_1 ha ocurrido, E_2 puede ocurrir en m_2 formas. El número de formas en que los dos eventos pueden ocurrir es $m_1 \cdot m_2$.

El principio fundamental de conteo puede extenderse a tres o más eventos. Por ejemplo, el número de formas en que tres eventos E_1, E_2 y E_3 pueden ocurrir es $m_1 \cdot m_2 \cdot m_3$.

Ejemplo 3 Usar el principio fundamental de conteo

¿Cuántos pares diferentes de letras del alfabeto inglés son posibles?

Solución

Hay dos eventos en esta situación. El primero de ellos es la opción de la primera letra, y el segundo evento es la opción de la segunda letra. Como el alfabeto inglés contiene 26 letras, se deduce que el número de pares de dos letras es

$$26 \cdot 26 = 676.$$

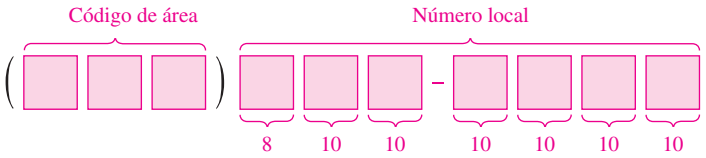
PUNTO *de repaso* Ahora trate de hacer el Ejercicio 19.

Ejemplo 4 Usar el principio fundamental de conteo

Los números telefónicos en Estados Unidos actualmente tienen 10 dígitos. Los primeros tres son la *clave de área* (LADA) y los 7 siguientes son el *número telefónico local*. ¿Cuántos números telefónicos diferentes son posibles dentro de cada clave de área? (Observe que en la actualidad, un número telefónico local no puede iniciarse con 0 ni 1.)

Solución

Como el primer dígito de un número telefónico local no puede ser 0 ni 1, hay sólo ocho opciones para el primer dígito. Para cada uno de los otros seis dígitos, hay 10 opciones.



Por tanto, el número de números telefónicos locales que son posibles dentro de cada código de área es

$$8 \cdot 10 \cdot 10 \cdot 10 \cdot 10 \cdot 10 \cdot 10 = 8\,000\,000.$$

PUNTO *de repaso* Ahora trate de hacer el Ejercicio 25.

Permutaciones

Una aplicación importante del principio fundamental de conteo es determinar el número de formas en que n elementos se pueden arreglar (en orden). Un ordenamiento de n elementos se denomina **permutación** de los elementos.

Definición de permutación

Una **permutación** de n elementos es un ordenamiento de los elementos tal que un elemento es primero, uno es segundo, uno es tercero, etcétera.

Ejemplo 5 Hallar el número de permutaciones de n elementos

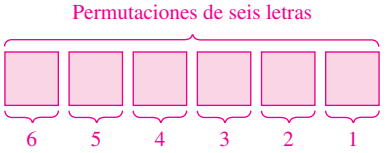
¿Cuántas permutaciones son posibles para las letras A, B, C, D, E y F?

Solución

Considere el siguiente razonamiento.

Primera posición: cualquiera de las *seis letras*
Segunda posición: cualquier de las restantes *cinco* letras
Tercera posición: cualquiera de las restantes *cuatro* letras
Cuarta posición: cualquiera de las restantes *tres* letras
Quinta posición: cualquiera de las restantes *dos* letras
Sexta posición: la *única* letra restante

Entonces, el números de opciones para las seis posiciones son como sigue.



El número total de permutaciones de las seis letras es

$$6! = 6 \cdot 5 \cdot 4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1$$
$$= 720.$$

PUNTO *de repaso* Ahora trate de hacer el Ejercicio 39.

Número de permutaciones de n elementos

El número de permutaciones de n elementos es

$$n \cdot (n - 1) \cdot \cdots \cdot 4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1 = n!.$$

En otras palabras, hay $n!$ formas en que n elementos pueden ordenarse.

Vaughn Youtz/Newsmakers/Getty Images

Once caballos pura sangre de carreras ostentan el título de ganador de la Triple Corona por vencer en el Derby de Kentucky, el Preakness y el Belmont Stakes en el mismo año. Cuarenta y nueve caballos han ganado dos de las tres carreras.

Ejemplo 6 Contar finales de carreras de caballos

Ocho caballos están corriendo en una carrera. ¿De cuántas formas pueden estos caballos llegar primero, segundo y tercero? (Suponga que no hay empates.)

Solución

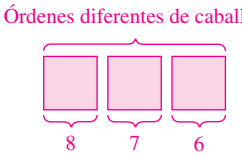
He aquí las diferentes posibilidades.

Ganador (primera posición): *ocho* opciones

Lugar (segunda posición): *siete* opciones

Exhibición (tercera posición): *seis* opciones

Usando el principio fundamental de conteo, multiplique entre sí estos tres números para obtener lo siguiente.



Entonces, hay $8 \cdot 7 \cdot 6 = 336$ formas diferentes.

PUNTO *de repaso* Ahora trate de hacer el Ejercicio 41.

Es útil, a veces, ordenar un *subconjunto* de un conjunto de elementos más que de todo un conjunto. Por ejemplo, podríamos desear escoger y ordenar r elementos de un conjunto de n elementos. Este ordenamiento se denomina **permutación de n elementos tomados r a la vez.**

Permutaciones de n elementos tomados r a la vez

El número de permutaciones de n elementos tomados r a la vez es

$$
\begin{aligned}
{}_nP_r &= \frac{n!}{(n-r)!} \\
&= n(n-1)(n-2)\cdot\cdot\cdot(n-r+1).
\end{aligned}
$$

TECNOLOGIA

Casi todas las calculadoras de gráficas están programadas para evaluar ${}_nP_r$. Consulte la guía del usuario de su calculadora y luego evalúe ${}_8P_5$. Debe obtener una respuesta de 6720.

Usando esta fórmula, se puede trabajar otra vez el Ejemplo 6 para hallar que el número de permutaciones de ocho caballos tomados tres a la vez es

$$
\begin{aligned}
{}_8P_3 &= \frac{8!}{(8-3)!} \\
&= \frac{8!}{5!} \\
&= \frac{8 \cdot 7 \cdot 6 \cdot \cancel{5!}}{\cancel{5!}} \\
&= 336
\end{aligned}
$$

que es la misma respuesta obtenida en el ejemplo.

Recuerde que para permutaciones, el orden es importante. Por tanto, si usted está viendo las posibles permutaciones de las letras A, B, C y D tomadas tres a la vez, las permutaciones (A, B, C) y (B, A, D) se cuentan como diferentes porque el orden de los elementos es distinto.

Suponga, no obstante, que se le pide hallar las posibles permutaciones de las letras A, A, B y C. El número total de permutaciones de las cuatro letras sería ${}_4P_4 = 4!$. Sin embargo, no todos estos arreglos u ordenamientos serían diferentes porque hay dos letras A en la lista. Para hallar el número de permutaciones diferentes se puede usar la siguiente fórmula.

Permutaciones diferentes

Suponga que un conjunto de n objetos tiene n_1 de una clase de objeto, n_2 de una segunda clase, n_3 de una tercera clase, y así sucesivamente, con

$$n = n_1 + n_2 + n_3 + \cdots + n_k.$$

Entonces el número de **permutaciones diferentes** de los n objetos es

$$\frac{n!}{n_1! \cdot n_2! \cdot n_3! \cdots n_k!}.$$

Ejemplo 7 Permutaciones diferentes

¿En cuántas formas diferentes se pueden escribir las letras BANANA?

Solución

Esta palabra tiene seis letras, de las cuales tres son A, dos son N y una es B. Por tanto, el número de formas diferentes en que las letras se pueden escribir es

$$\frac{n!}{n_1! \cdot n_2! \cdot n_3!} = \frac{6!}{3! \cdot 2! \cdot 1!}$$

$$= \frac{6 \cdot 5 \cdot 4 \cdot 3!}{3! \cdot 2!}$$

$$= 60.$$

Las 60 permutaciones diferentes son como sigue.

AAABNN	AAANBN	AAANNB	AABANN	AABNAN	AABNNA
AANABN	AANANB	AANBAN	AANBNA	AANNAB	AANNBA
ABAANN	ABANAN	ABANNA	ABNAAN	ABNANA	ABNNAA
ANAABN	ANAANB	ANABAN	ANABNA	ANANAB	ANANBA
ANBAAN	ANBANA	ANBNAA	ANNAAB	ANNABA	ANNBAA
BAAANN	BAANAN	BAANNA	BANAAN	BANANA	BANNAA
BNAAAN	BNAANA	BNANAA	BNNAAA	NAAABN	NAAANB
NAABAN	NAABNA	NAANAB	NAANBA	NABAAN	NABANA
NABNAA	NANAAB	NANABA	NANBAA	NBAAAN	NBAANA
NBANAA	NBNAAA	NNAAAB	NNAABA	NNABAA	NNBAAA

PUNTO *de repaso* Ahora trate de hacer el Ejercicio 43.

Combinaciones

Cuando se cuenta el número de posibles permutaciones de un conjunto de elementos, el orden es importante. Como tema final de esta sección veremos un método de seleccionar subconjuntos de un conjunto más grande en el que el orden *no es* importante. Estos subconjuntos se llaman **combinaciones de *n* elementos tomados *r* a la vez.** Por ejemplo, las combinaciones

$\{A, B, C\}$ y $\{B, A, C\}$

son equivalentes porque ambos conjuntos contienen los mismos tres elementos, y el orden en el que están escritos no es importante. Por tanto, se contaría sólo uno de los dos conjuntos. Un ejemplo común de cómo se presenta una combinación es en un juego de naipes en el que el jugador es libre de reordenar los naipes después de haber sido repartidos.

Ejemplo 8 Combinaciones de *n* elementos tomados *r* a la vez

¿De cuántas formas se pueden escoger tres letras del conjunto A, B, C, D y E? (El orden de las tres letras no es importante.)

Solución

Los siguientes subconjuntos representan las diferentes combinaciones de tres letras que se pueden escoger de las cinco letras.

$\{A, B, C\}$ $\{A, B, D\}$
$\{A, B, E\}$ $\{A, C, D\}$
$\{A, C, E\}$ $\{A, D, E\}$
$\{B, C, D\}$ $\{B, C, E\}$
$\{B, D, E\}$ $\{C, D, E\}$

De esta lista, se puede concluir que hay 10 formas en que tres letras se pueden escoger de entre cinco letras.

PUNTO *de repaso* Ahora trate de hacer el Ejercicio 61.

Combinaciones de *n* elementos tomados *r* a la vez

El número de combinaciones de n elementos tomados r a la vez es

$$ {}_nC_r = \frac{n!}{(n-r)!r!} $$

que es equivalente a ${}_nC_r = \frac{{}_nP_r}{r!}$.

Observe que la fórmula para ${}_nC_r$ es la misma dada para coeficientes binomiales. Para ver cómo se usa esta fórmula, resuelva el problema de conteo del Ejemplo 8. En ese problema, se nos pidió hallar el número de combinaciones de cinco elementos tomados tres a la vez. Entonces, $n = 5$, $r = 3$, y el número de combinaciones es

$$ {}_5C_3 = \frac{5!}{2!3!} = \frac{5 \cdot \overset{2}{\cancel{4}} \cdot \cancel{3!}}{\cancel{2} \cdot 1 \cdot \cancel{3!}} = 10 $$

que es la misma respuesta obtenida en el Ejemplo 8.

A ♥ A ♦ A ♣ A ♠
2 ♥ 2 ♦ 2 ♣ 2 ♠
3 ♥ 3 ♦ 3 ♣ 3 ♠
4 ♥ 4 ♦ 4 ♣ 4 ♠
5 ♥ 5 ♦ 5 ♣ 5 ♠
6 ♥ 6 ♦ 6 ♣ 6 ♠
7 ♥ 7 ♦ 7 ♣ 7 ♠
8 ♥ 8 ♦ 8 ♣ 8 ♠
9 ♥ 9 ♦ 9 ♣ 9 ♠
10 ♥ 10 ♦ 10 ♣ 10 ♠
J ♥ J ♦ J ♣ J ♠
Q ♥ Q ♦ Q ♣ Q ♠
K ♥ K ♦ K ♣ K ♠

Mazo normal de naipes
FIGURA 9.7

Ejemplo 9 Conteo de "manos" de naipes

Una "mano" normal de póquer está formada por cinco cartas repartidas de un mazo de 52 (vea Figura 9.7). ¿Cuántas "manos" de póquer son posibles? (Después de repartir los naipes, el jugador puede reordenarlos, por lo cual el orden no es importante.)

Solución

Se puede hallar el número de manos de póquer si se usa la fórmula para el número de combinaciones de 52 elementos tomados cinco a la vez, como sigue.

$$
\begin{aligned}
{}_{52}C_5 &= \frac{52!}{(52-5)!5!} \\
&= \frac{52!}{47!5!} \\
&= \frac{52 \cdot 51 \cdot 50 \cdot 49 \cdot 48 \cdot \cancel{47!}}{5 \cdot 4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1 \cdot \cancel{47!}} \\
&= 2\,598\,960
\end{aligned}
$$

PUNTO *de repaso* Ahora trate de hacer el Ejercicio 63.

Ejemplo 10 Formación de un equipo

Usted está formando un equipo de natación de 12 miembros de 10 muchachas y 15 muchachos. El equipo debe estar formado por cinco muchachas y siete muchachos. ¿Cuántos equipos de 12 miembros son posibles?

Solución

Hay ${}_{10}C_5$ formas de escoger cinco muchachas. Hay ${}_{15}C_7$ formas de escoger siete muchachos. Por el principio fundamental de conteo, hay ${}_{10}C_5 \cdot {}_{15}C_7$ formas de escoger cinco muchachas y siete muchachos.

$$
\begin{aligned}
{}_{10}C_5 \cdot {}_{15}C_7 &= \frac{10!}{5! \cdot 5!} \cdot \frac{15!}{8! \cdot 7!} \\
&= 252 \cdot 6435 \\
&= 1\,621\,620
\end{aligned}
$$

Por tanto, hay 1 621 620 posibles equipos de natación de 12 miembros.

PUNTO *de repaso* Ahora trate de hacer el Ejercicio 71.

Cuando resuelva problemas en los que intervengan principios de conteo, necesita tener aptitud de distinguir entre los diversos principios que hemos visto para determinar cuál necesita para obtener el resultado correcto. Para hacer esto, hágase las siguientes preguntas.

1. ¿Es importante el orden de los elementos? *Permutación*
2. ¿Los elementos escogidos son un subconjunto de un conjunto más grande en el que no sea importante el orden? *Combinación*
3. ¿El problema implica dos o más eventos separados? *Principio fundamental de conteo.*

9.6 EJERCICIOS

En www.CalcChat.com vea las soluciones a los ejercicios impares.

VOCABULARIO: Llene los espacios en blanco.

1. El _____ _____ _____ _____ dice que si hay m_1 formas en que un evento ocurra y m_2 formas para que ocurra un segundo evento, hay $m_1 \cdot m_2$ formas para que ambos eventos ocurran.
2. Un ordenamiento de n elementos recibe el nombre de _____ de los elementos.
3. El número de permutaciones de n elementos tomados r a la vez está dado por la fórmula _____.
4. El número de _____ _____ de n objetos está dado por $\dfrac{n!}{n_1!n_2!n_3! \cdot \cdot \cdot n_k!}$.
5. Cuando seleccionamos subconjuntos de un conjunto más grande en el que el orden no es importante, estamos buscando el número de _____ de n elementos tomados r a la vez.
6. El número de combinaciones de n elementos tomados r a la vez está dado por la fórmula _____.

HABILIDADES Y APLICACIONES

SELECCIÓN AL AZAR En los Ejercicios 7-14, determine el número de formas en que una computadora puede generar al azar uno o más de enteros del 1 al 12.

7. Un entero impar
8. Un entero par
9. Un entero primo
10. Un entero mayor a 9
11. Un entero divisible entre 4
12. Un entero divisible entre 3
13. Dos enteros *distintos* cuya suma es 9
14. Dos enteros *distintos* cuya suma es 8

15. **SISTEMAS DE ENTRETENIMIENTO** Un cliente puede escoger uno de tres amplificadores, uno de dos reproductores de discos compactos y uno de cinco modelos de altavoz para un sistema de entretenimiento. Determine el número de posibles configuraciones del sistema.
16. **SOLICITANTES DE TRABAJO** Un colegio necesita dos miembros más para su facultad: un químico y un experto en estadística. ¿En cuántas formas pueden ocuparse estas posiciones si hay cinco solicitantes para la posición de químico y tres para la de estadística?
17. **PROGRAMA DE CURSO** Un estudiante universitario está preparando un programa de curso para el siguiente semestre. El estudiante puede seleccionar uno de dos cursos de matemáticas, uno de tres cursos de ciencias y uno de cinco cursos de ciencias sociales y humanidades. ¿Cuántos programas son posibles?
18. **ABORDAR UN AVIÓN** Ocho personas están abordando un avión. Dos tienen boletos de primera clase y abordan antes que los de clase económica. ¿En cuántas formas pueden abordar el avión las ocho personas?
19. **EXAMEN DE VERDADERO-FALSO** ¿En cuántas formas puede ser contestado un examen de seis preguntas de verdadero-falso? (Suponga que no se omiten preguntas.)
20. **EXAMEN DE VERDADERO-FALSO** ¿En cuántas formas puede ser contestado un examen de doce preguntas de verdadero-falso? (Suponga que no se omiten preguntas.)
21. **NÚMEROS DE PLACA PARA AUTOMÓVIL** En el estado de Pennsylvania, cada uno de los números de placa estándar para automóvil consta de tres letras seguidas por un número de cuatro dígitos. ¿Cuántos números de placa para automóvil pueden formarse en Pennsylvania?
22. **NÚMEROS DE PLACA PARA AUTOMÓVIL** En cierto estado, cada número de placa para automóvil consta de dos letras seguidas de un número de cuatro dígitos. Para evitar confusión entre "O" y "cero" y entre "I" y "uno", las letras "O" e "I" no se usan. ¿Cuántos números de placas pueden formarse en este estado?
23. **NÚMEROS DE TRES DÍGITOS** ¿Cuántos números de tres dígitos pueden formarse bajo cada una de las condiciones siguientes?
    (a) El dígito inicial no puede ser cero.
    (b) El dígito inicial no puede ser cero y no se permite repetición de dígitos.
    (c) El dígito inicial no puede ser cero y el número debe ser un múltiplo de 5.
    (d) El número es al menos 400.
24. **NÚMEROS DE CUATRO DÍGITOS** ¿Cuántos números de cuatro dígitos pueden formarse bajo cada una de las condiciones siguientes?
    (a) El dígito inicial no puede ser cero.
    (b) El dígito inicial no puede ser cero y no se permite repetición de dígitos.
    (c) El dígito inicial no puede ser cero y el número debe ser menor a 500.
    (d) El dígito inicial no puede ser cero y el número debe ser par.
25. **CERRADURA DE COMBINACIÓN** Una cerradura de combinación se abrirá cuando se seleccione la opción correcta de tres números (del 1 al 40, inclusive). ¿Cuántas combinaciones diferentes de la cerradura son posibles?

26. CERRADURA DE COMBINACIÓN Una cerradura de combinación se abrirá cuando se seleccione la opción correcta de tres números (del 1 al 50, inclusive). ¿Cuántas combinaciones de la cerradura son posibles?

27. ASIENTOS PARA CONCIERTO Cuatro parejas han reservado asientos en una fila para un concierto. ¿En cuántas formas pueden tomar asiento si

(a) no hay restricciones para hacerlo?

(b) los dos de cada pareja desean sentarse juntos?

28. UNA FILA ¿En cuántos órdenes pueden caminar cuatro muchachas y cuatro muchachos por una puerta de ancho para una sola persona si

(a) no hay restricciones?

(b) las muchachas pasan antes que los muchachos?

En los Ejercicios 29-34, evalúe ${}_nP_r$.

29. ${}_4P_4$ **30.** ${}_5P_5$

31. ${}_8P_3$ **32.** ${}_{20}P_2$

33. ${}_5P_4$ **34.** ${}_7P_4$

En los Ejercicios 35-38, evalúe ${}_nP_r$ con una calculadora de gráficas.

35. ${}_{20}P_5$ **36.** ${}_{100}P_5$

37. ${}_{100}P_3$ **38.** ${}_{10}P_8$

39. POSAR PARA UNA FOTOGRAFÍA ¿En cuántas formas pueden alinearse cinco niños en una fila para una fotografía?

40. VIAJAR EN AUTO ¿En cuántas formas pueden tomar asiento seis personas en un auto de seis pasajeros?

41. ESCOGER OFICIALES De entre un grupo de 12 candidatos, se han de ocupar las oficinas del presidente, vicepresidente, secretario y tesorero. ¿En cuántas formas pueden ser ocupadas las oficinas?

42. PRODUCCIÓN DE UNA LÍNEA DE ENSAMBLE Hay cuatro procesos implicados en el ensamble de un producto, y estos procesos pueden realizarse en cualquier orden. La dirección desea probar cada orden para determinar cuál es el que consume menos tiempo. ¿Cuántos órdenes tendrán que probarse?

En los Ejercicios 43-46, encuentre el número de permutaciones diferentes del grupo de letras.

43. A, A, G, E, E, E, M **44.** B, B, B, T, T, T, T, T

45. A, L, G, E, B, R, A **46.** M, I, S, S, I, S, S, I, P, P, I

47. Escriba todas las permutaciones de las letras A, B, C y D.

48. Escriba todas las permutaciones de las letras A, B, C y D si las letras B y C deben permanecer entre las letras A y D.

49. ORDEN DE BATEO Un *coach* (director técnico) de béisbol está creando un orden al bate de nueve jugadores, seleccionándolos de entre un equipo de 15 jugadores. ¿Cuántos órdenes al bate son posibles?

50. ATLETISMO Ocho velocistas han calificado para las finales en la carrera de 100 metros planos en el torneo nacional de pista de la NCAA. ¿En cuántas formas pueden llegar los velocistas en primero, segundo y tercer lugar? (Suponga que no hay empates.)

En los Ejercicios 51-56, evalúe ${}_nC_r$ usando la fórmula de esta sección.

51. ${}_5C_2$ **52.** ${}_6C_3$

53. ${}_4C_1$ **54.** ${}_5C_1$

55. ${}_{25}C_0$ **56.** ${}_{20}C_0$

En los Ejercicios 57-60, evalúe ${}_nC_r$ con una calculadora de gráficas.

57. ${}_{20}C_4$ **58.** ${}_{10}C_7$

59. ${}_{42}C_5$ **60.** ${}_{50}C_6$

61. Escriba todas las selecciones posibles de dos letras que pueden formarse de las letras A, B, C, D, E y F. (El orden de las dos letras no es importante.)

62. FORMACIÓN DE UN GRUPO EXPERIMENTAL Para realizar un experimento, cinco estudiantes son seleccionados al azar de entre un grupo de 20. ¿Cuántos grupos diferentes de cinco estudiantes son posibles?

63. SELECCIÓN DE JURADO De entre un grupo de 40 personas, ha de seleccionarse un jurado de 12 personas. ¿En cuántas formas puede ser seleccionado el jurado?

64. MIEMBROS DE UN COMITÉ Un comité del senado de Estados Unidos tiene 14 miembros. Suponiendo que la afiliación de partido no fue factor en la selección, ¿cuántos comités fueron posibles de entre los 100 senadores de Estados Unidos?

65. OPCIONES DE LOTERÍA En el juego de Massachusetts Mass Cash, un jugador escoge cinco números del 1 al 35. ¿En cuántas formas puede seleccionar los cinco números un jugador?

66. OPCIONES DE LOTERÍA En el juego de lotería de Luisiana, un jugador escoge seis números del 1 al 40. ¿En cuántas formas puede el jugador seleccionar los seis números?

67. UNIDADES DEFECTUOSAS Un envío de 25 televisores contiene tres unidades defectuosas. ¿En cuántas formas puede una compañía vendedora comprar cuatro de estas unidades y recibir (a) todas las unidades en buen estado, (b) dos unidades buenas y (c) al menos dos unidades buenas?

68. RELACIONES INTERPERSONALES La complejidad de las relaciones interpersonales crece de modo considerable cuando el tamaño del grupo es mayor. Determine el número de relaciones de dos parejas en grupos de (a) 3, (b) 8, (c) 12 y (c) 20 personas.

69. MANO DE PÓQUER Usted reparte cinco naipes de un mazo ordinario de 52 naipes o cartas de juego. ¿En cuántas formas puede usted obtener (a) un full y (b) una combinación de cinco cartas que contiene dos sotas y tres ases? (Un full consta de tres cartas de una clase y dos de otra. Por ejemplo, A-A-A-5-5 y K-K-K-10-10 son full.)

70. SOLICITANTES DE TRABAJO Un fabricante de ropa entrevista a 12 personas para cuatro puestos de trabajo en el departamento de recursos humanos de la compañía. Cinco de las 12 personas son mujeres. Si las 12 personas están calificadas, ¿en cuántas formas puede el empleador llenar los cuatro puestos de trabajo si (a) la selección es al azar y (b) exactamente dos mujeres son seleccionadas?

71. FORMACIÓN DE UN COMITÉ Un comité de investigación de seis personas en un colegio local se ha de formar con un administrador, tres miembros de facultad y dos estudiantes. Hay siete administradores, 12 miembros de facultad y 20 estudiantes compitiendo para el comité. ¿Cuántos comités de seis miembros son posibles?

72. APLICACIÓN DE LA LEY Un departamento de policía usa imágenes de computadora para crear fotografías digitales de presuntos delincuentes, a partir de descripciones de testigos. Un paquete de software contiene 195 líneas de pelo, 99 juegos de ojos y cejas, 89 narices, 105 bocas y 74 estructuras de la barbilla y mejillas.

(a) Encuentre el posible número de rostros que el software pueda crear.

(b) Un testigo puede claramente recordar la línea de pelo y ojos y cejas de un sospechoso. ¿Cuántos rostros pueden ser reproducidos con esta información?

GEOMETRÍA En los Ejercicios 73-76, encuentre el número de diagonales del polígono. (Un segmento de recta que enlaza cualesquier dos vértices no adyacentes se llama *diagonal* del polígono.)

73. Pentágono **74.** Hexágono

75. Octágono **76.** Decágono (10 lados)

77. GEOMETRÍA Tres puntos que no son colineales determinan tres rectas. ¿Cuántas rectas están determinadas por nueve puntos, donde no hay tres que sean colineales?

78. LOTERÍA El Powerball es un juego de lotería que es operado por la Multi-State Lottery Association y se juega en 30 estados, Washington, D.C. y las Islas Vírgenes de Estados Unidos. El juego se practica sacando cinco bolas blancas de un tambor de 59 de ellas (numeradas del 1 al 59) y una bola roja de un tambor de 39 de éstas (numeradas del 1 al 39). El premio mayor se gana al igualar las cinco bolas blancas en cualquier orden con la bola roja.

(a) Encuentre la posible cantidad de números ganadores de Powerball.

(b) Encuentre la posible cantidad de números ganadores de Powerball si el premio es ganado al igualar las cinco bolas blancas en orden y la bola roja.

(c) Compare los resultados del inciso (a) con una lotería del estado en la que el premio es ganado al igualar seis bolas de un tambor de 59 bolas.

En los Ejercicios 79-86, despeje *n*.

79. $14 \cdot {}_nP_3 = {}_{n+2}P_4$ **80.** ${}_nP_5 = 18 \cdot {}_{n-2}P_4$

81. ${}_nP_4 = 10 \cdot {}_{n-1}P_3$ **82.** ${}_nP_6 = 12 \cdot {}_{n-1}P_5$

83. ${}_{n+1}P_3 = 4 \cdot {}_nP_2$ **84.** ${}_{n+2}P_3 = 6 \cdot {}_{n+2}P_1$

85. $4 \cdot {}_{n+1}P_2 = {}_{n+2}P_3$ **86.** $5 \cdot {}_{n-1}P_1 = {}_nP_2$

EXPLORACIÓN

¿VERDADERO O FALSO? En los Ejercicios 87 y 88, determine si la proposición es verdadera o falsa. Justifique su respuesta.

87. El número de pares de letras que se pueden formar en cualquier orden de entre dos cualesquiera de las primeras 13 letras del alfabeto (A-M) es un ejemplo de una permutación.

88. El número de permutaciones de n elementos puede determinarse usando el principio fundamental de conteo.

89. ¿Cuál es la relación entre ${}_nC_r$ y ${}_nC_{n-r}$?

90. Sin calcular los números, determine cuál de lo siguiente es mayor. Explique.

(a) El número de combinaciones de 10 elementos tomados seis a la vez.

(b) El número de permutaciones de 10 elementos tomados seis a la vez.

DEMOSTRACION En los Ejercicios 91-94 demuestre la identidad.

91. ${}_nP_{n-1} = {}_nP_n$ **92.** ${}_nC_n = {}_nC_0$

93. ${}_nC_{n-1} = {}_nC_1$ **94.** ${}_nC_r = \frac{{}_nP_r}{r!}$

95. PIÉNSELO ¿Su calculadora puede evaluar ${}_{100}P_{80}$? Si no es así, explique por qué.

96. TOQUE FINAL Decida si cada situación debe contarse usando permutaciones o combinaciones. Explique su razonamiento. (No calcule.)

(a) Número de formas en que 10 personas pueden estar en fila de espera para adquirir boletos para un concierto.

(b) Número de arreglos de tres tipos de flores de entre un arreglo de 20 tipos.

(c) Número de NIP de cuatro dígitos de una tarjeta de débito.

(d) Número de helados de dos copos creados de 31 sabores.

97. ESCRITURA Explique verbalmente el significado de ${}_nP_r$.

9.7 PROBABILIDAD

Lo que debe aprender

- Encontrar las probabilidades de eventos.
- Encontrar las probabilidades de eventos mutuamente excluyentes.
- Encontrar las probabilidades de eventos independientes.
- Encontrar la probabilidad del complemento de un evento.

Por qué debe aprenderlo

La probabilidad se aplica a numerosos juegos de azar. Por ejemplo, en el Ejercicio 67 en la página 710 usted calculará probabilidades que se relacionan con el juego de ruleta.

La probabilidad de un evento

Cualquier suceso para el cual el resultado es incierto se llama **experimento**. Los posibles productos del experimento son **resultados**, el conjunto de todos los posibles resultados del experimento es el **espacio muestral** de éste y cualquier subconjunto de un espacio muestral es un **evento**.

Por ejemplo, cuando se lanza al aire un dado de seis caras, el espacio muestral puede estar representado por los números 1 a 6. Para este experimento, cada uno de los resultados es *igualmente probable*.

Para describir espacios muestrales en forma tal que cada resultado sea igualmente probable, a veces se debe distinguir entre dos o varios resultados en formas que parecen artificiales. El Ejemplo 1 ilustra esa situación.

Ejemplo 1 Hallar un espacio muestral

Encuentre el espacio muestral para cada uno de lo siguiente.

a. Una moneda se lanza al aire.

b. Dos monedas se lanzan al aire.

c. Tres monedas se lanzan al aire.

Solución

a. Como la moneda caerá ya sea con la "cara" hacia arriba (denotada por H) o "cruz" (denotada por T), el espacio muestral es

$$S = \{H, T\}.$$

b. Como cualquiera de las dos monedas puede caer con cara hacia arriba o cruz hacia arriba, los posibles resultados son como sigue.

HH = cara hacia arriba en ambas monedas

HT = cara hacia arriba en la primera moneda y cruz en la segunda

TH = cruz hacia arriba en la primera moneda y cara en la segunda

TT = cruz hacia arriba en ambas monedas

Por tanto, el espacio muestral es

$$S = \{HH, HT, TH, TT\}.$$

Nótese que esta lista distingue entre los dos casos de HT y TH, aun cuando estos dos resultados parezcan similares.

c. Siguiendo la notación del inciso (b), el espacio muestral es

$$S = \{HHH, HHT, HTH, HTT, THH, THT, TTH, TTT\}.$$

Observe que esta lista distingue entre los casos HHT, HTH y THH, y entre los casos HTT, THT y TTH.

PUNTO *de repaso* Ahora trate de hacer el Ejercicio 9.

Para calcular la probabilidad de un evento, cuente el número de resultados del evento y del espacio muestral. El *número de resultados* del evento E se denota con $n(E)$, y el número de resultados del espacio muestral S se denota con $n(S)$. La probabilidad de que el evento E ocurra se da con $\dfrac{n(E)}{n(S)}$.

La probabilidad de un evento

Si un evento E tiene $n(E)$ resultados igualmente probables y su espacio muestral S tiene $n(S)$ resultados igualmente probables, la probabilidad del evento E es

$$P(E) = \frac{n(E)}{n(S)}.$$

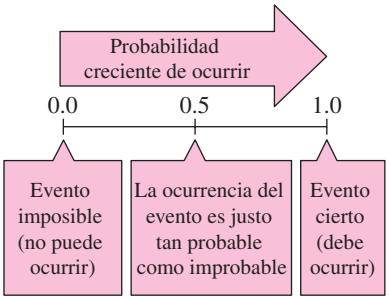


FIGURA 9.8

Como el número de resultados en un evento debe ser menor o igual al número de resultados del espacio muestral, la probabilidad de un evento debe ser un número entre 0 y 1. Esto es

$$0 \le P(E) \le 1$$

como se indica en la Figura 9.8. Si $P(E) = 0$, el evento E *no puede ocurrir*, y E se llama **evento imposible.** Si $P(E) = 1$, el evento E *debe ocurrir* y E se llama **evento seguro**.

Ejemplo 2 Hallar la probabilidad de un evento

a. Dos monedas son lanzadas al aire. ¿Cuál es la probabilidad de que ambas queden cara arriba?

b. Un naipe se saca de un mazo normal de cartas. ¿Cuál es la probabilidad de que sea un as?

Solución

a. Siguiendo el procedimiento del ejemplo 1(b), sean

$$E = \{HH\}$$

y

$$S = \{HH, HT, TH, TT\}.$$

La probabilidad de obtener dos caras es

$$P(E) = \frac{n(E)}{n(S)} = \frac{1}{4}.$$

b. Como hay 52 cartas en un mazo normal de naipes y hay cuatro ases (uno en cada palo), la probabilidad de sacar un as es

$$P(E) = \frac{n(E)}{n(S)} = \frac{4}{52} = \frac{1}{13}.$$

Tip de estudio

Se puede escribir una probabilidad como fracción, decimal o porcentaje. Por citar un caso, en el Ejemplo 2(a) la probabilidad de obtener dos caras se puede escribir como $\frac{1}{4}$, 0.25 o 25%.

PUNTO *de repaso* Ahora trate de hacer el Ejercicio 15.

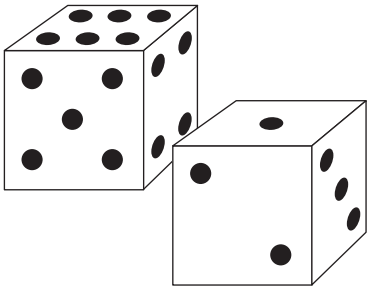


FIGURA 9.9

Ejemplo 3 Hallar la probabilidad de un evento

Dos dados de seis lados se tiran. ¿Cuál es la probabilidad de que el total de los dos dados sea 7? (Vea Figura 9.9.)

Solución

Como hay seis resultados posibles en cada dado, se puede usar el principio fundamental de conteo para concluir que hay $6 \cdot 6$ o 36 resultados cuando se tiran dos dados. Para hallar la probabilidad de acumular un total de 7, primero se debe contar el número de formas en que esto puede ocurrir.

Primer dado	Segundo dado
1	6
2	5
3	4
4	3
5	2
6	1

Entonces, un total de 7 se puede formar de seis formas, lo cual significa que la probabilidad de sumar un 7 es

$$P(E) = \frac{n(E)}{n(S)} = \frac{6}{36} = \frac{1}{6}.$$

PUNTO *de repaso* Ahora trate de hacer el Ejercicio 25.

Tip de estudio

Podría haberse escrito cada espacio muestral del Ejemplo 2(b) y 3 y simplemente contar los resultados en los eventos deseados. Para espacios muestrales más grandes, no obstante, deben usarse los principios de conteo expuestos en la sección 9.6.

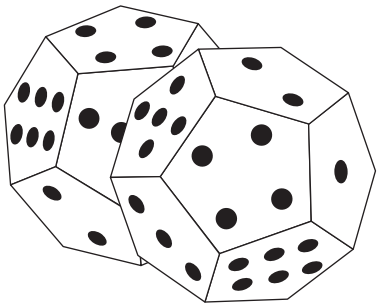


FIGURA 9.10

Ejemplo 4 Hallar la probabilidad de un evento

Los dados de doce lados, como se muestra en la figura 9.10, pueden construirse (en forma de un dodecaedro regular) de manera que cada uno de los números del 1 al 6 aparezca dos veces en cada dado. Demuestre que estos dados se pueden usar en cualquier juego que requiera de dados comunes y corrientes de seis lados sin cambiar las probabilidades de los diversos resultados.

Solución

Para un dado común y corriente de seis lados, cada uno de los números 1, 2, 3, 4, 5 y 6 se presenta sólo una vez, de modo que la probabilidad de que salga cualquier número particular es

$$P(E) = \frac{n(E)}{n(S)} = \frac{1}{6}.$$

Para uno de los dados de 12 lados, cada número se presenta dos veces, de modo que la probabilidad de que cualquiera salga es

$$P(E) = \frac{n(E)}{n(S)} = \frac{2}{12} = \frac{1}{6}.$$

PUNTO *de repaso* Ahora trate de hacer el Ejercicio 27.

Ejemplo 5 La probabilidad de ganar en una lotería

En el juego The Pick de Arizona, un jugador escoge seis números diferentes del 1 al 44. Si estos seis números son iguales a los seis números sacados (en cualquier orden) por la comisión de lotería, el jugador gana (o comparte) el premio principal. ¿Cuál es la probabilidad de ganar el premio principal si el jugador compra un boleto?

Solución

Para hallar el número de elementos en el espacio muestral, use la fórmula para el número de combinaciones de 44 elementos tomados seis a la vez.

$$\begin{aligned} n(S) &= {}_{44}C_6 \\ &= \frac{44 \cdot 43 \cdot 42 \cdot 41 \cdot 40 \cdot 39}{6 \cdot 5 \cdot 4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1} \\ &= 7\,059\,052 \end{aligned}$$

Si una persona compra sólo un boleto, la probabilidad de ganar es

$$P(E) = \frac{n(E)}{n(S)} = \frac{1}{7\,059\,052}.$$

Ahora trate de hacer el Ejercicio 31.

Ejemplo 6 Selección aleatoria

El número de colegios y universidades en varias regiones de Estados Unidos en 2007 se muestra en la Figura 9.11. Una institución se selecciona al azar. ¿Cuál es la probabilidad de que esté en una de las tres regiones del Sur? (Fuente: National Center for Education Statistics)

Solución

En la figura se observa que el número total de colegios y universidades es 4309. Como hay 738 + 276 + 1420 colegios y universidades en las tres regiones del Sur, la probabilidad de que la institución esté en una de estas regiones es

$$P(E) = \frac{n(E)}{n(S)} = \frac{1420}{4309} \approx 0.330.$$

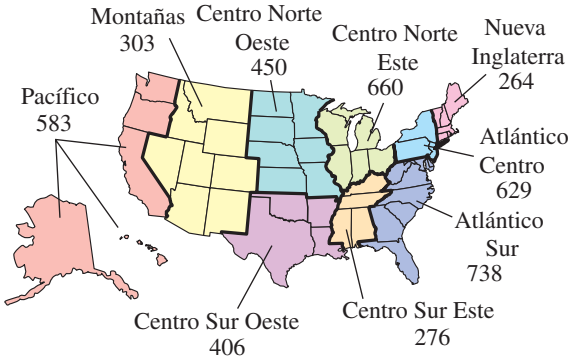


FIGURA 9.11

PUNTO *de repaso* Ahora trate de hacer el Ejercicio 43.

Eventos mutuamente excluyentes

Dos eventos A y B (del mismo espacio muestral) son **mutuamente excluyentes** si A y B no tienen resultados en común. En la terminología de conjuntos, la intersección de A y B es el conjunto vacío, lo cual implica que

$$P(A \cap B) = 0.$$

Por ejemplo, si se tiran dos dados, el evento A de acumular un total de 6 y el evento B de acumular un total de 9 son mutuamente excluyentes. Para hallar la probabilidad de que ocurra uno u otro de los dos eventos mutuamente excluyentes se pueden *sumar* sus probabilidades individuales.

Probabilidad de la unión de dos eventos

Si A y B son eventos del mismo espacio muestral, la probabilidad de que ocurra A o B está dada por

$$P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B).$$

Si A y B son mutuamente excluyentes, entonces

$$P(A \cup B) = P(A) + P(B).$$

Ejemplo 7 La probabilidad de una unión de eventos

Se selecciona un naipe de un mazo normal de 52 cartas de juego. ¿Cuál es la probabilidad de que la carta sea de corazones o de una figura?

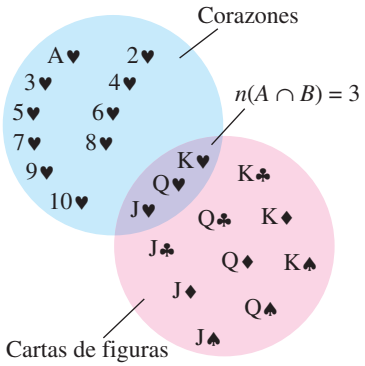


FIGURA 9.12

Solución

Como el mazo tiene 13 corazones, la probabilidad de seleccionar un corazón (evento A) es

$$P(A) = \frac{13}{52}.$$

Del mismo modo, como el mazo tiene 12 cartas de figuras, la probabilidad de seleccionar una de ellas (evento B) es

$$P(B) = \frac{12}{52}.$$

Como tres de las cartas son corazones *y además* cartas de figuras (vea Figura 9.12), se deduce que

$$P(A \cap B) = \frac{3}{52}.$$

Finalmente, aplicando la fórmula para la probabilidad de la unión de dos eventos, se puede concluir que la probabilidad de seleccionar un corazón o una carta de figuras es

$$P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B)$$
$$= \frac{13}{52} + \frac{12}{52} - \frac{3}{52} = \frac{22}{52} \approx 0.423.$$

PUNTO *de repaso* Ahora trate de hacer el Ejercicio 57.

Ejemplo 8 Probabilidad de eventos mutuamente excluyentes

El departamento de personal de una compañía ha compilado datos sobre el número de empleados que han estado en la compañía en varios periodos. Los resultados se muestran en la tabla.

Años de servicio	Número de empleados
0–4	157
5–9	89
10–14	74
15–19	63
20–24	42
25–29	38
30–34	37
35–39	21
40–44	8

Si un empleado se escoge al azar, ¿cuál es la probabilidad de que tenga (a) 4 o menos años de servicio y (b) 9 o menos años de servicio?

Solución

a. Para empezar, sume el número de empleados para hallar que el total es 529. A continuación, con A represente escoger un empleado con 0 a 4 años de servicio. Entonces la probabilidad de escoger un empleado que tenga 4 o menos años de servicio es

$$P(A) = \frac{157}{529} \approx 0.297.$$

b. Con el evento B represente escoger un empleado con 5 a 9 años de servicio. Entonces

$$P(B) = \frac{89}{529}.$$

Como el evento A de el inciso (a) y el evento B no tienen resultados en común, se puede concluir que estos dos eventos son mutuamente excluyentes y que

$$\begin{aligned} P(A \cup B) &= P(A) + P(B) \\ &= \frac{157}{529} + \frac{89}{529} \\ &= \frac{246}{529} \\ &\approx 0.465. \end{aligned}$$

Por tanto, la probabilidad de escoger un empleado que tenga 9 o menos años de servicio es alrededor de 0.465.

PUNTO *de repaso* Ahora trate de hacer el Ejercicio 59.

Eventos independientes

Dos eventos son **independientes** si el acontecer de uno de ellos no tiene efecto en el acontecer del otro. Por ejemplo, acumular un total de 12 con dos dados de seis lados no tiene efecto sobre el resultado de futuros tiros de los dados. Para hallar la probabilidad de que ocurran dos eventos independientes, *multiplique* las probabilidades de cada uno.

Probabilidad de eventos independientes

Si A y B son eventos independientes, la probabilidad de que ocurran A y B es

$$P(A \text{ y } B) = P(A) \cdot P(B).$$

Ejemplo 9 Probabilidad de eventos independientes

Un generador de números aleatorios en una computadora selecciona tres enteros del 1 al 20. ¿Cuál es la probabilidad de que los tres números sean menores o iguales a 5?

Solución

La probabilidad de seleccionar un número del 1 al 5 es

$$P(A) = \frac{5}{20} = \frac{1}{4}.$$

Por tanto, la probabilidad de que los tres números sean menores o iguales a 5 es

$$P(A) \cdot P(A) \cdot P(A) = \left(\frac{1}{4}\right)\left(\frac{1}{4}\right)\left(\frac{1}{4}\right)$$

$$= \frac{1}{64}.$$

PUNTO *de repaso* Ahora trate de hacer el Ejercicio 61.

Ejemplo 10 Probabilidad de eventos independientes

En 2009, aproximadamente 13% de la población adulta en Estados Unidos obtenía casi todas sus noticias por internet. En una encuesta, 10 personas fueron seleccionadas al azar de entre la población adulta. ¿Cuál es la probabilidad de que los 10 se enteraran de casi todas sus noticias por esa red? (Fuente: CBS News/New York Times Poll)

Solución

Con A represente un adulto que se entera de sus noticias por internet. La probabilidad de escoger un adulto que se entere de casi todas sus noticias por esa red es 0.13, la probabilidad de escoger un segundo adulto que se entere de casi todas sus noticias por internet es 0.13, y así sucesivamente. Como estos eventos son independientes, se puede concluir que la probabilidad de que las 10 personas se enteren de casi todas sus noticias por internet es

$$[P(A)]^{10} = (0.13)^{10} \approx 0.000000001.$$

PUNTO *de repaso* Ahora trate de hacer el Ejercicio 63.

El complemento de un evento

El **complemento de un evento** A es el conjunto de todos los resultados del espacio muestral que *no estén* en A. El complemento del evento A se denota con A'. En virtud de que $P(A \text{ o } A') = 1$ y como A y A' son mutuamente excluyentes, se deduce que $P(A) + P(A') = 1$. Por tanto, la probabilidad de A' es

$$P(A') = 1 - P(A).$$

Por ejemplo, si la probabilidad de *ganar* en cierto juego es

$$P(A) = \frac{1}{4}$$

la probabilidad de perder el juego es

$$P(A') = 1 - \frac{1}{4}$$

$$= \frac{3}{4}.$$

Probabilidad de un complemento

Sea A un evento y sea A' su complemento. Si la probabilidad de A es $P(A)$, la probabilidad del complemento es

$$P(A') = 1 - P(A).$$

Ejemplo 11 Hallar la probabilidad de un complemento

Un fabricante ha determinado que una máquina promedia una unidad defectuosa por cada 1000 que produce. ¿Cuál es la probabilidad de que un pedido de 200 unidades tenga una o más unidades defectuosas?

Solución

Para resolver este problema como se indica es necesario hallar las probabilidades de tener exactamente una unidad defectuosa, exactamente dos unidades defectuosas, exactamente tres unidades defectuosas y así sucesivamente. No obstante, con el uso de complementos se puede hallar simplemente la probabilidad de que todas las unidades sean perfectas y luego se resta este valor de 1. Como la probabilidad de que cualquier unidad determinada sea perfecta es 999/1000, la probabilidad de que las 200 unidades sean perfectas es

$$P(A) = \left(\frac{999}{1000}\right)^{200}$$

$$\approx 0.819.$$

Por tanto, la probabilidad de que al menos una unidad sea defectuosa es

$$P(A') = 1 - P(A)$$

$$\approx 1 - 0.819$$

$$= 0.181.$$

PUNTO *de repaso* Ahora trate de hacer el Ejercicio 65.

9.7 EJERCICIOS

En www.CalcChat.com vea las soluciones a los ejercicios impares.

VOCABULARIO En los Ejercicios 1–7, llene los espacios en blanco.

1. Un _____ es un evento cuyo resultado es incierto, y los posibles productos del evento se llaman _____.
2. El conjunto de todos los posibles resultados de un experimento reciben el nombre de _____ _____.
3. Para determinar la _____ de un evento, se puede usar la fórmula $P(E) = \dfrac{n(E)}{n(S)}$, donde $n(E)$ es el número de resultados en el evento y $n(S)$ es el número de resultados en el espacio muestral.
4. Si $P(E) = 0$, entonces E es un evento _____, y si $P(E) = 1$, entonces E es un evento _____.
5. Si dos eventos del mismo espacio muestral no tienen resultados en común, entonces los dos eventos son _____ _____.
6. Si el acontecer de un evento no tiene efecto sobre el acontecer de un segundo evento, entonces los eventos son _____ _____.
7. El _____ de un evento A es el conjunto de todos los resultados en el espacio muestral que no estén en A.
8. Relacione la fórmula de probabilidad con el nombre correcto de probabilidad.

   (a) Probabilidad de unión de dos eventos — (i) $P(A \cup B) = P(A) + P(B)$

   (b) Probabilidad de eventos mutuamente excluyentes — (ii) $P(A') = 1 - P(A)$

   (c) Probabilidad de eventos independientes — (iii) $P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B)$

   (d) Probabilidad de un complemento — (iv) $P(A \text{ y } B) = P(A) \cdot P(B)$

HABILIDADES Y APLICACIONES

En los Ejercicios 9-14, determine el espacio muestral para el experimento.

9. Una moneda y un dado de seis lados se tiran al aire.
10. Un dado de seis lados se lanza dos veces al aire y se registra la suma de los resultados.
11. Un probador de sabores tiene que clasificar tres variedades de yogur, A, B y C, según preferencia.
12. Dos canicas se seleccionan (sin reemplazo) de una bolsa que contiene dos canicas rojas, dos azules y una amarilla. El color de cada una de las canicas se registra.
13. Dos supervisores de un condado son seleccionados de entre cinco supervisores, A, B, C, D y E para estudiar un plan de reciclaje.
14. Un representante de ventas hace presentaciones acerca de un producto en tres casas por día. En cada casa puede haber una venta (denotada por S) o puede no haber una venta (denotada por F).

LANZAR AL AIRE UNA MONEDA **En los Ejercicios 15-20, encuentre la probabilidad para el experimento de lanzar tres veces al aire una moneda. Use el espacio muestral $S = \{HHH, HHT, HTH, HTT, THH, THT, TTH, TTT\}$.**

15. La probabilidad de obtener exactamente una cruz.
16. La probabilidad de obtener exactamente dos cruces.
17. La probabilidad de obtener una cara en el primer tiro.
18. La probabilidad de obtener una cruz en el último tiro.
19. La probabilidad de obtener al menos una cara.
20. La probabilidad de obtener al menos dos caras.

SACAR UN NAIPE **En los Ejercicios 21-24, encuentre la probabilidad para el experimento de seleccionar una carta de un mazo normal de 52 cartas de juego.**

21. La carta es una de figuras.
22. La carta no es de figuras.
23. La carta es una figura roja.
24. La carta es un 9 o menor. (Los ases son bajos.)

TIRAR UN DADO **En los Ejercicios 25-30, encuentre la probabilidad para el experimento de tirar dos veces un dado de seis lados.**

25. La suma es 6.
26. La suma es al menos 8.
27. La suma es menor a 11.
28. La suma es 2, 3 o 12.
29. La suma es impar y no más de 7.
30. La suma es impar o primo.

SACAR CANICAS **En los Ejercicios 31-34, encuentre la probabilidad para el experimento de sacar dos canicas (sin reemplazo) de una bolsa que contiene una canica verde, dos amarillas y tres rojas.**

31. Ambas canicas son rojas.
32. Ambas canicas son amarillas.
33. Ninguna canica es amarilla.
34. Las canicas son de colores diferentes.

En los Ejercicios 35-38, nos dan la probabilidad de que un evento *ocurra*. Encuentre la probabilidad de que el evento *no ocurra*.

35. $P(E) = 0.87$ **36.** $P(E) = 0.36$

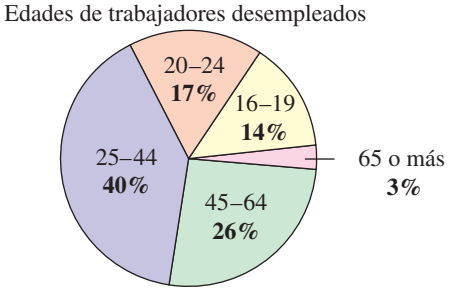
37. $P(E) = \frac{1}{4}$ **38.** $P(E) = \frac{2}{3}$

En los Ejercicios 39-42, nos dan la probabilidad de que un evento *no ocurra*. Encuentre la probabilidad de que el evento *ocurra*.

39. $P(E') = 0.23$ **40.** $P(E') = 0.92$

41. $P(E') = \frac{17}{35}$ **42.** $P(E') = \frac{61}{100}$

43. RAZONAMIENTO GRÁFICO En 2008, había aproximadamente 8.92 millones de trabajadores desempleados en Estados Unidos. La gráfica circular muestra el perfil de edades de estos trabajadores. (Fuente: U.S. Bureau of Labor Statistics)



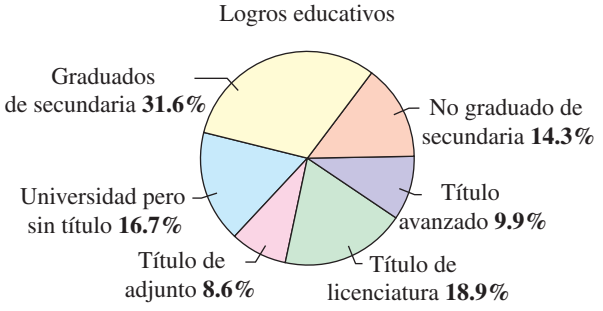
(a) Estime el número de trabajadores desempleados en el grupo de edades de 16 a 19 años.

(b) ¿Cuál es la probabilidad de que una persona seleccionada al azar de la población de trabajadores desempleados esté en el grupo de edades de 25 a 44 años?

(c) ¿Cuál es la probabilidad de que una persona seleccionada al azar de la población de trabajadores desempleados esté en el grupo de edades de 45 a 64 años?

(d) ¿Cuál es la probabilidad de que una persona seleccionada al azar de la población de trabajadores desempleados tenga 45 años o más?

44. RAZONAMIENTO GRÁFICO En 2007, los logros educativos de la población de 25 años o más en Estados Unidos se muestran en la gráfica circular siguiente. Use el hecho de que la población de personas de 25 años o más era de aproximadamente 194.32 millones en 2007. (Fuente: U.S. Census Bureau)



(a) Estime el número de personas de 25 años o más que tienen diplomas de secundaria.

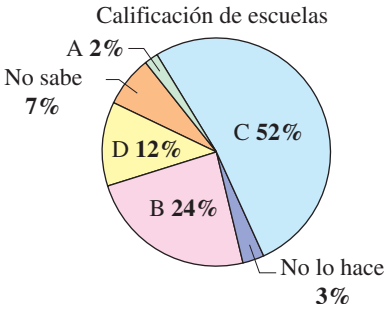
(b) Estime el número de personas de 25 años o más que tienen título avanzado.

(c) Encuentre la probabilidad de que una persona de 25 años o más seleccionada al azar haya obtenido título de licenciatura o superior.

(d) Encuentre la probabilidad de que una persona de 25 años o más seleccionada al azar haya obtenido el diploma de secundaria o haya continuado en educación posterior a secundaria.

(e) Encuentre la probabilidad de que una persona de 25 años o más seleccionada al azar haya obtenido título de adjunto o superior.

45. RAZONAMIENTO GRÁFICO La figura siguiente muestra los resultados de un estudio reciente en el que se pidió a 1011 adultos calificaran escuelas públicas de Estados Unidos. (Fuente: Phi Delta Kappa/Gallup Poll)

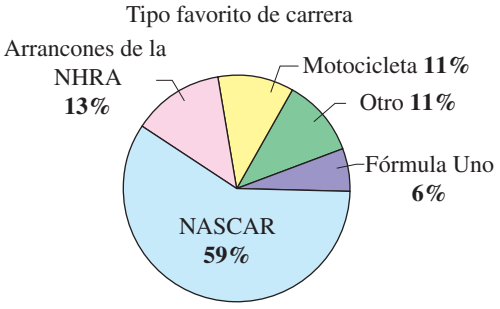


(a) Estime el número de adultos que dieron a escuelas públicas de Estados Unidos una B.

(b) Un adulto se selecciona al azar. ¿Cuál es la probabilidad de que dé a escuelas públicas de Estados Unidos una A?

(c) Un adulto se selecciona al azar. ¿Cuál es la probabilidad de que dé a escuelas públicas de Estados Unidos una C o una D?

46. RAZONAMIENTO GRÁFICO La figura siguiente muestra los resultados de una encuesta en la que aficionados a carreras de autos clasificaron su tipo favorito de carrera. (Fuente: ESPN Sports Poll/TNS Sports)



(a) ¿Cuál es la probabilidad de que un aficionado a carreras de autos, seleccionado al azar, diga que la de la NASCAR es su tipo favorito de carreras?

(b) ¿Cuál es la probabilidad de que un aficionado a carreras de autos, seleccionado al azar, diga que la de Fórmula Uno o de motocicletas es su tipo favorito de carreras?

(c) ¿Cuál es la probabilidad de que un aficionado a carreras de autos, seleccionado al azar, *no* diga que la de arrancones de la NHRA es su tipo favorito de carreras?

47. ANÁLISIS DE DATOS Se realizó un estudio de la eficacia de una vacuna contra la gripe con una muestra de 500 personas. A algunos participantes en el estudio no se les administró vacuna, a otros se les aplicó una inyección y, a otros, dos inyecciones. Los resultados del estudio se indican en la tabla.

	Sin vacuna	Una inyección	Dos inyecciones	Total
Con gripe	7	2	13	22
Sin gripe	149	52	277	478
Total	156	54	290	500

Se seleccionó una persona al azar de la muestra. Encuentre la probabilidad especificada.

(a) La persona recibió dos inyecciones.

(b) La persona no tenía gripe.

(c) La persona tenía gripe y se le aplicó una inyección.

48. ANÁLISIS DE DATOS Cien estudiantes universitarios fueron entrevistados para determinar sus afiliaciones a un partido político y si estaban a favor de una enmienda de presupuesto equilibrado a la constitución. Los resultados del estudio se dan en la tabla siguiente, donde *D* representa demócrata y *R* republicano.

	Favor	No a favor	Inseguro	Total
D	23	25	7	55
R	32	9	4	45
Total	55	34	11	100

Se selecciona una persona al azar de la muestra. Encuentre la probabilidad de que se seleccione.

(a) Una persona que no esté a favor de la enmienda

(b) Un republicano

(c) Un demócrata que esté a favor de la enmienda

49. ASOCIACIÓN DE ALUMNOS Un colegio envía un estudio a miembros seleccionados de la clase 2009. De las 1254 personas que se graduaron ese año, 672 son mujeres, de las cuales 124 continuaron estudios en una escuela de graduados. De los 582 hombres graduados, 198 continuaron en escuela de graduados. Un miembro de alumnos se selecciona al azar. ¿Cuáles son las probabilidades de que la persona sea (a) mujer, (b) hombre y (c) mujer y no asistió a escuela de graduados?

50. EDUCACIÓN En un grupo de 128 estudiantes que se gradúa, 52 están en el cuadro de honor. De éstos, 48 continuarán en el colegio; de los otros 76 estudiantes, 56 continuarán en el colegio. De entre el grupo, se selecciona un estudiante al azar. ¿Cuál es la probabilidad de que la persona seleccionada (a) vaya al colegio, (b) no vaya al colegio y (c) no vaya al colegio y no esté en el cuadro de honor?

51. GANAR UNA ELECCIÓN Tres personas han sido nominadas para presidente de un grupo. De una encuesta, se estima que el primer candidato tiene un 37% de probabilidad de ganar y el segundo un 44% de probabilidad de ganar. ¿Cuál es la probabilidad de que el tercer candidato gane?

52. ERROR EN NÓMINA Los empleados de una compañía trabajan en seis departamentos: 31 están en ventas, 54 en investigación, 42 en marketing, 20 en ingeniería, 47 en finanzas y 58 en producción. Se pierde el cheque del sueldo de un empleado. ¿Cuál es la probabilidad de que trabaje en el departamento de investigación?

En los Ejercicios 53-60, los espacios muestrales son grandes y usted debe usar los principios de conteo que se estudian en la sección 9.6.

53. PREPARACIÓN PARA UN EXAMEN A un grupo de estudiantes se le da una lista de 20 problemas, 10 de los cuales serán parte de un próximo examen. Un estudiante sabe cómo resolver 15 de los problemas. Encuentre las probabilidades de que el estudiante pueda contestar (a) las 10 preguntas del examen, (b) exactamente ocho preguntas y (c) al menos nueve preguntas.

54. CONFUSIÓN EN NÓMINA Cinco cheques de sueldo y sobres están dirigidos a cinco personas. Los cheques de sueldo se insertan al azar en los sobres. ¿Cuáles son las probabilidades de que (a) exactamente un cheche se inserte en el sobre correcto y (b) al menos un cheque se inserte en el sobre correcto?

55. EXHIBICIÓN DE JUEGO En una exhibición de juego, a usted se le dan cinco dígitos para arreglar en el orden apropiado para formar el precio de un auto. Si está bien, gana el auto. ¿Cuál es la probabilidad de ganar, dadas las siguientes condiciones?

(a) Usted adivina la posición de cada dígito.

(b) Usted sabe el primer dígito y adivina las posiciones de los otros dígitos.

56. JUEGO DE NAIPES El mazo de un juego de naipes consta de 108. Veinticinco de cada uno son rojos, amarillos, azules y verdes y ocho son comodines. A cada jugador se le da una mano de siete cartas al azar.

(a) ¿Cuál es la probabilidad de que una mano contenga exactamente dos comodines?

(b) ¿Cuál es la probabilidad de que una mano contenga dos comodines, dos cartas rojas y tres azules?

57. SACAR UN NAIPE Un naipe se selecciona al azar de un mazo ordinario de 52 cartas de juego. Encuentre las probabilidades de que el naipe sea (a) de número par, (b) de corazones o un diamante, y (c) un nueve o tenga figura.

58. MANO DE PÓQUER Se sacan cinco cartas de un mazo ordinario de 52 cartas de juego. ¿Cuál es la probabilidad de que la mano sacada sea un full? (Un full es una mano formada por dos cartas de una clase y tres de otra.)

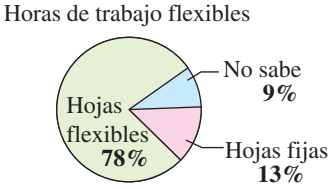
59. UNIDADES DEFECTUOSAS Un envío de 12 hornos de microondas contiene tres unidades defectuosas. Una compañía vendedora ha ordenado cuatro de estas unidades y, como cada una está empacada de manera idéntica, la selección será aleatoria. ¿Cuáles son las probabilidades de que (a) las cuatro unidades estén bien, (b) exactamente dos unidades estén bien y (c) al menos dos unidades estén bien?

60. CÓDIGOS DE NIP Los números de identificación personal (NIP) en cajeros automáticos por lo general constan de sucesiones de números de 4 dígitos. Encuentre la probabilidad de que si usted olvida su NIP, pueda adivinar la secuencia correcta (a) al azar y (b) si puede recordar los primeros dos dígitos.

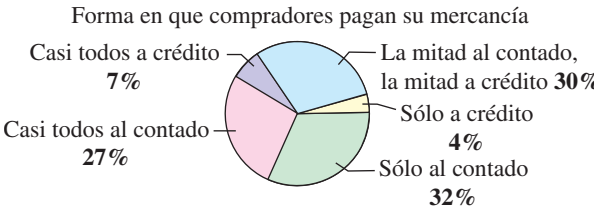
61. GENERADOR DE NÚMEROS ALEATORIOS Dos enteros del 1 al 40 son seleccionados por un generador de números al azar. ¿Cuáles son las probabilidades de que (a) los números sean pares, (b) un número sea par y uno sea impar, (c) ambos números sean menores a 30 y (d) el mismo número se escoja dos veces?

62. GENERADOR DE NÚMEROS ALEATORIOS Repita el Ejercicio 61 para un generador de números aleatorios que escoge dos enteros del 1 al 80.

63. HORAS DE TRABAJO FLEXIBLES En una encuesta se preguntó a unas personas si preferirían trabajar horas flexibles, aun cuando esto significara un avance más lento en su carrera, para que pudieran pasar más tiempo con sus familias. Los resultados de la encuesta se muestran en la figura. Tres personas de la encuesta se escogieron al azar. ¿Cuál es la probabilidad de que las tres personas prefieran horas flexibles?



64. CONCIENCIA DE CONSUMIDOR Suponga que los métodos empleados por compradores para pagar mercancías se muestran en la gráfica circular siguiente. Dos compradores son escogidos al azar. ¿Cuál es la probabilidad de que ambos paguen sus compras sólo al contado?



65. SISTEMA DE RESPALDO Un vehículo espacial tiene un sistema independiente de respaldo para una de sus redes de comunicación. La probabilidad de que cualquiera de los sistemas funcione satisfactoriamente durante un vuelo es 0.985. ¿Cuáles son las probabilidades de que durante un vuelo (a) ambos sistemas funciones satisfactoriamente, (b) al menos un sistema funciona satisfactoriamente y (c) ambos sistemas fallen.

66. VEHÍCULO DE RESPALDO Una compañía de bomberos mantiene dos vehículos de rescate. Debido a la demanda de vehículos y a la probabilidad de fallas mecánicas, la probabilidad de que un vehículo esté disponible cuando es necesario es 90%. La disponibilidad de un vehículo es independiente de la disponibilidad de otro. Encuentre las probabilidades de que (a) ambos vehículos estén disponibles en un momento determinado, (b) ninguno de los vehículos esté disponible y (c) al menos un vehículo esté disponible.

67. RULETA La ruleta americana es un juego en el que una rueda gira en un eje y está dividida en 38 casillas. Treinta y seis de las casillas están numeradas del 1 al 36, de las cuales la mitad son rojas y la mitad son negras. Dos de las casillas son verdes y están numeradas 0 y 00 (vea figura). El operador de la ruleta hace girar la rueda y una pequeña pelota en direcciones opuestas. Cuando la pelotilla se detiene, tiene igual probabilidad de quedar en cualquiera de las casillas numeradas.

(a) Encuentre la probabilidad de que la pelotilla quede en la casilla 00.

(b) Encuentre la probabilidad de que la pelotilla quede en una casilla roja.

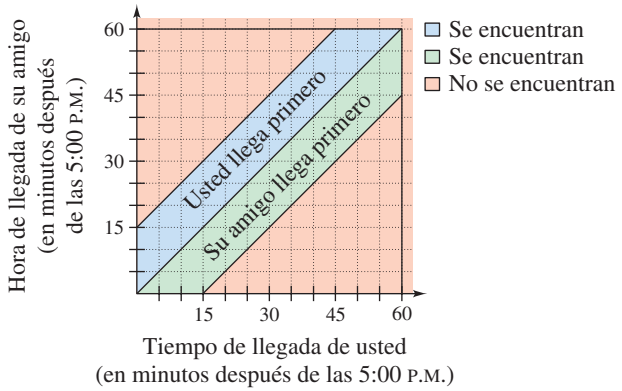
(c) Encuentre la probabilidad de que la pelotilla quede en una casilla verde o en una casilla negra.

(d) Encuentre la probabilidad de que la pelotilla quede en la casilla número 14 en dos giros consecutivos.

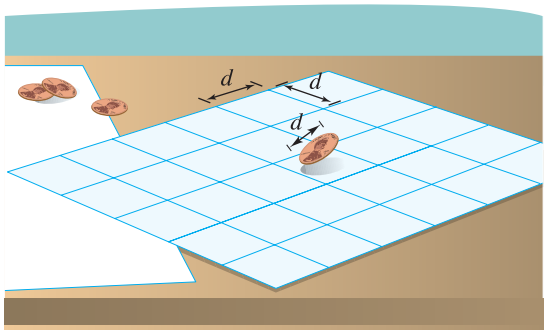
(e) Encuentre la probabilidad de que la pelotilla quede en una casilla roja en tres giros consecutivos.

68. ¿NIÑO O NIÑA? Suponga que la probabilidad del nacimiento de un niño de sexo particular es 50%. En una familia con cuatro hijos, ¿cuáles son las probabilidades de que (a) todos los hijos sean niños, (b) todos los hijos sean del mismo sexo y (c) haya al menos un niño.

69. GEOMETRÍA Usted y un amigo están de acuerdo en verse en su restaurante favorito de comida rápida entre las 5:00 y las 6:00 P.M. El que llegue primero esperará 15 minutos al otro, y luego dejará el lugar (vea figura). ¿Cuál es la probabilidad de que los dos se encuentren en realidad, suponiendo que sus horas de llegada sean aleatorias dentro de una hora?



70. ESTIMACIÓN DE π Una moneda de diámetro d se deja caer sobre un papel que contiene una cuadrícula de d unidades en un lado (vea figura).



(a) Encuentre la probabilidad de que la moneda cubra un vértice de uno de los cuadrados de la cuadrícula.

(b) Realice el experimento 100 veces y use los resultados para aproximar π.

EXPLORACIÓN

¿VERDADERO O FALSO? En los Ejercicios 71 y 72, determine si la proposición es verdadera o falsa. Justifique su respuesta.

71. Si A y b son eventos independientes con probabilidades diferentes de cero, entonces A puede ocurrir cuando B ocurra.

72. Sacar un número menor a 3 en un dado normal de seis lados tiene una probabilidad de $\frac{1}{3}$. El complemento de este evento es sacar un número mayor a 3 y su probabilidad es $\frac{1}{2}$.

73. RECONOCIMIENTO DE PATRÓN Considere un grupo de n personas.

(a) Explique por qué el patrón siguiente da las probabilidades de que las n personas tengan distintos cumpleaños.

$$n = 2: \quad \frac{365}{365} \cdot \frac{364}{365} = \frac{365 \cdot 364}{365^2}$$

$$n = 3: \quad \frac{365}{365} \cdot \frac{364}{365} \cdot \frac{363}{365} = \frac{365 \cdot 364 \cdot 363}{365^3}$$

(b) Use el patrón del inciso (a) para escribir una expresión para la probabilidad de que $n = 4$ personas tengan distintos cumpleaños.

(c) Sea P_n la probabilidad de que las n personas tengan distintos cumpleaños. Verifique que esta probabilidad pueda obtenerse recursivamente con

$$P_1 = 1 \text{ y } P_n = \frac{365 - (n-1)}{365} P_{n-1}.$$

(d) Explique por qué $Q_n = 1 - P_n$ da la probabilidad de que al menos dos personas de un grupo de n personas tengan el mismo cumpleaños.

(e) Use los resultados de los incisos (c) y (d) para completar la tabla.

n	10	15	20	23	30	40	50
P_n							
Q_n							

(f) ¿Cuántas personas deben estar en el grupo para que la probabilidad de que al menos dos de ellas tengan el mismo cumpleaños sea mayor a $\frac{1}{2}$? Explique.

74. TOQUE FINAL Escriba un breve párrafo que defina lo siguiente.

(a) Espacio muestral de un experimento

(b) Evento

(c) La probabilidad de un evento E en un espacio muestral S

(d) La probabilidad del complemento de E

75. PIÉNSELO Un pronóstico del clima indica que la probabilidad de lluvia es 40%. ¿Qué significa esto?

76. Lance dos monedas al aire 100 veces y anote el número de "caras" que ocurren en cada tiro (0, 1 o 2). ¿Cuántas veces hubo caras? ¿Cuántas veces esperaría usted que cayeran dos caras si usted realiza el experimento 1000 veces?

9 Resumen del capítulo

	¿Qué aprendió?	Explicación/Ejemplos	Ejercicios de repaso
Sección 9.1	Usar notación de sucesión para escribir los términos de sucesiones *(p. 640)*.	$a_n = 7n - 4$; $a_1 = 7(1) - 4 = 3$, $a_2 = 7(2) - 4 = 10$, $a_3 = 7(3) - 4 = 17$, $a_4 = 7(4) - 4 = 24$	1–8
	Usar notación factorial *(p. 642)*.	Si n es un entero positivo, $n! = 1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4 \cdot \cdot \cdot \cdot (n-1) \cdot n$.	9–12
	Usar notación de sigma para escribir sumas *(p. 644)*.	La suma de los primeros n términos de una sucesión representada por $\sum_{i=1}^{n} a_i = a_1 + a_2 + a_3 + a_4 + \cdot \cdot \cdot + a_n$.	13–20
	Encontrar las sumas de series *(p. 645)*.	$\sum_{i=1}^{\infty} \frac{5}{10^i} = \frac{5}{10^1} + \frac{5}{10^2} + \frac{5}{10^3} + \frac{5}{10^4} + \frac{5}{10^5} + \cdot \cdot \cdot$ $= 0.5 + 0.05 + 0.005 + 0.0005 + 0.00005 + \cdot \cdot \cdot$ $= 0.55555 \ldots = \frac{5}{9}$	21, 22
	Usar sucesiones y series para modelar y resolver problemas reales *(p. 646)*.	Puede usarse una sucesión para modelar la población residente de Estados Unidos de 1980 a 2007. (Vea Ejemplo 10.)	23, 24
Sección 9.2	Reconocer, escribir y hallar los n-ésimos términos de sucesiones aritméticas *(p. 651)*.	$a_n = 9n + 5$; $a_1 = 9(1) + 5 = 14$, $a_2 = 9(2) + 5 = 23$, $a_3 = 9(3) + 5 = 32$, $a_4 = 9(4) + 5 = 41$	25–38
	Encontrar las n-ésimas sumas parciales de sucesiones aritméticas *(p. 654)*.	La suma de una sucesión aritmética finita con n términos es $S_n = (n/2)(a_1 + a_n)$.	39–44
	Usar sucesiones aritméticas para modelar y resolver problemas reales *(p. 655)*.	Puede usarse una sucesión aritmética para hallar la cantidad total de un premio otorgado en un torneo de golf. (Vea Ejemplo 8.)	45, 46
Sección 9.3	Reconocer, escribir y hallar los n-ésimos términos de sucesiones geométricas *(p. 661)*.	$a_n = 3(4^n)$; $a_1 = 3(4^1) = 12$, $a_2 = 3(4^2) = 48$, $a_3 = 3(4^3) = 192$, $a_4 = 3(4^4) = 768$	47–58
	Hallar la suma de una sucesión geométrica finita *(p. 664)*.	La suma de la sucesión geométrica finita $a_1, a_1r, a_1r^2, \ldots, a_1r^{n-1}$ con razón común $r \neq 1$ se obtiene con $S_n = \sum_{i=1}^{n} a_1 r^{i-1} = a_1\left(\frac{1 - r^n}{1 - r}\right)$.	59–66
	Hallar la suma de una serie geométrica infinita *(p. 665)*.	Si $\lvert r \rvert < 1$, la serie geométrica infinita $a_1 + a_1r + a_1r^2 + \cdot \cdot \cdot + a_1r^{n-1} + \cdot \cdot \cdot$ tiene la suma $S = \sum_{i=0}^{\infty} a_1 r^i = \frac{a_1}{1 - r}$.	67–70
	Usar sucesiones geométricas para modelar y resolver problemas reales *(p. 666)*.	Se puede usar una sucesión geométrica finita para hallar el saldo en una anualidad al término de dos años. (Vea Ejemplo 8.)	71, 72
Sección 9.4	Usar inducción matemática para demostrar proposiciones que contengan un entero positivo n *(p. 671)*.	Sea P_n una proposición que implica al entero positivo n. Si (1) P_1 es verdadera, y (2) para todo entero positivo k, la verdad de P_k implica la verdad de P_{k+1}, entonces la proposición P_n debe ser verdadera para todos los enteros positivos n.	73–76

	¿Qué aprendió?	Explicación/Ejemplos	Ejercicios de repaso
Sección 9.4	Reconocer patrones y escribir el n-ésimo término de una sucesión *(p. 675)*.	Para hallar una fórmula para el n-ésimo término de una sucesión, (1) calcule los primeros términos de la sucesión, (2) trate de hallar un patrón de los términos y escriba una fórmula (hipótesis) para el n-ésimo término de la sucesión, y (3) use inducción matemática para demostrar su hipótesis.	77–80
	Hallar las sumas de potencias de enteros *(p. 677)*.	$\sum_{i=1}^{8} i^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6} = \frac{8(8+1)(16+1)}{6} = 204$	81, 82
	Hallar diferencias finitas de sucesiones *(p. 678)*.	Las primeras diferencias de una sucesión se encuentra al restar términos consecutivos. Las segundas diferencias se encuentran restando las primeras diferencias consecutivas.	83–86
Sección 9.5	Usar el teorema del binomio para calcular coeficientes binomiales *(p. 681)*.	**El teorema del binomio:** en la expansión de $(x+y)^n = x^n + nx^{n-1}y + \cdots + {}_nC_r x^{n-r}y^r + \cdots + nxy^{n-1} + y^n$, el coeficiente de $x^{n-r}y^r$ es ${}_nC_r = \frac{n!}{(n-r)!r!}$.	87, 88
	Usar el triángulo de Pascal para calcular coeficientes binomiales *(p. 683)*.	Primeros renglones del triángulo de Pascal: 1 1 1 1 2 1 1 3 3 1 1 4 6 4 1	89, 90
	Usar coeficientes binomiales para escribir expansiones binomiales *(p. 684)*.	$(x+1)^3 = x^3 + 3x^2 + 3x + 1$ $(x-1)^4 = x^4 - 4x^3 + 6x^2 - 4x + 1$	91–96
Sección 9.6	Resolver problemas sencillos de conteo *(p. 689)*.	Una computadora genera al azar un entero del 1 al 15. La computadora puede generar un entero que sea divisible entre 3 en 5 formas (3, 6, 9, 12 y 15).	97, 98
	Usar el principio fundamental de conteo para resolver problemas de conteo *(p. 690)*.	**Principio fundamental de conteo:** sean E_1 y E_2 dos eventos. El primer evento E_1 puede ocurrir en m_1 formas diferentes. Después que E_1 ha ocurrido, E_2 puede ocurrir en m_2 formas diferentes. El número de formas en que pueden ocurrir los dos eventos es $m_1 \cdot m_2$.	99, 100
	Usar permutaciones para resolver problemas de conteo *(p. 691)*.	El número de permutaciones de n elementos tomados r a la vez es ${}_nP_r = n!/(n-r)!$.	101, 102
	Usar combinaciones para resolver problemas de conteo *(p. 694)*.	El número de combinaciones de n elementos tomados r a la vez es ${}_nC_r = n!/[(n-r)!r!]$, o ${}_nC_r = {}_nP_r/r!$.	103, 104
Sección 9.7	Encontrar las probabilidades de eventos *(p. 699)*.	Si un evento E tiene $n(E)$ resultados igualmente probables y su espacio muestral S tiene $n(S)$ resultados igualmente probables, la probabilidad del evento E es $P(E) = n(E)/n(S)$.	105, 106
	Hallar las probabilidades de eventos mutuamente excluyentes *(p. 703)*.	Si A y B son eventos del mismo espacio muestral, la probabilidad de que ocurra A o B es $P(A \cup B) = P(A) + (B) - P(A \cap B)$. Si A y B son mutuamente excluyentes, $P(A \cup B) = P(A) + P(B)$.	107, 108
	Hallar las probabilidades de eventos independientes *(p. 705)*.	Si A y B son eventos independientes, la probabilidad que ocurran A y B es $P(A \text{ y } B) = P(A) \cdot P(B)$.	109, 110
	Hallar la probabilidad del complemento de un evento *(p. 706)*.	Sea A un evento y sea A' su complemento. Si la probabilidad de A es $P(A)$, la probabilidad del complemento es $P(A') = 1 - P(A)$.	111, 112

9 EJERCICIOS DE REPASO

En www.CalcChat.com vea las soluciones a los ejercicios impares.

9.1 En los Ejercicios 1-4, escriba los primeros cinco términos de la sucesión. (Suponga que n empieza con 1.)

1. $a_n = 2 + \frac{6}{n}$

2. $a_n = \frac{(-1)^n 5n}{2n - 1}$

3. $a_n = \frac{72}{n!}$

4. $a_n = n(n - 1)$

En los Ejercicios 5-8, escriba una expresión para el n-ésimo término aparente de la sucesión. (Suponga que n empieza con 1.)

5. $-2, 2, -2, 2, -2, \ldots$

6. $-1, 2, 7, 14, 23, \ldots$

7. $4, 2, \frac{4}{3}, 1, \frac{4}{5}, \ldots$

8. $1, -\frac{1}{2}, \frac{1}{3}, -\frac{1}{4}, \frac{1}{5}, \ldots$

En los Ejercicios 9-12, simplifique la expresión factorial.

9. $9!$

10. $4! \cdot 0!$

11. $\frac{3! \cdot 5!}{6!}$

12. $\frac{7! \cdot 6!}{6! \cdot 8!}$

En los Ejercicios 13-18, encuentre la suma.

13. $\sum_{i=1}^{6} 8$

14. $\sum_{k=2}^{5} 4k$

15. $\sum_{j=1}^{4} \frac{6}{j^2}$

16. $\sum_{i=1}^{8} \frac{i}{i + 1}$

17. $\sum_{k=1}^{10} 2k^3$

18. $\sum_{j=0}^{4} (j^2 + 1)$

En los Ejercicios 19 y 20, use notación sigma para escribir la suma.

19. $\frac{1}{2(1)} + \frac{1}{2(2)} + \frac{1}{2(3)} + \cdots + \frac{1}{2(20)}$

20. $\frac{1}{2} + \frac{2}{3} + \frac{3}{4} + \cdots + \frac{9}{10}$

En los Ejercicios 21 y 22, encuentre la suma de la serie infinita.

21. $\sum_{i=1}^{\infty} \frac{4}{10^i}$

22. $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{2}{100^k}$

23. INTERÉS COMPUESTO Se hace un depósito de \$10 000 en una cuenta que gana 8% de interés compuesto mensualmente. El saldo en la cuenta después de n meses está dado por

$$A_n = 10\,000\left(1 + \frac{0.08}{12}\right)^n, \quad n = 1, 2, 3, \ldots$$

(a) Escriba los primeros 10 términos de esta sucesión.

(b) Encuentre el saldo de esta cuenta después de 10 años al hallar el 120avo término de la sucesión.

24. VENTAS DE BILLETES DE LOTERÍA Las ventas totales a_n (en miles de millones de dólares) de billetes de lotería en Estados Unidos, de 1999 a 2007, puede aproximarse con el modelo

$$a_n = 0.02n^2 + 1.8n + 18, \quad n = 9, 10, \ldots, 17$$

donde n es el año, con $n = 9$ correspondiente a 1999. Encuentre los términos de esta sucesión finita. Use una calculadora de gráficas para construir una gráfica de barras que represente la sucesión. (Fuente: TLF Publications, Inc.)

9.2 En los Ejercicios 25-28, determine si la sucesión es aritmética. Si es así, encuentre la diferencia común.

25. $6, -1, -8, -15, -22, \ldots$

26. $0, 1, 3, 6, 10, \ldots$

27. $\frac{1}{2}, 1, \frac{3}{2}, 2, \frac{5}{2}, \ldots$

28. $1, \frac{15}{16}, \frac{7}{8}, \frac{13}{16}, \frac{3}{4}, \ldots$

En los Ejercicios 29-32, escriba los primeros cinco términos de la sucesión aritmética.

29. $a_1 = 3, d = 11$

30. $a_1 = 6, d = -2$

31. $a_1 = 25, a_{k+1} = a_k + 3$

32. $a_1 = 4.2, a_{k+1} = a_k + 0.4$

En los Ejercicios 33-38, encuentra una fórmula para a_n para la sucesión aritmética.

33. $a_1 = 7, d = 12$

34. $a_1 = 28, d = -5$

35. $a_1 = y, d = 3y$

36. $a_1 = -2x, d = x$

37. $a_2 = 93, a_6 = 65$

38. $a_7 = 8, a_{13} = 6$

39. Encuentre la suma de los primeros 100 múltiplos positivos de 7.

40. Encuentre la suma de los enteros de 40 a 90 (inclusive).

En los Ejercicios 41-44, encuentre la suma parcial.

41. $\sum_{j=1}^{10} (2j - 3)$

42. $\sum_{j=1}^{8} (20 - 3j)$

43. $\sum_{k=1}^{11} \left(\frac{2}{3}k + 4\right)$

44. $\sum_{k=1}^{25} \left(\frac{3k + 1}{4}\right)$

45. OFERTA DE TRABAJO El salario inicial para un contador es \$43 800 con un aumento garantizado de salario de \$1950 por año. Determine (a) el salario durante el quinto año y (b) la compensación total en los cinco años de empleo.

46. PACAS DE PAJA En los primeros dos viajes de pacas de paja por un campo de grandes dimensiones, un agricultor obtiene 123 y 112 pacas, respectivamente. Como cada viaje redondo se hace más corto, el agricultor estima que continuará el mismo patrón. Estime el número total de pacas hechas si el agricultor hace otros seis viajes por el campo.

9.3 En los Ejercicios 47-50, determine si la sucesión es geométrica. Si es así, encuentre la razón común.

47. 6, 12, 24, 48, . . .
48. 54, −18, 6, −2, . . .
49. $\frac{1}{5}, -\frac{3}{5}, \frac{9}{5}, -\frac{27}{5}, \ldots$
50. $\frac{1}{4}, \frac{2}{5}, \frac{3}{6}, \frac{4}{7}, \ldots$

En los Ejercicios 51-54, escriba los primeros cinco términos de la sucesión geométrica.

51. $a_1 = 4,\ r = -\frac{1}{4}$
52. $a_1 = 2,\ r = 15$
53. $a_1 = 9,\ a_3 = 4$
54. $a_1 = 2,\ a_3 = 12$

En los Ejercicios 55-58, escriba una expresión para el n-ésimo término de la sucesión geométrica. A continuación, encuentre el décimo término de la sucesión.

55. $a_1 = 18, a_2 = -9$
56. $a_3 = 6, a_4 = 1$
57. $a_1 = 100, r = 1.05$
58. $a_1 = 5, r = 0.2$

En los Ejercicios 59-64, encuentre la suma de la sucesión geométrica finita.

59. $\sum_{i=1}^{7} 2^{i-1}$
60. $\sum_{i=1}^{5} 3^{i-1}$
61. $\sum_{i=1}^{4} \left(\frac{1}{2}\right)^i$
62. $\sum_{i=1}^{6} \left(\frac{1}{3}\right)^{i-1}$
63. $\sum_{i=1}^{5} (2)^{i-1}$
64. $\sum_{i=1}^{4} 6(3)^i$

En los Ejercicios 65-66, use una calculadora de gráficas para hallar la suma de la sucesión geométrica finita.

65. $\sum_{i=1}^{10} 10\left(\frac{3}{5}\right)^{i-1}$
66. $\sum_{i=1}^{15} 20(0.2)^{i-1}$

En los Ejercicios 67-70, encuentre la suma de la serie geométrica infinita.

67. $\sum_{i=1}^{\infty} \left(\frac{7}{8}\right)^{i-1}$
68. $\sum_{i=1}^{\infty} (0.5)^{i-1}$
69. $\sum_{k=1}^{\infty} 4\left(\frac{2}{3}\right)^{k-1}$
70. $\sum_{k=1}^{\infty} 1.3\left(\frac{1}{10}\right)^{k-1}$

71. DEPRECIACIÓN Un fabricante de papel compra una máquina en \$12 0000. Durante los siguientes 5 años, se depreciará a razón de 30% por año. (En otras palabras, al término de cada año el valor depreciado será de 70% de lo que era al principio del año.)

(a) Encuentre la fórmula para el n-ésimo término de una sucesión geométrica que dé el valor t de la máquina 5 años después de comprada.

(b) Encuentre el valor depreciado de la máquina después de 5 años.

72. ANUALIDAD Usted deposita \$800 en una cuenta al iniciarse cada mes, durante 10 años. La cuenta paga 6% capitalizado mensualmente. ¿Cuál será el saldo al término de 10 años? ¿Cuál sería el saldo si el interés se capitalizara continuamente?

9.4 En los Ejercicios 73-76, use inducción matemática para demostrar la fórmula para todo entero positivo n.

73. $3 + 5 + 7 + \cdots + (2n + 1) = n(n + 2)$

74. $1 + \frac{3}{2} + 2 + \frac{5}{2} + \cdots + \frac{1}{2}(n + 1) = \frac{n}{4}(n + 3)$

75. $\sum_{i=0}^{n-1} ar^i = \frac{a(1 - r^n)}{1 - r}$

76. $\sum_{k=0}^{n-1} (a + kd) = \frac{n}{2}[2a + (n - 1)d]$

En los Ejercicios 77-80, encuentre una fórmula para la suma de los primeros n términos de la sucesión.

77. 9, 13, 17, 21, . . .
78. 68, 60, 52, 44, . . .
79. $1, \frac{3}{5}, \frac{9}{25}, \frac{27}{125}, \ldots$
80. $12, -1, \frac{1}{12}, -\frac{1}{144}, \ldots$

En los Ejercicios 81 y 82, encuentre la suma usando las fórmulas para las sumas de potencias de enteros.

81. $\sum_{n=1}^{50} n$
82. $\sum_{n=1}^{6} (n^5 - n^2)$

En los Ejercicios 83-86, escriba los primeros cinco términos de la sucesión empezando con el término dado. A continuación, calcule las diferencias primera y segunda de la sucesión. Diga si la sucesión tiene un modelo lineal, un modelo cuadrático o ninguno de éstos.

83. $a_1 = 5$
$a_n = a_{n-1} + 5$
84. $a_1 = -3$
$a_n = a_{n-1} - 2n$
85. $a_1 = 16$
$a_n = a_{n-1} - 1$
86. $a_0 = 0$
$a_n = n - a_{n-1}$

9.5 En los Ejercicios 87 y 88, use el teorema del binomio para calcular el coeficiente binomial.

87. ${}_6C_4$
88. ${}_{12}C_3$

En los Ejercicios 89 y 90, use el triángulo de Pascal para calcular el coeficiente binomial.

89. $\binom{8}{6}$
90. $\binom{9}{4}$

En los Ejercicios 91-96, use el teorema del binomio para expandir y simplificar la expresión. (Recuerde que $i = \sqrt{-1}$.)

91. $(x + 4)^4$
92. $(x - 3)^6$
93. $(a - 3b)^5$
94. $(3x + y^2)^7$
95. $(5 + 2i)^4$
96. $(4 - 5i)^3$

9.6 **97. NÚMEROS EN UN SOMBRERO** En un sombrero se ponen pequeños trozos de papel numerados del 1 al 14. ¿En cuántas formas se pueden sacar dos números sin restitución que totalicen 12?

98. COMPRAS Un cliente en una tienda de aparatos electrónicos puede escoger uno de seis sistemas de altavoces, uno de cinco reproductores de DVD y uno de seis televisores de plasma para diseñar un sistema de teatro en casa. ¿Cuántos sistemas se pueden diseñar?

99. NÚMEROS TELEFÓNICOS Se usa el mismo prefijo de tres dígitos para todos los números telefónicos en una ciudad pequeña. ¿Cuántos números telefónicos son posibles si se cambian sólo los últimos cuatro dígitos?

100. PROGRAMA DE UN CURSO Un estudiante está preparando un programa de curso para el siguiente semestre. El estudiante puede seleccionar uno de tres cursos de matemáticas, uno de cuatro cursos de ciencias y uno de seis cursos de historia. ¿Cuántos programas son posibles?

101. CARRERA Hay 10 ciclistas que entraron en una carrera. ¿En cuántas formas podrían decidirse los primeros tres lugares?

102. SELECCIÓN DE JURADO Un grupo de potenciales miembros de un jurado se ha reducido a 32 personas. ¿En cuántas formas puede ser seleccionado un jurado de 12 personas?

103. VESTIDOS Usted tiene ocho trajes para hacer un viaje. ¿Cuántas combinaciones de tres trajes puede llevar en su viaje?

104. SELECCIONES DE MENÚ Un restaurante subterráneo ofrece cinco clases de pan, cuatro carnes, tres quesos y seis verduras. Se puede escoger un pan y cualquier número de los otros alimentos. Encuentre el número total de combinaciones posibles de sándwiches.

9.7 **105. VESTIDOS** Un hombre tiene cinco pares de calcetines, de los cuales no hay dos pares del mismo color. Al azar selecciona dos calcetines de un cajón. ¿Cuál es la probabilidad de sacar un par de calcetines iguales?

106. ORDEN DE ESTANTE Un niño devuelve un conjunto de cinco volúmenes de libros a un estante. El niño no sabe leer, de modo que no puede distinguir un volumen de otro. ¿Cuál es la probabilidad de que los libros se coloquen en el orden correcto en el estante?

107. ESTUDIANTES POR GRUPO En una universidad particular, el número de estudiantes en los cuatro grupos se descompone en porcentajes como se muestra en la tabla.

Grupo	Porcentaje
Primer año	31
Segundo año	26
Tercer año	25
Preparatoria	18

Un solo estudiante se escoge al azar por lotería para una beca en efectivo. ¿Cuál es la probabilidad de que el ganador de la beca sea

(a) de tercer año o de preparatoria?

(b) de primer año, de segundo o de tercero?

108. ANÁLISIS DE DATOS A una muestra de estudiantes universitarios, de facultad y de administración, se les pregunta si estuvieron a favor de un aumento propuesto en la cuota anual de actividad para aumentar la estadía en el plantel. Los resultados aparecen en la tabla siguiente.

	Estudiantes	Facultad	Admin.	Total
A favor	237	37	18	292
Se oponen	163	38	7	208
Total	400	75	25	500

Una persona se selecciona al azar de la muestra. Encuentre cada una de las probabilidades especificadas.

(a) La persona no está a favor de la propuesta.

(b) La persona es un estudiante.

(c) La persona es miembro de la facultad y está a favor de la propuesta.

109. TIRAR UN DADO Un dado de seis lados se tira cuatro veces. ¿Cuál es la probabilidad de sacar un 5 en cada tiro?

110. TIRAR UN DADO Un dado de seis lados se tira seis veces. ¿Cuál es la probabilidad de que cada lado aparezca exactamente una vez?

111. SACAR UN NAIPE Al alzar se selecciona una carta de un mazo de 52 cartas. ¿Cuál es la probabilidad de que la carta no sea de bastos?

112. TIRAR UNA MONEDA Encuentre la probabilidad de que salga por lo menos una cruz cuando una moneda se tira al aire cinco veces.

EXPLORACIÓN

¿VERDADERO O FALSO? En los Ejercicios 113-116, determine si la proposición es verdadera o falsa. Justifique su respuesta.

113. $\dfrac{(n+2)!}{n!} = (n+2)(n+1)$

114. $\displaystyle\sum_{i=1}^{5}(i^3+2i) = \sum_{i=1}^{5} i^3 + \sum_{i=1}^{5} 2i$

115. $\displaystyle\sum_{k=1}^{8} 3k = 3\sum_{k=1}^{8} k$ **116.** $\displaystyle\sum_{j=1}^{6} 2^j = \sum_{j=3}^{8} 2^{j-2}$

117. PIÉNSELO Una sucesión infinita es una función. ¿Cuál es su dominio?

118. PIÉNSELO ¿Cómo difieren las dos sucesiones?

(a) $a_n = \dfrac{(-1)^n}{n}$ (b) $a_n = \dfrac{(-1)^{n+1}}{n}$

119. ESCRITURA Explique qué es una fórmula de recursión.

120. ESCRITURA Escriba un breve párrafo que explique cómo identificar la gráfica de una sucesión aritmética y la gráfica de una sucesión geométrica.

9 EXAMEN DEL CAPÍTULO

En www.CalcChat.com vea las soluciones a los ejercicios impares.

Tome este examen como si lo hiciera en clase. Cuando termine, verifique su trabajo contra las respuestas dadas al final del libro.

1. Escriba los primeros cinco términos de la sucesión $a_n = \dfrac{(-1)^n}{3n + 2}$. (Suponga que n empieza con 1.)

2. Escriba una expresión para el n-ésimo término de la sucesión.

$$\frac{3}{1!}, \frac{4}{2!}, \frac{5}{3!}, \frac{6}{4!}, \frac{7}{5!}, \ldots$$

3. Encuentre los siguientes tres términos de la serie. A continuación, encuentre las seis sumas parciales de la serie.

$$8 + 21 + 34 + 47 + \cdots$$

4. El quinto término de una sucesión aritmética es 5.4 y el 12avo es 11.0. Encuentre el n-ésimo término.

5. El segundo término de una sucesión geométrica es 28 y el sexto es 7168. Encuentre el n-ésimo término.

6. Escriba los primeros cinco términos de la sucesión $a_n = 5(2)^{n-1}$. (Suponga que n empieza con 1.)

En los Ejercicios 7-9, encuentre la suma.

7. $\displaystyle\sum_{i=1}^{50} (2i^2 + 5)$ **8.** $\displaystyle\sum_{n=1}^{9} (12n - 7)$ **9.** $\displaystyle\sum_{i=1}^{\infty} 4\left(\frac{1}{2}\right)^i$

10. Use inducción matemática para demostrar la fórmula.

$$5 + 10 + 15 + \cdots + 5n = \frac{5n(n + 1)}{2}$$

11. Use el teorema del binomio para expandir y simplificar (a) $(x + 6y)^4$ y (b) $3(x - 2)^5 + 4(x - 2)^3$.

12. Encuentre el coeficiente del término a^4b^3 en la expansión de $(3a - 2b)^7$.

En los Ejercicios 13 y 14, evalúe cada expresión.

13. (a) ${}_9P_2$ (b) ${}_{70}P_3$

14. (a) ${}_{11}C_4$ (b) ${}_{66}C_4$

15. ¿Cuántas placas para automóviles pueden expedirse formadas por una letra seguida de un número de tres dígitos?

16. Ocho personas van a hacer un viaje de recreo en un bote que tiene capacidad de ocho asientos. Una persona llevará el timón y sólo tres de las personas restantes están dispuestas a viajar en los dos asientos delanteros. ¿Cuántos arreglos de asientos son posibles?

17. Usted asiste a una noche de *karaoke* y esperar oír su canción favorita. El libro de canciones de *karaoke* tiene 300 canciones (la favorita de usted entre ellas). Suponiendo que sea igualmente probable que los cantantes escojan cualquier canción y que ninguna sea repetida, ¿cuál es la probabilidad de que la canción favorita de usted sea una de las 20 que escuche esa noche?

18. Usted está con tres de sus amigos en una fiesta. Los nombres de los 30 invitados se ponen en un sombrero y se sacan en forma aleatoria para dar cuatro premios de puerta (que se dan a la salida). Cada uno de los invitados está limitado a un premio. ¿Cuál es la probabilidad de que usted y sus amigos ganen los cuatro premios?

19. El reporte del clima indica un 90% de probabilidad de nevada. De acuerdo con este reporte, ¿cuál es la probabilidad de que *no* nieve?

En www.CalcChat.com vea las soluciones a los ejercicios impares

9 EXAMEN ACUMULATIVO PARA LOS CAPÍTULOS 7 A 9

Tome este examen como si lo hiciera en clase. Cuando termine, verifique su trabajo contra las respuestas dadas al final del libro.

En los Ejercicios 1-4, resuelva el sistema por el método especificado.

1. Sustitución

$$\begin{cases} y = 3 - x^2 \\ 2(y - 2) = x - 1 \end{cases}$$

2. Eliminación

$$\begin{cases} x + 3y = -6 \\ 2x + 4y = -10 \end{cases}$$

3. Eliminación

$$\begin{cases} -2x + 4y - z = -16 \\ x - 2y + 2z = 5 \\ x - 3y - z = 13 \end{cases}$$

4. Eliminación de Gauss-Jordan

$$\begin{cases} x + 3y - 2z = -7 \\ -2x + y - z = -5 \\ 4x + y + z = 3 \end{cases}$$

En los Ejercicios 5 y 6, trace la gráfica del conjunto de solución del sistema de desigualdades.

5. $\begin{cases} 2x + y \geq -3 \\ x - 3y \leq 2 \end{cases}$

6. $\begin{cases} x - y > 6 \\ 5x + 2y < 10 \end{cases}$

7. Trace la región determinada por las restricciones. A continuación, encuentre los valores mínimo y máximo y dónde ocurren, de la función objetivo $z = 3x + 2y$, sujetos a las restricciones indicadas.

$$\begin{aligned} x + 4y &\leq 20 \\ 2x + y &\leq 12 \\ x &\geq 0 \\ y &\geq 0 \end{aligned}$$

8. Se va a preparar un alimento para pájaros a partir de la mezcla de dos semillas, una que cuesta \$0.75 la libra y otra \$1.25. ¿Cuántas libras de cada semilla se usarán para preparar 200 libras del alimento que cuesta \$0.95 la libra?

9. Encuentre la ecuación de la parábola $y = ax^2 + bx + c$ que pasa por los puntos $(0, 6)$, $(2, 3)$ y $(4, 2)$.

$$\begin{cases} -x + 2y - z = 9 \\ 2x - y + 2z = -9 \\ 3x + 3y - 4z = 7 \end{cases}$$

SISTEMA PARA 10 Y 11

En los Ejercicios 10 y 11, use el sistema de ecuaciones de la izquierda.

10. Escriba la matriz aumentada correspondiente al sistema de ecuaciones.

11. Resuelva el sistema usando la matriz encontrada en el Ejercicio 10 y eliminación de Gauss-Jordan.

En los Ejercicios 12-17, realice las operaciones usando las matrices siguientes.

$$A = \begin{bmatrix} 3 & 0 \\ -1 & 4 \end{bmatrix}, \quad B = \begin{bmatrix} -2 & 5 \\ 0 & -1 \end{bmatrix}$$

12. $A + B$

13. $-8B$

14. $2A - 5B$

15. AB

16. A^2

17. $BA - B^2$

$$\begin{bmatrix} 7 & 1 & 0 \\ -2 & 4 & -1 \\ 3 & 8 & 5 \end{bmatrix}$$

MATRIZ PARA 18

18. Encuentre el determinante de la matriz de la izquierda.

19. Encuentre la inversa de la matriz (si existe): $\begin{bmatrix} 1 & 2 & -1 \\ 3 & 7 & -10 \\ -5 & -7 & -15 \end{bmatrix}$.

		Zapatos para gimnasio	Zapatos para caminar	Zapatos para trotar
grupo de edad	14–17	0.09	0.09	0.03
	18–24	0.06	0.10	0.05
	25–34	0.12	0.25	0.12

MATRIZ PARA 20

20. Los porcentajes (por grupo de edades) de las cantidades totales gastadas en tres tipos de calzado en un año reciente se muestran en la matriz de la izquierda. Las cantidades totales (en millones) gastadas por cada grupo de edad en los tres tipos de calzado fueron \$442.20 (grupo de edad de 14-17), \$466.57 (grupo de edad de 18-24) y \$1088.09 (grupo de edad de 25-34). ¿Cuál es el valor en dólares de zapatos para gimnasio, zapatos para trotar y zapatos para caminar se vendieron ese año? (Fuente: National Sporting Goods Association)

En los Ejercicios 21 y 22, use la regla de Cramer para resolver el sistema de ecuaciones.

21. $\begin{cases} 8x - 3y = -52 \\ 3x + 5y = 5 \end{cases}$

22. $\begin{cases} 5x + 4y + 3z = 7 \\ -3x - 8y + 7z = -9 \\ 7x - 5y - 6z = -53 \end{cases}$

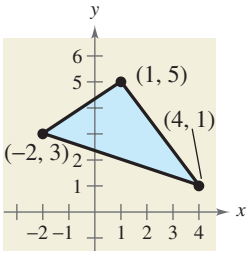


FIGURA PARA EL EJERCICIO 23

23. Encuentre el área del triángulo que se muestra en la figura.

24. Escriba los primeros cinco términos de la sucesión $a_n = \dfrac{(-1)^{n+1}}{2n + 3}$. (Suponga que n empieza con 1.)

25. Escriba una expresión para el n-ésimo término de la sucesión.

$$\frac{2!}{4}, \frac{3!}{5}, \frac{4!}{6}, \frac{5!}{7}, \frac{6!}{8}, \ldots$$

26. Encuentre la suma de los primeros 16 términos de la sucesión aritmética 6, 18, 30, 42, ...

27. El sexto término de una sucesión aritmética es 20.6 y el noveno es 30.2.

(a) Encuentre el 20avo término.

(b) Encuentre el n-ésimo término.

28. Escriba los primeros cinco términos de la sucesión $a_n = 3(2)^{n-1}$. (Suponga que n empieza con 1.)

29. Encuentre la suma: $\displaystyle\sum_{i=0}^{\infty} 1.3\left(\tfrac{1}{10}\right)^{i-1}$.

30. Use inducción matemática para demostrar la fórmula

$$3 + 7 + 11 + 15 + \cdots + (4n - 1) = n(2n + 1).$$

31. Use el teorema del binomio para expandir y simplificar $(w - 9)^4$.

En los Ejercicios 32-35, evalúe la expresión.

32. ${}_{14}P_3$ **33.** ${}_{25}P_2$ **34.** $\binom{8}{4}$ **35.** ${}_{11}C_6$

En los Ejercicios 36 y 37, encuentre el número de permutaciones diferentes del grupo de letras.

36. B, A, S, K, E, T, B, A, L, L **37.** A, N, T, A, R, C, T, I, C, A

38. Un gerente de personal en una tienda de departamentos tiene 10 solicitantes para ocupar tres empleos en ventas. ¿En cuántas formas puede hacerse esto, suponiendo que todos los solicitantes estén capacitados para cualquiera de los tres empleos?

39. En una exhibición de juegos, los dígitos 3, 4 y 5 deben acomodarse en el orden apropiado para formar el premio de un aparato. Si los dígitos son acomodados correctamente, el concursante gana el aparato. ¿Cuál es la probabilidad de ganar si el concursante sabe que el premio es al menos de \$400?

DEMOSTRACIONES EN MATEMÁTICAS

Propiedades de sumas *(p. 645)*

1. $\sum_{i=1}^{n} c = cn$, c es una constante.

2. $\sum_{i=1}^{n} ca_i = c\sum_{i=1}^{n} a_i$, c es una constante.

3. $\sum_{i=1}^{n} (a_i + b_i) = \sum_{i=1}^{n} a_i + \sum_{i=1}^{n} b_i$

4. $\sum_{i=1}^{n} (a_i - b_i) = \sum_{i=1}^{n} a_i - \sum_{i=1}^{n} b_i$

Demostración

Cada una de estas propiedades se deduce directamente de las propiedades de los números reales.

1. $\sum_{i=1}^{n} c = c + c + c + \cdots + c = cn$ n términos

La propiedad distributiva se usa en la demostración de la propiedad 2.

2.
$$\begin{aligned}\sum_{i=1}^{n} ca_i &= ca_1 + ca_2 + ca_3 + \cdots + ca_n \\ &= c(a_1 + a_2 + a_3 + \cdots + a_n) \\ &= c\sum_{i=1}^{n} a_i\end{aligned}$$

La demostración de la propiedad 3 utiliza las propiedades conmutativa y asociativa de la adición.

3.
$$\begin{aligned}\sum_{i=1}^{n} (a_i + b_i) &= (a_1 + b_1) + (a_2 + b_2) + (a_3 + b_3) + \cdots + (a_n + b_n) \\ &= (a_1 + a_2 + a_3 + \cdots + a_n) + (b_1 + b_2 + b_3 + \cdots + b_n) \\ &= \sum_{i=1}^{n} a_i + \sum_{i=1}^{n} b_i\end{aligned}$$

La demostración de la propiedad 4 utiliza las propiedades conmutativa y asociativa de la adición y la propiedad distributiva.

4.
$$\begin{aligned}\sum_{i=1}^{n} (a_i - b_i) &= (a_1 - b_1) + (a_2 - b_2) + (a_3 - b_3) + \cdots + (a_n - b_n) \\ &= (a_1 + a_2 + a_3 + \cdots + a_n) + (-b_1 - b_2 - b_3 - \cdots - b_n) \\ &= (a_1 + a_2 + a_3 + \cdots + a_n) - (b_1 + b_2 + b_3 + \cdots + b_n) \\ &= \sum_{i=1}^{n} a_i - \sum_{i=1}^{n} b_i\end{aligned}$$

Series infinitas

El estudio de series infinitas fue considerado una novedad en el siglo XIV. Richard Suiseth, experto en lógica, cuyo apodo era *Calculator*, resolvió este problema.

Si durante la primera mitad de un tiempo determinado continúa una variación a cierta intensidad y en todo el siguiente cuarto de intervalo al doble de la intensidad y en todo el siguiente octavo de intervalo al triple de intensidad y así, hasta el infinito, el promedio de intensidad para todo el intervalo será la intensidad de la variación durante el segundo subintervalo (o el doble de la intensidad).

Esto es lo mismo que decir que la suma de la serie infinita

$$\frac{1}{2} + \frac{2}{4} + \frac{3}{8} + \cdots + \frac{n}{2^n} + \cdots$$

es 2.

Suma de una sucesión aritmética finita *(p. 654)*

La suma de una sucesión aritmética finita con n términos es

$$S_n = \frac{n}{2}(a_1 + a_n).$$

Demostración

Empiece por generar los términos de la sucesión aritmética en dos formas. En la primera forma, repetidamente sume d al primer término para obtener

$$\begin{aligned} S_n &= a_1 + a_2 + a_3 + \cdots + a_{n-2} + a_{n-1} + a_n \\ &= a_1 + [a_1 + d] + [a_1 + 2d] + \cdots + [a_1 + (n-1)d]. \end{aligned}$$

En la segunda forma, repetidamente reste d del n-ésimo término para obtener

$$\begin{aligned} S_n &= a_n + a_{n-1} + a_{n-2} + \cdots + a_3 + a_2 + a_1 \\ &= a_n + [a_n - d] + [a_n - 2d] + \cdots + [a_n - (n-1)d]. \end{aligned}$$

Si se suman estas dos versiones de S_n, los múltiplos de d se restan y se obtiene

$$2S_n = (a_1 + a_n) + (a_1 + a_n) + (a_1 + a_n) + \cdots + (a_1 + a_n) \qquad n \text{ términos}$$

$$2S_n = n(a_1 + a_n)$$

$$S_n = \frac{n}{2}(a_1 + a_n).$$

Suma de una sucesión geométrica finita *(p. 664)*

La suma de la sucesión geométrica finita

$$a_1,\ a_1r,\ a_1r^2,\ a_1r^3,\ a_1r^4,\ \ldots,\ a_1r^{n-1}$$

con razón común $r \neq 1$ está dada por $S_n = \sum_{i=1}^{n} a_1 r^{i-1} = a_1\left(\frac{1 - r^n}{1 - r}\right)$.

Demostración

$$S_n = a_1 + a_1r + a_1r^2 + \cdots + a_1r^{n-2} + a_1r^{n-1}$$

$$rS_n = a_1r + a_1r^2 + a_1r^3 + \cdots + a_1r^{n-1} + a_1r^n \qquad \text{Multiplicar por } r.$$

Restando la segunda ecuación de la primera tendremos

$$S_n - rS_n = a_1 - a_1r^n.$$

Por tanto, $S_n(1 - r) = a_1(1 - r^n)$, y como $r \neq 1$, tendremos $S_n = a_1\left(\frac{1 - r^n}{1 - r}\right)$.

Teorema del binomio *(p. 681)*

En la expansión de $(x + y)^n$

$$(x + y)^n = x^n + nx^{n-1}y + \cdots + {}_nC_r\, x^{n-r}y^r + \cdots + nxy^{n-1} + y^n$$

el coeficiente de $x^{n-r}y^r$ es

$${}_nC_r = \frac{n!}{(n-r)!r!}.$$

Demostración

El teorema del binomio se puede demostrar exactamente usando inducción matemática. Los pasos son fáciles pero se ven un tanto desordenados, de manera que aquí presentamos sólo un perfil de la demostración.

1. Si $n = 1$, tenemos $(x + y)^1 = x^1 + y^1 = {}_1C_0x + {}_1C_1y$, y la fórmula es válida.

2. Suponiendo que la fórmula sea verdadera para $n = k$, el coeficiente de $x^{k-r}y^r$ es

$${}_kC_r = \frac{k!}{(k-r)!r!} = \frac{k(k-1)(k-2)\cdot\cdots\cdot(k-r+1)}{r!}.$$

Para demostrar que la fórmula es verdadera para $n = k + 1$, vea el coeficiente de $x^{k+1-r}y^r$ en la expansión de

$$(x + y)^{k+1} = (x + y)^k(x + y).$$

Del lado derecho se puede determinar que el término que contiene $x^{k+1-r}y^r$ es la suma de dos productos.

$$\begin{aligned}
({}_kC_r x^{k-r}y^r)(x) + ({}_kC_{r-1}x^{k+1-r}y^{r-1})(y) &= \left[\frac{k!}{(k-r)!r!} + \frac{k!}{(k+1-r)!(r-1)!}\right]x^{k+1-r}y^r \\
&= \left[\frac{(k+1-r)k!}{(k+1-r)!r!} + \frac{k!r}{(k+1-r)!r!}\right]x^{k+1-r}y^r \\
&= \left[\frac{k!(k+1-r+r)}{(k+1-r)!r!}\right]x^{k+1-r}y^r \\
&= \left[\frac{(k+1)!}{(k+1-r)!r!}\right]x^{k+1-r}y^r \\
&= {}_{k+1}C_r x^{k+1-r}y^r
\end{aligned}$$

En consecuencia, por inducción matemática, el teorema del binomio es válido para todos los enteros positivos n.

RESOLUCIÓN DE PROBLEMAS

Este conjunto de ejercicios, difíciles y que invitan a meditar, amplía y explora más a fondo los conceptos aprendidos en este capítulo.

1. Sea $x_0 = 1$ y considere la sucesión x_n dada por

$$x_n = \frac{1}{2}x_{n-1} + \frac{1}{x_{n-1}}, \quad n = 1, 2, \ldots$$

Use una calculadora de gráficas para calcular los primeros 10 términos de la sucesión y haga una conjetura acerca del valor de x_n cuando n tiende al infinito.

2. Considere la sucesión

$$a_n = \frac{n + 1}{n^2 + 1}.$$

(a) Use una calculadora de gráficas para graficar los primeros 10 términos de la sucesión.

(b) Use la gráfica del inciso (a) para estimar el valor de a_n cuando n tiende al infinito.

(c) Complete la tabla.

n	1	10	100	1000	10 000
a_n					

(d) Use la tabla del inciso (c) para determinar (si es posible) el valor de a_n cuando n tiende al infinito.

3. Considere la sucesión

$$a_n = 3 + (-1)^n.$$

(a) Use una calculadora de gráficas para graficar los primeros 10 términos de la sucesión.

(b) Use la gráfica del inciso (a) para describir el comportamiento de la gráfica de la sucesión.

(c) Complete la tabla.

n	1	10	101	1000	10 001
a_n					

(d) Use la tabla del inciso (c) para determinar (si es posible) el valor de a_n cuando n tiende al infinito.

4. Las siguientes operaciones son realizadas en cada término de una sucesión aritmética. Determine si la sucesión resultante es aritmética y, si es así, exprese la diferencia común.

(a) Una constante C se suma a cada término.

(b) Cada término se multiplica por una constante C diferente de cero

(c) Cada término se eleva al cuadrado.

5. La siguiente sucesión de cuadrados perfectos no es aritmética.

1, 4, 9, 16, 25, 36, 49, 64, 81, . . .

No obstante, se puede formar una sucesión relacionada que es aritmética al hallar las diferencias de términos consecutivos.

(a) Escriba los primeros ocho términos de la sucesión aritmética relacionada y descrita líneas antes. ¿Cuál es el n-ésimo término de esta sucesión?

(b) Describa la forma en que se pueda hallar una sucesión aritmética que esté relacionada con la siguiente sucesión de cubos perfectos.

1, 8, 27, 64, 125, 216, 343, 512, 729, . . .

(c) Escriba los primeros siete términos de la sucesión relacionada en el inciso (b) y encuentre el n-ésimo término de la sucesión.

(d) Describa la forma en que se pueda hallar la sucesión aritmética que esté relacionada con la siguiente sucesión de cuartas potencias perfectas.

1, 16, 81, 256, 625, 1296, 2401, 4096, 6561, . . .

(e) Escriba los primeros seis términos de la sucesión relacionada en el inciso (d) y encuentre el n-ésimo término de la sucesión.

6. El héroe griego Aquiles, corriendo a 20 pies por segundo, ¿puede alguna vez atrapar una tortuga que arranca a 20 pies delante de él y corre a 10 pies por segundo? El matemático griego Zenón dijo que no. Cuando Aquiles corre 20 pies, la tortuga estará 10 pies adelante. Entonces, cuando Aquiles corre 10 pies, la tortuga estará 5 pies adelante. Aquiles seguirá acortando la distancia a la mitad pero nunca atrapará la tortuga. La tabla siguiente muestra el razonamiento de Zenón. De la tabla se puede ver que las distancias y los tiempos requeridos para lograrlos forman series geométricas infinitas. Usando la tabla, demuestre que ambas series tienen sumas infinitas. ¿Qué representan estas sumas?

Distancia (en pies)	Tiempo (en segundos)
20	1
10	0.5
5	0.25
2.5	0.125
1.25	0.0625
0.625	0.03125

7. Recuerde que un *fractal* es una figura geométrica que consta de un patrón que se repita infinitamente en una escala cada vez menor. Un bien conocido fractal se denomina *triángulo de Sierpinski*. En la primera etapa, los puntos medios de los tres lados se usan para crear los vértices de un nuevo triángulo, que entonces se elimina, dejando tres triángulos. Las primeras tres etapas se muestran en la página siguiente. Observe que cada triángulo restante es semejante al triángulo original. Suponga que la longitud de cada lado del triángulo original es una unidad.

Escriba una fórmula que describa la longitud del lado de los triángulos que se han de generar en la n-ésima etapa. Escriba una fórmula para el área de los triángulos que serán generados en la n-ésima etapa.

FIGURA PARA EJERCICIO 7

8. Se puede definir una sucesión usando una fórmula por partes. Lo que sigue es un ejemplo de una sucesión definida por partes.

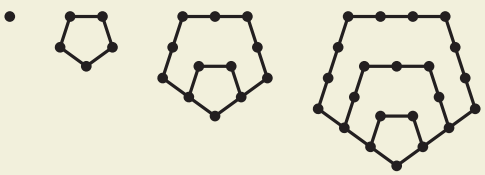
$$a_1 = 7,\ a_n = \begin{cases} \dfrac{a_{n-1}}{2}, & \text{si } a_{n-1} \text{ es par} \\ 3a_{n-1} + 1, & \text{si } a_{n-1} \text{ es impar} \end{cases}$$

(a) Escriba los primeros 20 términos de la sucesión.

(b) Encuentre los primeros 10 términos de las sucesiones para los cuales $a_1 = 4$, $a_1 = 5$ y $a_1 = 12$ (usando a_n como se define líneas antes). ¿A qué conclusión se puede llegar acerca del comportamiento de cada una de las sucesiones?

9. Los números 1, 5, 12, 22, 35, 51, . . . se denominan números pentagonales porque representan los números de puntos empleados para hacer pentágonos, como se ve a continuación. Use inducción matemática para demostrar que el n-ésimo número pentagonal P_n está dado por

$$P_n = \frac{n(3n - 1)}{2}.$$



10. ¿Qué conclusiones se pueden sacar de la siguiente información acerca de la sucesión de las proposiciones P_n?

(a) P_3 es verdadera y P_k implica que P_{k+1}.

(b) $P_1, P_2, P_3, \ldots, P_{50}$ son todas verdaderas.

(c) P_1, P_2 y P_3 son todas verdaderas, pero la verdad de P_k no implica que P_{k+1} sea verdadera.

(d) P_2 es verdadera y P_{2k} implica P_{2k+2}.

11. Sea $f_1, f_2, \ldots, f_n, \ldots$ la sucesión de Fibonacci.

(a) Use inducción matemática para demostrar que

$$f_1 + f_2 + \cdots + f_n = f_{n+2} - 1.$$

(b) Encuentre la suma de los primeros 20 términos de la sucesión de Fibonacci.

12. Las posibilidades a favor de que ocurra un evento son la razón entre la probabilidad de que el evento ocurra y la probabilidad de que el evento no ocurra. El recíproco de esta probabilidad representa las posibilidades en contra de que el evento ocurra.

(a) Seis de las canicas en una bolsa son rojas. Las posibilidades contra escoger una canica roja son 4 a 1. ¿Cuántas canicas hay en la bolsa?

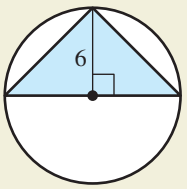
(b) Una bolsa contiene tres canicas azules y siete amarillas. ¿Cuáles son las posibilidades a favor de escoger una canica azul? ¿Cuáles son las posibilidades contra escoger una canica azul?

(c) Escriba una fórmula para convertir las posibilidades a favor de un evento a la probabilidad del evento.

(d) Escriba una fórmula para convertir la posibilidad de un evento a las probabilidades a favor del evento.

13. Usted está resolviendo un examen que contiene sólo preguntas de opción múltiple (hay cinco opciones para cada pregunta). Usted está en la última pregunta y sabe que la respuesta no es B o D, pero no está seguro acerca de las respuestas A, C y E. ¿Cuál es la probabilidad de que obtenga la respuesta correcta si trata de adivinar?

14. Se lanza un dardo al blanco circular que se muestra a continuación. Es igualmente probable que el dardo acierte en cualquier punto dentro del blanco. ¿Cuál es la probabilidad de que acierte en la región fuera del triángulo?



15. Un evento A tiene n posibles resultados, que tienen los valores $x_1, x_2, \ldots, x_n$. Las probabilidades de que ocurran n resultados son $p_1, p_2, \ldots, p_n$. El **valor esperado** V de un evento A es la suma de los productos de las probabilidades de los resultados y sus valores,

$$V = p_1x_1 + p_2x_2 + \cdots + p_nx_n.$$

(a) Para ganar en la California's Super Lotto Plus es necesario igualar cinco números escogidos de entre los números 1 al 47, más un Mega número escogido de entre los números 1 al 27. Usted compra un billete en \$1. Si el premio mayor para el siguiente saque es \$12 000 000, ¿cuál es el valor esperado del billete?

(b) Usted está jugando a los dados y necesita tener una puntuación de 60 para ganar. En cada turno, tira dos dados de seis lados. Su puntuación para el turno es 0 si los dados no muestran el mismo número, y el producto de los números en los dados si muestran el mismo número. ¿Cuál es el valor esperado de cada turno? ¿Cuántos turnos serán necesarios en promedio para alcanzar 60 puntos?

10 Temas de geometría analítica

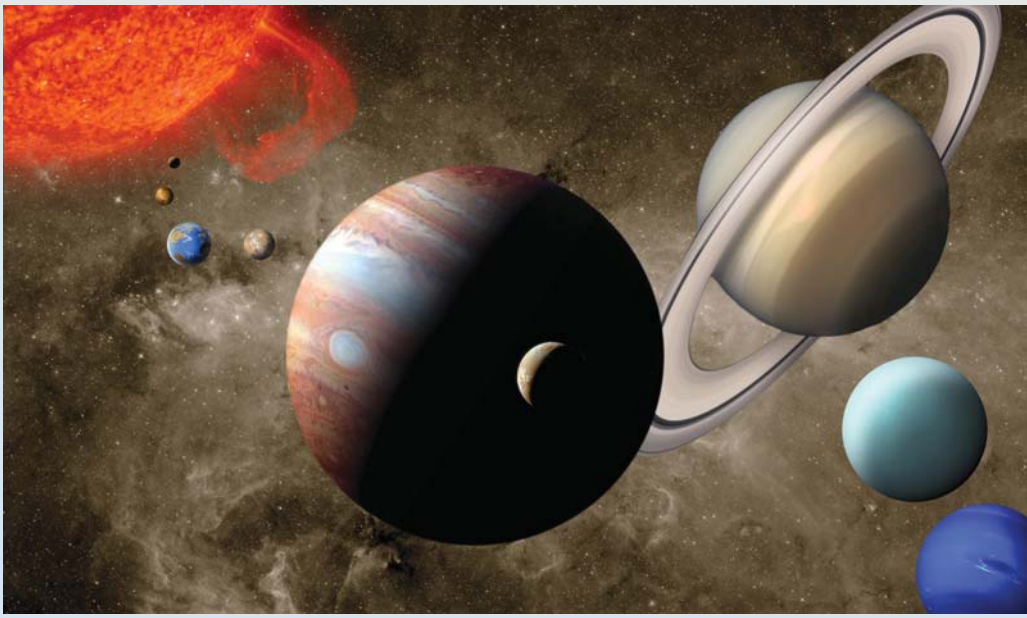
10.1 Rectas
10.2 Introducción a las cónicas: parábolas
10.3 Elipses
10.4 Hipérbolas
10.5 Rotación de cónicas
10.6 Ecuaciones paramétricas
10.7 Coordenadas polares
10.8 Gráficas de ecuaciones polares
10.9 Ecuaciones polares de cónicas

En matemáticas

Una cónica es un conjunto de puntos que satisface una propiedad geométrica.

En la vida real

Se usan cónicas como modelos de construcción, órbitas planetarias, radionavegación y movimiento de proyectiles. Por ejemplo, se pueden usar cónicas para modelar las órbitas de los planetas al moverse alrededor del Sol. Con el uso de las técnicas presentadas en este capítulo, se pueden determinar las distancias entre los planetas y el centro del Sol. (Vea Ejercicios 55-62, página 796.)



Mike Agliolo/Photo Researchers, Inc.

EN CARRERAS

Hay numerosas carreras que usan cónicas y otros temas de geometría analítica. A continuación se indican algunas de ellas.

- Contratista de viviendas
  Ejercicio 69, página 732
- Ingeniero civil
  Ejercicios 73 y 74, página 740
- Escultor
  Ejercicio 51, página 759
- Astrónomo
  Ejercicios 63 y 64, página 796

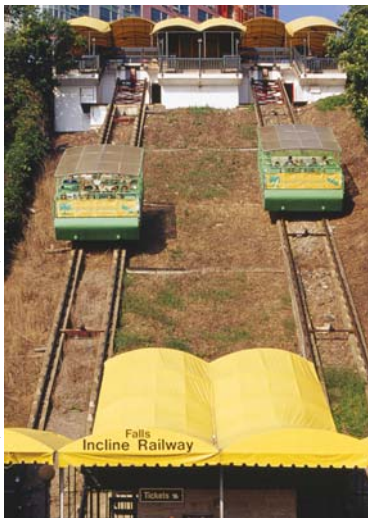
10.1 RECTAS

Lo que debe aprender

- Hallar la inclinación de una recta.
- Hallar el ángulo entre dos rectas.
- Hallar la distancia entre un punto y una recta.

Por qué debe aprenderlo

La inclinación de una recta se puede usar para medir alturas de manera indirecta. Por ejemplo, en el Ejercicio 70 de la página 732 la inclinación de una recta se puede usar para determinar el cambio de elevación desde la base hasta lo alto del ferrocarril inclinado de las cataratas del Niágara, en Ontario, Canadá.



JTB Photo/Japan Travel Bureau/PhotoLibrary

Inclinación de una recta

En la sección 1.3 el lector aprendió que la gráfica de la ecuación lineal

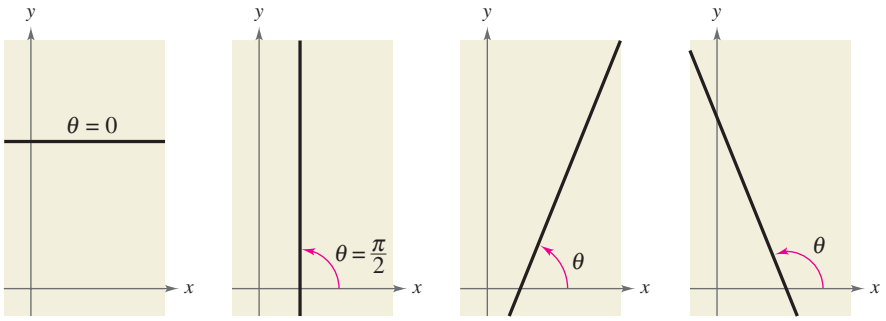
$$y = mx + b$$

es una recta no vertical con pendiente m e intersección con el eje y en $(0, b)$. Ahí, la pendiente de una recta se describió como la cantidad de cambio en y respecto a x. En esta sección veremos la pendiente de una recta en términos del ángulo de inclinación de ésta.

Toda recta no horizontal debe cortar el eje x. El ángulo formado por esa intersección determina la inclinación de la recta, como se especifica en la definición siguiente.

Definición de inclinación

La inclinación de una recta no horizontal es el ángulo positivo θ (menor a π) medido en sentido contrario al giro de las manecillas de un reloj desde el eje x a la recta. (Vea Figura 10.1.)



Recta horizontal | Recta vertical | Ángulo agudo | Ángulo obtuso

FIGURA 10.1

La inclinación de la recta está relacionada con su pendiente en la forma siguiente.

Inclinación y pendiente

Si una recta no vertical tiene inclinación θ y pendiente m, entonces

$$m = \tan\theta.$$

Para una demostración de esta relación entre inclinación y pendiente, vea la página 804.

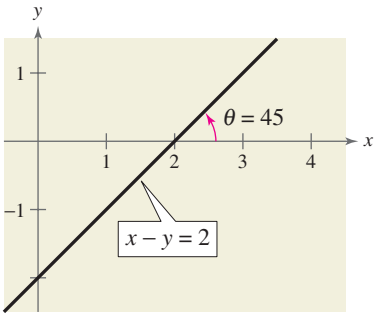


FIGURA 10.2

Ejemplo 1 Hallar la inclinación de una recta

Encuentre la inclinación de la recta $x - y = 2$.

Solución

La pendiente de esta recta es $m = 1$. Por tanto, su inclinación se determina de la ecuación

$$\tan \theta = 1.$$

De la Figura 10.2, se deduce que $0 < \theta < \dfrac{\pi}{2}$. Esto significa que

$$\theta = \arctan 1$$
$$= \frac{\pi}{4}.$$

El ángulo de inclinación es $\dfrac{\pi}{4}$ radianes, o sea 45°.

PUNTO *de repaso* Ahora trate de hacer el Ejercicio 27.

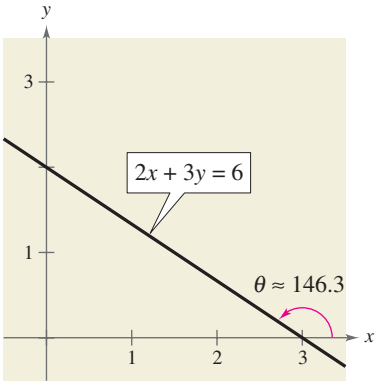


FIGURA 10.3

Ejemplo 2 Hallar la inclinación de una recta

Encuentre la inclinación de la recta $2x + 3y = 6$.

Solución

La pendiente de esta recta es $m = -\frac{2}{3}$. En consecuencia, su inclinación está determinada por la ecuación

$$\tan \theta = -\frac{2}{3}.$$

De la Figura 10.3, se deduce que $\dfrac{\pi}{2} < \theta < \pi$. Esto significa que

$$\theta = \pi + \arctan\left(-\frac{2}{3}\right)$$
$$\approx \pi + (-0.588)$$
$$= \pi - 0.588$$
$$\approx 2.554.$$

El ángulo de inclinación es alrededor de 2.554 radianes, o sea 146.3°.

PUNTO *de repaso* Ahora trate de hacer el Ejercicio 33.

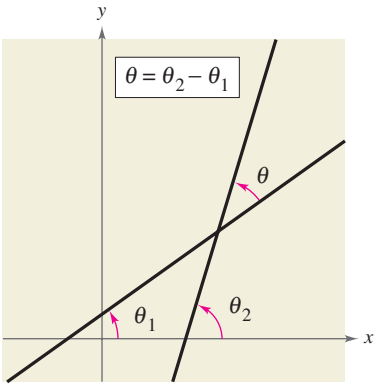


FIGURA 10.4

El ángulo entre dos rectas

Dos rectas diferentes en un plano son paralelas o se cruzan. Si se cruzan y son no perpendiculares, su intersección forma dos pares de ángulos opuestos. Un par es agudo y el otro par es obtuso. El menor de estos ángulos recibe el nombre de **ángulo entre dos rectas**. Como se ve en la Figura 10.4, se pueden usar las inclinaciones de las dos rectas para hallar el ángulo entre éstas. Si dos rectas tienen inclinaciones θ_1 y θ_2, donde $\theta_1 < \theta_2$ y $\theta_2 - \theta_1 < \pi/2$, el ángulo entre las dos rectas es

$$\theta = \theta_2 - \theta_1.$$

Se puede usar la fórmula para la tangente de la diferencia de dos ángulos

$$\tan\theta = \tan(\theta_2 - \theta_1)$$
$$= \frac{\tan\theta_2 - \tan\theta_1}{1 + \tan\theta_1 \tan\theta_2}$$

para obtener la fórmula para el ángulo entre dos rectas..

Ángulo entre dos rectas

Si dos rectas no perpendiculares tienen pendientes m_1 y m_2, el ángulo entre ellas es

$$\tan\theta = \left|\frac{m_2 - m_1}{1 + m_1 m_2}\right|.$$

Ejemplo 3 Hallar el ángulo entre dos rectas

Encuentre el ángulo entre las dos rectas.

Recta 1: $2x - y - 4 = 0$ *Recta 2:* $3x + 4y - 12 = 0$

Solución

Las dos rectas tienen pendientes de $m_1 = 2$ y $m_2 = -\frac{3}{4}$, respectivamente. Por tanto, la tangente del ángulo entre ellas es

$$\tan\theta = \left|\frac{m_2 - m_1}{1 + m_1 m_2}\right| = \left|\frac{(-3/4) - 2}{1 + (2)(-3/4)}\right| = \left|\frac{-11/4}{-2/4}\right| = \frac{11}{2}.$$

Por último, se puede concluir que el ángulo es

$$\theta = \arctan\frac{11}{2} \approx 1.391 \text{ radianes} \approx 79.70°$$

como se ve en la Figura 10.5.

PUNTO *de repaso* Ahora trate de hacer el Ejercicio 41.

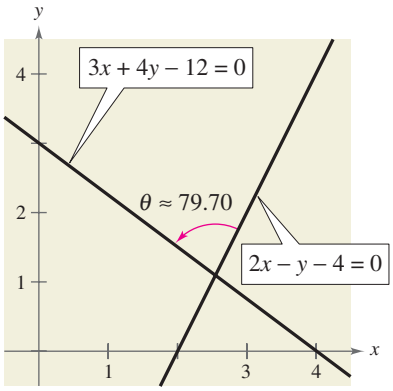


FIGURA 10.5

Distancia entre un punto y una recta

Hallar la distancia entre una recta y un punto que no está en la recta es una aplicación de rectas perpendiculares. Esta distancia se define como la longitud del segmento de recta perpendicular que enlaza el punto y la recta, como se muestra en la Figura 10.6.

Distancia entre un punto y una recta

La distancia entre el punto (x_1, y_1) y la recta $Ax + By + C = 0$ es

$$d = \frac{|Ax_1 + By_1 + C|}{\sqrt{A^2 + B^2}}.$$

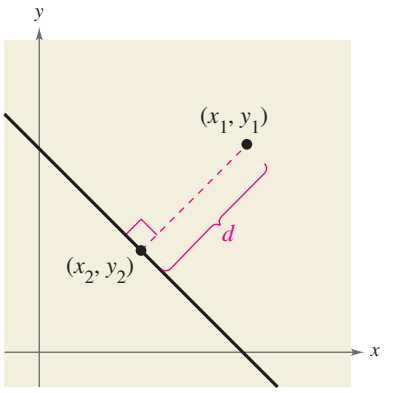


FIGURA 10.6

Recuerde que los valores de A, B y C en esta fórmula de la distancia corresponden a la ecuación general de una recta, $Ax + By + C = 0$. Para una demostración de esta fórmula para la distancia entre un punto y una recta, vea la página 804.

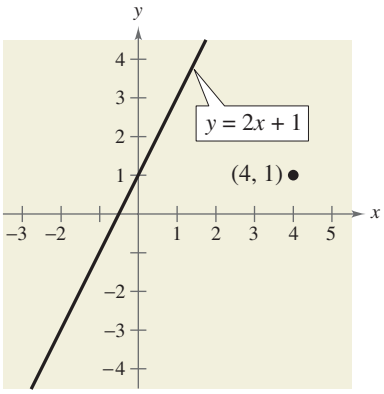


FIGURA 10.7

Ejemplo 4 Hallar la distancia entre un punto y una recta

Encuentre la distancia entre el punto (4,1) y la recta $y = 2x + 1$.

Solución

La forma general de la ecuación es $-2x + y - 1 = 0$. Entonces, la distancia entre el punto y la recta es

$$d = \frac{|-2(4) + 1(1) + (-1)|}{\sqrt{(-2)^2 + 1^2}} = \frac{8}{\sqrt{5}} \approx 3.58 \text{ unidades.}$$

La recta y el punto se muestran en la Figura 10.7.

PUNTO *de repaso* Ahora trate de hacer el Ejercicio 53.

Ejemplo 5 Una aplicación de dos fórmulas de la distancia

La Figura 10.8 muestra un triángulo con vértices $A(-3, 0)$, $B(0, 4)$ y $C(5, 2)$.

a. Encuentre la altura h del vértice B al lado AC.

b. Encuentre el área del triángulo

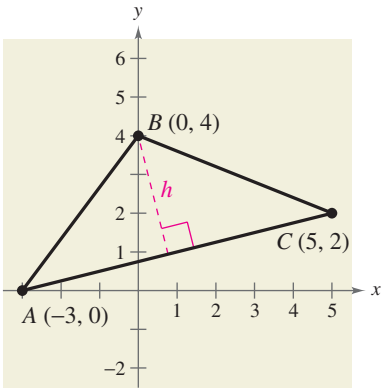


FIGURA 10.8

Solución

a. Para determinar la altura, use la fórmula para la distancia entre la recta AC y el punto (0, 4). La ecuación de la recta AC se obtiene como sigue.

$$\textit{Pendiente: } m = \frac{2 - 0}{5 - (-3)} = \frac{2}{8} = \frac{1}{4}$$

$$\textit{Ecuación: } \quad y - 0 = \frac{1}{4}(x + 3) \qquad \text{Forma punto-pendiente}$$

$$4y = x + 3 \qquad \text{Multiplicar cada lado por 4.}$$

$$x - 4y + 3 = 0 \qquad \text{Forma general}$$

Por tanto, la distancia entre esta recta y el punto (0, 4) es

$$\text{Altura} = h = \frac{|1(0) + (-4)(4) + 3|}{\sqrt{1^2 + (-4)^2}} = \frac{13}{\sqrt{17}} \text{ unidades}$$

b. Usando la fórmula para la distancia entre dos puntos se puede hallar que la longitud de la base AC es

$$b = \sqrt{[5 - (-3)]^2 + (2 - 0)^2} \qquad \text{Fórmula de la distancia}$$

$$= \sqrt{8^2 + 2^2} \qquad \text{Simplificar.}$$

$$= 2\sqrt{17} \text{ unidades} \qquad \text{Simplificar.}$$

Finalmente, el área del triángulo de la Figura 10.8 es

$$A = \frac{1}{2}bh \qquad \text{Fórmula para el área de un triángulo}$$

$$= \frac{1}{2}\left(2\sqrt{17}\right)\left(\frac{13}{\sqrt{17}}\right) \qquad \text{Sustituir por } b \text{ y } h.$$

$$= 13 \text{ unidades cuadradas.} \qquad \text{Simplificar.}$$

PUNTO *de repaso* Ahora trate de hacer el Ejercicio 59.

10.1 EJERCICIOS

En www.CalcChat.com vea las soluciones a los ejercicios impares.

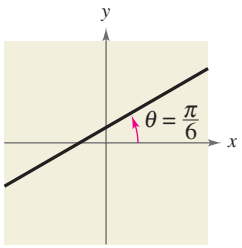
VOCABULARIO: Llene los espacios en blanco

1. La _____ de una recta no horizontal es el ángulo positivo θ (menor a π) medido en el sentido contrario al giro de las manecillas de un reloj del eje x a la recta.
2. Si una recta no vertical tiene inclinación θ y pendiente m, entonces $m =$ ____.
3. Si dos rectas no perpendiculares tienen pendientes m_1 y m_2, el ángulo entre ellas es $\tan\theta =$ _____.
4. La distancia entre el punto (x_1, y_1) y la recta $Ax + By + C = 0$ se obtiene con $d =$ _____.

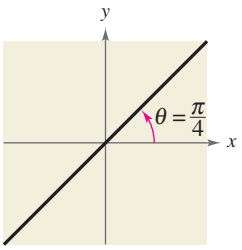
HABILIDADES Y APLICACIONES

En los Ejercicios 5-12, encuentre la pendiente de la recta con inclinación θ.

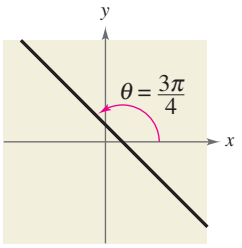
5.



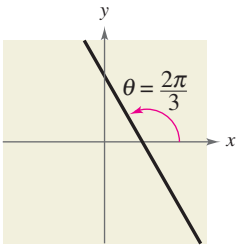
6.



7.



8.



9. $\theta = \dfrac{\pi}{3}$ radianes

10. $\theta = \dfrac{5\pi}{6}$ radianes

11. $\theta = 1.27$ radianes

12. $\theta = 2.88$ radianes

En los Ejercicios 13-18, encuentre la inclinación θ (en radianes y grados) de la recta con pendiente m.

13. $m = -1$

14. $m = -2$

15. $m = 1$

16. $m = 2$

17. $m = \frac{3}{4}$

18. $m = -\frac{5}{2}$

En los Ejercicios 19-26, encuentre la inclinación θ (en radianes y grados) de la recta que pasa por los puntos.

19. $(\sqrt{3}, 2), (0, 1)$

20. $(1, 2\sqrt{3}), (0, \sqrt{3})$

21. $(-\sqrt{3}, -1), (0, -2)$

22. $(3, \sqrt{3}), (6, -2\sqrt{3})$

23. $(6, 1), (10, 8)$

24. $(12, 8), (-4, -3)$

25. $(-2, 20), (10, 0)$

26. $(0, 100), (50, 0)$

En los Ejercicios 27-36, encuentre la inclinación θ (en radianes y grados) de la recta.

27. $2x + 2y - 5 = 0$

28. $x - \sqrt{3}y + 1 = 0$

29. $3x - 3y + 1 = 0$

30. $\sqrt{3}x - y + 2 = 0$

31. $x + \sqrt{3}y + 2 = 0$

32. $-2\sqrt{3}x - 2y = 0$

33. $6x - 2y + 8 = 0$

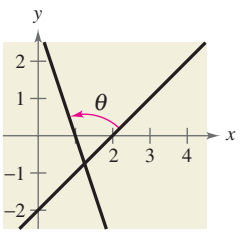
34. $4x + 5y - 9 = 0$

35. $5x + 3y = 0$

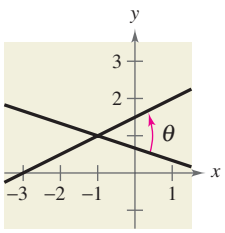
36. $2x - 6y - 12 = 0$

En los Ejercicios 37-46, encuentre el ángulo θ (en radianes y grados) entre las rectas.

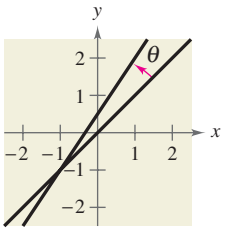
37. $3x + y = 3$
$x - y = 2$



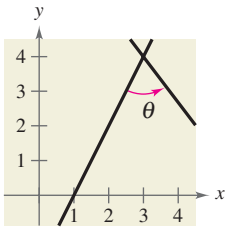
38. $x + 3y = 2$
$x - 2y = -3$



39. $x - y = 0$
$3x - 2y = -1$



40. $2x - y = 2$
$4x + 3y = 24$



41. $x - 2y = 7$
$6x + 2y = 5$

42. $5x + 2y = 16$
$3x - 5y = -1$

43. $x + 2y = 8$
$x - 2y = 2$

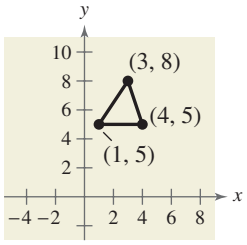
44. $3x - 5y = 3$
$3x + 5y = 12$

45. $0.05x - 0.03y = 0.21$
$0.07x + 0.02y = 0.16$

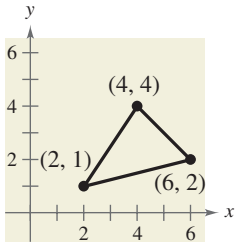
46. $0.02x - 0.05y = -0.19$
$0.03x + 0.04y = 0.52$

MEDIDAS DE ÁNGULOS En los Ejercicios 47-50, encuentre la pendiente de cada lado del triángulo y úsela para hallar las medidas de los ángulos interiores.

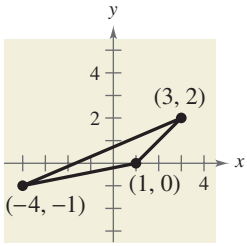
47.



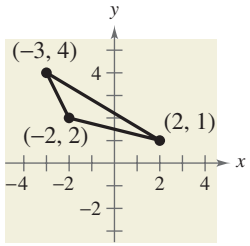
48.



49.



50.



En los Ejercicios 51-58, encuentre la distancia entre el punto y la recta.

	Punto	*Recta*
51.	$(0, 0)$	$4x + 3y = 0$
52.	$(0, 0)$	$2x - y = 4$
53.	$(2, 3)$	$3x + y = 1$
54.	$(-2, 1)$	$x - y = 2$
55.	$(6, 2)$	$x + 1 = 0$
56.	$(2, 1)$	$-2x + y - 2 = 0$
57.	$(0, 8)$	$6x - y = 0$
58.	$(4, 2)$	$x - y = 20$

En los Ejercicios 59-62, los puntos representan los vértices de un triángulo. (a) Trace el triángulo ABC en el plano de coordenadas, (b) encuentre la altura del vértice B del triángulo al lado AC y (c) encuentre el área del triángulo.

59. $A = (0, 0), B = (1, 4), C = (4, 0)$

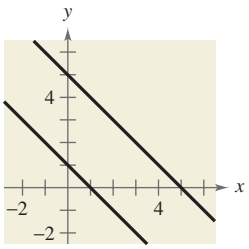
60. $A = (0, 0), B = (4, 5), C = (5, -2)$

61. $A = \left(-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right), B = (2, 3), C = \left(\frac{5}{2}, 0\right)$

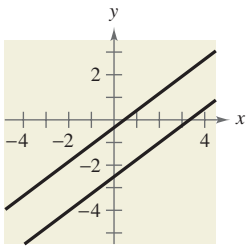
62. $A = (-4, -5), B = (3, 10), C = (6, 12)$

En los Ejercicios 63 y 64, encuentre la distancia entre las rectas paralelas.

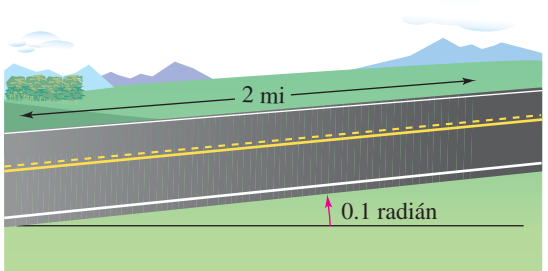
63. $x + y = 1$
$x + y = 5$



64. $3x - 4y = 1$
$3x - 4y = 10$



65. PENDIENTE EN UNA CARRETERA Una carretera recta sube con una inclinación de 0.10 radianes a partir de la horizontal (vea figura). Encuentre la pendiente de la carretera y el cambio en elevación en un tramo de dos millas de la carretera.



66. PENDIENTE EN UNA CARRETERA Una carretera recta sube con una inclinación de 0.20 radianes a partir de la horizontal. Encuentre la pendiente de la carretera y el cambio en elevación en un tramo de una milla de la carretera.

67. INCLINACIÓN DE UN TECHO Un techo tiene una elevación de 3 pies por cada cambio horizontal de 5 pies (vea figura). Encuentre la inclinación del techo.

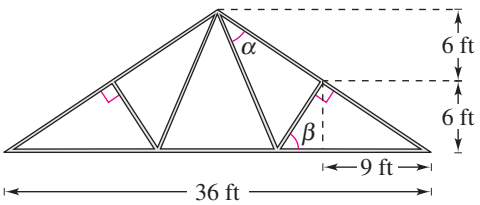
68. DISEÑO DE UNA BANDA TRANSPORTADORA Una banda transportadora se construye de modo que se eleva 1 metro por cada 3 metros de recorrido horizontal.

(a) Haga un diagrama que dé una representación visual del problema.

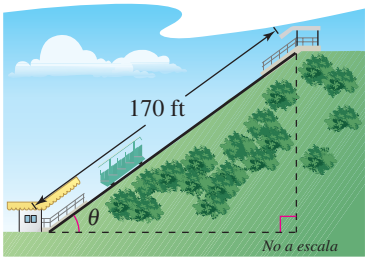
(b) Encuentre la inclinación de la banda transportadora.

(c) La banda corre entre dos pisos en una fábrica. La distancia entre los pisos es 5 metros. Encuentre la longitud de la banda.

69. ARMAZÓN Encuentre los ángulos α y β mostrados en el dibujo de la armazón de techo.



70. El ferrocarril inclinado de las cataratas del río Niágara, en Ontario, Canadá, es un ferrocarril que fue diseñado para transporte de pasajeros de la ciudad de Niagara Falls al parque de la Reina Victoria. El ferrocarril es de unos 170 pies de largo aproximadamente con un 36% de pendiente ascendente (vea figura).



(a) Encuentre la inclinación θ del ferrocarril.

(b) Encuentre el cambio en elevación de la base a la parte superior del ferrocarril.

(c) Usando el origen de un sistema de coordenadas rectangulares como la base del plano inclinado, encuentre la ecuación de la recta que modela la vía de ferrocarril.

(d) Trace una gráfica de la ecuación que encontró en el inciso (c).

EXPLORACIÓN

¿VERDADERO O FALSO? En los Ejercicios 71 y 72, determine si la proposición es verdadera o falsa. Justifique su respuesta.

71. Una recta que tiene una inclinación mayor a $\pi/2$ radianes tiene pendiente negativa.

72. Para hallar el ángulo entre dos rectas cuyos ángulos de inclinación θ_1 y θ_2 se conocen, sustituya θ_1 y θ_2 por m_1 y m_2, respectivamente, en la fórmula para el ángulo entre dos rectas.

73. Considere una recta con pendiente m e intersección con el eje y en $(0, 4)$.

(a) Escriba la distancia d entre el origen y la recta como función de m.

(b) Grafique la función del inciso (a).

(c) Encuentre la pendiente que dé la máxima distancia entre el origen y la recta..

(d) Halle la asíntota de la gráfica del inciso (b) e interprete su significado en el contexto del problema.

74. TOQUE FINAL Discuta por qué la inclinación de una recta puede ser un ángulo mayor a $\pi/2$, pero el ángulo entre dos rectas no puede ser mayor a $\pi/2$. Decida si el siguiente enunciado es verdadero o falso: "La inclinación de una recta es el ángulo entre la recta y el eje x". Explique.

75. Considere una recta con pendiente m e intersección con el eje y en $(0, 4)$.

(a) Escriba la distancia d entre el punto $(3,1)$ y la recta como función de m.

(b) Grafique la función del inciso (a).

(c) Encuentre la pendiente que dé la máxima distancia entre el punto y la recta.

(d) ¿Es posible que la distancia sea 0? Si es así, ¿cuál es la pendiente de la recta que da una distancia de 0?

(e) Encuentre la asíntota de la gráfica del inciso (b) e interprete su significado en el contexto del problema.

10.2 Introducción a las cónicas: parábolas

Lo que debe aprender

- Reconocer una cónica como la intersección de un plano y un cono de doble rama.
- Escribir ecuaciones de parábolas en forma estándar y graficar parábolas.
- Usar la propiedad reflectora de las parábolas para resolver problemas de la vida real.

Por qué debe aprenderlo

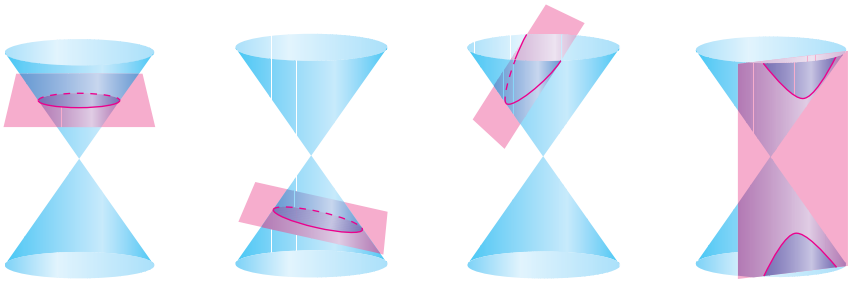
Se pueden usar parábolas para modelar y resolver numerosos tipos de problemas de la vida real. Por ejemplo, en el Ejercicio 71 de la página 739 se usa una parábola para modelar los cables del puente Golden Gate.

Cosmo Condina/The Image Bank/Getty Images

Cónicas

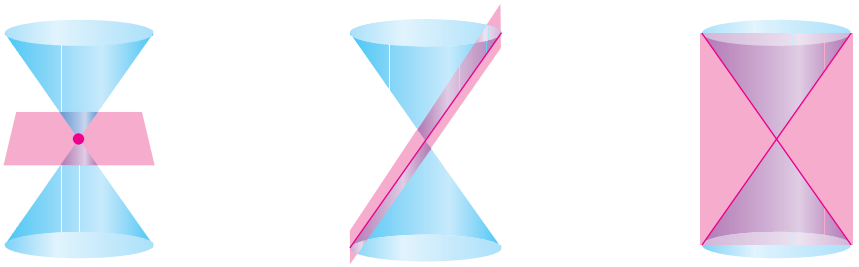
Las secciones cónicas fueron descubiertas durante el periodo clásico griego (600 a 300 a.C.). Los antiguos griegos estaban interesados principalmente en las propiedades geométricas de las cónicas. No fue sino hasta fines del siglo XVII que se hizo evidente la aplicación generalizada de las cónicas y que desempeñaron un papel prominente en los primeros avances en el cálculo.

Una **sección cónica** (o simplemente **cónica**) es la intersección de un plano y un cono de doble rama. Observe en la Figura 10.9 que, en la formación de las cuatro cónicas básicas, el plano de intersección no pasa por el vértice del cono. Cuando el plano pasa por el vértice, la figura resultante es una **cónica degenerada**, como se ve en la Figura 10.10.



Circunferencia Elipse Parábola Hipérbola

FIGURA 10.9 Cónicas básicas



Punto Recta Dos rectas que se cruzan

FIGURA 10.10 Cónicas degeneradas

Hay varias formas de abordar el estudio de las cónicas. Podríamos empezar por definir las cónicas en términos de las intersecciones de planos y conos, como hicieron los griegos, o podríamos definirlas algebraicamente, en términos de la ecuación general de segundo grado

$$Ax^2 + Bxy + Cy^2 + Dx + Ey + F = 0.$$

No obstante, estudiaremos un tercer método en el que cada una de las cónicas se define como un **lugar geométrico** (conjunto) de puntos que satisface una propiedad geométrica. Por ejemplo, en la sección 1.2 aprendimos que una circunferencia se define como el conjunto de todos los puntos (x, y) que equidistan de un punto fijo (h, k). Esto lleva a la forma normal de la ecuación de una circunferencia.

$$(x - h)^2 + (y - k)^2 = r^2.$$ Ecuación de la circunferencia

Parábolas

En la sección 2.1 aprendimos que la gráfica de la función cuadrática

$$f(x) = ax^2 + bx + c$$

es una parábola que se abre hacia arriba o hacia abajo. La siguiente definición de una parábola es más general en el sentido de que es independiente de la orientación de la parábola.

Definición de parábola

Una **parábola** es el conjunto de todos los puntos (x, y) en un plano que equidistan de una recta fija (**directriz**) y un punto fijo (**foco**) que no está en la recta.

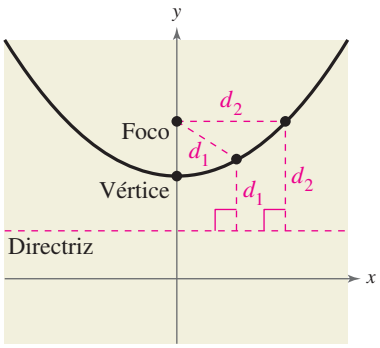


FIGURA 10.11 Parábola

El punto medio entre el foco y la directriz se llama **vértice**, y la recta que pasa por el foco y el vértice se llama **eje** de la parábola. Observe en la Figura 10.11 que una parábola es simétrica respecto a su eje. Usando la definición de una parábola se puede deducir la siguiente **forma estándar** de la ecuación de una parábola cuya directriz es paralela al eje x o al eje y.

Ecuación estándar de una parábola

La **forma estándar de la ecuación de una parábola** con vértice en (h, k) es como sigue.

$$(x - h)^2 = 4p(y - k), \quad p \neq 0 \qquad \text{Eje vertical, directriz: } y = k - p$$

$$(y - k)^2 = 4p(x - h), \quad p \neq 0 \qquad \text{Eje horizontal, directriz: } x = h - p$$

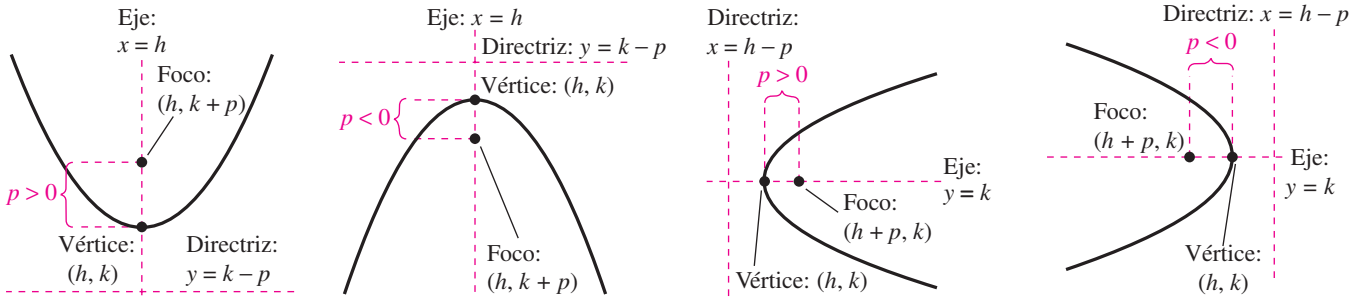
El foco se encuentra en el eje a p unidades (*distancia dirigida*) del vértice. Si el vértice está en el origen $(0, 0)$, la ecuación toma una de las formas siguientes.

$$x^2 = 4py \qquad \text{Eje vertical}$$

$$y^2 = 4px \qquad \text{Eje horizontal}$$

Vea la Figura 10.12.

Para una demostración de la forma estándar de la ecuación de una parábola, vea la página 805.



(a) $(x - h)^2 = 4p(y - k)$
Eje vertical: $p > 0$

(b) $(x - h)^2 = 4p(y - k)$
Eje vertical: $p < 0$

(c) $(y - k)^2 = 4p(x - h)$
Eje horizontal: $p > 0$

(d) $(y - k)^2 = 4p(x - h)$
Eje vertical: $p < 0$

FIGURA 10.12

TECNOLOGÍA

Use una calculadora de gráficas para confirmar la ecuación hallada en el Ejemplo 1. Para graficar la ecuación, puede usar dos ecuaciones separadas:

$y_1 = \sqrt{8x}$ Parte superior

y

$y_2 = -\sqrt{8x}$. Parte inferior

Ejemplo 1 Vértice en el origen

Encuentre la ecuación estándar de la parábola con vértice en el origen y foco (2, 0).

Solución

El eje de la parábola es horizontal, pasando por (0, 0) y (2, 0), como se muestra en la Figura 10.13.

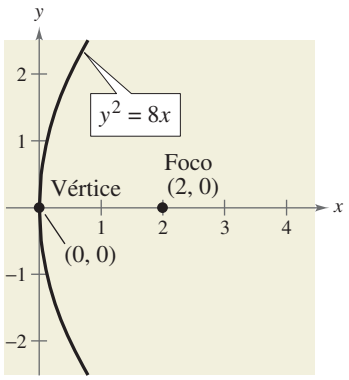


FIGURA 10.13

La forma estándar es $y^2 = 4px$, donde $h = 0$, $k = 0$ y $p = 2$. Por tanto, la ecuación es $y^2 = 8x$.

PUNTO *de repaso* Ahora trate de hacer el Ejercicio 23.

Ayuda de álgebra

La técnica de completar el cuadrado se usa para escribir la ecuación del Ejemplo 2 en forma normal. En el Apéndice A.5 se puede hacer un repaso de la técnica para completar el cuadrado.

Ejemplo 2 Hallar el foco de una parábola

Encuentre el foco de la parábola dada por $y = -\frac{1}{2}x^2 - x + \frac{1}{2}$.

Solución

Para hallar el foco, convierta a la forma estándar al completar el cuadrado.

$$y = -\tfrac{1}{2}x^2 - x + \tfrac{1}{2}$$ Escribir la ecuación original.

$$-2y = x^2 + 2x - 1$$ Multiplicar cada lado por –2.

$$1 - 2y = x^2 + 2x$$ Sumar 1 a cada lado.

$$1 + 1 - 2y = x^2 + 2x + 1$$ Completar el cuadrado.

$$2 - 2y = x^2 + 2x + 1$$ Combinar términos semejantes.

$$-2(y - 1) = (x + 1)^2$$ Forma estándar

Comparando esta ecuación con

$$(x - h)^2 = 4p(y - k)$$

se puede concluir que $h = -1$, $k = 1$ y $p = -\frac{1}{2}$. Como p es negativa, la parábola se abre hacia abajo, como se ve en la Figura 10.14. En consecuencia, el foco de la parábola es $(h, k + p) = \left(-1, \frac{1}{2}\right)$.

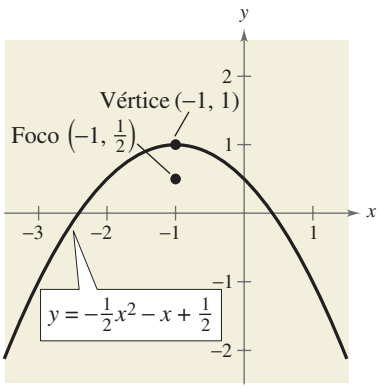


FIGURA 10.14

PUNTO *de repaso* Ahora trate de hacer el Ejercicio 43.

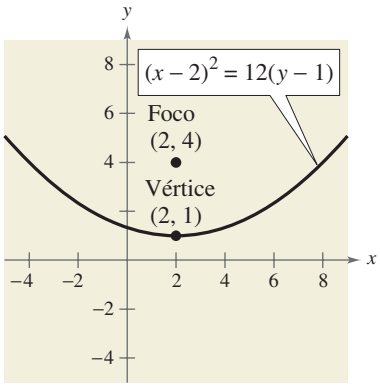


FIGURA 10.15

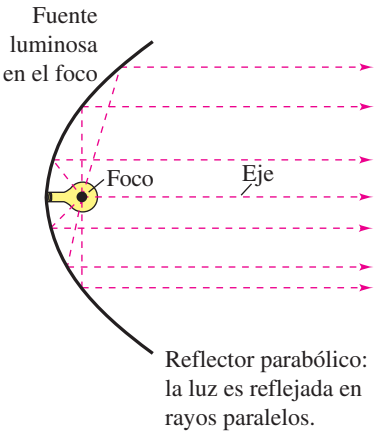


FIGURA 10.16

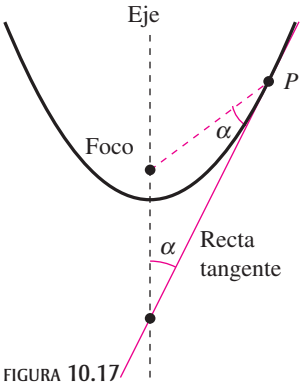


FIGURA 10.17

Ejemplo 3 Hallar la ecuación estándar de una parábola

Encuentre la forma estándar de la ecuación de la parábola con vértice (2, 1) y foco (2, 4). A continuación, escriba la forma cuadrática de la ecuación.

Solución

Como el eje de la parábola es vertical, pasando por (2, 1) y (2, 4), considere la ecuación

$$(x - h)^2 = 4p(y - k)$$

donde $h = 2$, $k = 1$ y $p = 4 - 1 = 3$. Por tanto, la forma estándar es

$$(x - 2)^2 = 12(y - 1).$$

Se puede obtener la forma cuadrática más común como sigue.

$$(x - 2)^2 = 12(y - 1) \qquad \text{Escribir la ecuación original.}$$

$$x^2 - 4x + 4 = 12y - 12 \qquad \text{Multiplicar.}$$

$$x^2 - 4x + 16 = 12y \qquad \text{Sumar 12 a cada lado.}$$

$$\frac{1}{12}(x^2 - 4x + 16) = y \qquad \text{Dividir cada lado entre 12.}$$

La gráfica de esta parábola se muestra en la Figura 10.15.

PUNTO *de repaso* Ahora trate de hacer el Ejercicio 55.

Aplicación

Un segmento de recta que pasa por el foco de una parábola y tiene puntos extremos en la parábola se llama **cuerda focal.** La cuerda focal específica perpendicular al eje de la parábola se denomina **lado recto.**

Las parábolas se presentan en una amplia variedad de aplicaciones. Por ejemplo, puede formarse un reflector parabólico al hacer girar una parábola alrededor de su eje. La superficie resultante tiene la propiedad de que todos los rayos incidentes paralelos al eje son reflejados pasando por el foco de la parábola. Éste es el principio que hay detrás de la construcción de espejos parabólicos que se emplean en telescopios reflectores. Por el contrario, los rayos de luz que emanan del foco de un reflector parabólico que se usa en una linterna eléctrica son todos paralelos entre sí, como se muestra en la Figura 10.16.

Una recta es **tangente** a una parábola en un punto sobre la parábola si la recta interseca (toca) pero no corta la parábola en ese punto. Las rectas tangentes a parábolas tienen propiedades especiales relacionadas con el uso de parábolas en la construcción de superficies reflectoras.

Propiedad reflectora de una parábola

La recta tangente a una parábola en un punto P forma ángulos iguales con las siguientes dos rectas (vea Figura 10.17).

1. La recta que pasa por P y el foco

2. El eje de la parábola

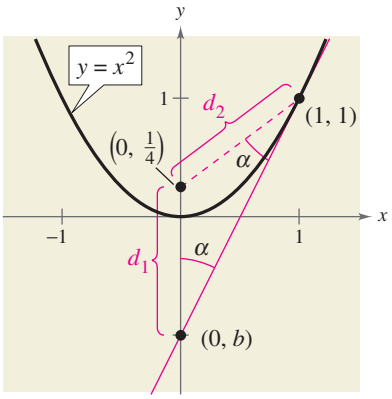


FIGURA 10.18

Ejemplo 4 Hallar la recta tangente a un punto en una parábola

Encuentre la ecuación de la recta tangente a la parábola dada por $y = x^2$ en el punto $(1, 1)$.

Solución

Para esta parábola, $p = \frac{1}{4}$ y el foco es $\left(0, \frac{1}{4}\right)$, como se ve en la Figura 10.18. Se puede hallar la intersección con el eje y en $(0, b)$ de la recta tangente al igualar las longitudes de los dos lados del triángulo isósceles que se muestra en la Figura 10.18:

$$d_1 = \frac{1}{4} - b$$

y

$$d_2 = \sqrt{(1 - 0)^2 + \left[1 - \left(\frac{1}{4}\right)\right]^2} = \frac{5}{4}.$$

Observe que $d_1 = \frac{1}{4} - b$ en vez de $b - \frac{1}{4}$. El orden de sustracción para la distancia es importante porque la distancia debe ser positiva. Si hacemos $d_1 = d_2$ tendremos

$$\frac{1}{4} - b = \frac{5}{4}$$

$$b = -1.$$

Por tanto, la pendiente de la recta tangente es

$$m = \frac{1 - (-1)}{1 - 0} = 2$$

y la ecuación de la recta tangente en forma pendiente-intersección es

$$y = 2x - 1.$$

PUNTO *de repaso* Ahora trate de hacer el Ejercicio 65.

TECNOLOGÍA

Use una calculadora de gráficas para confirmar el resultado del Ejemplo 4. Al graficar

$$y_1 = x^2 \quad \text{y} \quad y_2 = 2x - 1$$

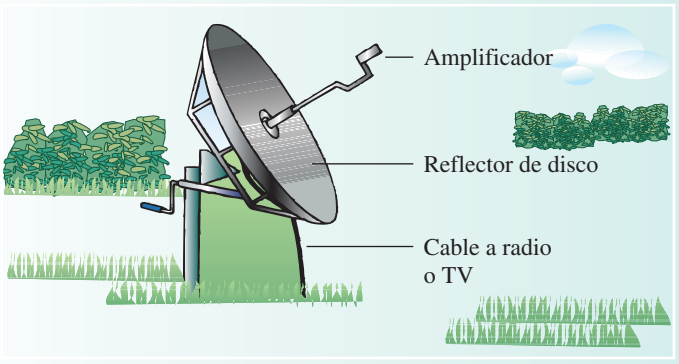
en la misma pantalla, el usuario debe ver que la recta toca la parábola en el punto (1, 1).

Ayuda de álgebra

En la sección 1.3 puede hacer un repaso de las técnicas para escribir ecuaciones lineales.

DISCUSIÓN EN CLASE

Antenas satelitales Las secciones transversales de las antenas satelitales son de forma parabólica. Use la figura mostrada para escribir un párrafo que explique por qué las antenas satelitales son parabólicas.



10.2 EJERCICIOS

En www.CalcChat.com vea las soluciones a los ejercicios impares.

VOCABULARIO: Llene los espacios en blanco.

1. Una _____ es la intersección de un plano y un cono de doble rama.
2. Cuando un plano pasa por el vértice de un cono de doble rama, la intersección es una _____ _____.
3. Un conjunto de puntos que satisfacen una propiedad geométrica también se pueden citar como un _____ de puntos.
4. Una _____ se define como el conjunto de todos los puntos (x, y) en un plano que están equidistantes desde una recta fija, llamada _____, y un punto fijo, llamado _____, que no está en la recta.
5. La recta que pasa por el foco y el vértice de una parábola recibe el nombre de _____ de la parábola.
6. El _____ de una parábola es el punto medio entre el foco y la directriz.
7. Un segmento de recta que pasa por el foco de una parábola y tiene puntos extremos en la parábola es un _____ _____ .
8. Una recta es _____ a una parábola en un punto sobre la parábola si la recta toca pero no corta la parábola en el punto.

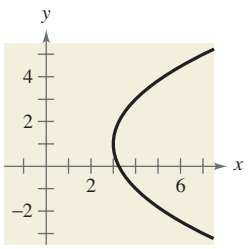
HABILIDADES Y APLICACIONES

En los Ejercicios 9-12, describa verbalmente la forma en que un plano podría intersecar el cono de doble rama que se muestra, para formar la sección cónica.

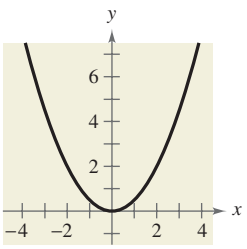
9. Circunferencia
10. Elipse
11. Parábola
12. Hipérbola

En los Ejercicios 13-18, relacione la ecuación con su gráfica. [Las gráficas están marcadas (a), (b), (c), (d), (e) y (f).]

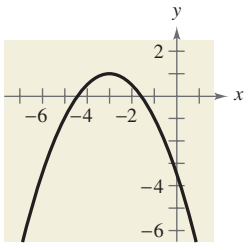
(a)



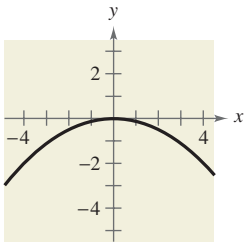
(b)



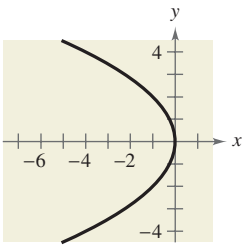
(c)



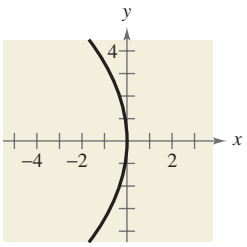
(d)



(e)



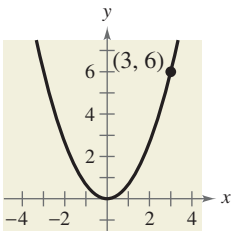
(f)



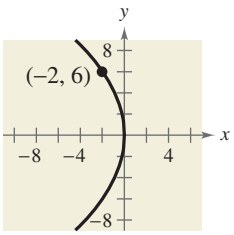
13. $y^2 = -4x$
14. $x^2 = 2y$
15. $x^2 = -8y$
16. $y^2 = -12x$
17. $(y - 1)^2 = 4(x - 3)$
18. $(x + 3)^2 = -2(y - 1)$

En los Ejercicios 19-32, encuentre la forma estándar de la ecuación de la parábola con la(s) característica(s) dada(s) y vértice en el origen.

19.



20.



21. Foco: $\left(0, \frac{1}{2}\right)$
22. Foco: $\left(-\frac{3}{2}, 0\right)$
23. Foco: $(-2, 0)$
24. Foco: $(0, -2)$
25. Directriz: $y = 1$
26. Directriz: $y = -2$
27. Directriz: $x = -1$
28. Directriz: $x = 3$
29. Eje vertical y pasa por el punto $(4, 6)$
30. Eje vertical y pasa por el punto $(-3, -3)$
31. Eje horizontal y pasa por el punto $(-2, 5)$
32. Eje horizontal y pasa por el punto $(3, -2)$

En los Ejercicios 33-46, encuentre el vértice, foco y directriz de la parábola y trace su gráfica.

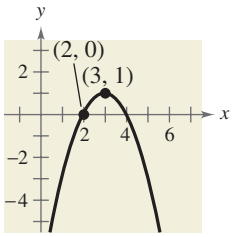
33. $y = \frac{1}{2}x^2$
34. $y = -2x^2$
35. $y^2 = -6x$
36. $y^2 = 3x$
37. $x^2 + 6y = 0$
38. $x + y^2 = 0$
39. $(x - 1)^2 + 8(y + 2) = 0$
40. $(x + 5) + (y - 1)^2 = 0$
41. $(x + 3)^2 = 4\left(y - \frac{3}{2}\right)$
42. $\left(x + \frac{1}{2}\right)^2 = 4(y - 1)$
43. $y = \frac{1}{4}(x^2 - 2x + 5)$
44. $x = \frac{1}{4}(y^2 + 2y + 33)$
45. $y^2 + 6y + 8x + 25 = 0$
46. $y^2 - 4y - 4x = 0$

En los Ejercicios 47-50, encuentre el vértice, foco y directriz de la parábola. Use una calculadora de gráficas para graficar la parábola.

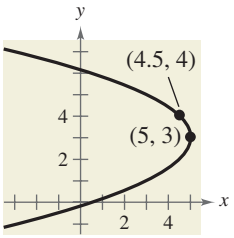
47. $x^2 + 4x + 6y - 2 = 0$
48. $x^2 - 2x + 8y + 9 = 0$
49. $y^2 + x + y = 0$
50. $y^2 - 4x - 4 = 0$

En los Ejercicios 51-60, encuentre la forma estándar de la ecuación de la parábola con las características dadas.

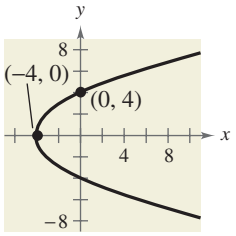
51.



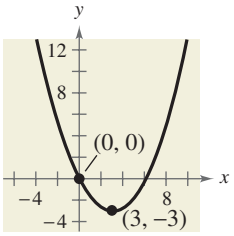
52.



53.



54.



55. Vértice: (4, 3); foco: (6, 3)
56. Vértice: (−1, 2); foco: (−1, 0)
57. Vértice: (0, 2); directriz: $y = 4$
58. Vértice: (1, 2); directriz: $y = -1$
59. Foco: (2, 2); directriz: $x = -2$
60. Foco: (0, 0); directriz: $y = 8$

En los Ejercicios 61 y 62, cambie la ecuación de la parábola de modo que su gráfica se relacione con la descripción.

61. $(y - 3)^2 = 6(x + 1)$; mitad superior de la parábola
62. $(y + 1)^2 = 2(x - 4)$; mitad inferior de la parábola

En los Ejercicios 63 y 64, se dan las ecuaciones de una parábola y una recta tangente a ella. Use una calculadora de gráficas para graficar ambas ecuaciones en la misma pantalla. Determine las coordenadas del punto de tangencia.

Parábola	*Recta tangente*
63. $y^2 - 8x = 0$	$x - y + 2 = 0$
64. $x^2 + 12y = 0$	$x + y - 3 = 0$

En los Ejercicios 65-68, encuentre una ecuación de la recta tangente a la parábola en el punto dado y encuentre la intersección de la recta con el eje x.

65. $x^2 = 2y$, $(4, 8)$
66. $x^2 = 2y$, $\left(-3, \frac{9}{2}\right)$
67. $y = -2x^2$, $(-1, -2)$
68. $y = -2x^2$, $(2, -8)$

69. INGRESO El ingreso R (en dólares) generado por la venta de x unidades de un conjunto de muebles para patio está dado por

$$(x - 106)^2 = -\frac{4}{5}(R - 14\,045).$$

Use una calculadora de gráficas para graficar la función y aproximar el número de ventas que maximizarán el ingreso.

70. INGRESO El ingreso R (en dólares) generado por la venta de x unidades de una cámara digital está dado por

$$(x - 135)^2 = -\frac{5}{7}(R - 25\,515).$$

Use una calculadora de gráficas para graficar la función y aproximar el número de ventas que maximizarán el ingreso.

71. PUENTE DE SUSPENSIÓN Cada uno de los cables del puente Golden Gate está suspendido (en forma de parábola) entre dos torres que están a 1280 metros entre sí. Lo alto de cada una de las torres está 152 metros sobre la calzada. Los cables tocan la calzada a medio camino entre las torres.

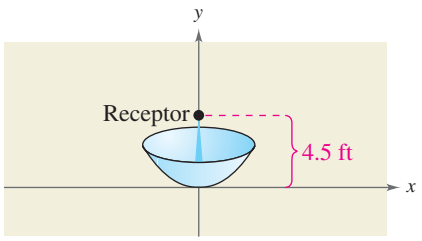
(a) Haga un bosquejo del puente. Localice el origen de un sistema de coordenadas rectangulares en el centro de la calzada. Marque las coordenadas de los puntos conocidos.

(b) Escriba una ecuación que modele los cables.

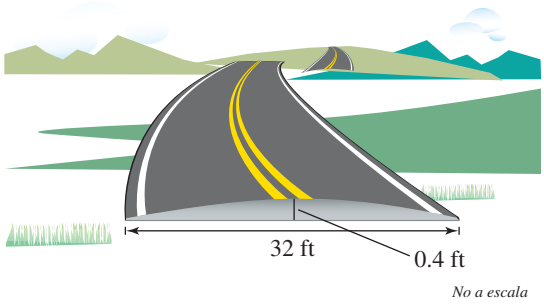
(c) Complete la tabla al hallar la altura y de los cables de suspensión sobre la calzada a una distancia de x metros del centro del puente.

Distancia, x	Altura, y
0	
100	
250	
400	
500	

72. ANTENA SATELITAL El receptor satelital de una antena parabólica está a 4.5 pies del vértice y se encuentra en el foco (vea figura). Escriba una ecuación para una sección transversal del reflector. (Suponga que el disco está dirigido hacia arriba y el vértice está en el origen.)



73. DISEÑO DE CARRETERA Es frecuente que las carreteras estén diseñadas con superficies parabólicas para permitir que la lluvia se escurra hacia fuera. Una carretera particular que mide 32 pies de ancho está 0.4 pies más alta en el centro que en sus costados (vea figura).

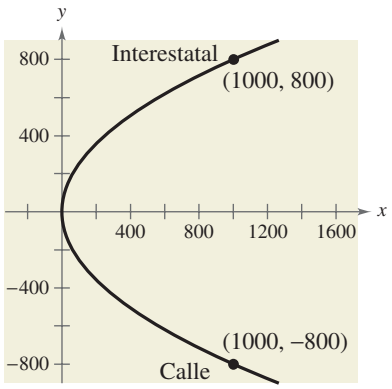


Sección transversal de la superficie de una carretera

(a) Encuentre una ecuación de la parábola que modele la superficie de la carretera. (Suponga que el origen está en el centro de la carretera.)

(b) ¿A qué distancia del centro de la carretera está la superficie de ésta a 0.1 pies más abajo que el centro?

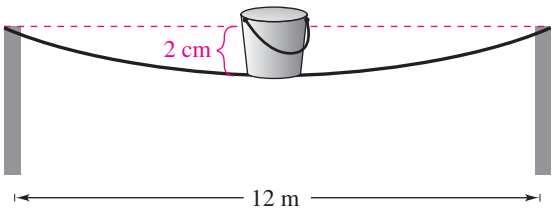
74. DISEÑO DE CARRETERAS Los ingenieros en carreteras diseñan una curva parabólica para una rampa de entrada desde una calle recta a una carretera interestatal (vea figura). Encuentre una ecuación de la parábola.



75. TORCIMIENTO DE UNA VIGA Una viga simple de soporte mide 12 metros de largo y tiene una carga en el centro (vea figura). El torcimiento de la viga en su centro es 2 centímetros. Suponga que la forma de la viga torcida es parabólica.

(a) Escriba una ecuación de la parábola. (Suponga que el origen está en el centro de la viga torcida.)

(b) ¿A qué distancia del centro de la viga es de 1 centímetro el torcimiento?



76. TORCIMIENTO DE UNA VIGA Repita el Ejercicio 75 si la longitud de la viga es 16 metros y su torcimiento en el centro es de 3 centímetros.

77. FLUJO DE FLUIDOS Sale agua de un tubo horizontal que está a 48 pies sobre el suelo. El chorro de agua que cae tiene la forma de una parábola cuyo vértice $(0, 48)$ está en el extremo del tubo (vea figura). El chorro de agua cae al suelo en el punto $\left(10\sqrt{3}, 0\right)$. Encuentre la ecuación de la trayectoria tomada por el agua.

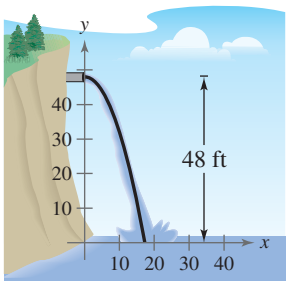


FIGURA PARA EJERCICIO 77

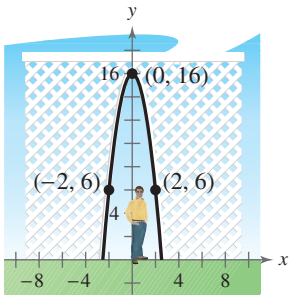


FIGURA PARA EJERCICIO 78

78. ARCO DE MALLA Un arco parabólico de malla mide 16 pies de alto en el vértice. A una altura de 6 pies, el ancho del arco mide 4 pies (vea figura). ¿Qué tan ancho es el arco de malla al nivel del suelo?

79. ÓRBITA SATELITAL Un satélite en una órbita circular de 100 millas de altura alrededor de la Tierra tiene una velocidad de aproximadamente 17 500 millas por hora. Si esta velocidad se multiplica por $\sqrt{2}$, el satélite tendrá la velocidad mínima necesaria para escapar de la gravedad de la Tierra y seguirá una trayectoria parabólica con el centro de la misma como el foco (vea figura en la página siguiente).

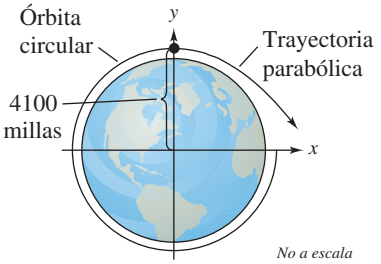


FIGURA PARA EJERCICIO 79

(a) Halle la velocidad de escape del satélite.

(b) Halle una ecuación del trayecto parabólico del satélite (suponga que el radio de la Tierra es de 4000 millas).

80. TRAYECTORIA DE UNA PELOTA DE SOFTBOL La trayectoria de una pelota de softbol está modelada por $-12.5(y - 7.125) = (x - 6.25)^2$, donde las coordenadas x y y se miden en pies, con $x = 0$ correspondiente a la posición desde la cual se lanza la pelota.

(a) Use una calculadora de gráficas para graficar la trayectoria de la pelota de softbol.

(b) Use el comando *trace* de la calculadora de gráficas para aproximar el punto más elevado y el alcance de la trayectoria.

MOVIMIENTO DE PROYECTILES En los Ejercicios 81 y 82, considere la trayectoria de un proyectil que se desplaza horizontalmente con una rapidez de v pies por segundo a una altura de s pies, donde el modelo para la trayectoria es

$$x^2 = -\frac{v^2}{16}(y - s).$$

En este modelo (en el que la resistencia del aire no se toma en cuenta), y es la altura (en pies) del proyectil y x es la distancia horizontal (en pies) que recorre éste.

81. Una pelota se lanza desde lo alto de una torre de 100 pies con una rapidez de 28 pies por segundo.

(a) Encuentre la ecuación de la trayectoria parabólica.

(b) ¿Qué distancia recorre horizontalmente la pelota antes de llegar al suelo?

82. Un avión de carga está volando a una altitud de 30 000 pies y a una rapidez de 540 millas por hora. Una caja de provisiones se deja caer desde el avión. ¿Cuántos *pies* recorrerá la caja horizontalmente antes de tocar tierra?

EXPLORACIÓN

¿VERDADERO O FALSO? En los Ejercicios 83 y 84, determine si la proposición es verdadera o falsa. Justifique su respuesta.

83. Es posible que una parábola interseque su directriz.

84. Si el vértice y foco de una parábola están sobre una recta horizontal, entonces la directriz de la parábola es vertical.

85. Sean (x_1, y_1) las coordenadas de un punto sobre la parábola $x^2 = 4py$. La ecuación de la recta tangente a la parábola en el punto es

$$y - y_1 = \frac{x_1}{2p}(x - x_1).$$

¿Cuál es la pendiente de la recta tangente?

86. TOQUE FINAL Explique qué representa cada una de las siguientes ecuaciones y en qué forma son equivalentes las ecuaciones (a) y (b).

(a) $y = a(x - h)^2 + k, \quad a \neq 0$

(b) $(x - h)^2 = 4p(y - k), \quad p \neq 0$

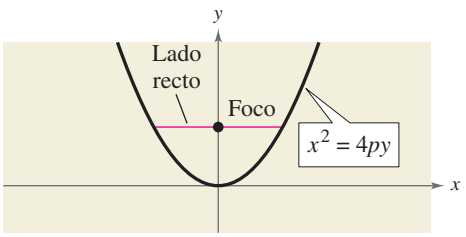
(c) $(y - k)^2 = 4p(x - h), \quad p \neq 0$

87. RAZONAMIENTO GRÁFICO Considere la parábola $x^2 = 4py$.

(a) Use una calculadora de gráficas para graficar la parábola para $p = 1$, $p = 2$, $p = 3$ y $p = 4$. Describa el efecto sobre la gráfica cuando p aumenta.

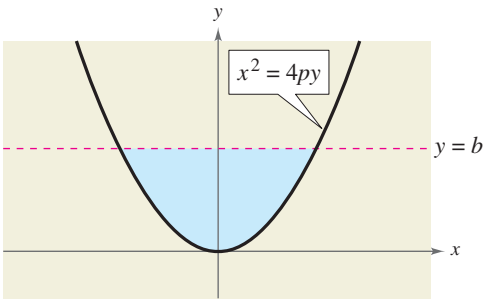
(b) Localice el foco para cada parábola del inciso (a).

(c) Por cada parábola del inciso (a), encuentre la longitud del lado recto (vea figura). ¿Cómo puede determinarse la longitud del lado recto directamente de la forma normal de la ecuación de la parábola?



(d) Explique cómo se puede usar el resultado del inciso (c) como ayuda de trazo al graficar parábolas.

88. GEOMETRÍA El área de la región sombreada de la figura es $A = \frac{8}{3}p^{1/2}b^{3/2}$.



(a) Encuentre el área cuando $p = 2$ y $b = 4$.

(b) Dé una explicación geométrica de por qué el área se aproxima a 0 cuando p se aproxima a 0.

10.3 ELIPSES

Lo que debe aprender

- Escribir ecuaciones de elipses en forma estándar y graficar elipses.
- Usar propiedades de elipses para modelar y resolver problemas de la vida real.
- Hallar excentricidades de elipses.

Por qué debe aprenderlo

Se pueden usar elipses para modelar y resolver numerosos tipos de problemas de la vida real. Por ejemplo, en el Ejercicio 65 de la página 749 se usa una elipse para modelar la órbita del cometa Halley.

Harvard College Observatory/Photo Researchers, Inc.

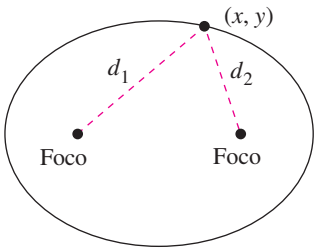
Introducción

El segundo tipo de cónica se llama **elipse** y se define como sigue.

Definición de elipse

Una **elipse** es el conjunto de todos los puntos (x, y) en un plano, cuya suma de las distancias desde dos puntos fijos distintos (**focos**) es constante. Vea la Figura 10.19.

La recta que pasa por los focos interseca la elipse en dos puntos llamados **vértices**. La cuerda que une los vértices es el **eje mayor** y su punto medio es el **centro** de la elipse. La cuerda perpendicular al eje mayor en el centro es el **eje menor** de la elipse (Figura 10.20).



$d_1 + d_2$ es constante.

FIGURA 10.19

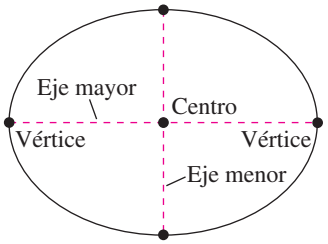


FIGURA 10.20

Se puede visualizar la definición de una elipse si imaginamos dos tachuelas colocadas en los focos, como se muestra en la Figura 10.21. Si los extremos de una sección fija de cuerda se sujetan a las tachuelas y la cuerda *se tensa* con un lápiz, la trayectoria trazada por el lápiz será una elipse.

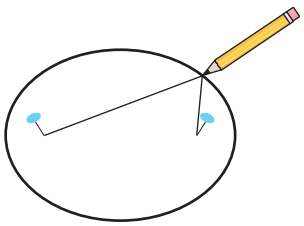


FIGURA 10.21

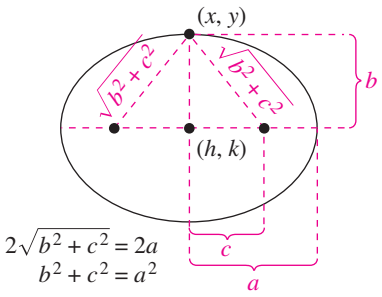


FIGURA 10.22

Para deducir la forma estándar de la ecuación de una elipse, considere la elipse de la Figura 10.22 con los siguientes puntos: centro, (h, k); vértices, $(h \pm a, k)$; focos, $(h \pm c, k)$. Nótese que el centro es el punto medio del segmento que une los focos. La suma de las distancias de cualquier punto sobre la elipse a los dos focos es constante. Usando un punto vértice, esta suma constante es

$$(a + c) + (a - c) = 2a \qquad \text{Longitud del eje mayor}$$

o simplemente la longitud del eje mayor. Ahora, si con (x, y) representamos *cualquier* punto sobre la elipse, la suma de las distancias entre (x, y) y los dos focos también debe ser $2a$.

Esto es,

$$\sqrt{[x-(h-c)]^2+(y-k)^2}+\sqrt{[x-(h+c)]^2+(y-k)^2}=2a$$

que, después de expandir y reagrupar, se reduce a

$$(a^2-c^2)(x-h)^2+a^2(y-k)^2=a^2(a^2-c^2).$$

Finalmente, en la Figura 10.22 se puede ver que

$$b^2=a^2-c^2$$

que implica que la ecuación de la elipse es

$$b^2(x-h)^2+a^2(y-k)^2=a^2b^2$$

$$\frac{(x-h)^2}{a^2}+\frac{(y-k)^2}{b^2}=1.$$

Se obtendría una ecuación similar en la deducción al empezar con un eje mayor. Ambos resultados se resumen como sigue.

Ecuación estándar de una elipse

La **forma estándar de la ecuación de una elipse,** con centro en (h, k) y ejes mayor y menor de longitudes $2a$ y $2b$, respectivamente, donde $0 < b < a$, es

$$\frac{(x-h)^2}{a^2}+\frac{(y-k)^2}{b^2}=1 \qquad \text{El eje mayor es horizontal.}$$

$$\frac{(x-h)^2}{b^2}+\frac{(y-k)^2}{a^2}=1. \qquad \text{El eje mayor es vertical.}$$

Los focos se encuentran en el eje mayor, c unidades desde el centro, con $c^2=a^2-b^2$. Si el centro está en el origen $(0, 0)$, la ecuación toma una de las formas siguientes.

$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1 \qquad \text{Eje mayor es horizontal.}$$

$$\frac{x^2}{b^2}+\frac{y^2}{a^2}=1 \qquad \text{Eje mayor es vertical.}$$

Tip de estudio

Considere la ecuación de la elipse

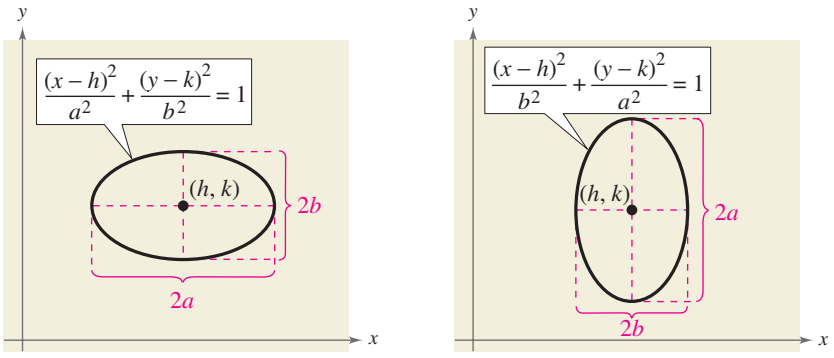
$$\frac{(x-h)^2}{a^2}+\frac{(y-k)^2}{b^2}=1.$$

Si hacemos $a = b$, entonces la ecuación se puede reescribir como

$$(x-h)^2+(y-k)^2=a^2$$

que es la forma estándar de la ecuación de una circunferencia con radio $r = a$ (vea sección 1.2). Geométricamente, cuando $a = b$ para una elipse, los ejes mayor y menor son de igual longitud y, por tanto, la gráfica es una circunferencia.

La Figura 10.23 muestra las orientaciones horizontal y vertical para una elipse.



Eje mayor es horizontal. Eje mayor es vertical.

FIGURA 10.23

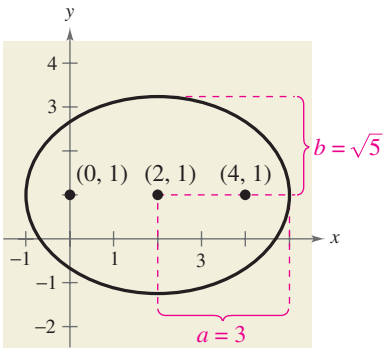


FIGURA 10.24

Ejemplo 1 Hallar la ecuación estándar de una elipse

Encuentre la forma estándar de la ecuación de una elipse que tenga focos en (0,1) y (4,1) y un eje mayor de longitud 6, como se muestra en la Figura 10.24.

Solución

Como los focos se presentan en (0,1) y (4,1), el centro de la elipse es (2,1) y la distancia del centro a uno de los focos es $c = 2$. Como $2a = 6$, sabemos que $a = 3$. Ahora, de $c^2 = a^2 - b^2$, tenemos

$$b = \sqrt{a^2 - c^2} = \sqrt{3^2 - 2^2} = \sqrt{5}.$$

Como el eje mayor es horizontal, la ecuación estándar es

$$\frac{(x-2)^2}{3^2} + \frac{(y-1)^2}{(\sqrt{5})^2} = 1.$$

Esta ecuación se simplifica a

$$\frac{(x-2)^2}{9} + \frac{(y-1)^2}{5} = 1.$$

PUNTO *de repaso* Ahora trate de hacer el Ejercicio 23.

Ejemplo 2 Trazar una elipse

Trace la elipse dada por $x^2 + 4y^2 + 6x - 8y + 9 = 0$.

Solución

Empiece por escribir la ecuación original en forma estándar. En el cuarto paso, observe que 9 y 4 se suman a *ambos* lados de la ecuación al completar los cuadrados.

$$x^2 + 4y^2 + 6x - 8y + 9 = 0 \qquad \text{Escribir la ecuación original.}$$

$$(x^2 + 6x + \square) + (4y^2 - 8y + \square) = -9 \qquad \text{Agrupar términos.}$$

$$(x^2 + 6x + \square) + 4(y^2 - 2y + \square) = -9 \qquad \text{Factorizar 4 de los términos en } y.$$

$$(x^2 + 6x + 9) + 4(y^2 - 2y + 1) = -9 + 9 + 4(1)$$

$$(x+3)^2 + 4(y-1)^2 = 4 \qquad \text{Escribir en forma de cuadrado completado.}$$

$$\frac{(x+3)^2}{4} + \frac{(y-1)^2}{1} = 1 \qquad \text{Dividir cada lado entre 4.}$$

$$\frac{(x+3)^2}{2^2} + \frac{(y-1)^2}{1^2} = 1 \qquad \text{Escribir en forma estándar.}$$

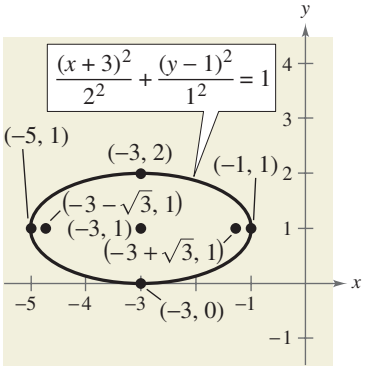


FIGURA 10.25

De esta forma estándar, se deduce que el centro es $(h, k) = (-3, 1)$. Como el denominador del término en x es $a^2 = 2^2$, los puntos extremos del eje mayor están dos unidades a la derecha e izquierda del centro. Del mismo modo, como el denominador del término en y es $b^2 = 1^2$, los puntos extremos del eje menor se encuentra una unidad arriba y abajo del centro. Ahora, de $c^2 = a^2 - b^2$, tenemos $c = \sqrt{2^2 - 1^2} = \sqrt{3}$. Por tanto, los focos de la elipse son $(-3 - \sqrt{3}, 1)$ y $(-3 + \sqrt{3}, 1)$. La elipse se muestra en la Figura 10.25.

PUNTO *de repaso* Ahora trate de hacer el Ejercicio 47.

Ejemplo 3 Análisis de una elipse

Encuentre el centro, vértices y focos de la elipse $4x^2 + y^2 - 8x + 4y - 8 = 0$.

Solución

Al completar el cuadrado se puede escribir la ecuación original en forma estándar.

$$4x^2 + y^2 - 8x + 4y - 8 = 0$$ Escribir la ecuación original.

$$(4x^2 - 8x + \square) + (y^2 + 4y + \square) = 8$$ Agrupar términos.

$$4(x^2 - 2x + \square) + (y^2 + 4y + \square) = 8$$ Factorizar 4 de los términos en x.

$$4(x^2 - 2x + 1) + (y^2 + 4y + 4) = 8 + 4(1) + 4$$

$$4(x - 1)^2 + (y + 2)^2 = 16$$ Escribir en forma cuadrada completada.

$$\frac{(x - 1)^2}{4} + \frac{(y + 2)^2}{16} = 1$$ Dividir cada lado entre 16.

$$\frac{(x - 1)^2}{2^2} + \frac{(y + 2)^2}{4^2} = 1$$ Escribir en forma estándar.

El eje mayor es vertical, donde $h = 1, k = -2, a = 4, b = 2$ y

$$c = \sqrt{a^2 - b^2} = \sqrt{16 - 4} = \sqrt{12} = 2\sqrt{3}.$$

Por tanto, tenemos lo siguiente.

Centro: $(1, -2)$ Vértices: $(1, -6)$, $(1, 2)$ Focos: $(1, -2 - 2\sqrt{3})$, $(1, -2 + 2\sqrt{3})$

La gráfica de la elipse se muestra en la Figura 10.26.

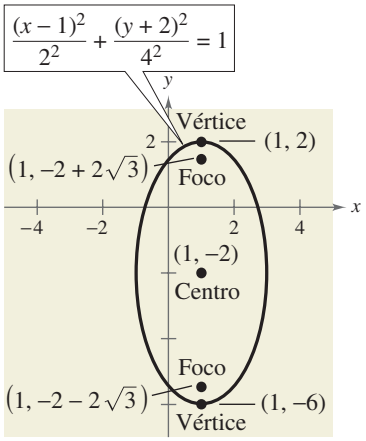


FIGURA 10.26

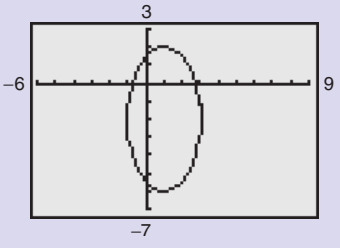
PUNTO *de repaso* Ahora trate de hacer el Ejercicio 51.

TECNOLOGÍA

Se puede usar una calculadora de gráficas para graficar una elipse si se trazan las partes superior e inferior en la misma pantalla. Por ejemplo, para graficar la elipse del Ejemplo 3, primero se despeja y para obtener

$$y_1 = -2 + 4\sqrt{1 - \frac{(x - 1)^2}{4}} \quad \text{y} \quad y_2 = -2 - 4\sqrt{1 - \frac{(x - 1)^2}{4}}.$$

Use una pantalla en la que $-6 \le x \le 9$ y $-7 \le y \le 3$. Debe obtener la gráfica que se muestra a continuación.



Aplicación

Las elipses tienen muchos usos prácticos y estéticos. Por ejemplo, los engranes de máquinas, arcos de soporte y diseños acústicos con frecuencia implican formas elípticas. Las órbitas de satélites y planetas también son elipses. El Ejemplo 4 investiga la órbita elíptica de la Luna alrededor de la Tierra.

Ejemplo 4 Una aplicación donde aparece una órbita elíptica

La Luna se desplaza alrededor de la Tierra en órbita elíptica con ésta en un foco, como se ve en la Figura 10.27. Los ejes mayor y menor de la órbita tienen longitudes de 768 800 kilómetros y 767 640 kilómetros, respectivamente. Encuentre las distancias máxima y mínima (el apogeo y perigeo, respectivamente) del centro de la Tierra al centro de la Luna.

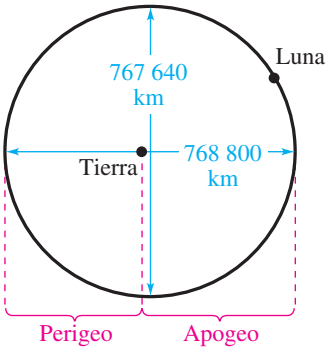


FIGURA 10.27

ATENCIÓN

Observe en el Ejemplo 4 y la Figura 10.27 que la Tierra *no es* el centro de la órbita de la Luna.

Solución

Como $2a = 768\,800$ y $2b = 767\,640$, tendremos

$$a = 384\,400 \text{ y } b = 383\,820$$

lo cual implica que

$$\begin{aligned} c &= \sqrt{a^2 - b^2} \\ &= \sqrt{384\,400^2 - 383\,820^2} \\ &\approx 21\,108. \end{aligned}$$

Por tanto, la distancia máxima entre el centro de la Tierra y el de la Luna es

$$a + c \approx 384\,400 + 21\,108 = 405\,508 \text{ kilómetros}$$

y la distancia mínima es

$$a - c \approx 384\,400 - 21\,108 = 363\,292 \text{ kilómetros.}$$

PUNTO *de repaso* Ahora trate de hacer el Ejercicio 65.

Excentricidad

Una de las razones por las que se dificultaba a los antiguos astrónomos detectar que las órbitas planetarias son elipses es que los focos de éstas se hallan relativamente cerca de sus centros, lo que las hace casi circulares. Para medir cuán ovalada es una elipse se usa el concepto de **excentricidad.**

Definición de excentricidad

La **excentricidad** e de una elipse está dada por la razón

$$e = \frac{c}{a}.$$

Observe que $0 < e < 1$ para *toda* elipse.

Para ver cómo se usa esta razón para describir la forma de una elipse, observe que como los focos están situados a lo largo del eje mayor entre los vértices y el centro, se deduce que

$$0 < c < a.$$

Para una elipse casi circular, los focos están cerca del centro y la razón c/a es pequeña, como se muestra en la Figura 10.28. Por el contrario, para una elipse alargada, los focos están cerca de los vértices y la razón c/a es cercana a 1, como se muestra en la Figura 10.29.

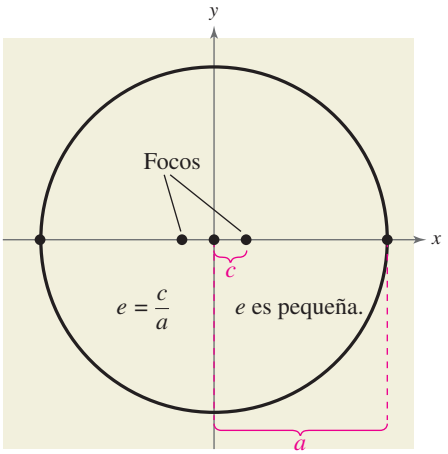


FIGURA 10.28

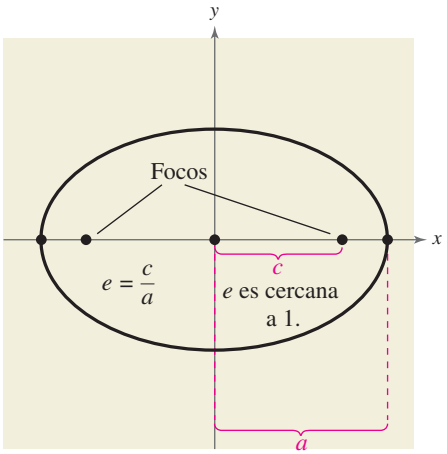


FIGURA 10.29

NASA

El tiempo que tarda Saturno en girar en órbita alrededor del Sol es de unos 29.4 años terrestres.

La órbita de la Luna tiene una excentricidad de $e \approx 0.0549$, y las excentricidades de las ocho órbitas planetarias son como sigue.

Mercurio:	$e \approx 0.2056$	Júpiter:	$e \approx 0.0484$
Venus:	$e \approx 0.0068$	Saturno:	$e \approx 0.0542$
Tierra:	$e \approx 0.0167$	Urano:	$e \approx 0.0472$
Marte:	$e \approx 0.0934$	Neptuno:	$e \approx 0.0086$

DISCUSIÓN EN CLASE

Elipses y círculos

a. Demuestre que la ecuación de una elipse se puede escribir como

$$\frac{(x-h)^2}{a^2} + \frac{(y-k)^2}{a^2(1-e^2)} = 1.$$

b. Para la ecuación del inciso (a), sea $a = 4$, $h = 1$ y $k = 2$, y use una calculadora de gráficas para graficar la elipse para $e = 0.95$, $e = 0.75$, $e = 0.5$, $e = 0.25$ y $e = 0.1$. Discuta los cambios en la forma de la elipse cuando e se aproxima a 0.

c. Haga una conjetura acerca de la forma de la gráfica del inciso (b) cuando $e = 0$. ¿Cuál es la ecuación de esta elipse? ¿Qué otro nombre hay para una elipse con excentricidad de 0?

10.3 EJERCICIOS

En www.CalcChat.com vea las soluciones a los ejercicios impares.

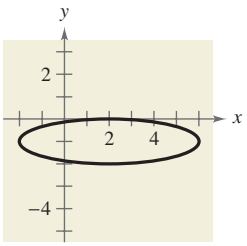
VOCABULARIO: Llene los espacios en blanco.

1. Una _____ es el conjunto de todos los puntos (x, y) de un plano, cuya suma de las distancias desde dos puntos fijos distintos, llamados _____, es constante.
2. La cuerda que une los vértices de una elipse se llama _____ _____, y su punto medio es el _____ de la elipse.
3. La cuerda perpendicular al eje mayor en el centro de la elipse se llama _____ _____ de la elipse.
4. El concepto de _____ se usa para medir lo oval de una elipse.

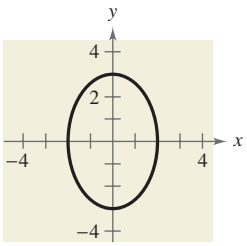
HABILIDADES Y APLICACIONES

En los Ejercicios 5-10, relacione la ecuación con su gráfica. [Las gráficas están marcadas (a), (b), (c), (d), (e) y (f).]

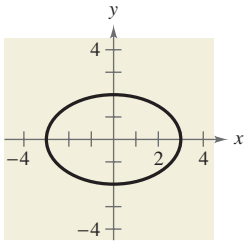
(a)



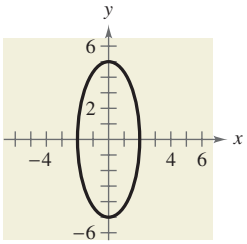
(b)



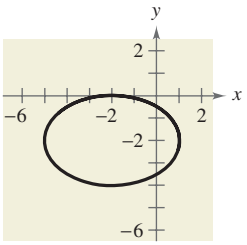
(c)



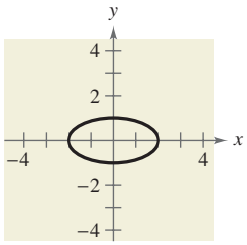
(d)



(e)



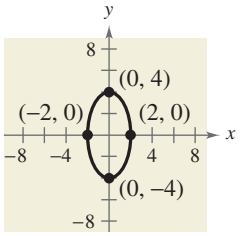
(f)



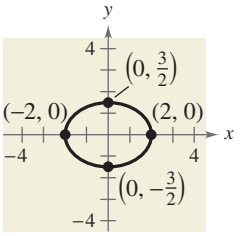
5. $\dfrac{x^2}{4} + \dfrac{y^2}{9} = 1$
6. $\dfrac{x^2}{9} + \dfrac{y^2}{4} = 1$
7. $\dfrac{x^2}{4} + \dfrac{y^2}{25} = 1$
8. $\dfrac{x^2}{4} + y^2 = 1$
9. $\dfrac{(x-2)^2}{16} + (y+1)^2 = 1$
10. $\dfrac{(x+2)^2}{9} + \dfrac{(y+2)^2}{4} = 1$

En los Ejercicios 11-18, encuentre la forma estándar de la ecuación de la elipse con las características dadas y centro en el origen.

11.



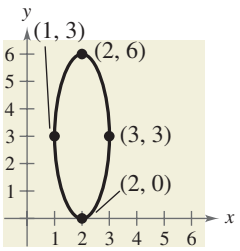
12.



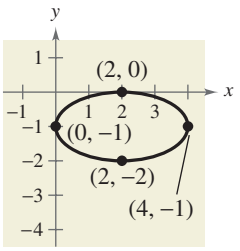
13. Vértices: $(\pm 7, 0)$; focos: $(\pm 2, 0)$
14. Vértices: $(0, \pm 8)$; focos: $(0, \pm 4)$
15. Focos: $(\pm 5, 0)$; eje mayor de longitud 14
16. Focos: $(\pm 2, 0)$; eje mayor de longitud 10
17. Vértices: $(0, \pm 5)$; pasa por el punto $(4, 2)$
18. Eje mayor vertical; pasa por los puntos $(0, 6)$ y $(3, 0)$

En los Ejercicios 19-28, encuentre la forma estándar de la ecuación de la elipse con las características dadas.

19.



20.



21. Vértices: $(0, 2), (8, 2)$; eje menor de longitud 2
22. Focos: $(0, 0), (4, 0)$; eje mayor de longitud 6
23. Focos: $(0, 0), (0, 8)$; eje mayor de longitud 16
24. Centro: $(2, -1)$; vértice: $\left(2, \frac{1}{2}\right)$; eje menor de longitud 2
25. Centro: $(0, 4)$; $a = 2c$; vértices: $(-4, 4), (4, 4)$
26. Centro: $(3, 2)$; $a = 3c$; focos: $(1, 2), (5, 2)$

27. Vértices: (0, 2), (4, 2); puntos extremos del eje menor: (2, 3), (2, 1)

28. Vertices: (5, 0), (5, 12); puntos extremos del eje menor: (1, 6), (9, 6)

En los Ejercicios 29-52, identifique la cónica como una circunferencia o una elipse. A continuación, encuentre el centro, radio, vértices, focos y excentricidad de la cónica (si es aplicable) y trace su gráfica.

29. $\frac{x^2}{25} + \frac{y^2}{16} = 1$

30. $\frac{x^2}{16} + \frac{y^2}{81} = 1$

31. $\frac{x^2}{25} + \frac{y^2}{25} = 1$

32. $\frac{x^2}{9} + \frac{y^2}{9} = 1$

33. $\frac{x^2}{5} + \frac{y^2}{9} = 1$

34. $\frac{x^2}{64} + \frac{y^2}{28} = 1$

35. $\frac{(x-4)^2}{16} + \frac{(y+1)^2}{25} = 1$

36. $\frac{(x+3)^2}{12} + \frac{(y-2)^2}{16} = 1$

37. $\frac{x^2}{4/9} + \frac{(y+1)^2}{4/9} = 1$

38. $\frac{(x+5)^2}{9/4} + (y-1)^2 = 1$

39. $(x+2)^2 + \frac{(y+4)^2}{1/4} = 1$

40. $\frac{(x-3)^2}{25/4} + \frac{(y-1)^2}{25/4} = 1$

41. $9x^2 + 4y^2 + 36x - 24y + 36 = 0$

42. $9x^2 + 4y^2 - 54x + 40y + 37 = 0$

43. $x^2 + y^2 - 2x + 4y - 31 = 0$

44. $x^2 + 5y^2 - 8x - 30y - 39 = 0$

45. $3x^2 + y^2 + 18x - 2y - 8 = 0$

46. $6x^2 + 2y^2 + 18x - 10y + 2 = 0$

47. $x^2 + 4y^2 - 6x + 20y - 2 = 0$

48. $x^2 + y^2 - 4x + 6y - 3 = 0$

49. $9x^2 + 9y^2 + 18x - 18y + 14 = 0$

50. $16x^2 + 25y^2 - 32x + 50y + 16 = 0$

51. $9x^2 + 25y^2 - 36x - 50y + 60 = 0$

52. $16x^2 + 16y^2 - 64x + 32y + 55 = 0$

En los Ejercicios 53-56, use una calculadora de gráficas para graficar la elipse. Encuentre el centro, focos y vértices. (Recuerde que puede ser necesario despejar *y* de la ecuación y obtener dos ecuaciones.)

53. $5x^2 + 3y^2 = 15$

54. $3x^2 + 4y^2 = 12$

55. $12x^2 + 20y^2 - 12x + 40y - 37 = 0$

56. $36x^2 + 9y^2 + 48x - 36y - 72 = 0$

En los Ejercicios 57-60, encuentre la excentricidad de la elipse.

57. $\frac{x^2}{4} + \frac{y^2}{9} = 1$

58. $\frac{x^2}{25} + \frac{y^2}{36} = 1$

59. $x^2 + 9y^2 - 10x + 36y + 52 = 0$

60. $4x^2 + 3y^2 - 8x + 18y + 19 = 0$

61. Encuentre una ecuación de la elipse con vértices $(\pm 5, 0)$ y excentricidad $e = \frac{3}{5}$.

62. Encuentre una ecuación de la elipse con vértices $(0, \pm 8)$ y excentricidad $e = \frac{1}{2}$.

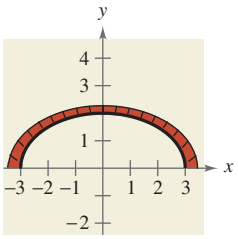
63. ARQUITECTURA Un arco semielíptico sobre un túnel, para una carretera de circulación en un solo sentido y que atraviesa una montaña tiene un eje mayor de 50 pies y una altura de 10 pies en el centro.

(a) Haga un bosquejo de un sistema de coordenadas rectangulares del túnel, con el centro de la carretera entrando al túnel en el origen. Identifique las coordenadas de los puntos conocidos.

(b) Encuentre una ecuación del arco semielíptico.

(c) Usted está conduciendo un camión en movimiento que tiene un ancho de 8 pies y una altura de 9 pies. ¿El camión librará la abertura del arco?

64. ARQUITECTURA Un arco de chimenea se ha de construir en forma de una semielipse. La abertura debe tener una altura de 2 pies en el centro y un ancho de 6 pies a lo largo de la base (vea figura). El contratista traza el perfil de la elipse usando tachuelas como se describe en el inicio de esta sección. Determine las posiciones requeridas de las tachuelas y la longitud de la cuerda.



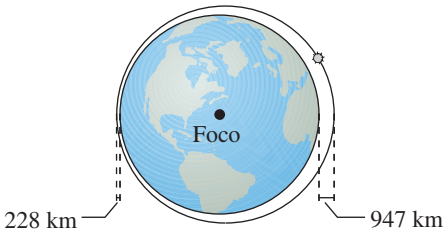
65. ÓRBITA DE COMETA El cometa Halley tiene una órbita elíptica con el Sol en un foco. La excentricidad de la órbita es aproximadamente 0.967 y la longitud del eje mayor de la órbita es alrededor de 35.88 unidades astronómicas. (Una unidad astronómica es de unos 93 millones de millas.)

(a) Encuentre una ecuación de la órbita. Ponga el centro de ésta en el origen y el eje mayor sobre el eje *x*.

(b) Use una calculadora de gráficas para graficar la ecuación de la órbita.

(c) Encuentre la distancia máxima (afelio) y la mínima (perifelio) desde el centro del Sol al del cometa.

66. ÓRBITA SATELITAL El primer satélite artificial en orbitar la Tierra fue el Sputnik I (lanzado por la ex Unión Soviética en 1957). Su punto más alto sobre la superficie terrestre era de 947 kilómetros y su punto más bajo de 228 kilómetros (vea figura). El centro de la Tierra estaba en un foco de la órbita elíptica y el radio de nuestro planeta es de 6378 kilómetros. Encuentre la excentricidad de la órbita.



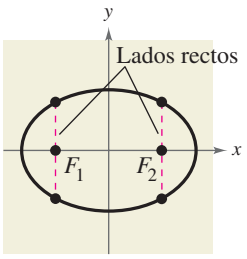
67. MOVIMIENTO DE UN PÉNDULO La relación entre la velocidad y (en radianes por segundo) de un péndulo y su desplazamiento angular θ desde la vertical puede ser modelada por una semielipse. Un péndulo de 12 centímetros alcanza su altura máxima $(y = 0)$ cuando el desplazamiento angular es -0.2 radianes y 0.2 radianes. Cuando el péndulo está en equilibrio $(\theta = 0)$, la velocidad es -1.6 radianes por segundo.

(a) Encuentre una ecuación que modele el movimiento del péndulo. Ponga el centro en el origen.

(b) Grafique la ecuación del inciso (a).

(c) ¿Cuál mitad de la elipse modela el movimiento del péndulo?

68. GEOMETRÍA Un segmento de recta que pasa por un foco de una elipse con puntos extremos en la elipse y perpendicular al eje mayor se llama **lado recto** de la elipse. Por tanto, una elipse tiene dos lados rectos. Conocer la longitud de los lados rectos es útil para trazar una elipse porque da otros puntos sobre la curva (vea figura). Demuestre que la longitud de cada lado recto es $2b^2/a$.



En los Ejercicios 69-72, trace la gráfica de la elipse usando lados rectos (vea Ejercicio 68).

69. $\dfrac{x^2}{9} + \dfrac{y^2}{16} = 1$

70. $\dfrac{x^2}{4} + \dfrac{y^2}{1} = 1$

71. $5x^2 + 3y^2 = 15$

72. $9x^2 + 4y^2 = 36$

EXPLORACIÓN

¿VERDADERO O FALSO? **En los Ejercicios 73 y 74, determine si la proposición es verdadera o falsa. Justifique su respuesta.**

73. La gráfica de $x^2 + 4y^4 - 4 = 0$ es una elipse.

74. Es más fácil distinguir la gráfica de una elipse de la gráfica de una circunferencia si la excentricidad de la elipse es grande (cercana a 1).

75. Considere la elipse

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1, \quad a + b = 20.$$

(a) El área de la elipse está dada por $A = \pi ab$. Escriba el área de la elipse como función de a.

(b) Encuentre la ecuación de una elipse con un área de 264 centímetros cuadrados.

(c) Complete la tabla usando su ecuación del inciso (a), y haga una conjetura acerca de la forma de la elipse con área máxima.

a	8	9	10	11	12	13
A						

(d) Use una calculadora de gráficas para graficar la función de área y use la gráfica para apoyar su conjetura del inciso (c).

76. PIÉNSELO Al principio de esta sección se observó que una elipse se puede trazar usando dos tachuelas, un hilo de longitud fija (mayor que la distancia entre las dos tachuelas) y un lápiz. Si los extremos del hilo se sujetan a las tachuelas y el hilo se tensa con un lápiz, la trayectoria trazada por el lápiz es una elipse.

(a) ¿Cuál es la longitud del hilo en términos de a?

(b) Explique por qué la trayectoria es una elipse.

77. PIÉNSELO Encuentre la ecuación de una elipse tal que para cualquier punto sobre la elipse, la suma de las distancias del punto (2, 2) y (10, 2) es 36.

78. TOQUE FINAL Describa la relación entre circunferencias y elipses. ¿Cuáles son sus semejanzas? ¿Cómo difieren?

79. DEMOSTRACIÓN Demuestre que $a^2 = b^2 + c^2$ para la elipse

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$$

donde $a > 0$, $b > 0$ y la distancia del centro de la elipse $(0, 0)$ al foco es c.

10.4 HIPÉRBOLAS

Lo que debe aprender

- Escribir ecuaciones de hipérbolas en forma estándar.
- Hallar asíntotas de hipérbolas y graficar éstas.
- Usar propiedades de hipérbolas para resolver problemas de la vida real.
- Clasificar cónicas a partir de sus ecuaciones generales.

Por qué debe aprenderlo

Se pueden usar hipérbolas para modelar y resolver numerosos problemas de la vida real. Por ejemplo, en el Ejercicio 54 de la página 759 se usan hipérbolas en radionavegación a larga distancia para aviones y barcos.

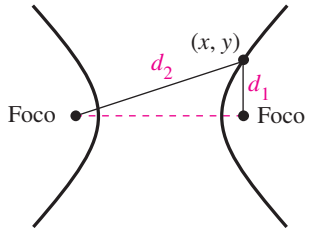
U.S. Navy, William Lipski/AP Photo

Introducción

El tercer tipo de cónica se llama **hipérbola**. La definición de una hipérbola es semejante a la de la elipse. La diferencia es que para una elipse la *suma* de las distancias entre los focos y un punto sobre la elipse es fija, en tanto que para una hipérbola la *diferencia* de las distancias entre los focos y un punto sobre la hipérbola es fija.

Definición de hipérbola

Una **hipérbola** es el conjunto de todos los puntos (x, y) en un plano, cuya diferencia de las distancias desde dos puntos fijos (**focos**) es una constante positiva. Vea la Figura 10.30.



$d_2 - d_1$ es una constante positiva.

FIGURA 10.30

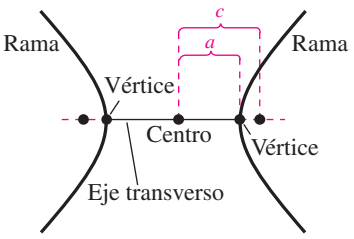


FIGURA 10.31

La gráfica de una hipérbola tiene dos **ramas** desconectadas. La recta que pasa por los dos focos cruza la hipérbola en sus dos **vértices**. El segmento de recta que enlaza los vértices es el **eje transverso** y el punto medio del eje transverso es el **centro** de la hipérbola (Figura 10.31). El desarrollo de la forma estándar de la ecuación de la hipérbola es semejante al de la elipse. Observe en la definición que sigue que a, b y c están relacionados de una manera diferente para hipérbolas que para elipses.

Ecuación estándar de una hipérbola

La **forma estándar de la ecuación de una hipérbola** con centro (h, k) es

$$\frac{(x-h)^2}{a^2} - \frac{(y-k)^2}{b^2} = 1$$ El eje transverso es horizontal.

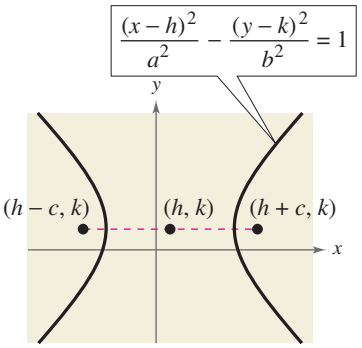
$$\frac{(y-k)^2}{a^2} - \frac{(x-h)^2}{b^2} = 1.$$ El eje transverso es vertical.

Los vértices están a a unidades del centro y los focos están a c unidades del centro. Además, $c^2 = a^2 + b^2$. Si el centro de la hipérbola está en el origen $(0, 0)$, la ecuación toma una de las formas siguientes.

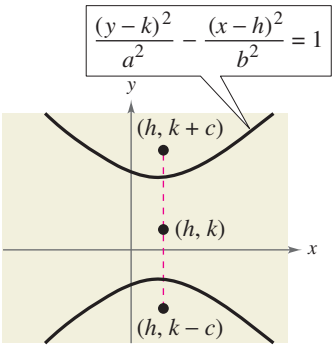
$$\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1$$ El eje transverso es horizontal.

$$\frac{y^2}{a^2} - \frac{x^2}{b^2} = 1$$ El eje transverso es vertical.

La Figura 10.32 muestra las orientaciones tanto horizontal como vertical para una hipérbola



El eje transverso es horizontal



El eje transverso es vertical.

FIGURA **10.32**

Tip de estudio

Cuando busque la forma estándar de la ecuación de cualquier cónica, es útil trazar una gráfica con las características dadas

Ejemplo 1 Hallar la ecuación estándar de una hipérbola

Encuentre la forma estándar de la ecuación de la hipérbola con focos en $(-1, 2)$ y $(5, 2)$ y vértices en $(0, 2)$ y $(4, 2)$.

Solución

Por la fórmula del punto medio, el centro de la hipérbola ocurre en el punto $(2, 2)$. Además, $c = 5 - 2 = 3$ y $a = 4 - 2 = 2$, y se deduce que

$$b = \sqrt{c^2 - a^2} = \sqrt{3^2 - 2^2} = \sqrt{9 - 4} = \sqrt{5}.$$

Por tanto, la hipérbola tiene un eje transverso horizontal y la forma estándar de la ecuación es

$$\frac{(x-2)^2}{2^2} - \frac{(y-2)^2}{(\sqrt{5})^2} = 1.$$ Vea Figura 10.33.

Esta ecuación se simplifica a

$$\frac{(x-2)^2}{4} - \frac{(y-2)^2}{5} = 1.$$

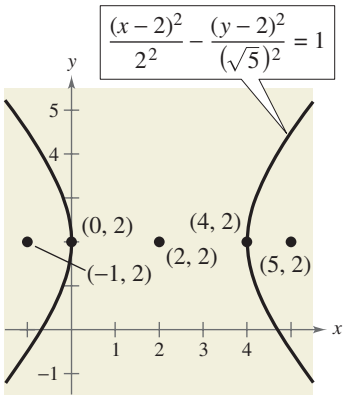


FIGURA **10.33**

PUNTO *de repaso* Ahora trate de hacer el Ejercicio 35.

Asíntotas de una hipérbola

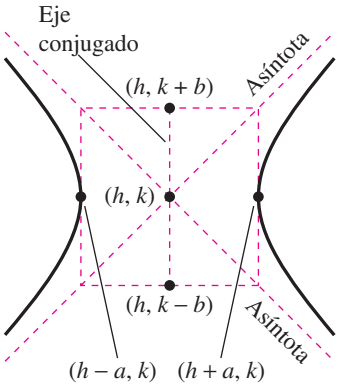


FIGURA 10.34

Cada hipérbola tiene dos **asíntotas** que se intersecan en el centro de la hipérbola, como se muestra en la Figura 10.34. Las asíntotas pasan por los vértices de un rectángulo de dimensiones $2a$ y $2b$, con su centro en (h, k). El segmento de recta de longitud $2b$ que une a $(h, k + b)$ y $(h, k - b)$ [o $(h + b, k)$ y $(h - b, k)$] recibe el nombre de **eje conjugado** de la hipérbola.

Asíntotas de una hipérbola

Las ecuaciones de las asíntotas de una hipérbola son

$$y = k \pm \frac{b}{a}(x - h) \qquad \text{El eje transverso es horizontal.}$$

$$y = k \pm \frac{a}{b}(x - h). \qquad \text{El eje transverso es vertical.}$$

Ejemplo 2 Usar de asíntotas para trazar una hipérbola

Trace la hipérbola cuya ecuación es $4x^2 - y^2 = 16$.

Solución algebraica

Divida cada lado de la ecuación entre 16 y reescriba la ecuación en forma estándar.

$$\frac{x^2}{2^2} - \frac{y^2}{4^2} = 1 \qquad \text{Escribir en la forma estándar.}$$

De esto se puede concluir que $a = 2$, $b = 4$ y el eje transverso es horizontal. Por tanto, los vértices se presentan en $(-2, 0)$ y $(2, 0)$, y los puntos extremos del eje conjugado ocurren en $(0, -4)$ y $(0, 4)$. Usando estos cuatro puntos, se puede trazar el rectángulo que se muestra en la Figura 10.35. Ahora, de $c^2 = a^2 + b^2$, tenemos $c = \sqrt{2^2 + 4^2} = \sqrt{20} = 2\sqrt{5}$. Por tanto, los focos de la hipérbola son $\left(-2\sqrt{5}, 0\right)$ y $\left(2\sqrt{5}, 0\right)$. Finalmente, al trazar las asíntotas pasando por las esquinas de este rectángulo se puede completar el trazo que se muestra en la Figura 10.36. Observe que las asíntotas son $y = 2x$ y $y = -2x$.

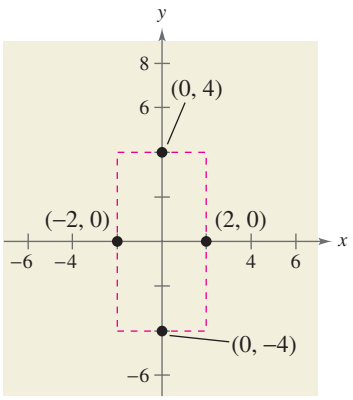


FIGURA 10.35

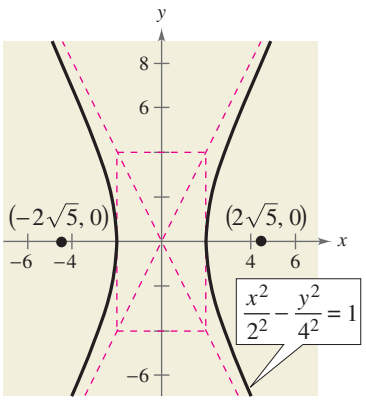


FIGURA 10.36

PUNTO *de repaso* Ahora trate de hacer el Ejercicio 11.

Solución gráfica

Resuelva la ecuación de la hipérbola para y como sigue.

$$4x^2 - y^2 = 16$$
$$4x^2 - 16 = y^2$$
$$\pm\sqrt{4x^2 - 16} = y$$

A continuación use una calculadora de gráficas para graficar $y_1 = \sqrt{4x^2 - 16}$ y $y_2 = -\sqrt{4x^2 - 16}$ en la misma pantalla. Asegúrese de usar un ajuste cuadrado. En la gráfica en la Figura 10.37 se puede ver que el eje transverso es horizontal. Se pueden usar los comandos *zoom* y *trace* para aproximar que los vértices sean $(-2, 0)$ y $(2, 0)$.

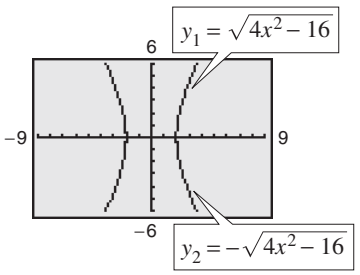


FIGURA 10.37

Ejemplo 3 Hallar las asíntotas de una hipérbola

Trace la hipérbola dada por $4x^2 - 3y^2 + 8x + 16 = 0$ y encuentre las ecuaciones de sus asíntotas y los focos.

Solución

$$4x^2 - 3y^2 + 8x + 16 = 0$$ Escribir la ecuación original.

$$(4x^2 + 8x) - 3y^2 = -16$$ Agrupar términos.

$$4(x^2 + 2x) - 3y^2 = -16$$ Factorizar 4 en términos de x.

$$4(x^2 + 2x + 1) - 3y^2 = -16 + 4$$ Sumar 4 a cada lado.

$$4(x + 1)^2 - 3y^2 = -12$$ Escribir en forma de cuadrado completo.

$$-\frac{(x + 1)^2}{3} + \frac{y^2}{4} = 1$$ Dividir cada lado entre -12.

$$\frac{y^2}{2^2} - \frac{(x + 1)^2}{(\sqrt{3})^2} = 1$$ Escribir en forma estándar.

De esta ecuación se puede concluir que la hipérbola tiene un eje transverso vertical, centrado en $(-1, 0)$, tiene vértices en $(-1, 2)$ y $(-1, -2)$, y tiene un eje conjugado con puntos extremos en $\left(-1 - \sqrt{3}, 0\right)$ y $\left(-1 + \sqrt{3}, 0\right)$. Para dibujar la hipérbola, trace un rectángulo que pase por estos cuatro puntos. Las asíntotas son las rectas que pasan por las esquinas del rectángulo. Usando $a = 2$ y $b = \sqrt{3}$ se puede concluir que las ecuaciones de las asíntotas son

$$y = \frac{2}{\sqrt{3}}(x + 1) \quad \text{y} \quad y = -\frac{2}{\sqrt{3}}(x + 1).$$

Finalmente, se pueden determinar los focos usando la ecuación $c^2 = a^2 + b^2$. Por tanto, tenemos $c = \sqrt{2^2 + \left(\sqrt{3}\right)^2} = \sqrt{7}$, y los focos son $\left(-1, \sqrt{7}\right)$ y $\left(-1, -\sqrt{7}\right)$. La hipérbola se muestra en la Figura 10.38.

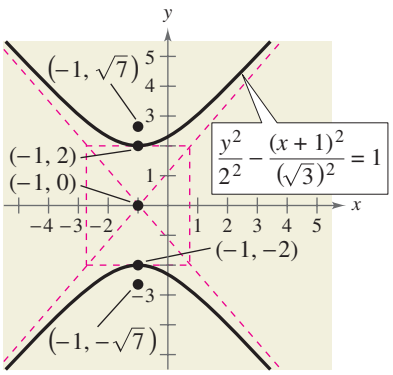


FIGURA 10.38

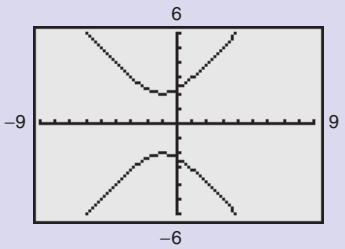
PUNTO *de repaso* Ahora trate de hacer el Ejercicio 19.

TECNOLOGÍA

Se puede usar una calculadora de gráficas para graficar una hipérbola si se trazan las partes superior e inferior en la misma pantalla. Por ejemplo, para graficar la hipérbola del Ejemplo 3, primero se despeja y para obtener

$$y_1 = 2\sqrt{1 + \frac{(x + 1)^2}{3}} \quad \text{y} \quad y_2 = -2\sqrt{1 + \frac{(x + 1)^2}{3}}.$$

Use una pantalla en la que $-9 \le x \le 9$ y $-6 \le y \le 6$. Se debe obtener la gráfica que se muestra a continuación. Observe que la calculadora de gráficas no dibuja las asíntotas, pero si el usuario hace el trazo a lo largo de las ramas, verá que los valores de la hipérbola se aproximan a las asíntotas.



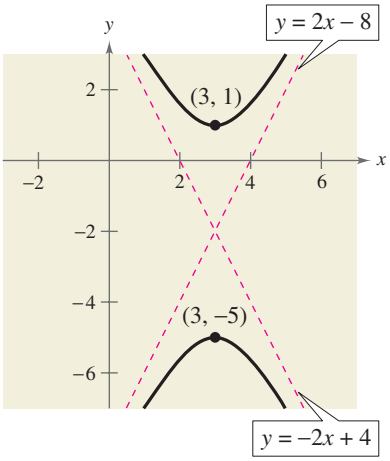


FIGURA 10.39

Ejemplo 4 Usar de asíntotas para hallar la ecuación estándar

Encuentre la forma estándar de la ecuación de la hipérbola que tiene vértices en $(3, -5)$ y $(3, 1)$ y tiene asíntotas

$$y = 2x - 8 \quad \text{y} \quad y = -2x + 4$$

como se muestra en la Figura 10.39.

Solución

Por la fórmula del punto medio, el centro de la hipérbola es $(3, -2)$. Además, la hipérbola tiene un eje transverso vertical con $a = 3$. De las ecuaciones originales se puede determinar que las pendientes de las asíntotas son

$$m_1 = 2 = \frac{a}{b} \quad \text{y} \quad m_2 = -2 = -\frac{a}{b}$$

y, como $a = 3$, se puede concluir que

$$2 = \frac{a}{b} \Rightarrow 2 = \frac{3}{b} \Rightarrow b = \frac{3}{2}.$$

Por tanto, la forma estándar de la ecuación es

$$\frac{(y + 2)^2}{3^2} - \frac{(x - 3)^2}{\left(\frac{3}{2}\right)^2} = 1.$$

PUNTO *de repaso* Ahora trate de hacer el Ejercicio 43.

Al igual que con las elipses, la *excentricidad* de la hipérbola es

$$e = \frac{c}{a} \qquad \text{Excentricidad}$$

y como $c > a$, se deduce que $e > 1$. Si la excentricidad es grande, las ramas de la hipérbola son casi planas, como se muestra en la Figura 10.40. Si la excentricidad es cercana a 1, las ramas de la hipérbola son más angostas, como se ve en la Figura 10.41.

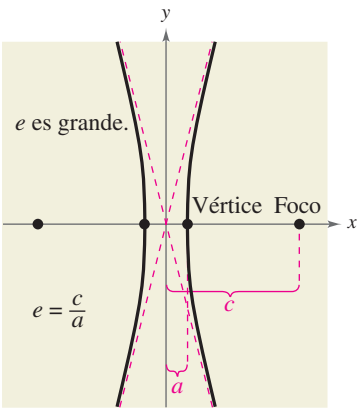


FIGURA 10.40

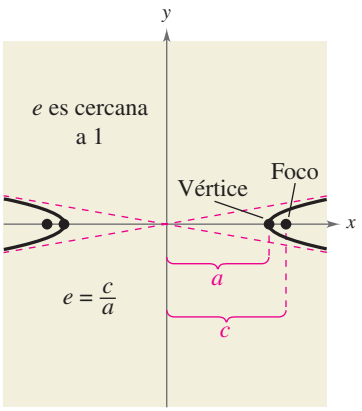


FIGURA 10.41

Aplicaciones

La siguiente aplicación fue perfeccionada durante la Segunda Guerra Mundial. Muestra cómo las propiedades de la hipérbola pueden usarse en radar y otros sistemas de detección.

Ejemplo 5 Una aplicación con hipérbolas

Dos micrófonos, a 1 milla de distancia entre sí, registran una explosión. El micrófono A recibe el sonido 2 segundos antes que el micrófono B. ¿Dónde ocurrió la explosión? (Suponga que el sonido viaja a 1100 pies por segundo.)

Solución

Suponiendo que el sonido viaja a 1100 pies por segundo, se sabe que la explosión tuvo lugar a 2200 pies más lejos de B que de A, como se muestra en la Figura 10.42. El lugar geométrico de todos los puntos que estén 2200 pies más cerca de A que de B es una rama de la hipérbola

$$\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1$$

donde

$$c = \frac{5280}{2} = 2640$$

y

$$a = \frac{2200}{2} = 1100.$$

Entonces, $b^2 = c^2 - a^2 = 2640^2 - 1100^2 = 5\,759\,600$, y se puede concluir que la explosión ocurrió en algún punto en la rama derecha de la hipérbola.

$$\frac{x^2}{1\,210\,000} - \frac{y^2}{5\,759\,600} = 1.$$

PUNTO *de repaso* Ahora trate de hacer el Ejercicio 53.

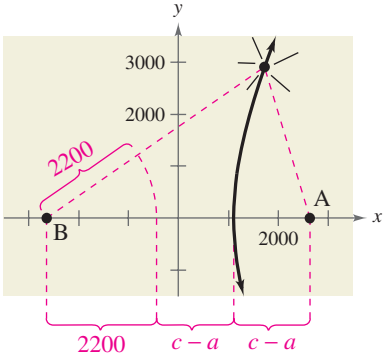


FIGURA 10.42

Otra interesante aplicación de las secciones cónicas comprende las órbitas de cometas en nuestro sistema solar. De los 610 cometas identificados antes de 1970, 245 tienen órbitas elípticas, 295 tienen órbitas parabólicas y 70 tienen órbitas hiperbólicas. El centro del Sol es un foco de cada una de estas órbitas y cada una de las órbitas tiene un vértice en el punto donde el cometa es más cercano al Sol, como se ve en la Figura 10.43. Sin lugar a dudas, ha habido numerosos cometas con órbitas parabólicas o hiperbólicas que no fueron identificados. Sólo llegamos a ver esos cometas *una vez*. Los cometas con órbitas elípticas, como el Halley, son los únicos que permanecen en nuestro sistema solar.

Si p es la distancia entre el vértice y el foco (en metros) y v es la rapidez del cometa en el vértice (en metros por segundo), entonces el tipo de órbita se determina como sigue.

1. Elipse: $v < \sqrt{2GM/p}$

2. Parábola: $v = \sqrt{2GM/p}$

3. Hipérbola: $v > \sqrt{2GM/p}$

En cada una de estas relaciones, $M = 1.989 \times 10^{30}$ kilogramos (la masa del Sol) y $G \approx 6.67 \times 10^{-11}$ metros cúbicos por kilogramo-segundo al cuadrado (la constante de gravitación universal).

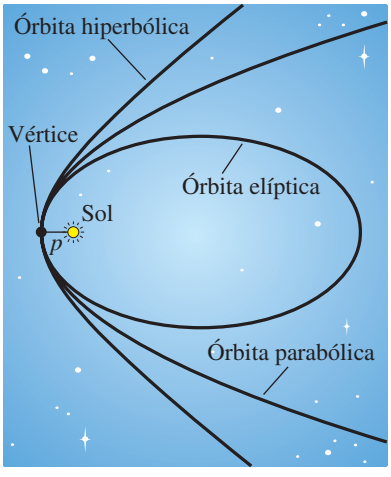


FIGURA 10.43

Ecuaciones generales de cónicas

Clasificación de una cónica a partir de su ecuación general

La gráfica de $Ax^2 + Cy^2 + Dx + Ey + F = 0$ es una de lo siguiente.

1. *Circunferencia:* $A = C$
2. *Parábola:* $AC = 0$ $A = 0$ o $C = 0$, pero no ambas.
3. *Elipse:* $AC > 0$ A y C tienen signos iguales.
4. *Hipérbola:* $AC < 0$ A y C tienen signos contrarios.

La prueba de arriba es válida *si* la gráfica es una cónica. La prueba no se aplica a ecuaciones tales como $x^2 + y^2 = -1$, cuya gráfica no es una cónica.

Ejemplo 6 Clasificar cónicas a partir de ecuaciones generales

Clasifique la gráfica de cada ecuación.

a. $4x^2 - 9x + y - 5 = 0$
b. $4x^2 - y^2 + 8x - 6y + 4 = 0$
c. $2x^2 + 4y^2 - 4x + 12y = 0$
d. $2x^2 + 2y^2 - 8x + 12y + 2 = 0$

Solución

a. Para la ecuación $4x^2 - 9x + y - 5 = 0$, tenemos

$$AC = 4(0) = 0.$$ Parábola

Por tanto, la gráfica es una parábola.

b. Para la ecuación $4x^2 - y^2 + 8x - 6y + 4 = 0$, tenemos

$$AC = 4(-1) < 0.$$ Hipérbola

Por tanto, la gráfica es una hipérbola.

c. Para la ecuación $2x^2 + 4y^2 - 4x + 12y = 0$, tenemos

$$AC = 2(4) > 0.$$ Elipse

Por tanto, la gráfica es una elipse.

d. Para la ecuación $2x^2 + 2y^2 - 8x + 12y + 2 = 0$, tenemos

$$A = C = 2.$$ Circunferencia

Por tanto, la gráfica es una circunferencia.

PUNTO *de repaso* Ahora trate de hacer el Ejercicio 61.

NOTA HISTÓRICA

The Granger Collection

Caroline Herschel (1750-1848) fue la primera mujer a quien se acredita detectar un nuevo cometa. Durante su larga vida, esta astrónoma inglesa descubrió un total de ocho nuevos cometas.

Discusión en clase

Trazar cónicas Trace cada una de las cónicas descritas en el Ejemplo 6. Escriba un párrafo que describa los procedimientos que permitan de manera eficiente trazar las cónicas.

10.4 EJERCICIOS

En www.CalcChat.com vea las soluciones a los ejercicios impares

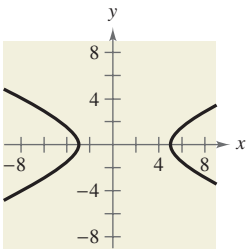
VOCABULARIO: Llene los espacios en blanco.

1. Una _____ es el conjunto de todos los puntos (x, y) en un plano, cuya diferencia de las distancias desde dos puntos fijos distintos, llamados _____, es una constante positiva.
2. La gráfica de una hipérbola tiene dos partes desconectadas llamadas _____.
3. El segmento de recta que enlaza los vértices de una hipérbola se denomina _____ _____, y el punto medio del segmento de recta es el _____ de la hipérbola.
4. Cada hipérbola tiene dos _____ que se intersecan en el centro de la hipérbola.

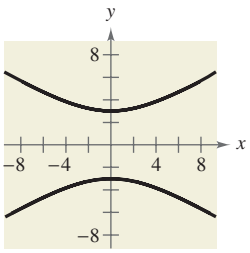
HABILIDADES Y APLICACIONES

En los Ejercicios 5-8, relacione la ecuación con su gráfica. [Las gráficas están marcadas (a), (b), (c) y (d).]

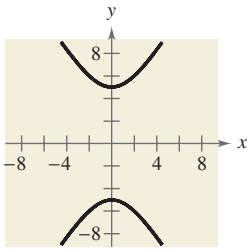
(a)



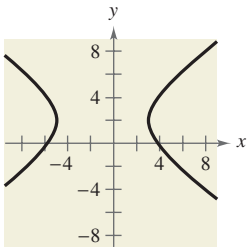
(b)



(c)



(d)



5. $\frac{y^2}{9} - \frac{x^2}{25} = 1$
6. $\frac{y^2}{25} - \frac{x^2}{9} = 1$
7. $\frac{(x-1)^2}{16} - \frac{y^2}{4} = 1$
8. $\frac{(x+1)^2}{16} - \frac{(y-2)^2}{9} = 1$

En los Ejercicios 9-22, encuentre el centro, vértices, focos y las ecuaciones de las asíntotas de la hipérbola y trace su gráfica usando estas últimas como ayuda.

9. $x^2 - y^2 = 1$
10. $\frac{x^2}{9} - \frac{y^2}{25} = 1$
11. $\frac{y^2}{25} - \frac{x^2}{81} = 1$
12. $\frac{x^2}{36} - \frac{y^2}{4} = 1$
13. $\frac{y^2}{1} - \frac{x^2}{4} = 1$
14. $\frac{y^2}{9} - \frac{x^2}{1} = 1$
15. $\frac{(x-1)^2}{4} - \frac{(y+2)^2}{1} = 1$
16. $\frac{(x+3)^2}{144} - \frac{(y-2)^2}{25} = 1$
17. $\frac{(y+6)^2}{1/9} - \frac{(x-2)^2}{1/4} = 1$
18. $\frac{(y-1)^2}{1/4} - \frac{(x+3)^2}{1/16} = 1$
19. $9x^2 - y^2 - 36x - 6y + 18 = 0$
20. $x^2 - 9y^2 + 36y - 72 = 0$
21. $x^2 - 9y^2 + 2x - 54y - 80 = 0$
22. $16y^2 - x^2 + 2x + 64y + 63 = 0$

En los Ejercicios 23-28, encuentre el centro, vértices, focos y las ecuaciones de las asíntotas de la hipérbola. Use una calculadora de gráficas para graficar la hipérbola y sus asíntotas.

23. $2x^2 - 3y^2 = 6$
24. $6y^2 - 3x^2 = 18$
25. $4x^2 - 9y^2 = 36$
26. $25x^2 - 4y^2 = 100$
27. $9y^2 - x^2 + 2x + 54y + 62 = 0$
28. $9x^2 - y^2 + 54x + 10y + 55 = 0$

En los Ejercicios 29-34, encuentre la forma estándar de la ecuación de la hipérbola con las características dadas y centro en el origen.

29. Vértices: $(0, \pm 2)$; focos: $(0, \pm 4)$
30. Vértices: $(\pm 4, 0)$; focos: $(\pm 6, 0)$
31. Vértices: $(\pm 1, 0)$; asíntotas: $y = \pm 5x$
32. Vértices: $(0, \pm 3)$; asíntotas: $y = \pm 3x$
33. Focos: $(0, \pm 8)$; asíntotas: $y = \pm 4x$
34. Focos: $(\pm 10, 0)$; asíntotas: $y = \pm \frac{3}{4}x$

En los Ejercicios 35-46, encuentre la forma estándar de la ecuación de la hipérbola con las características dadas.

35. Vértices: $(2, 0), (6, 0)$; focos: $(0, 0), (8, 0)$
36. Vértices: $(2, 3), (2, -3)$; focos: $(2, 6), (2, -6)$
37. Vértices: $(4, 1), (4, 9)$; focos: $(4, 0), (4, 10)$
38. Vértices: $(-2, 1), (2, 1)$; focos: $(-3, 1), (3, 1)$

39. Vértices: $(2, 3), (2, -3)$;
pasa por el punto $(0, 5)$

40. Vértices: $(-2, 1), (2, 1)$;
pasa por el punto $(5, 4)$

41. Vértices: $(0, 4), (0, 0)$;
pasa por el punto $\left(\sqrt{5}, -1\right)$

42. Vértices: $(1, 2), (1, -2)$;
pasa por el punto $\left(0, \sqrt{5}\right)$

43. Vértices: $(1, 2), (3, 2)$;
asíntotas: $y = x,\ y = 4 - x$

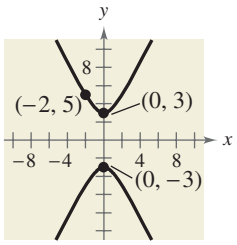
44. Vértices: $(3, 0), (3, 6)$;
asíntotas: $y = 6 - x,\ y = x$

45. Vértices: $(0, 2), (6, 2)$;
asíntotas: $y = \frac{2}{3}x,\ y = 4 - \frac{2}{3}x$

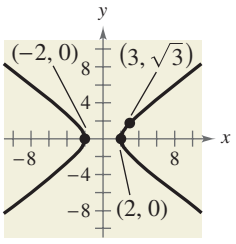
46. Vértices: $(3, 0), (3, 4)$;
asíntotas: $y = \frac{2}{3}x,\ y = 4 - \frac{2}{3}x$

En los Ejercicios 47-50, escriba la forma estándar de la ecuación de la hipérbola.

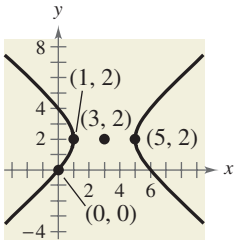
47.



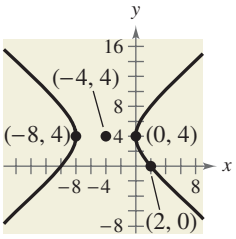
48.



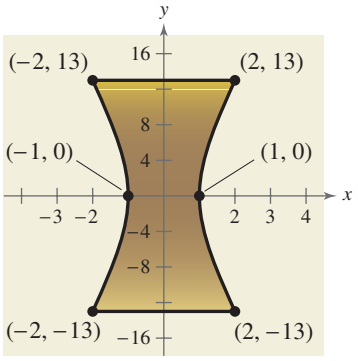
49.



50.



51. ARTE Una escultura tiene sección transversal hiperbólica (vea figura).



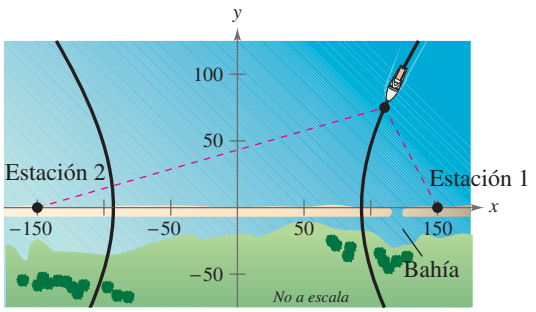
(a) Escriba una ecuación que modele los lados curvos de la escultura.

(b) Cada unidad del plano coordenado representa 1 pie. Encuentre el ancho de la escultura a una altura de 5 pies.

52. UBICACIÓN DE UN SONIDO Usted y uno de sus amigos viven a 4 millas entre sí (en la misma calle "este-oeste") y están hablando por teléfono. Usted escucha el trueno de un rayo de una tormenta y, 18 segundos más tarde, su amigo lo oye. Encuentre una ecuación que dé los posibles lugares donde el rayo pudo haber caído. (Suponga que el sistema de coordenadas se mide en pies y que el sonido viaja a 1100 pies por segundo.)

53. UBICACIÓN DE UN SONIDO Tres estaciones de escucha situadas en $(3300, 0)$, $(3300, 1100)$ y $(-3300, 0)$ vigilan una explosión. Las dos últimas estaciones detectan la explosión 1 segundo y 4 segundos después de la primera, respectivamente. Determine las coordenadas de la explosión. (Suponga que el sistema de coordenadas se mide en pies y que el sonido viaja a 1100 pies por segundo.)

54. LORÁN La radionavegación a larga distancia para aviones y barcas utiliza pulsos sincronizados transmitidos por estaciones muy separadas entre sí. Estos pulsos viajan a la velocidad de la luz (186 000 millas por segundo). La diferencia en los tiempos de llegada de estos pulsos en un avión o barco es constante en una hipérbola que tiene las estaciones transmisoras como focos. Suponga que dos estaciones, situadas a 300 millas entre sí, están ubicadas en el sistema de coordenadas rectangulares en puntos con coordenadas $(-150, 0)$ y $(150, 0)$, y que un barco está viajando sobre una trayectoria hiperbólica con coordenadas $(x, 75)$ (vea figura).



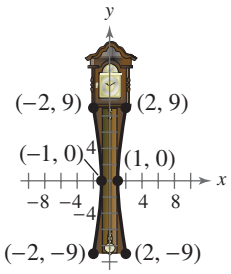
(a) Encuentre la coordenada x de la posición del barco si la diferencia en tiempo entre los pulsos desde las estaciones transmisoras es 1000 microsegundos (0.001 de segundo).

(b) Determine la distancia entre el barco y la estación 1 cuando el barco llegue a la orilla.

(c) El barco desea entrar a una bahía localizada entre las dos estaciones. La bahía está a 30 millas de la estación 1. ¿Cuál debe ser la diferencia en tiempo entre los pulsos?

(d) El barco está a 60 millas frente a la costa cuando se obtiene la diferencia en tiempo del inciso (c). ¿Cuál es la posición del barco?

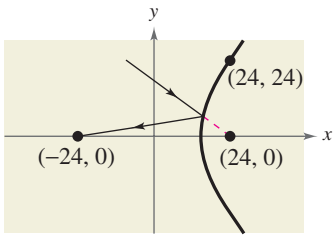
55. PÉNDULO La base para el péndulo de un reloj tiene forma de hipérbola (vea figura).



(a) Escriba una ecuación de la sección transversal de la base.

(b) Cada unidad del plano de coordenadas representa $\frac{1}{2}$ pie. Encuentre el ancho de la base del péndulo a 4 pulgadas del inciso más baja.

56. ESPEJO HIPERBÓLICO Un espejo hiperbólico (utilizado en algunos telescopios) tiene la propiedad de que un rayo de luz dirigido en un foco será reflejado al otro foco. El foco de un espejo hiperbólico (vea figura) tiene coordenadas (24, 0). Encuentre el vértice del espejo si el montaje en el borde superior del espejo tiene coordenadas (24, 24).



En los Ejercicios 57-72, clasifique la gráfica de la ecuación como circunferencia, parábola, elipse o hipérbola.

57. $9x^2 + 4y^2 - 18x + 16y - 119 = 0$

58. $x^2 + y^2 - 4x - 6y - 23 = 0$

59. $4x^2 - y^2 - 4x - 3 = 0$

60. $y^2 - 6y - 4x + 21 = 0$

61. $y^2 - 4x^2 + 4x - 2y - 4 = 0$

62. $x^2 + y^2 - 4x + 6y - 3 = 0$

63. $y^2 + 12x + 4y + 28 = 0$

64. $4x^2 + 25y^2 + 16x + 250y + 541 = 0$

65. $4x^2 + 3y^2 + 8x - 24y + 51 = 0$

66. $4y^2 - 2x^2 - 4y - 8x - 15 = 0$

67. $25x^2 - 10x - 200y - 119 = 0$

68. $4y^2 + 4x^2 - 24x + 35 = 0$

69. $x^2 - 6x - 2y + 7 = 0$

70. $9x^2 + 4y^2 - 90x + 8y + 228 = 0$

71. $100x^2 + 100y^2 - 100x + 400y + 409 = 0$

72. $4x^2 - y^2 + 4x + 2y - 1 = 0$

EXPLORACIÓN

¿VERDADERO O FALSO? **En los Ejercicios 73-76, determine si la proposición es verdadera o falsa. Justifique su respuesta.**

73. En la forma estándar de la ecuación de una hipérbola, cuanto más grande es la razón entre b y a, mayor es la excentricidad de la hipérbola.

74. En la forma estándar de la ecuación de una hipérbola, la solución trivial de dos rectas que se intersecan se presenta cuando $b = 0$.

75. Si $D \neq 0$ y $E \neq 0$, la gráfica de $x^2 - y^2 + Dx + Ey = 0$ es una hipérbola.

76. Si las asíntotas de la hipérbola $\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1$, donde $a, b > 0$, se cortan en ángulos rectos, entonces $a = b$.

77. Considere una hipérbola centrada en el origen con un eje transverso horizontal. Use la definición de una hipérbola para deducir su forma estándar.

78. ESCRITURA Explique la forma en que se puede usar el rectángulo central de una hipérbola para trazar sus asíntotas.

79. PIÉNSELO Cambie la ecuación de la hipérbola de modo que su gráfica sea la mitad inferior de la hipérbola.

$$9x^2 - 54x - 4y^2 + 8y + 41 = 0$$

80. TOQUE FINAL Dadas las hipérbolas

$$\frac{x^2}{16} - \frac{y^2}{9} = 1 \quad \text{y} \quad \frac{y^2}{9} - \frac{x^2}{16} = 1$$

describa cualesquiera características comunes que compartan, así como cualesquiera diferencias en sus gráficas. Verifique sus resultados usando una calculadora de gráficas para trazar cada una de las hipérbolas en la misma pantalla.

81. Una circunferencia y una parábola pueden tener 0, 1, 2, 3 o 4 puntos de intersección. Trace la circunferencia dada por $x^2 + y^2 = 4$. Discuta la forma en que esta circunferencia podría cortar una parábola con una ecuación de la forma $y = x^2 + C$. A continuación, encuentre los valores de C para cada uno de los cinco casos descritos abajo. Use una calculadora de gráficas para verificar sus resultados.

(a) No hay puntos de intersección

(b) Un punto de intersección

(c) Dos puntos de intersección

(d) Tres puntos de intersección

(e) Cuatro puntos de intersección

10.5 Rotación de cónicas

Lo que debe aprender

- Girar los ejes de coordenadas para eliminar el término en *xy* en ecuaciones de cónicas.
- Usar el discriminante para clasificar cónicas.

Por qué debe aprenderlo

Como se ilustra en los Ejercicios 13-26 en la página 767, la rotación de los ejes de coordenadas puede ayudar a identificar la gráfica de una ecuación general de segundo grado.

Rotación

En la sección precedente aprendimos que la ecuación de una cónica con ejes paralelos a uno de los ejes de coordenadas tiene una forma estándar que se puede escribir en la forma general

$$Ax^2 + Cy^2 + Dx + Ey + F = 0.$$ Eje horizontal o vertical

En esta sección estudiaremos las ecuaciones de cónicas cuyos ejes se giran de modo que ya no sean paralelos al eje x o al eje y. La ecuación general para esa cónica contiene un término xy.

$$Ax^2 + Bxy + Cy^2 + Dx + Ey + F = 0$$ Ecuación en el plano xy

Para eliminar este término en xy se puede usar un procedimiento llamado **rotación de ejes**. El objetivo es girar los ejes x y y hasta que sean paralelos a los ejes de la cónica. Los ejes girados se denotan como eje x' y eje y', como se muestra en la Figura 10.44.

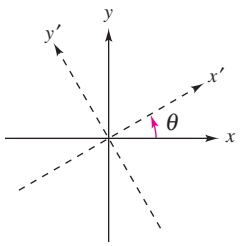


FIGURA 10.44

Después de la rotación, la ecuación de la cónica en el nuevo plano $x'y'$ tendrá la forma

$$A'(x')^2 + C'(y')^2 + D'x' + E'y' + F' = 0.$$ Ecuación en el plano $x'y'$

Como esta ecuación no tiene término en xy, se puede obtener una forma estándar al completar el cuadrado. El siguiente teorema identifica cuánto girar los ejes para eliminar el término en xy y también las ecuaciones para determinar los nuevos coeficientes A', C', D', E' y F'.

Rotación de ejes para eliminar un término en *xy*

La ecuación general de segundo grado

$$Ax^2 + Bxy + Cy^2 + Dx + Ey + F = 0$$

se puede reescribir como

$$A'(x')^2 + C'(y')^2 + D'x' + E'y' + F' = 0$$

al girar los ejes de coordenadas un ángulo θ, donde

$$\cot 2\theta = \frac{A - C}{B}.$$

Los coeficientes de la nueva ecuación se obtienen al hacer las sustituciones $x = x' \cos\theta - y' \operatorname{sen}\theta$ y $y = x' \operatorname{sen}\theta + y' \cos\theta$.

ATENCIÓN

Recuerde que las sustituciones

$$x = x' \cos\theta - y' \operatorname{sen}\theta$$

y

$$y = x' \operatorname{sen}\theta + y' \cos\theta$$

fueron desarrolladas para eliminar el término en $x'y'$ en el sistema girado. Usted puede usar esto para revisar su trabajo. En otras palabras, si su ecuación final contiene un término en $x'y'$, sabrá que ha cometido un error.

Ejemplo 1 Rotar los ejes para una hipérbola

Escriba la ecuación $xy - 1 = 0$ en forma estándar.

Solución

Como $A = 0$, $B = 1$ y $C = 0$, tenemos

$$\cot 2\theta = \frac{A - C}{B} = 0 \quad \Rightarrow \quad 2\theta = \frac{\pi}{2} \quad \Rightarrow \quad \theta = \frac{\pi}{4}$$

lo cual implica que

$$\begin{aligned} x &= x' \cos\frac{\pi}{4} - y' \operatorname{sen}\frac{\pi}{4} \\ &= x'\left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right) - y'\left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right) \\ &= \frac{x' - y'}{\sqrt{2}} \end{aligned}$$

y

$$\begin{aligned} y &= x' \operatorname{sen}\frac{\pi}{4} + y' \cos\frac{\pi}{4} \\ &= x'\left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right) + y'\left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right) \\ &= \frac{x' + y'}{\sqrt{2}}. \end{aligned}$$

La ecuación en el sistema $x'y'$ se obtiene al sustituir estas expresiones en la ecuación $xy - 1 = 0$.

$$\left(\frac{x' - y'}{\sqrt{2}}\right)\left(\frac{x' + y'}{\sqrt{2}}\right) - 1 = 0$$

$$\frac{(x')^2 - (y')^2}{2} - 1 = 0$$

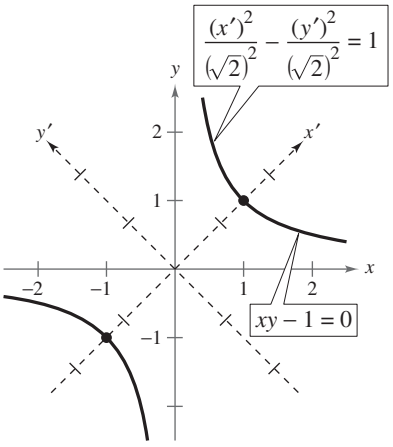
$$\frac{(x')^2}{(\sqrt{2})^2} - \frac{(y')^2}{(\sqrt{2})^2} = 1 \qquad \text{Escribir en forma estándar.}$$

En el sistema $x'y'$, ésta es una hipérbola centrada en el origen con vértices en $(\pm\sqrt{2}, 0)$, como se ve en la Figura 10.45. Para hallar las coordenadas de los vértices en el sistema xy, sustituya las coordenadas $(\pm\sqrt{2}, 0)$ en las ecuaciones

$$x = \frac{x' - y'}{\sqrt{2}} \quad \text{y} \quad y = \frac{x' + y'}{\sqrt{2}}.$$

Esta sustitución da los vértices $(1, 1)$ y $(-1, -1)$ en el sistema xy. Observe que las asíntotas de la hipérbola tienen ecuaciones $y' = \pm x'$, lo que corresponde a los ejes originales x y y.

PUNTO *de repaso* Ahora trate de hacer el Ejercicio 13.



Vértices:
En el sistema $x'y'$: $(\sqrt{2}, 0), (-\sqrt{2}, 0)$
En el sistema xy: $(1, 1), (-1, -1)$
FIGURA 10.45

Ejemplo 2 Rotar los ejes para una elipse

Trace la gráfica de $7x^2 - 6\sqrt{3}xy + 13y^2 - 16 = 0$.

Solución

Como $A = 7$, $B = -6\sqrt{3}$ y $C = 13$, tenemos

$$\cot 2\theta = \frac{A - C}{B} = \frac{7 - 13}{-6\sqrt{3}} = \frac{1}{\sqrt{3}}$$

lo cual implica que $\theta = \pi/6$. La ecuación en el sistema $x'y'$ se obtiene al hacer las sustituciones

$$\begin{aligned} x &= x' \cos\frac{\pi}{6} - y' \operatorname{sen}\frac{\pi}{6} \\ &= x'\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right) - y'\left(\frac{1}{2}\right) \\ &= \frac{\sqrt{3}x' - y'}{2} \end{aligned}$$

y

$$\begin{aligned} y &= x' \operatorname{sen}\frac{\pi}{6} + y' \cos\frac{\pi}{6} \\ &= x'\left(\frac{1}{2}\right) + y'\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right) \\ &= \frac{x' + \sqrt{3}y'}{2} \end{aligned}$$

en la ecuación original. Por tanto, tenemos

$$7x^2 - 6\sqrt{3}xy + 13y^2 - 16 = 0$$

$$7\left(\frac{\sqrt{3}x' - y'}{2}\right)^2 - 6\sqrt{3}\left(\frac{\sqrt{3}x' - y'}{2}\right)\left(\frac{x' + \sqrt{3}y'}{2}\right)$$

$$+ 13\left(\frac{x' + \sqrt{3}y'}{2}\right)^2 - 16 = 0$$

que se simplifica a

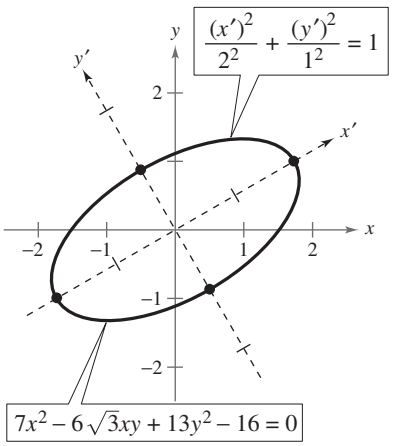
$$4(x')^2 + 16(y')^2 - 16 = 0$$

$$4(x')^2 + 16(y')^2 = 16$$

$$\frac{(x')^2}{4} + \frac{(y')^2}{1} = 1$$

$$\frac{(x')^2}{2^2} + \frac{(y')^2}{1^2} = 1. \qquad \text{Escribir en forma estándar.}$$

Ésta es la ecuación de una elipse centrada en el origen con vértices en $(\pm 2, 0)$ en el sistema $x'y'$, como se ve en la Figura 10.46.



Vértices:
En el sistema $x'y'$: $(\pm 2, 0)$
En el sistema xy: $(\sqrt{3}, 1)\ (-\sqrt{3}, -1)$
FIGURA 10.46

PUNTO *de repaso* Ahora trate de hacer el Ejercicio 19.

Ejemplo 3 Rotar los ejes para una parábola

Trace la gráfica de $x^2 - 4xy + 4y^2 + 5\sqrt{5}y + 1 = 0$.

Solución

Como $A = 1$, $B = -4$ y $C = 4$, tenemos

$$\cot 2\theta = \frac{A - C}{B} = \frac{1 - 4}{-4} = \frac{3}{4}.$$

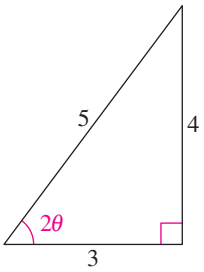


FIGURA 10.47

Usando esta información, trace un triángulo rectángulo como se muestra en la Figura 10.47. En la figura se puede ver que $\cos 2\theta = \frac{3}{5}$. Para hallar los valores de $\operatorname{sen}\theta$ y $\cos\theta$, se pueden usar las fórmulas de semiángulo en las formas

$$\operatorname{sen}\theta = \sqrt{\frac{1 - \cos 2\theta}{2}} \quad \text{y} \quad \cos\theta = \sqrt{\frac{1 + \cos 2\theta}{2}}.$$

Por tanto,

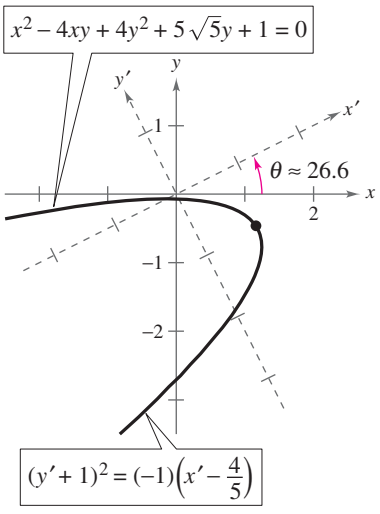
$$\operatorname{sen}\theta = \sqrt{\frac{1 - \cos 2\theta}{2}} = \sqrt{\frac{1 - \frac{3}{5}}{2}} = \sqrt{\frac{1}{5}} = \frac{1}{\sqrt{5}}$$

$$\cos\theta = \sqrt{\frac{1 + \cos 2\theta}{2}} = \sqrt{\frac{1 + \frac{3}{5}}{2}} = \sqrt{\frac{4}{5}} = \frac{2}{\sqrt{5}}.$$

En consecuencia, se usan las sustituciones

$$x = x'\cos\theta - y'\operatorname{sen}\theta$$
$$= x'\left(\frac{2}{\sqrt{5}}\right) - y'\left(\frac{1}{\sqrt{5}}\right) = \frac{2x' - y'}{\sqrt{5}}$$

$$y = x'\operatorname{sen}\theta + y'\cos\theta$$
$$= x'\left(\frac{1}{\sqrt{5}}\right) + y'\left(\frac{2}{\sqrt{5}}\right) = \frac{x' + 2y'}{\sqrt{5}}.$$



Vértice:
En el sistema $x'y'$: $\left(\frac{4}{5}, -1\right)$
En el sistema xy: $\left(\frac{13}{5\sqrt{5}}, -\frac{6}{5\sqrt{5}}\right)$
FIGURA 10.48

Sustituyendo estas expresiones en la ecuación original, tenemos

$$x^2 - 4xy + 4y^2 + 5\sqrt{5}y + 1 = 0$$

$$\left(\frac{2x' - y'}{\sqrt{5}}\right)^2 - 4\left(\frac{2x' - y'}{\sqrt{5}}\right)\left(\frac{x' + 2y'}{\sqrt{5}}\right) + 4\left(\frac{x' + 2y'}{\sqrt{5}}\right)^2 + 5\sqrt{5}\left(\frac{x' + 2y'}{\sqrt{5}}\right) + 1 = 0$$

que se simplifica como sigue.

$$5(y')^2 + 5x' + 10y' + 1 = 0$$
$$5[(y')^2 + 2y'] = -5x' - 1 \qquad \text{Agrupar términos.}$$
$$5(y' + 1)^2 = -5x' + 4 \qquad \text{Escribir en forma de cuadrado completo.}$$
$$(y' + 1)^2 = (-1)\left(x' - \frac{4}{5}\right) \qquad \text{Escribir en forma estándar.}$$

La gráfica de esta ecuación es una parábola con vértice en $\left(\frac{4}{5}, -1\right)$. Su eje es paralelo al eje x' en el sistema $x'y'$, y como $\operatorname{sen}\theta = 1/\sqrt{5}$, $\theta \approx 26.6°$, como se muestra en la Figura 10.48.

PUNTO *de repaso* Ahora trate de hacer el Ejercicio 25.

Invariantes bajo rotación

En el teorema de la rotación de ejes que aparece al principio de esta sección, observe que el término constante es el mismo en ambas ecuaciones, $F' = F$. Estas cantidades son **invariantes bajo rotación**. El siguiente teorema indica algunas otras invariantes de rotación.

Invariantes de rotación

La rotación de los ejes de coordenadas que pasan por un ángulo θ que transforma la ecuación $Ax^2 + Bxy + Cy^2 + Dx + Ey + F = 0$ en la forma

$$A'(x')^2 + C'(y')^2 + D'x' + E'y' + F' = 0$$

tiene las siguientes invariantes de rotación.

1. $F = F'$

2. $A + C = A' + C'$

3. $B^2 - 4AC = (B')^2 - 4A'C'$

ATENCIÓN

Si hay un término en xy en la ecuación de una cónica, usted debe ver entonces que ésta está girada. Antes de girar los ejes, se debe usar el discriminante para clasificar la cónica.

Se pueden usar los resultados de este teorema para clasificar la gráfica de una ecuación de segundo grado *con* un término en xy en forma muy semejante a como se hace para una ecuación de segundo grado *sin* un término en xy. Nótese que como $B' = 0$, la invariante $B^2 - 4AC$ se reduce a

$$B^2 - 4AC = -4A'C'. \qquad \text{Discriminante}$$

Esta cantidad se denomina **discriminante** de la ecuación

$$Ax^2 + Bxy + Cy^2 + Dx + Ey + F = 0.$$

Ahora, del procedimiento de clasificación dado en la sección 10.4, sabemos que el signo de $A'C'$ determina el tipo de gráfica para la ecuación

$$A'(x')^2 + C'(y')^2 + D'x' + E'y' + F' = 0.$$

En consecuencia, el signo de $B^2 - 4AC$ determinará el tipo de gráfica para la ecuación original, como se da en la siguiente clasificación.

Clasificación de cónicas por el discriminante

La gráfica de la ecuación $Ax^2 + Bxy + Cy^2 + Dx + Ey + F = 0$ está, excepto en casos degenerados, determinada por su discriminante en la forma siguiente.

1. *Elipse o circunferencia:* $B^2 - 4AC < 0$

2. *Parábola:* $B^2 - 4AC = 0$

3. *Hipérbola:* $B^2 - 4AC > 0$

Por ejemplo, en la ecuación general

$$3x^2 + 7xy + 5y^2 - 6x - 7y + 15 = 0$$

tenemos $A = 3$, $B = 7$ y $C = 5$, por lo que el discriminante es

$$B^2 - 4AC = 7^2 - 4(3)(5) = 49 - 60 = -11.$$

Como $-11 < 0$, la gráfica de la ecuación es una elipse o una circunferencia.

Ejemplo 4 Rotación y calculadoras de gráficas

Por cada ecuación, clasifique la gráfica que le corresponde, use la fórmula cuadrática para despejar y y luego use una calculadora de gráficas para graficar la ecuación.

a. $2x^2 - 3xy + 2y^2 - 2x = 0$

b. $x^2 - 6xy + 9y^2 - 2y + 1 = 0$

c. $3x^2 + 8xy + 4y^2 - 7 = 0$

Solución

a. Como $B^2 - 4AC = 9 - 16 < 0$, la gráfica es una circunferencia o una elipse. Despeje y como sigue.

$$2x^2 - 3xy + 2y^2 - 2x = 0 \qquad \text{Escribir la ecuación original.}$$

$$2y^2 - 3xy + (2x^2 - 2x) = 0 \qquad \text{Forma cuadrática } ay^2 + by + c = 0$$

$$y = \frac{-(-3x) \pm \sqrt{(-3x)^2 - 4(2)(2x^2 - 2x)}}{2(2)}$$

$$y = \frac{3x \pm \sqrt{x(16 - 7x)}}{4}$$

Grafique ambas ecuaciones para obtener la elipse que se ve en la Figura 10.49.

$$y_1 = \frac{3x + \sqrt{x(16 - 7x)}}{4} \qquad \text{Mitad superior de elipse}$$

$$y_2 = \frac{3x - \sqrt{x(16 - 7x)}}{4} \qquad \text{Mitad inferior de elipse}$$

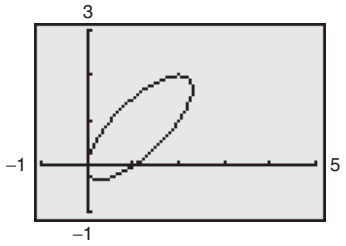


FIGURA 10.49

b. Como $B^2 - 4AC = 36 - 36 = 0$, la gráfica es una parábola.

$$x^2 - 6xy + 9y^2 - 2y + 1 = 0 \qquad \text{Escribir la ecuación original.}$$

$$9y^2 - (6x + 2)y + (x^2 + 1) = 0 \qquad \text{Forma cuadrática } ay^2 + by + c = 0$$

$$y = \frac{(6x + 2) \pm \sqrt{(6x + 2)^2 - 4(9)(x^2 + 1)}}{2(9)}$$

Grafique ambas ecuaciones para obtener la parábola que se ve en la Figura 10.50.

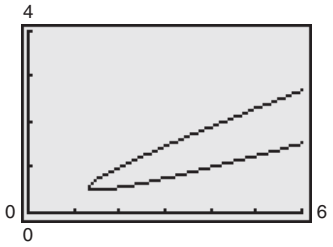


FIGURA 10.50

c. Como $B^2 - 4AC = 64 - 48 > 0$, la gráfica es una hipérbola.

$$3x^2 + 8xy + 4y^2 - 7 = 0 \qquad \text{Escribir la ecuación original.}$$

$$4y^2 + 8xy + (3x^2 - 7) = 0 \qquad \text{Forma cuadrática } ay^2 + by + c = 0$$

$$y = \frac{-8x \pm \sqrt{(8x)^2 - 4(4)(3x^2 - 7)}}{2(4)}$$

Las gráficas de estas dos ecuaciones dan la hipérbola que se muestra en la Figura 10.51.

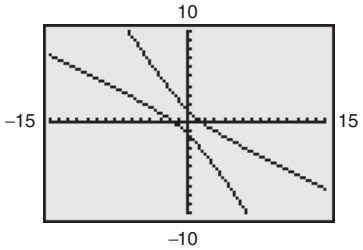


FIGURA 10.51

PUNTO *de repaso* Ahora trate de hacer el Ejercicio 43.

DISCUSIÓN EN CLASE

Clasificación de una gráfica como hipérbola En la sección 2.6 se mencionó que la gráfica de $f(x) = 1/x$ es una hipérbola. Use las técnicas de esta sección para verificar esto y justifique cada uno de los pasos. Compare sus resultados con los de otro estudiante.

10.5 EJERCICIOS

En www.CalcChat.com vea las soluciones a los ejercicios impares.

VOCABULARIO: Llene los espacios en blanco.

1. El procedimiento empleado para eliminar el término en xy de una ecuación general de segundo grado se llama _____ de _____.
2. Después de rotar los ejes de coordenadas en un ángulo θ, la ecuación general de segundo grado del nuevo plano $x'y'$ tendrá la forma _____.
3. Las cantidades que son iguales en la ecuación original de una cónica y la ecuación de la cónica girada son _____ _____ _____.
4. La cantidad $B^2 - 4AC$ se llama _____ de la ecuación $Ax^2 + Bxy + Cy^2 + Dx + Ey + F = 0$.

HABILIDADES Y APLICACIONES

En los Ejercicios 5-12, el sistema de coordenadas $x'y'$ ha sido girado θ grados del sistema de coordenadas xy. Se dan las coordenadas de un punto del sistema de coordenadas xy. Encuentre las coordenadas del punto del sistema de coordenadas girado.

5. $\theta = 90°$, $(0, 3)$
6. $\theta = 90°$, $(2, 2)$
7. $\theta = 30°$, $(1, 3)$
8. $\theta = 30°$, $(2, 4)$
9. $\theta = 45°$, $(2, 1)$
10. $\theta = 45°$, $(4, 4)$
11. $\theta = 60°$, $(1, 2)$
12. $\theta = 60°$, $(3, 1)$

En los Ejercicios 13-26, gire los ejes para eliminar el término en xy de la ecuación. A continuación escriba la ecuación en forma estándar. Trace la gráfica de la ecuación resultante, mostrando ambos conjuntos de ejes.

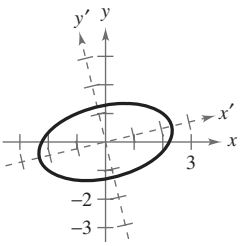
13. $xy + 1 = 0$
14. $xy - 4 = 0$
15. $x^2 - 2xy + y^2 - 1 = 0$
16. $xy + 2x - y + 4 = 0$
17. $xy - 8x - 4y = 0$
18. $2x^2 - 3xy - 2y^2 + 10 = 0$
19. $5x^2 - 6xy + 5y^2 - 12 = 0$
20. $2x^2 + xy + 2y^2 - 8 = 0$
21. $x^2 + 2xy + y^2 - 4x + 4y = 0$
22. $13x^2 + 6\sqrt{3}xy + 7y^2 - 16 = 0$
23. $3x^2 - 2\sqrt{3}xy + y^2 + 2x + 2\sqrt{3}y = 0$
24. $16x^2 - 24xy + 9y^2 - 60x - 80y + 100 = 0$
25. $9x^2 + 24xy + 16y^2 + 90x - 130y = 0$
26. $9x^2 + 24xy + 16y^2 + 80x - 60y = 0$

En los Ejercicios 27-36, use una calculadora de gráficas para graficar la cónica. Determine el ángulo θ en que los ejes son girados. Explique la forma en que usó la calculadora de gráficas para obtener la gráfica.

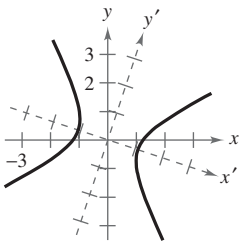
27. $x^2 + 2xy + y^2 = 20$
28. $x^2 - 4xy + 2y^2 = 6$
29. $17x^2 + 32xy - 7y^2 = 75$
30. $40x^2 + 36xy + 25y^2 = 52$
31. $32x^2 + 48xy + 8y^2 = 50$
32. $24x^2 + 18xy + 12y^2 = 34$
33. $2x^2 + 4xy + 2y^2 + \sqrt{26}x + 3y = -15$
34. $7x^2 - 2\sqrt{3}xy + 5y^2 = 16$
35. $4x^2 - 12xy + 9y^2 + (4\sqrt{13} - 12)x - (6\sqrt{13} + 8)y = 91$
36. $6x^2 - 4xy + 8y^2 + (5\sqrt{5} - 10)x - (7\sqrt{5} + 5)y = 80$

En los Ejercicios 37-42, relacione la gráfica con su ecuación. [Las gráficas están marcadas (a), (b), (c), (d), (e) y (f).]

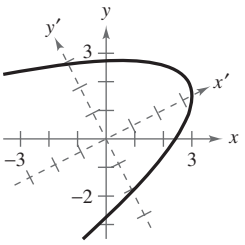
(a)



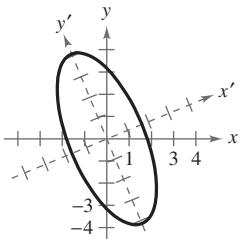
(b)



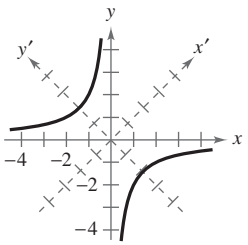
(c)



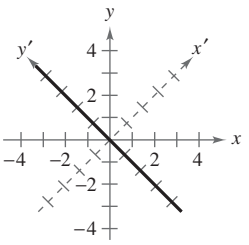
(d)



(e)



(f)



37. $xy + 2 = 0$

38. $x^2 + 2xy + y^2 = 0$

39. $-2x^2 + 3xy + 2y^2 + 3 = 0$

40. $x^2 - xy + 3y^2 - 5 = 0$

41. $3x^2 + 2xy + y^2 - 10 = 0$

42. $x^2 - 4xy + 4y^2 + 10x - 30 = 0$

En los Ejercicios 43-50, (a) use el discriminante para clasificar la gráfica, (b) use la fórmula cuadrática para despejar y y (c) use una calculadora de gráficas para graficar la ecuación.

43. $16x^2 - 8xy + y^2 - 10x + 5y = 0$

44. $x^2 - 4xy - 2y^2 - 6 = 0$

45. $12x^2 - 6xy + 7y^2 - 45 = 0$

46. $2x^2 + 4xy + 5y^2 + 3x - 4y - 20 = 0$

47. $x^2 - 6xy - 5y^2 + 4x - 22 = 0$

48. $36x^2 - 60xy + 25y^2 + 9y = 0$

49. $x^2 + 4xy + 4y^2 - 5x - y - 3 = 0$

50. $x^2 + xy + 4y^2 + x + y - 4 = 0$

En los Ejercicios 51-56, trace (si es posible) la gráfica de la cónica degenerada.

51. $y^2 - 16x^2 = 0$

52. $x^2 + y^2 - 2x + 6y + 10 = 0$

53. $x^2 - 2xy + y^2 = 0$

54. $5x^2 - 2xy + 5y^2 = 0$

55. $x^2 + 2xy + y^2 - 1 = 0$

56. $x^2 - 10xy + y^2 = 0$

En los Ejercicios 57-70, encuentre gráficamente cualesquier puntos de intersección de las gráficas y luego verifique usando una calculadora de gráficas.

57. $-x^2 + y^2 + 4x - 6y + 4 = 0$
$x^2 + y^2 - 4x - 6y + 12 = 0$

58. $-x^2 - y^2 - 8x + 20y - 7 = 0$
$x^2 + 9y^2 + 8x + 4y + 7 = 0$

59. $-4x^2 - y^2 - 16x + 24y - 16 = 0$
$4x^2 + y^2 + 40x - 24y + 208 = 0$

60. $x^2 - 4y^2 - 20x - 64y - 172 = 0$
$16x^2 + 4y^2 - 320x + 64y + 1600 = 0$

61. $x^2 - y^2 - 12x + 16y - 64 = 0$
$x^2 + y^2 - 12x - 16y + 64 = 0$

62. $x^2 + 4y^2 - 2x - 8y + 1 = 0$
$-x^2 + 2x - 4y - 1 = 0$

63. $-16x^2 - y^2 + 24y - 80 = 0$
$16x^2 + 25y^2 - 400 = 0$

64. $16x^2 - y^2 + 16y - 128 = 0$
$y^2 - 48x - 16y - 32 = 0$

65. $x^2 + y^2 - 4 = 0$
$3x - y^2 = 0$

66. $4x^2 + 9y^2 - 36y = 0$
$x^2 + 9y - 27 = 0$

67. $x^2 + 2y^2 - 4x + 6y - 5 = 0$
$-x + y - 4 = 0$

68. $x^2 + 2y^2 - 4x + 6y - 5 = 0$
$x^2 - 4x - y + 4 = 0$

69. $xy + x - 2y + 3 = 0$
$x^2 + 4y^2 - 9 = 0$

70. $5x^2 - 2xy + 5y^2 - 12 = 0$
$x + y - 1 = 0$

EXPLORACIÓN

¿VERDADERO O FALSO? En los Ejercicios 71-72, determine si la proposición es verdadera o falsa. Justifique su respuesta.

71. La gráfica de la ecuación

$$x^2 + xy + ky^2 + 6x + 10 = 0$$

donde k es cualquier constante menor a $\frac{1}{4}$, es una hipérbola.

72. Después de usar una rotación de ejes para eliminar el término en xy de una ecuación de la forma

$$Ax^2 + Bxy + Cy^2 + Dx + Ey + F = 0$$

los coeficientes de los términos x^2 y y^2 siguen siendo A y C, respectivamente.

73. Demuestre que la ecuación

$$x^2 + y^2 = r^2$$

es invariante bajo rotación de ejes.

74. TOQUE FINAL Considere la ecuación

$$6x^2 - 3xy + 6y^2 - 25 = 0.$$

(a) Sin calcular, explique cómo reescribir la ecuación de modo que no tenga un término en xy.

(b) Explique cómo identificar la gráfica de la ecuación.

75. Encuentre las longitudes de los ejes mayor y menor de la elipse graficada en el Ejercicio 22.

10.6 Ecuaciones paramétricas

Lo que debe aprender

- Evaluar conjuntos de ecuaciones paramétricas para valores dados del parámetro.
- Trazar curvas que estén representadas por conjuntos de ecuaciones paramétricas.
- Reescribir conjuntos de ecuaciones paramétricas como ecuaciones rectangulares sencillas al eliminar el parámetro.
- Hallar conjuntos de ecuaciones paramétricas para gráficas.

Por qué debe aprenderlo

Las ecuaciones paramétricas son útiles para modelar la trayectoria de un cuerpo. Por ejemplo, en el Ejercicio 63 en la página 775 se usará un conjunto de ecuaciones paramétricas para modelar la trayectoria de una pelota de béisbol.

Jed Jacobsohn/Getty Images

Curvas planas

Hasta este punto hemos estado representando una gráfica por medio de una sola ecuación que comprende las *dos* variables x y y. En esta sección estudiaremos situaciones en las que es útil introducir una *tercera* variable para representar una curva del plano.

Para ver la utilidad de este procedimiento, considere la trayectoria seguida por un cuerpo que es impulsado en el aire a un ángulo de 45°. Si la velocidad inicial del cuerpo es 48 pies por segundo, se puede demostrar que ese cuerpo sigue la trayectoria parabólica

$$y = -\frac{x^2}{72} + x \qquad \text{Ecuación rectangular}$$

como se muestra en la Figura 10.52. No obstante, esta ecuación no expone toda la situación. Aun cuando dice *dónde* ha estado el cuerpo, no dice *cuándo* estaba en un punto determinado (x, y) en la trayectoria. Para determinar este tiempo, se puede introducir una tercera variable t, llamada **parámetro.** Es posible escribir x y y como funciones de t para obtener las **ecuaciones paramétricas.**

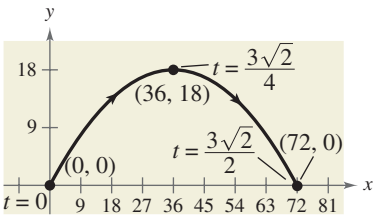
$$x = 24\sqrt{2}t \qquad \text{Ecuación paramétrica para } x$$

$$y = -16t^2 + 24\sqrt{2}t. \qquad \text{Ecuación paramétrica para } y$$

De este conjunto de ecuaciones se puede determinar que en el tiempo $t = 0$, el cuerpo está en el punto $(0, 0)$. Del mismo modo, en el tiempo $t = 1$ el cuerpo está en el punto $\left(24\sqrt{2}, 24\sqrt{2} - 16\right)$, y así sucesivamente, como se muestra en la Figura 10.52.

Ecuación rectangular:
$y = -\frac{x^2}{72} + x$

Ecuaciones paramétricas:
$x = 24\sqrt{2}t$
$y = -16t^2 + 24\sqrt{2}t$



Movimiento curvilíneo: dos variables para la posición, una variable para el tiempo
FIGURA 10.52

Para este problema particular de movimiento, x y y son funciones continuas de t, y la trayectoria resultante es una **curva plana.** (Recuerde que una *función continua* es aquella cuya gráfica puede trazarse sin levantar el lápiz del papel.)

Definición de curva plana

Si f y g son funciones continuas de t en un intervalo I, el conjunto de pares ordenados $(f(t), g(t))$ es una **curva plana** C. Las ecuaciones

$$x = f(t) \qquad \text{y} \qquad y = g(t)$$

son **ecuaciones paramétricas** para C, y t es el **parámetro.**

Trazo de una curva plana

Cuando trace una curva representada por un par de ecuaciones paramétricas, todavía se determinan puntos del plano xy. Cada conjunto de coordenadas (x, y) se determina de un valor escogido para el parámetro t. La determinación de los puntos resultantes en el orden de valores *crecientes* de t traza la curva en una dirección especificada. Esto se llama **orientación** de la curva.

Ejemplo 1 Trazar una curva

Trace la curva dada por las ecuaciones paramétricas

$$x = t^2 - 4 \quad \text{y} \quad y = \frac{t}{2}, \quad -2 \le t \le 3.$$

ATENCIÓN

Cuando emplee un valor de t para hallar x, asegúrese de usar el mismo valor de t para hallar el valor correspondiente de y. Puede ser útil organizar sus resultados en una tabla, como se ve en el Ejemplo 1.

Solución

Usando valores de t en el intervalo especificado, las ecuaciones paramétricas dan los puntos (x, y) mostrados en la tabla.

t	x	y
-2	0	-1
-1	-3	$-\frac{1}{2}$
0	-4	0
1	-3	$\frac{1}{2}$
2	0	1
3	5	$\frac{3}{2}$

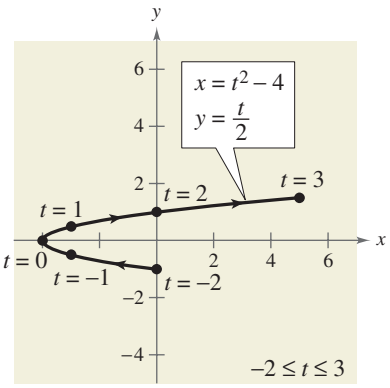


FIGURA 10.53

Al determinar estos puntos en el orden de t creciente, se obtiene la curva C ilustrada en la Figura 10.53. Observe que las flechas sobre la curva indican su orientación cuando t aumenta de -2 a 3. Por tanto, si una partícula se moviera en esta curva, empezaría en $(0, -1)$ y luego se desplazaría a lo largo de la curva al punto $\left(5, \frac{3}{2}\right)$.

PUNTO *de repaso* Ahora trate de hacer el Ejercicio 5(a) y (b).

Nótese que la gráfica que se muestra en la Figura 10.53 no define a y como función de x. Esto indica un beneficio de las ecuaciones paramétricas: pueden usarse para representar gráficas que son más generales que las gráficas de funciones.

A veces ocurre que dos conjuntos de ecuaciones paramétricas tienen la misma gráfica. Por ejemplo, el conjunto de ecuaciones paramétricas

$$x = 4t^2 - 4 \quad \text{y} \quad y = t, \quad -1 \le t \le \frac{3}{2}$$

tiene la misma gráfica que el conjunto dado en el Ejemplo 1. No obstante, al comparar los valores de t en las Figuras 10.53 y 10.54, se puede ver que esta segunda gráfica se traza más *rápidamente* (considerando t como tiempo) que la primera. Por tanto, en aplicaciones se pueden usar diferentes representaciones paramétricas para representar varias *velocidades* a las que se desplazan cuerpos a lo largo de una trayectoria determinada.

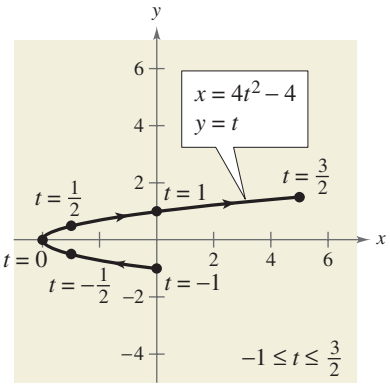


FIGURA 10.54

Eliminación del parámetro

El Ejemplo 1 usa determinación sencilla de puntos para trazar la curva. Este tedioso proceso puede a veces simplificarse si se encuentra una ecuación rectangular (en x y y) que tenga la misma gráfica. Este proceso se denomina **eliminación del parámetro.**

Ecuaciones paramétricas		Despejar t en una ecuación		Sustituir en otra ecuación		Ecuación rectangular
$x = t^2 - 4$		$t = 2y$		$x = (2y)^2 - 4$		$x = 4y^2 - 4$
$y = \frac{t}{2}$						

Ahora se puede reconocer que la ecuación $x = 4y^2 - 4$ representa una parábola con un eje horizontal y vértice en $(-4, 0)$.

Cuando convierta ecuaciones paramétricas a forma rectangular es posible que sea necesario alterar el dominio de la ecuación rectangular para que su gráfica se relacione con la de las ecuaciones paramétricas. Esta situación se demuestra en el Ejemplo 2.

Ejemplo 2 Eliminar el parámetro

Trace la curva representada por las ecuaciones

$$x = \frac{1}{\sqrt{t+1}} \quad \text{y} \quad y = \frac{t}{t+1}$$

al eliminar el parámetro y ajustar el dominio de la ecuación rectangular resultante.

Solución

Despejando t de la ecuación para x resulta

$$x = \frac{1}{\sqrt{t+1}} \Rightarrow x^2 = \frac{1}{t+1}$$

lo cual implica que

$$t = \frac{1 - x^2}{x^2}.$$

Ahora, sustituyendo por y en la ecuación se obtiene la ecuación rectangular

$$y = \frac{t}{t+1} = \frac{\frac{(1-x^2)}{x^2}}{\left[\frac{(1-x^2)}{x^2}\right] + 1} = \frac{\frac{1-x^2}{x^2}}{\frac{1-x^2}{x^2} + 1} \cdot \frac{x^2}{x^2} = 1 - x^2.$$

De esta ecuación rectangular se puede reconocer que la curva es una parábola que se abre hacia abajo y tiene su vértice en $(0, 1)$. También, esta ecuación rectangular está definida para todos los valores de x, pero de la ecuación paramétrica para x se puede ver que la curva está definida sólo cuando $t > -1$. Esto implica que se debe restringir el dominio de x para valores positivos, como se muestra en la Figura 10.55.

PUNTO *de repaso* Ahora trate de hacer el Ejercicio 5(c).

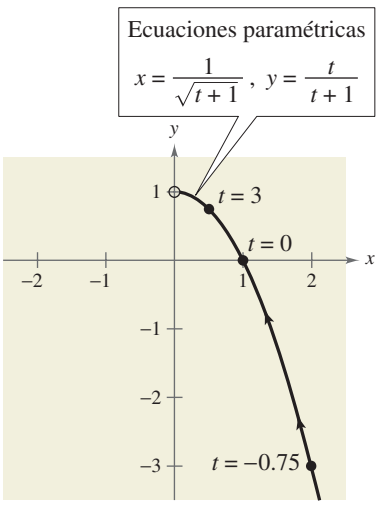


FIGURA 10.55

Tip de estudio

Para eliminar el parámetro en ecuaciones que contengan funciones trigonométricas, trate de usar identidades como

$$\text{sen}^2\,\theta + \cos^2\theta = 1$$

o

$$\sec^2\theta - \tan^2\theta = 1$$

como se muestra en el Ejemplo 3.

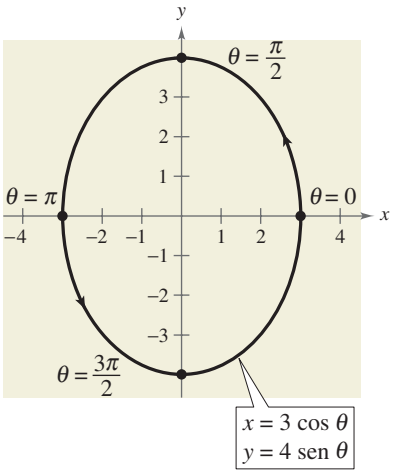


FIGURA 10.56

No es necesario que el parámetro de un conjunto de ecuaciones paramétricas represente tiempo. El siguiente ejemplo utiliza un *ángulo* como parámetro.

Ejemplo 3 Eliminar un parámetro de ángulo

Trace la curva representada por

$$x = 3\cos\theta \quad \text{y} \quad y = 4\,\text{sen}\,\theta, \quad 0 \le \theta \le 2\pi$$

al eliminar el parámetro.

Solución

Empiece por despejar $\cos\theta$ y $\text{sen}\,\theta$ en las ecuaciones.

$$\cos\theta = \frac{x}{3} \quad \text{y} \quad \text{sen}\,\theta = \frac{y}{4}$$ Despeje $\cos\theta$ y $\text{sen}\,\theta$.

Use la identidad $\text{sen}^2\,\theta + \cos^2\theta = 1$ para formar una ecuación que contenga sólo x y y.

$$\cos^2\theta + \text{sen}^2\,\theta = 1$$ Identidad pitagórica

$$\left(\frac{x}{3}\right)^2 + \left(\frac{y}{4}\right)^2 = 1$$ Sustituya $\frac{x}{3}$ por $\cos\theta$ y $\frac{y}{4}$ por $\text{sen}\,\theta$.

$$\frac{x^2}{9} + \frac{y^2}{16} = 1$$ Ecuación rectangular

De esta ecuación rectangular se puede ver que la gráfica es una elipse con centro en $(0, 0)$, con vértices en $(0, 4)$ y $(0, -4)$ y eje menor de longitud $2b = 6$, como se muestra en la Figura 10.56. Observe que la curva elíptica está trazada *en sentido contrario al giro de las manecillas de un reloj* cuando θ varía de 0 a 2π.

PUNTO *de repaso* Ahora trate de hacer el Ejercicio 17.

En los Ejemplos 2 y 3 es importante ver que eliminar el parámetro es primeramente una *ayuda para trazar la curva*. Si las ecuaciones paramétricas representan la trayectoria de un cuerpo en movimiento, la gráfica por sí sola no es suficiente para describir el movimiento del cuerpo. Son entonces necesarias las ecuaciones paramétricas para indicar la *posición, dirección* y *rapidez* en un tiempo determinado.

Hallar ecuaciones paramétricas para una gráfica

Hemos estado estudiando técnicas para trazar la gráfica representada por un conjunto de ecuaciones paramétricas. Ahora consideremos el problema *inverso,* es decir, ¿cómo podemos hallar un conjunto de ecuaciones paramétricas para una gráfica determinada o una descripción física dada? De la exposición que sigue al Ejemplo 1 sabemos que esa representación no es única. Esto es, las ecuaciones

$$x = 4t^2 - 4 \quad \text{y} \quad y = t, \ -1 \le t \le \frac{3}{2}$$

produjeron la misma gráfica que las ecuaciones

$$x = t^2 - 4 \quad \text{y} \quad y = \frac{t}{2}, \ -2 \le t \le 3.$$

Esto se demuestra con más detalles en el Ejemplo 4.

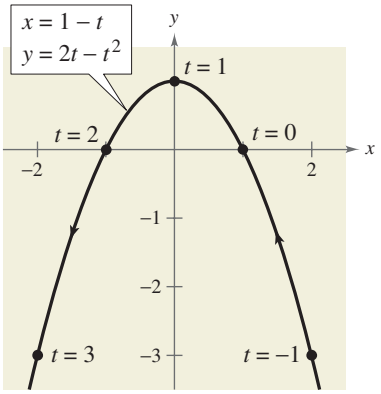


FIGURA 10.57

Ejemplo 4 Hallar ecuaciones paramétricas para una gráfica

Encuentre un conjunto de ecuaciones paramétricas para representar la gráfica de $y = 1 - x^2$, usando los parámetros siguientes.

a. $t = x$ **b.** $t = 1 - x$

Solución

a. Si hacemos $t = x$, resultan las ecuaciones paramétricas

$$x = t \quad \text{y} \quad y = 1 - x^2 = 1 - t^2.$$

b. Si hacemos $t = 1 - x$, resultan las ecuaciones paramétricas

$$x = 1 - t \quad \text{y} \quad y = 1 - x^2 = 1 - (1 - t)^2 = 2t - t^2.$$

En la Figura 10.57, observe la forma en que la curva resultante está orientada por los valores crecientes de t. Para el inciso (a), la curva tendría la orientación opuesta.

PUNTO *de repaso* Ahora trate de hacer el Ejercicio 45.

Ejemplo 5 Ecuaciones paramétricas para una cicloide

Describa la **cicloide** trazada por un punto P en la circunferencia de un círculo de radio a cuando el círculo gira a lo largo de una recta en un plano.

Solución

Como parámetro, sea θ la medida de la rotación del círculo y que el punto $P = (x, y)$ empiece en el origen. Cuando $\theta = 0$, P está en el origen; cuando $\theta = \pi$, P está en un punto máximo $(\pi a, 2a)$; y cuando $\theta = 2\pi$, P está de nuevo sobre el eje x en $(2\pi a, 0)$. En la Figura 10.58 se puede ver que $\angle APC = 180° - \theta$. Por tanto, tenemos

$$\operatorname{sen}\theta = \operatorname{sen}(180° - \theta) = \operatorname{sen}(\angle APC) = \frac{AC}{a} = \frac{BD}{a}$$

$$\cos\theta = -\cos(180° - \theta) = -\cos(\angle APC) = -\frac{AP}{a}$$

lo cual implica que $BD = a \operatorname{sen}\theta$ y $AP = -a\cos\theta$. Como el círculo gira a lo largo del eje x, sabemos que $OD = \overset{\frown}{PD} = a\theta$. Además, como $BA = DC = a$, tenemos

$$x = OD - BD = a\theta - a\operatorname{sen}\theta \quad \text{y} \quad y = BA + AP = a - a\cos\theta.$$

Por tanto, las ecuaciones paramétricas son $x = a(\theta - \operatorname{sen}\theta)$ y $y = a(1 - \cos\theta)$.

Tip de estudio

En el Ejemplo 5, $\overset{\frown}{PD}$ representa el arco de circunferencia entre los puntos P y D.

TECNOLOGÍA

Se puede usar una calculadora de gráficas en modo *parametric* para obtener una gráfica similar a la de la Figura 10.58 al graficar las siguientes ecuaciones.

$X_{1T} = T - \operatorname{sen} T$

$Y_{1T} = 1 - \cos T$

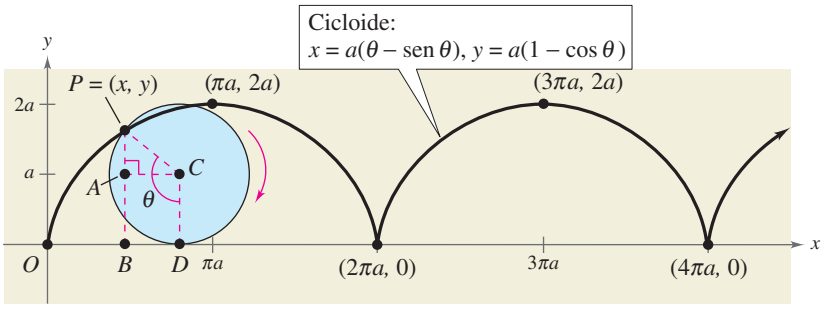


FIGURA 10.58

PUNTO *de repaso* Ahora trate de hacer el Ejercicio 67.

10.6 EJERCICIOS

En www.CalcChat.com vea las soluciones a los ejercicios impares.

VOCABULARIO: Llene los espacios en blanco.

1. Si f y g son funciones continuas de t en un intervalo I, el conjunto de pares ordenados $(f(t), g(t))$ es una _____ _____ C.
2. La _____ de una curva es la dirección en la que la curva es trazada al aumentar valores del parámetro.
3. El proceso de convertir un conjunto de ecuaciones paramétricas en una ecuación rectangular correspondiente se denomina _____ la _____.
4. Una curva trazada por un punto sobre la circunferencia de un círculo cuando el círculo gira a lo largo de una recta en un plano se llama _____.

HABILIDADES Y APLICACIONES

5. Considere las ecuaciones paramétricas $x = \sqrt{t}$ y $y = 3 - t$.
   (a) Genere una tabla de valores x y y usando $t = 0$, 1, 2, 3 y 4.
   (b) Grafique los puntos (x, y) generados en el inciso (a) y trace una gráfica de las ecuaciones paramétricas.
   (c) Encuentre la ecuación rectangular eliminando el parámetro. Trace su gráfica. ¿Cómo difieren las gráficas?
6. Considere las ecuaciones paramétricas $x = 4\cos^2\theta$ y $y = 2 \operatorname{sen}\theta$.
   (a) Genere una tabla de valores x y y usando $\theta = -\pi/2, -\pi/4, 0, \pi/4$ y $\pi/2$.
   (b) Grafique los puntos (x, y) generados en el inciso (a) y trace una gráfica de las ecuaciones paramétricas.
   (c) Encuentre la ecuación rectangular eliminando el parámetro. Trace su gráfica. ¿Cómo difieren las gráficas?

En los Ejercicios 7-26, (a) trace la curva representada por las ecuaciones paramétricas (indique la orientación de la curva) y (b) elimine el parámetro y escriba la ecuación rectangular correspondiente cuya gráfica representa la curva. Ajuste el dominio de la ecuación rectangular resultante si es necesario.

7. $x = t - 1$, $y = 3t + 1$
8. $x = 3 - 2t$, $y = 2 + 3t$
9. $x = \frac{1}{4}t$, $y = t^2$
10. $x = t$, $y = t^3$
11. $x = t + 2$, $y = t^2$
12. $x = \sqrt{t}$, $y = 1 - t$
13. $x = t + 1$, $y = \dfrac{t}{t + 1}$
14. $x = t - 1$, $y = \dfrac{t}{t - 1}$
15. $x = 2(t + 1)$, $y = |t - 2|$
16. $x = |t - 1|$, $y = t + 2$
17. $x = 4\cos\theta$, $y = 2 \operatorname{sen}\theta$
18. $x = 2\cos\theta$, $y = 3 \operatorname{sen}\theta$
19. $x = 6 \operatorname{sen} 2\theta$, $y = 6\cos 2\theta$
20. $x = \cos\theta$, $y = 2 \operatorname{sen} 2\theta$
21. $x = 1 + \cos\theta$, $y = 1 + 2 \operatorname{sen}\theta$
22. $x = 2 + 5\cos\theta$, $y = -6 + 4 \operatorname{sen}\theta$
23. $x = e^{-t}$, $y = e^{3t}$
24. $x = e^{2t}$, $y = e^{t}$
25. $x = t^3$, $y = 3 \ln t$
26. $x = \ln 2t$, $y = 2t^2$

En los Ejercicios 27-28, determine cómo difieren entre sí las curvas planas.

27. (a) $x = t$, $y = 2t + 1$
    (b) $x = \cos\theta$, $y = 2\cos\theta + 1$
    (c) $x = e^{-t}$, $y = 2e^{-t} + 1$
    (d) $x = e^{t}$, $y = 2e^{t} + 1$
28. (a) $x = t$, $y = t^2 - 1$
    (b) $x = t^2$, $y = t^4 - 1$
    (c) $x = \operatorname{sen} t$, $y = \operatorname{sen}^2 t - 1$
    (d) $x = e^{t}$, $y = e^{2t} - 1$

En los Ejercicios 29-32, elimine el parámetro y obtenga la forma estándar de la ecuación rectangular.

29. Recta que pasa por (x_1, y_1) y (x_2, y_2):
    $x = x_1 + t(x_2 - x_1)$, $y = y_1 + t(y_2 - y_1)$
30. Circunferencia: $x = h + r\cos\theta$, $y = k + r \operatorname{sen}\theta$
31. Elipse: $x = h + a\cos\theta$, $y = k + b \operatorname{sen}\theta$
32. Hipérbola: $x = h + a \sec\theta$, $y = k + b \tan\theta$

En los Ejercicios 33-40, ocupe los resultados de los Ejercicios 29-32 para hallar un conjunto de ecuaciones paramétricas para la recta o cónica.

33. Recta: pasa por $(0, 0)$ y $(3, 6)$
34. Recta: pasa por $(3, 2)$ y $(-6, 3)$
35. Circunferencia: centro: $(3, 2)$; radio: 4
36. Circunferencia: centro: $(5, -3)$; radio: 4

37. Elipse: vértices: $(\pm 5, 0)$; focos: $(\pm 4, 0)$

38. Elipse: vértices: $(3, 7), (3, -1)$; focos: $(3, 5), (3, 1)$

39. Hipérbola: vértices: $(\pm 4, 0)$; focos: $(\pm 5, 0)$

40. Hipérbola: vértices: $(\pm 2, 0)$; focos: $(\pm 4, 0)$

En los Ejercicios 41-48, encuentre un conjunto de ecuaciones paramétricas para la ecuación rectangular usando (a) $t = x$ y (b) $t = 2 - x$.

41. $y = 3x - 2$

42. $x = 3y - 2$

43. $y = 2 - x$

44. $y = x^2 + 1$

45. $y = x^2 - 3$

46. $y = 1 - 2x^2$

47. $y = \dfrac{1}{x}$

48. $y = \dfrac{1}{2x}$

En los Ejercicios 49-56, use una calculadora de gráficas para graficar la curva representada por las ecuaciones paramétricas.

49. Cicloide: $x = 4(\theta - \operatorname{sen}\theta),\ y = 4(1 - \cos\theta)$

50. Cicloide: $x = \theta + \operatorname{sen}\theta,\ y = 1 - \cos\theta$

51. Cicloide alargada: $x = \theta - \frac{3}{2}\operatorname{sen}\theta,\ y = 1 - \frac{3}{2}\cos\theta$

52. Cicloide alargada: $x = 2\theta - 4\operatorname{sen}\theta,\ y = 2 - 4\cos\theta$

53. Hipocicloide: $x = 3\cos^3\theta,\ y = 3\operatorname{sen}^3\theta$

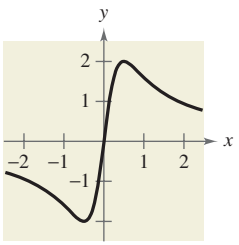
54. Cicloide acortada: $x = 8\theta - 4\operatorname{sen}\theta,\ y = 8 - 4\cos\theta$

55. Bruja de Agnesi: $x = 2\cot\theta,\ y = 2\operatorname{sen}^2\theta$

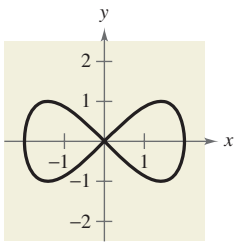
56. Hoja de Descartes: $x = \dfrac{3t}{1 + t^3},\ y = \dfrac{3t^2}{1 + t^3}$

En los Ejercicios 57-60, relacione las ecuaciones paramétricas con la gráfica correcta y describa el dominio y el rango. [Las gráficas están marcadas (a), (b), (c) y (d).]

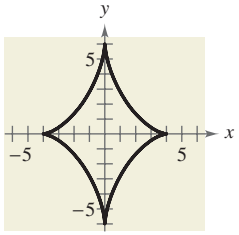
(a)



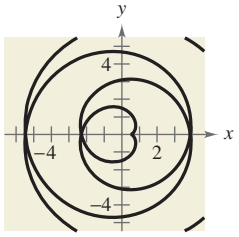
(b)



(c)



(d)



57. Curva de Lissajous: $x = 2\cos\theta,\ y = \operatorname{sen} 2\theta$

58. Evoluta de elipse: $x = 4\cos^3\theta,\ y = 6\operatorname{sen}^3\theta$

59. Involuta de círculo: $x = \frac{1}{2}(\cos\theta + \theta\operatorname{sen}\theta)$, $y = \frac{1}{2}(\operatorname{sen}\theta - \theta\cos\theta)$

60. Curva serpentina: $x = \frac{1}{2}\cot\theta,\ y = 4\operatorname{sen}\theta\cos\theta$

MOVIMIENTO DE PROYECTIL Un proyectil es lanzado a una altura de h pies sobre el terreno formando un ángulo θ con la horizontal. La velocidad inicial es v_0 pies por segundo y la trayectoria está modelada por las ecuaciones paramétricas

$$x = (v_0 \cos\theta)t \quad \text{y} \quad y = h + (v_0 \operatorname{sen}\theta)t - 16t^2.$$

En los Ejercicios 61 y 62, use una calculadora de gráficas para graficar las trayectorias de un proyectil lanzado desde el nivel del suelo en cada valor de θ y v_0. Para cada caso, use la gráfica para aproximar la altura máxima y el alcance del proyectil.

61. (a) $\theta = 60°$, $v_0 = 88$ pies por segundo

(b) $\theta = 60°$, $v_0 = 132$ pies por segundo

(c) $\theta = 45°$, $v_0 = 88$ pies por segundo

(d) $\theta = 45°$, $v_0 = 132$ pies por segundo

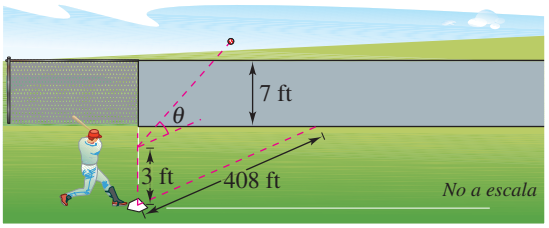
62. (a) $\theta = 15°$, $v_0 = 50$ pies por segundo

(b) $\theta = 15°$, $v_0 = 120$ pies por segundo

(c) $\theta = 10°$, $v_0 = 50$ pies por segundo

(d) $\theta = 10°$, $v_0 = 120$ pies por segundo

63. DEPORTES La barda del jardín central del estadio de los Yanquis mide 7 pies de alto y está a 408 pies de la placa de *home* o pentágono. Una pelota es golpeada por el bate en un punto a 3 pies sobre el suelo. Pierde contacto con el bate a un ángulo de θ grados con la horizontal y con una rapidez de 100 millas por hora (vea figura).



(a) Escriba un conjunto de ecuaciones paramétricas que modelen la trayectoria de la pelota.

(b) Use una calculadora de gráficas para graficar la trayectoria de la pelota cuando $\theta = 15°$. ¿El imparable es un cuadrangular?

(c) Use una calculadora de gráficas para graficar la trayectoria de la pelota cuando $\theta = 23°$. ¿El imparable es un cuadrangular?

(d) Encuentre el ángulo mínimo requerido para que el imparable sea cuadrangular.

64. DEPORTES Un arquero dispara una flecha desde un arco en un punto a 5 pies sobre el suelo. La flecha sale del arco a un ángulo de 15° respecto a la horizontal y con una rapidez inicial de 225 pies por segundo.

(a) Escriba un conjunto de ecuaciones paramétricas que modele la trayectoria de la flecha.

(b) Suponiendo que el suelo esté nivelado, encuentre la distancia que la flecha recorre antes de caer al suelo. (Ignore la resistencia del aire.)

(c) Use una calculadora de gráficas para graficar la trayectoria de la flecha y aproxime su máxima altura.

(d) Encuentre el tiempo total que la flecha está en el aire.

65. MOVIMIENTO DE PROYECTIL Elimine el parámetro t de las ecuaciones paramétricas

$$x = (v_0 \cos \theta)t \quad \text{y} \quad y = h + (v_0 \operatorname{sen} \theta)t - 16t^2$$

para que el movimiento de un proyectil muestre que la ecuación rectangular es

$$y = -\frac{16 \sec^2 \theta}{v_0^2}x^2 + (\tan \theta)x + h.$$

66. TRAYECTORIA DE UN PROYECTIL La trayectoria de un proyectil está dada por la ecuación rectangular

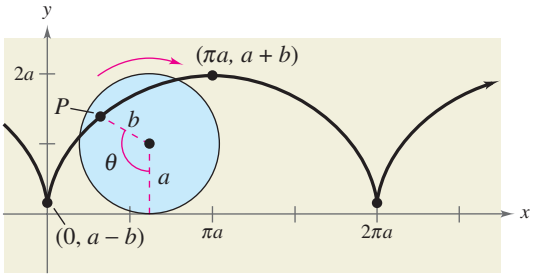
$$y = 7 + x - 0.02x^2.$$

(a) Use el resultado del Ejercicio 65 para hallar h, v_0 y θ. Encuentre las ecuaciones paramétricas de la trayectoria.

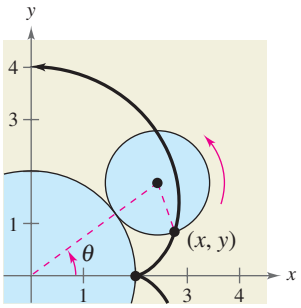
(b) Use una calculadora de gráficas para graficar la ecuación rectangular para la trayectoria del proyectil. Confirme su respuesta del inciso (a) al trazar la curva representada por las ecuaciones paramétricas.

(c) Use una calculadora de gráficas para aproximar la altura máxima del proyectil y su alcance.

67. CICLOIDE ACORTADA Una llanta de radio a unida a rueda a lo largo de una recta sin deslizarse. La curva trazada por un punto P que está a b unidades del centro ($b < a$) se denomina **cicloide acortada** (vea figura). Use el ángulo θ mostrado en la figura para hallar un conjunto de ecuaciones paramétricas para la curva.



68. EPICICLOIDE Un círculo de radio unitario rueda alrededor del exterior de un círculo de dos unidades de radio sin deslizarse. La curva trazada por un punto sobre la circunferencia del círculo menor se denomina **epicicloide** (vea figura). Use el ángulo θ mostrado en la figura para hallar un conjunto de ecuaciones paramétricas para la curva.



EXPLORACIÓN

¿VERDADERO O FALSO? En los Ejercicios 69 y 70, determine si la proposición es verdadera o falsa. Justifique su respuesta.

69. Los dos conjuntos de ecuaciones paramétricas $x = t$, $y = t^2 + 1$ y $x = 3t$, $y = 9t^2 + 1$ tienen la misma ecuación rectangular.

70. Si y es una función de t y x es función de t, entonces y debe ser una función de x.

71. ESCRITURA Escriba un breve párrafo que explique por qué son útiles las ecuaciones paramétricas.

72. ESCRITURA Explique el proceso de estirar una curva plana dada por ecuaciones paramétricas. ¿Qué se quiere decir con la orientación de la curva?

73. Use una calculadora de gráficas puesta en el modo *parametric* para ingresar las ecuaciones paramétricas del Ejemplo 2. ¿Sobre qué valores se debe hacer variar t para obtener la gráfica mostrada en la Figura 10.55?

74. TOQUE FINAL Considere las ecuaciones paramétricas $x = 8 \cos t$ y $y = 8 \operatorname{sen} t$.

(a) Describa la curva representada por las ecuaciones paramétricas.

(b) ¿Cómo se comparan la curva representada por las ecuaciones paramétricas $x = 8 \cos t + 3$ y $y = 8 \operatorname{sen} t + 6$ con la curva descrita en el inciso (a)?

(c) ¿Cómo cambia la curva original cuando se intercambian el coseno y seno?

10.7 Coordenadas polares

Lo que debe aprender

- Graficar puntos en el sistema de coordenadas polares.
- Convertir puntos de forma rectangular a polar y viceversa.
- Convertir ecuaciones de forma rectangular a polar y viceversa.

Por qué debe aprenderlo

Las coordenadas polares ofrecen una perspectiva matemática diferente al trazar gráficas. Por ejemplo, en los Ejercicios 5-18 en la página 781 se le pide hallar representaciones múltiples de coordenadas polares.

Introducción

Hasta este punto hemos representado gráficas de ecuaciones como conjuntos de puntos (x, y) en el sistema de coordenadas rectangulares, donde x y y representan las distancias dirigidas de los ejes de coordenadas al punto (x, y). En esta sección estudiaremos un sistema diferente llamado **sistema de coordenadas polares.**

Para formar el sistema de coordenadas polares en el plano, fije un punto O, llamado **polo** (u **origen**), y construya desde O un rayo inicial llamado **eje polar**, como se muestra en la Figura 10.59. Entonces a cada punto P del plano se le pueden asignar **coordenadas polares** (r, θ) como sigue.

1. $r =$ *distancia dirigida* de O a P

2. $\theta =$ *ángulo dirigido*, en sentido contrario al giro de las manecillas de un reloj del eje polar al segmento $\overline{OP}$

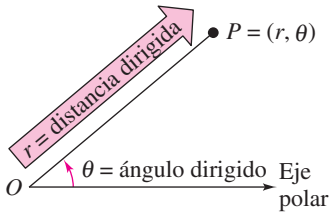


FIGURA 10.59

Ejemplo 1 Determinar puntos en el sistema de coordenadas polares

a. El punto $(r, \theta) = (2, \pi/3)$ está a dos unidades del polo en el lado terminal del ángulo $\theta = \pi/3$, como se ve en la Figura 10.60.

b. El punto $(r, \theta) = (3, -\pi/6)$ está a tres unidades del polo en el lado terminal del ángulo $\theta = -\pi/6$, como se ve en la Figura 10.61.

c. El punto $(r, \theta) = (3, 11\pi/6)$ coincide con el punto $(3, -\pi/6)$, como se ve en la Figura 10.62.

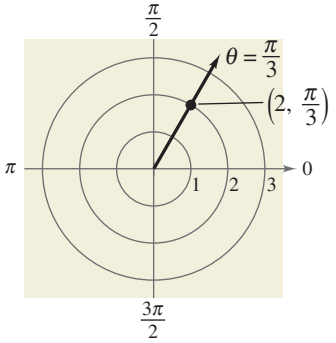


FIGURA 10.60

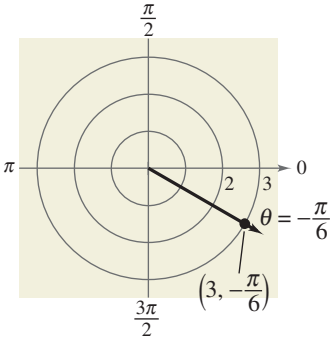


FIGURA 10.61

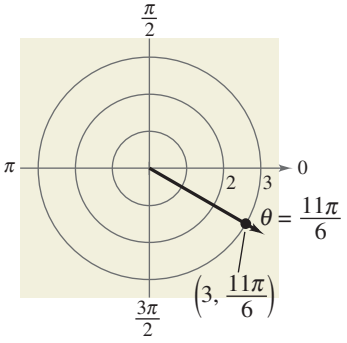


FIGURA 10.62

PUNTO *de repaso* Ahora trate de hacer el Ejercicio 7.

En coordenadas rectangulares, cada punto (x, y) tiene una representación única. Esto no es cierto para las coordenadas polares. Por ejemplo, las coordenadas (r, θ) y $(r, \theta + 2\pi)$ representan el mismo punto, como se ilustra en el Ejemplo 1. Otra forma de obtener representaciones múltiples de un punto es usar valores negativos para r. Como r es una *distancia dirigida*, las coordenadas (r, θ) y $(-r, \theta + \pi)$ representan el mismo punto. En general, el punto (r, θ) puede representarse como

$$(r, \theta) = (r, \theta \pm 2n\pi) \quad \text{o} \quad (r, \theta) = (-r, \theta \pm (2n + 1)\pi)$$

donde n es cualquier entero. Además, el polo está representado por $(0, \theta)$, donde θ es cualquier ángulo.

Ejemplo 2 Múltiples representaciones de puntos

Grafique el punto $(3, -3\pi/4)$ y encuentre tres representaciones polares adicionales de este punto, usando $-2\pi < \theta < 2\pi$.

Solución

El punto se muestra en la Figura 10.63. Otras tres representaciones son como sigue.

$$\left(3, -\frac{3\pi}{4} + 2\pi\right) = \left(3, \frac{5\pi}{4}\right) \qquad \text{Sumar } 2\pi \text{ a } \theta.$$

$$\left(-3, -\frac{3\pi}{4} - \pi\right) = \left(-3, -\frac{7\pi}{4}\right) \qquad \text{Sustituir } r \text{ por } -r\text{; restar } \pi \text{ de } \theta.$$

$$\left(-3, -\frac{3\pi}{4} + \pi\right) = \left(-3, \frac{\pi}{4}\right) \qquad \text{Sustituir } r \text{ por } -r\text{; sumar } \pi \text{ a } \theta.$$

PUNTO *de repaso* Ahora trate de hacer el Ejercicio 13.

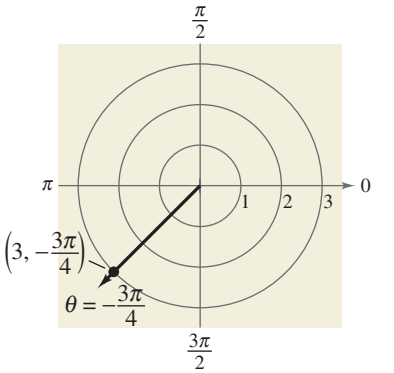


FIGURA 10.63

Conversión de coordenadas

Para establecer la relación entre coordenadas polares y rectangulares, hagamos coincidir el eje polar con el eje x positivo y el polo con el origen, como se muestra en la Figura 10.64. Como (x, y) está sobre una circunferencia de radio r, se deduce que $r^2 = x^2 + y^2$. Además, para $r > 0$, las definiciones de las funciones trigonométricas implican que

$$\tan\theta = \frac{y}{x}, \qquad \cos\theta = \frac{x}{r} \qquad \text{y} \qquad \operatorname{sen}\theta = \frac{y}{r}.$$

Si $r < 0$, se puede demostrar que se cumplen las mismas relaciones.

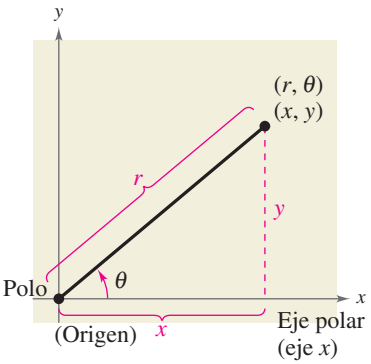


FIGURA 10.64

Conversión de coordenadas

Las coordenadas polares (r, θ) están relacionadas a las coordenadas rectangulares (x, y) como sigue

Polares a rectangulares	*Rectangulares a polares*
$x = r\cos\theta$	$\tan\theta = \frac{y}{x}$
$y = r\operatorname{sen}\theta$	$r^2 = x^2 + y^2$

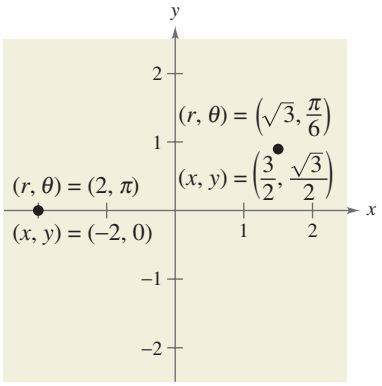


FIGURA 10.65

Ejemplo 3 Conversión de polares a rectangulares

Convierta cada punto a coordenadas rectangulares.

a. $(2, \pi)$ **b.** $\left(\sqrt{3}, \frac{\pi}{6}\right)$

Solución

a. Para el punto $(r, \theta) = (2, \pi)$, tenemos lo siguiente.

$$x = r \cos \theta = 2 \cos \pi = -2$$

$$y = r \operatorname{sen} \theta = 2 \operatorname{sen} \pi = 0$$

Las coordenadas rectangulares son $(x, y) = (-2, 0)$. (Vea Figura 10.65.)

b. Para el punto $(r, \theta) = \left(\sqrt{3}, \frac{\pi}{6}\right)$, tenemos lo siguiente.

$$x = \sqrt{3} \cos \frac{\pi}{6} = \sqrt{3}\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right) = \frac{3}{2}$$

$$y = \sqrt{3} \operatorname{sen} \frac{\pi}{6} = \sqrt{3}\left(\frac{1}{2}\right) = \frac{\sqrt{3}}{2}$$

Las coordenadas rectangulares son $(x, y) = \left(\frac{3}{2}, \frac{\sqrt{3}}{2}\right)$.

PUNTO *de repaso* Ahora trate de hacer el Ejercicio 23.

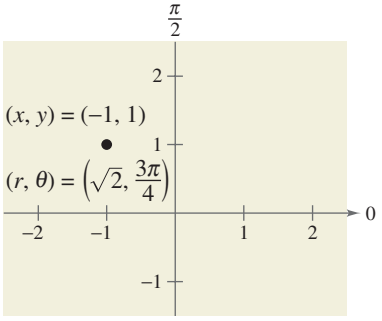


FIGURA 10.66

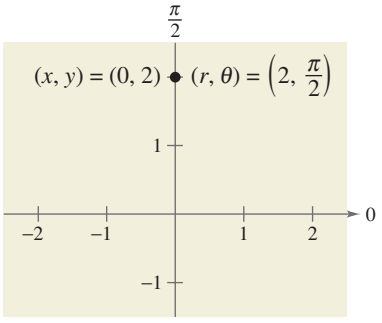


FIGURA 10.67

Ejemplo 4 Conversión de rectangulares a polares

Convierta cada punto a coordenadas polares.

a. $(-1, 1)$ **b.** $(0, 2)$

Solución

a. Para el punto del segundo cuadrante $(x, y) = (-1, 1)$, tenemos

$$\tan \theta = \frac{y}{x} = -1$$

$$\theta = \frac{3\pi}{4}.$$

Como θ se encuentra en el mismo cuadrante que (x, y), use r positiva.

$$r = \sqrt{x^2 + y^2} = \sqrt{(-1)^2 + (1)^2} = \sqrt{2}$$

Por tanto, *un* conjunto de coordenadas polares es $(r, \theta) = \left(\sqrt{2}, 3\pi/4\right)$, como se muestra en la Figura 10.66.

b. Como el punto $(x, y) = (0, 2)$ está en el eje y positivo, escoja

$$\theta = \frac{\pi}{2} \quad \text{y} \quad r = 2.$$

Esto implica que *un* conjunto de coordenadas polares es $(r, \theta) = (2, \pi/2)$, como se muestra en la Figura 10.67.

PUNTO *de repaso* Ahora trate de hacer el Ejercicio 41.

Conversión de ecuaciones

Al comparar los Ejemplos 3 y 4 se puede ver que la conversión de puntos del sistema polar rectangular es sencilla, mientras que la conversión de puntos del sistema rectangular al polar es más complicada. Para ecuaciones ocurre lo contrario. Para convertir una ecuación rectangular a forma polar simplemente se sustituye x por $r\cos\theta$ y y por $r\operatorname{sen}\theta$. Por ejemplo, la ecuación rectangular $y = x^2$ se puede escribir en forma polar como sigue.

$$y = x^2 \qquad \text{Ecuación rectangular}$$
$$r\operatorname{sen}\theta = (r\cos\theta)^2 \qquad \text{Ecuación polar}$$
$$r = \sec\theta\tan\theta \qquad \text{Forma más sencilla}$$

Por el contrario, convertir una ecuación polar a forma rectangular requiere de considerable ingenio.

El Ejemplo 5 demuestra varias conversiones polares a rectangulares que hacen posible estirar las gráficas de algunas ecuaciones polares.

Ejemplo 5 Conversión de ecuaciones polares a forma rectangular

Describa la gráfica de cada ecuación polar y encuentre la correspondiente ecuación rectangular

a. $r = 2$ **b.** $\theta = \dfrac{\pi}{3}$ **c.** $r = \sec\theta$

Solución

a. La gráfica de la ecuación polar $r = 2$ está formada por todos los puntos que están a dos unidades del polo. En otras palabras, es una circunferencia con centro en el origen y con radio de 2, como se ve en la Figura 10.68. Se puede confirmar esto al convertir a forma rectangular, usando la relación $r^2 = x^2 + y^2$.

$$\underbrace{r = 2}_{\text{Ecuación polar}} \Rightarrow r^2 = 2^2 \Rightarrow \underbrace{x^2 + y^2 = 2^2}_{\text{Ecuación rectangular}}$$

b. La gráfica de la ecuación polar $\theta = \pi/3$ está constituida por todos los puntos sobre la recta que forma un ángulo de $\pi/3$ con el eje polar positivo, como se ve en la Figura 10.69. Para convertir a forma rectangular, haga uso de la relación $\tan\theta = y/x$.

$$\underbrace{\theta = \frac{\pi}{3}}_{\text{Ecuación polar}} \Rightarrow \tan\theta = \sqrt{3} \Rightarrow \underbrace{y = \sqrt{3}x}_{\text{Ecuación rectangular}}$$

c. La gráfica de la ecuación polar $r = \sec\theta$ no es evidente por simple inspección, de modo que debe convertirse a forma rectangular usando la relación $r\cos\theta = x$.

$$\underbrace{r = \sec\theta}_{\text{Ecuación polar}} \Rightarrow r\cos\theta = 1 \Rightarrow \underbrace{x = 1}_{\text{Ecuación rectangular}}$$

Ahora se ve que la gráfica es una recta vertical, como se muestra en la Figura 10.70.

PUNTO *de repaso* Ahora trate de hacer el Ejercicio 109.

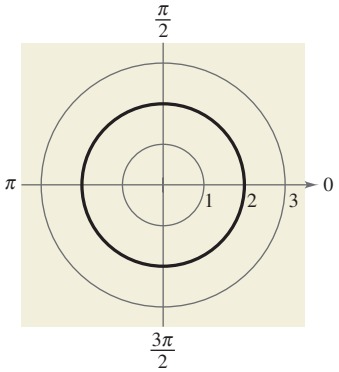


FIGURA 10.68

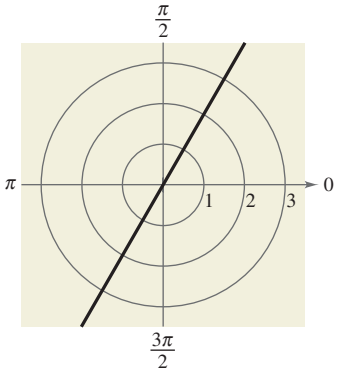


FIGURA 10.69

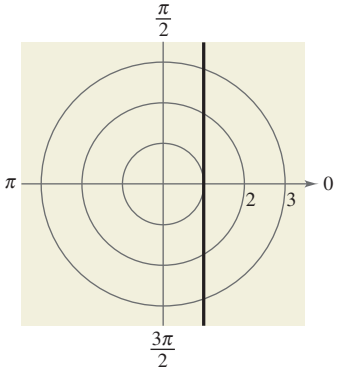


FIGURA 10.70

10.7 EJERCICIOS

En www.CalcChat.com vea las soluciones a los ejercicios impares.

VOCABULARIO: Llene los espacios en blanco.

1. El origen del sistema de coordenadas polares se llama _____.
2. Para el punto (r, θ), r es la _____ _____ de O a P y θ es el _____ _____ en sentido contrario al giro de las manecillas de un reloj del eje polar al segmento rectilíneo $\overline{OP}$.
3. Para determinar el punto (r, θ), use el sistema de coordenadas _____.
4. Las coordenadas polares (r, θ) están relacionadas con las coordenadas rectangulares (x, y) como sigue:
   $x =$ _____ $y =$ _____ $\tan\theta =$ _____ $r^2 =$ _____

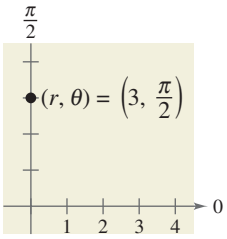
HABILIDADES Y APLICACIONES

En los Ejercicios 5-18, determine el punto dado en coordenadas polares y encuentre dos representaciones polares adicionales del punto, usando $-2\pi < \theta < 2\pi$.

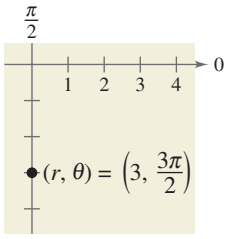
5. $\left(2, \frac{5\pi}{6}\right)$
6. $\left(3, \frac{5\pi}{4}\right)$
7. $\left(4, -\frac{\pi}{3}\right)$
8. $\left(-1, -\frac{3\pi}{4}\right)$
9. $(2, 3\pi)$
10. $\left(4, \frac{5\pi}{2}\right)$
11. $\left(-2, \frac{2\pi}{3}\right)$
12. $\left(-3, \frac{11\pi}{6}\right)$
13. $\left(0, -\frac{7\pi}{6}\right)$
14. $\left(0, -\frac{7\pi}{2}\right)$
15. $\left(\sqrt{2}, 2.36\right)$
16. $(2\sqrt{2}, 4.71)$
17. $(-3, -1.57)$
18. $(-5, -2.36)$

En los Ejercicios 19-28 se da un punto en coordenadas polares. Conviértalo a coordenadas rectangulares.

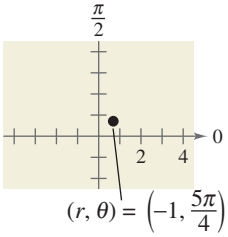
19. $(3, \pi/2)$



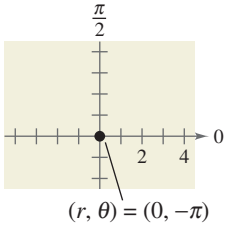
20. $(3, 3\pi/2)$



21. $(-1, 5\pi/4)$



22. $(0, -\pi)$



23. $(2, 3\pi/4)$
24. $(1, 5\pi/4)$
25. $(-2, 7\pi/6)$
26. $(-3, 5\pi/6)$
27. $(-2.5, 1.1)$
28. $(-2, 5.76)$

En los Ejercicios 29-36, use una calculadora de gráficas para hallar las coordenadas rectangulares del punto dado en coordenadas polares. Redondee sus resultados a dos lugares decimales.

29. $(2, 2\pi/9)$
30. $(4, 11\pi/9)$
31. $(-4.5, 1.3)$
32. $(8.25, 3.5)$
33. $(2.5, 1.58)$
34. $(5.4, 2.85)$
35. $(-4.1, -0.5)$
36. $(8.2, -3.2)$

En los Ejercicios 37-54 se da un punto en coordenadas rectangulares. Conviértalo a coordenadas polares.

37. $(1, 1)$
38. $(2, 2)$
39. $(-3, -3)$
40. $(-4, -4)$
41. $(-6, 0)$
42. $(3, 0)$
43. $(0, -5)$
44. $(0, 5)$
45. $(-3, 4)$
46. $(-4, -3)$
47. $\left(-\sqrt{3}, -\sqrt{3}\right)$
48. $\left(-\sqrt{3}, \sqrt{3}\right)$
49. $\left(\sqrt{3}, -1\right)$
50. $\left(-1, \sqrt{3}\right)$
51. $(6, 9)$
52. $(6, 2)$
53. $(5, 12)$
54. $(7, 15)$

En los Ejercicios 55-64, use una calculadora de gráficas para hallar un conjunto de coordenadas polares para el punto dado en coordenadas rectangulares.

55. $(3, -2)$
56. $(-4, -2)$
57. $(-5, 2)$
58. $(7, -2)$
59. $\left(\sqrt{3}, 2\right)$
60. $\left(5, -\sqrt{2}\right)$
61. $\left(\frac{5}{2}, \frac{4}{3}\right)$
62. $\left(\frac{9}{5}, \frac{11}{2}\right)$
63. $\left(\frac{7}{4}, \frac{3}{2}\right)$
64. $\left(-\frac{7}{9}, -\frac{3}{4}\right)$

En los Ejercicios 65-84, convierta la ecuación rectangular a forma polar. Suponga que $a > 0$.

65. $x^2 + y^2 = 9$
66. $x^2 + y^2 = 16$
67. $y = 4$
68. $y = x$

69. $x = 10$ **70.** $x = 4a$

71. $y = -2$ **72.** $y = 1$

73. $3x - y + 2 = 0$ **74.** $3x + 5y - 2 = 0$

75. $xy = 16$ **76.** $2xy = 1$

77. $y^2 - 8x - 16 = 0$ **78.** $(x^2 + y^2)^2 = 9(x^2 - y^2)$

79. $x^2 + y^2 = a^2$ **80.** $x^2 + y^2 = 9a^2$

81. $x^2 + y^2 - 2ax = 0$ **82.** $x^2 + y^2 - 2ay = 0$

83. $y^3 = x^2$ **84.** $y^2 = x^3$

En los Ejercicios 85-108, convierta la ecuación polar a forma rectangular.

85. $r = 4 \operatorname{sen} \theta$ **86.** $r = 2 \cos \theta$

87. $r = -2 \cos \theta$ **88.** $r = -5 \operatorname{sen} \theta$

89. $\theta = 2\pi/3$ **90.** $\theta = 5\pi/3$

91. $\theta = 11\pi/6$ **92.** $\theta = 5\pi/6$

93. $r = 4$ **94.** $r = 10$

95. $r = 4 \csc \theta$ **96.** $r = 2 \csc \theta$

97. $r = -3 \sec \theta$ **98.** $r = -\sec \theta$

99. $r^2 = \cos \theta$ **100.** $r^2 = 2 \operatorname{sen} \theta$

101. $r^2 = \operatorname{sen} 2\theta$ **102.** $r^2 = \cos 2\theta$

103. $r = 2 \operatorname{sen} 3\theta$ **104.** $r = 3 \cos 2\theta$

105. $r = \dfrac{2}{1 + \operatorname{sen} \theta}$ **106.** $r = \dfrac{1}{1 - \cos \theta}$

107. $r = \dfrac{6}{2 - 3 \operatorname{sen} \theta}$ **108.** $r = \dfrac{6}{2 \cos \theta - 3 \operatorname{sen} \theta}$

En los Ejercicios 109-118, describa la gráfica de la ecuación polar y encuentre la correspondiente ecuación rectangular. Trace su gráfica.

109. $r = 6$ **110.** $r = 8$

111. $\theta = \pi/6$ **112.** $\theta = 3\pi/4$

113. $r = 2 \operatorname{sen} \theta$ **114.** $r = 4 \cos \theta$

115. $r = -6 \cos \theta$ **116.** $r = -3 \operatorname{sen} \theta$

117. $r = 3 \sec \theta$ **118.** $r = 2 \csc \theta$

EXPLORACIÓN

¿VERDADERO O FALSO? **En los Ejercicios 119 y 120, determine si la proposición es verdadera o falsa. Justifique su respuesta.**

119. Si $\theta_1 = \theta_2 + 2\pi n$ para algún entero n, entonces (r, θ_1) y (r, θ_2) representan el mismo punto en el sistema de coordenadas polares.

120. Si $|r_1| = |r_2|$, entonces (r_1, θ) y (r_2, θ) representan el mismo punto en el sistema de coordenadas polares.

121. Convierta la ecuación polar $r = 2(h \cos \theta + k \operatorname{sen} \theta)$ a forma rectangular y verifique que es la ecuación de una circunferencia. Encuentre el radio de ésta y las coordenadas rectangulares de su centro.

122. Convierta la ecuación polar $r = \cos \theta + 3 \operatorname{sen} \theta$ a forma rectangular e identifique la gráfica.

123. PIÉNSELO

(a) Demuestre que la distancia entre los puntos (r_1, θ_1) y (r_2, θ_2) es $\sqrt{r_1^2 + r_2^2 - 2r_1r_2 \cos(\theta_1 - \theta_2)}$.

(b) Describa las posiciones de los puntos respecto uno del otro para $\theta_1 = \theta_2$. Simplifique la fórmula de la distancia para este caso. ¿La simplificación es lo que usted esperaba? Explique.

(c) Simplifique la fórmula de la distancia para $\theta_1 - \theta_2 = 90°$. ¿La simplificación es lo que usted esperaba? Explique.

(d) Escoja dos puntos sobre el sistema de coordenadas polares y encuentre la distancia entre ellos. A continuación, escoja diferentes representaciones polares de los mismos dos puntos y aplique de nuevo la fórmula de la distancia. Discuta el resultado.

124. RAZONAMIENTO GRÁFICO

(a) Ponga el formato de pantalla de su calculadora de gráficas en coordenadas rectangulares y localice el cursor en cualquier posición fuera de los ejes de coordenadas. Mueva el cursor horizontalmente y observe cualquier cambio en las coordenadas de los puntos que aparezcan. Explique los cambios de las coordenadas. Ahora repita el proceso moviendo el cursor verticalmente.

(b) Ponga el formato de pantalla de su calculadora de gráficas en coordenadas polares y localice el cursor en cualquier posición fuera de los ejes de coordenadas. Mueva el cursor horizontalmente y observe cualquier cambio en las coordenadas de los puntos que aparezcan. Explique los cambios de las coordenadas. Ahora repita el proceso moviendo el cursor verticalmente.

(c) Explique por qué los resultados de los incisos (a) y (b) no son iguales.

125. RAZONAMIENTO GRÁFICO

(a) Use una calculadora de gráficas en el modo *polar* para graficar la ecuación $r = 3$.

(b) Use el comando *trace* para mover el cursor alrededor del círculo. ¿Puede localizar el punto $(3, 5\pi/4)$?

(c) ¿Puede hallar otras representaciones polares del punto $(3, 5\pi/4)$? Si es así, explique cómo lo hizo.

126. TOQUE FINAL En el sistema de coordenadas rectangulares, cada punto (x, y) tiene una representación única. Explique por qué esto no es cierto para un punto (r, θ) en el sistema de coordenadas polares.

10.8 Gráficas de ecuaciones polares

Lo que debe aprender

- Graficar ecuaciones polares al localizar puntos.
- Usar simetría para trazar gráficas de ecuaciones polares.
- Usar ceros y valores máximos de r para trazar gráficas de ecuaciones polares.
- Reconocer gráficas polares especiales.

Por qué debe aprenderlo

Las ecuaciones de varias figuras comunes son más sencillas en forma polar que en forma rectangular. Por ejemplo, el Ejercicio 12 de la página 789 muestra la gráfica de una circunferencia y su ecuación polar.

Introducción

En los capítulos previos aprendimos a trazar gráficas en sistemas de coordenadas rectangulares. Empezamos con el método básico de localizar puntos y, a continuación, usamos ayudas para trazado como simetría, intersecciones, asíntotas, periodos y desplazamientos para investigar con más detalle la naturaleza de las gráficas. En una forma semejante, esta sección aborda el trazado de curvas del sistema de coordenadas polares empezando con una demostración de localización de puntos.

Ejemplo 1 Graficar una ecuación polar al localizar puntos

Trace la gráfica de la ecuación polar $r = 4 \operatorname{sen} \theta$.

Solución

La función seno es periódica, de modo que se puede tener toda una gama de valores de r si consideramos valores de θ en el intervalo $0 \leq \theta \leq 2\pi$, como se ve en la tabla siguiente.

θ	0	$\frac{\pi}{6}$	$\frac{\pi}{3}$	$\frac{\pi}{2}$	$\frac{2\pi}{3}$	$\frac{5\pi}{6}$	π	$\frac{7\pi}{6}$	$\frac{3\pi}{2}$	$\frac{11\pi}{6}$	2π
r	0	2	$2\sqrt{3}$	4	$2\sqrt{3}$	2	0	-2	-4	-2	0

Si se grafican estos puntos como se muestra en la Figura 10.71, parece que la gráfica es una circunferencia de radio 2 cuyo centro está en el punto $(x, y) = (0, 2)$.

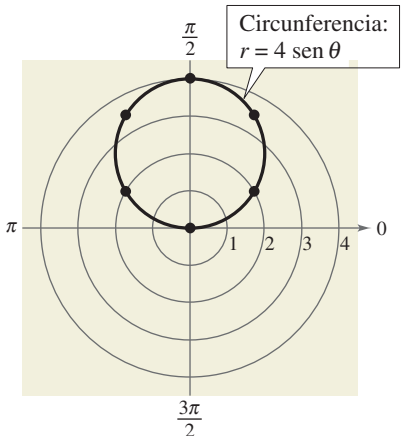


FIGURA 10.71

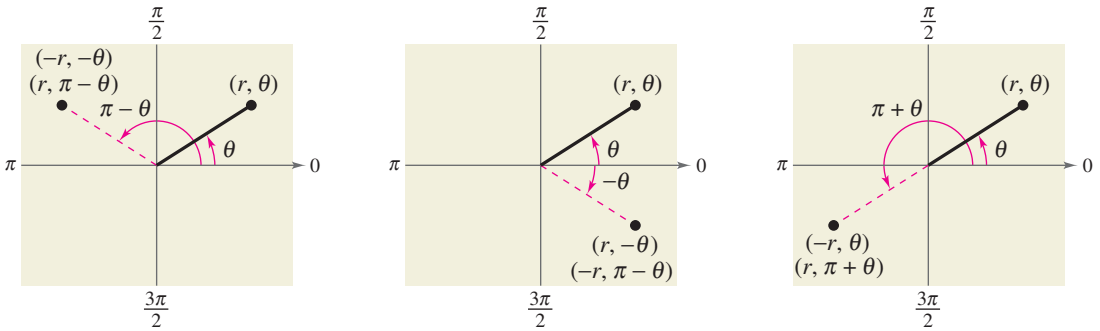
PUNTO de repaso Ahora trate de hacer el Ejercicio 27.

Se puede confirmar la gráfica de la Figura 10.71 convirtiendo la ecuación polar a forma rectangular y luego estirando la gráfica de la ecuación rectangular. También se puede usar una calculadora de gráficas puesta en el modo *polar* y graficar la ecuación polar, o poner la calculadora de gráficas en el modo *parametric* y graficar una representación paramétrica.

Simetría

En la Figura 10.71 de la página precedente, observe que cuando θ aumenta de 0 a 2π la gráfica se traza dos veces. Además, nótese que la gráfica es *simétrica respecto a la recta* $\theta = \pi/2$. Si hubiéramos sabido por anticipado de esta simetría y trazado repetido, podríamos haber empleado menos puntos.

La simetría respecto a la recta $\theta = \pi/2$ es uno de los tres tipos importantes de simetría que se debe considerar en el trazado de curvas polares. (Vea la Figura 10.72.)



Simetría respecto a la recta $\theta = \dfrac{\pi}{2}$ | Simetría respecto al eje polar | Simetría respecto al polo

FIGURA 10.72

Tip de estudio

Observe en el Ejemplo 2 que $\cos(-\theta) = \cos\theta$. Esto es porque la función coseno es *par*. Recuerde de la sección 4.2 que la función coseno es par y la función seno es impar. Esto es, $\text{sen}(-\theta) = -\text{sen}\,\theta$.

Pruebas para simetría en coordenadas polares

La gráfica de una ecuación polar es simétrica respecto a lo siguiente si la sustitución dada da una ecuación equivalente.

1. *La recta* $\theta = \pi/2$: sustituir (r, θ) por $(r, \pi - \theta)$ o $(-r, -\theta)$.
2. *El eje polar:* sustituir (r, θ) por $(r, -\theta)$ o $(-r, \pi - \theta)$.
3. *El polo:* sustituir (r, θ) por $(r, \pi + \theta)$ o $(-r, \theta)$.

Ejemplo 2 Usar simetría para trazar una gráfica polar

Use simetría para trazar la gráfica de $r = 3 + 2\cos\theta$.

Solución

Sustituyendo (r, θ) por $(r, -\theta)$ tendremos

$$r = 3 + 2\cos(-\theta) = 3 + 2\cos\theta. \qquad \cos(-\theta) = \cos\theta$$

Por tanto, se puede concluir que la curva es simétrica respecto al eje polar. Determinando los puntos en la tabla y usando simetría de eje polar, obtenemos la gráfica que se muestra en la Figura 10.73. Esta gráfica recibe el nombre de **limaçon.**

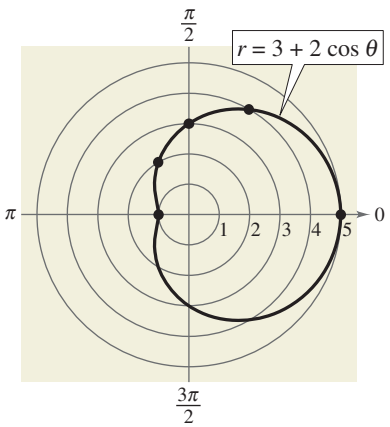


FIGURA 10.73

θ	0	$\frac{\pi}{3}$	$\frac{\pi}{2}$	$\frac{2\pi}{3}$	π
r	5	4	3	2	1

PUNTO *de repaso* Ahora trate de hacer el Ejercicio 33.

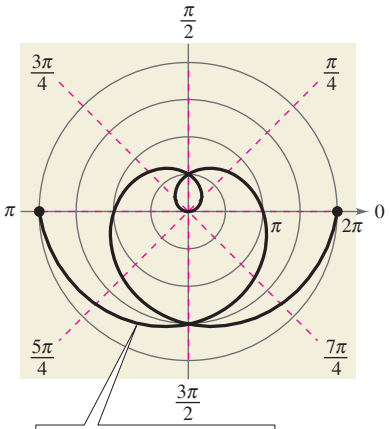


FIGURA 10.74

Las tres pruebas de simetría en coordenadas polares citadas en la página 784 son suficientes para garantizar simetría, pero no son necesarias. Por ejemplo, la Figura 10.74 muestra que la gráfica de $r = \theta + 2\pi$ es simétrica respecto a la recta $\theta = \pi/2$, y sin embargo las pruebas de la página 784 no indican simetría porque ninguna de las siguientes sustituciones dan una ecuación equivalente.

Ecuación original	*Sustitución*	*Nueva ecuación*
$r = \theta + 2\pi$	(r, θ) por $(-r, -\theta)$	$-r = -\theta + 2\pi$
$r = \theta + 2\pi$	(r, θ) por $(r, \pi - \theta)$	$r = -\theta + 3\pi$

Las ecuaciones tratadas en los Ejemplos 1 y 2 son de la forma

$$r = 4 \operatorname{sen} \theta = f(\operatorname{sen} \theta) \quad \text{y} \quad r = 3 + 2 \cos \theta = g(\cos \theta).$$

La gráfica de la primera ecuación es simétrica respecto a la recta $\theta = \pi/2$, y la gráfica de la segunda ecuación es simétrica respecto al eje polar. Esta observación se puede generalizar para obtener las siguientes pruebas.

Pruebas rápidas para simetría en coordenadas polares

1. La gráfica de $r = f(\operatorname{sen} \theta)$ es simétrica respecto a la recta $\theta = \dfrac{\pi}{2}$.

2. La gráfica de $r = g(\cos \theta)$ es simétrica respecto al eje polar.

Ceros y valores máximos de *r*

Dos ayudas adicionales para graficar las ecuaciones polares incluyen conocer los valores de θ para los cuales $|r|$ es máxima y conocer los valores de θ para los cuales $r = 0$. Por citar un caso, en el Ejemplo 1, el máximo valor de $|r|$ para $r = 4 \operatorname{sen} \theta$ es $|r| = 4$, y esto ocurre cuando $\theta = \pi/2$, como se muestra en la Figura 10.71. Además, $r = 0$ cuando $\theta = 0$.

Ejemplo 3 Trazar una gráfica polar

Trace la gráfica de $r = 1 - 2 \cos \theta$.

Solución

De la ecuación $r = 1 - 2 \cos \theta$ se puede obtener lo siguiente.

Simetría: Respecto al eje polar
Valor máximo de $|r|$*:* $r = 3$ cuando $\theta = \pi$
Cero de r: $r = 0$ cuando $\theta = \pi/3$

La tabla siguiente muestra varios valores de θ en el intervalo $[0, \pi]$. Al localizar los puntos correspondientes, se puede trazar la gráfica que se muestra en la Figura 10.75.

θ	0	$\frac{\pi}{6}$	$\frac{\pi}{3}$	$\frac{\pi}{2}$	$\frac{2\pi}{3}$	$\frac{5\pi}{6}$	π
r	-1	-0.73	0	1	2	2.73	3

Nótese la forma en que valores negativos de r determinan el *lazo interior* de la gráfica de la Figura 10.75. Esta gráfica, al igual que la de la Figura 10.73, es un limaçon.

PUNTO *de repaso* Ahora trate de hacer el Ejercicio 35.

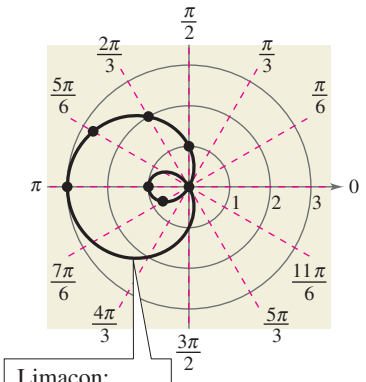


FIGURA 10.75

Algunas curvas alcanzan sus ceros y valores máximos de r en más de un punto, como se ve en el Ejemplo 4.

Ejemplo 4 Trazar una gráfica polar

Trace la gráfica de $r = 2\cos 3\theta$.

Solución

Simetría: Respecto al eje polar

Valor máximo de $|r|$: $|r| = 2$ cuando $3\theta = 0, \pi, 2\pi, 3\pi$ o $\theta = 0, \frac{\pi}{3}, \frac{2\pi}{3}, \pi$

Ceros de r: $r = 0$ cuando $3\theta = \frac{\pi}{2}, \frac{3\pi}{2}, \frac{5\pi}{2}$ o $\theta = \frac{\pi}{6}, \frac{\pi}{2}, \frac{5\pi}{6}$

θ	0	$\frac{\pi}{12}$	$\frac{\pi}{6}$	$\frac{\pi}{4}$	$\frac{\pi}{3}$	$\frac{5\pi}{12}$	$\frac{\pi}{2}$
r	2	$\sqrt{2}$	0	$-\sqrt{2}$	-2	$-\sqrt{2}$	0

Al determinar estos puntos y usar la simetría especificada, cero y valores máximos se obtiene la gráfica que se ilustra en la Figura 10.76. Esta gráfica recibe el nombre de **curva roseta**, y cada uno de los lazos en ella se denomina *pétalo* de la curva roseta. Observe la forma en que toda la curva se genera cuando θ aumenta de 0 a π.

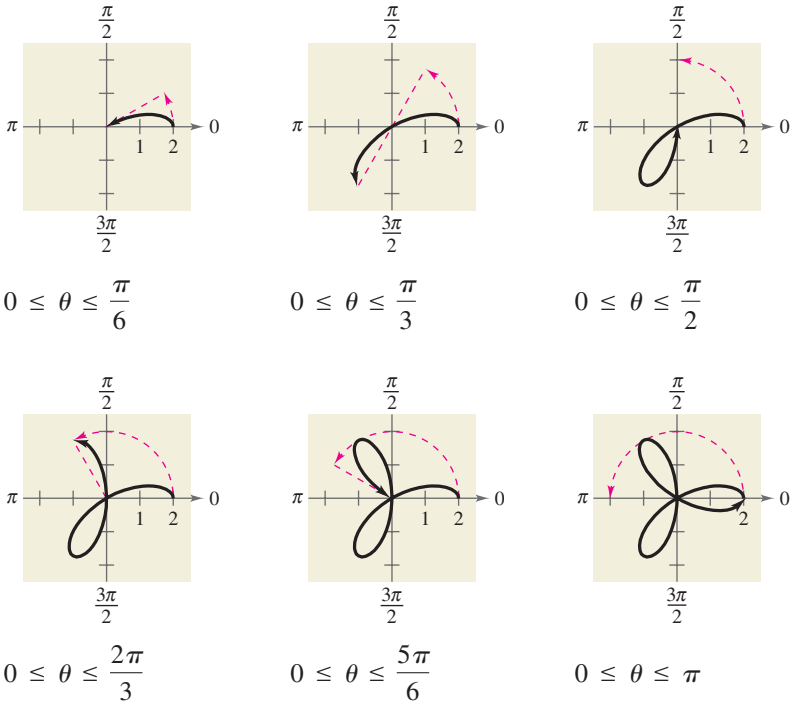


FIGURA 10.76

TECNOLOGÍA

Use una calculadora de gráficas en el modo polar para verificar la gráfica de $r = 2\cos 3\theta$ que se ve en la Figura 10.76.

PUNTO *de repaso* Ahora trate de hacer el Ejercicio 39.

Gráficas polares especiales

Varios tipos importantes de gráficas tienen ecuaciones que son más sencillas en forma polar que en forma rectangular. Por ejemplo, la circunferencia

$$r = 4 \operatorname{sen} \theta$$

del Ejemplo 1 tiene la ecuación rectangular más complicada

$$x^2 + (y - 2)^2 = 4.$$

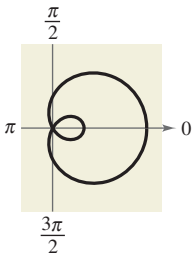
A continuación se ilustran otros varios tipos de gráficas que tienen ecuaciones polares sencillas.

Limaçon

$r = a \pm b \cos \theta$

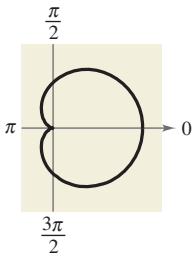
$r = a \pm b \operatorname{sen} \theta$

$(a > 0, b > 0)$



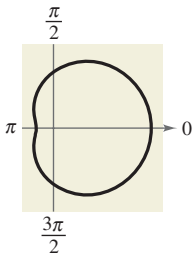
$\frac{a}{b} < 1$

Limaçon con lazo interior



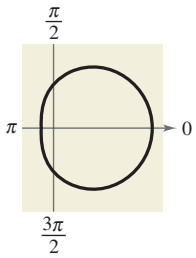
$\frac{a}{b} = 1$

Cardioide (forma de corazón)



$1 < \frac{a}{b} < 2$

Caracol con depresión

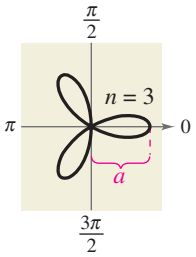


$\frac{a}{b} \geq 2$

Limaçon convexo

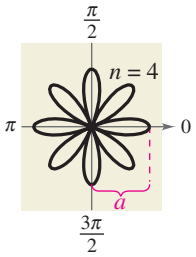
Curvas roseta

n pétalos si n es impar, $2n$ pétalos si n es par $(n \geq 2)$.



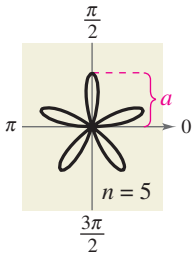
$r = a \cos n\theta$

Curvas roseta



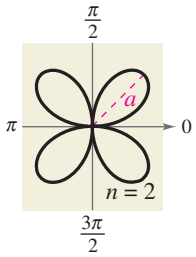
$r = a \cos n\theta$

Curvas roseta



$r = a \operatorname{sen} n\theta$

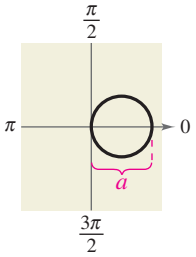
Curvas roseta



$r = a \operatorname{sen} n\theta$

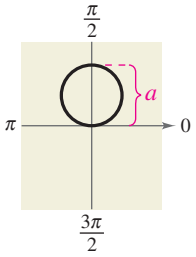
Curvas roseta

Circunferencias y lemniscatas



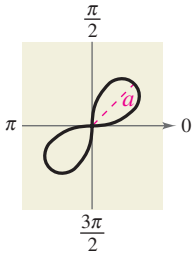
$r = a \cos \theta$

Circunferencia



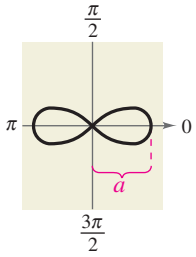
$r = a \operatorname{sen} \theta$

Circunferencia



$r^2 = a^2 \operatorname{sen} 2\theta$

Lemniscata



$r^2 = a^2 \cos 2\theta$

Lemniscata

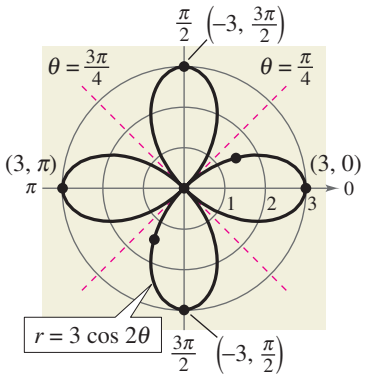


FIGURA **10.77**

Ejemplo 5 Trazar una curva roseta

Trace la gráfica de $r = 3 \cos 2\theta$.

Solución

Tipo de curva: Curva roseta con $2n = 4$ pétalos

Simetría: Respecto a eje polar, la recta $\theta = \frac{\pi}{2}$ y el polo

Valor máximo de $|r|$*:* $|r| = 3$ cuando $\theta = 0, \frac{\pi}{2}, \pi, \frac{3\pi}{2}$

Ceros de r: $r = 0$ cuando $\theta = \frac{\pi}{4}, \frac{3\pi}{4}$

Usando esta información junto con los puntos adicionales que se muestran en la tabla siguiente, se obtiene la gráfica mostrada en la Figura 10.77.

θ	0	$\frac{\pi}{6}$	$\frac{\pi}{4}$	$\frac{\pi}{3}$
r	3	$\frac{3}{2}$	0	$-\frac{3}{2}$

PUNTO *de repaso* Ahora trate de hacer el Ejercicio 41.

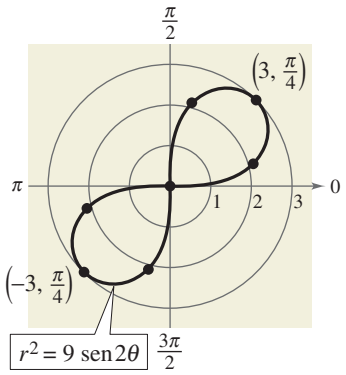


FIGURA **10.78**

Ejemplo 6 Trazar una lemniscata

Trace la gráfica de $r^2 = 9 \operatorname{sen} 2\theta$.

Solución

Tipo de curva: Lemniscata

Simetría: Respecto al polo

Valor máximo de $|r|$*:* $|r| = 3$ cuando $\theta = \frac{\pi}{4}$

Ceros de r: $r = 0$ cuando $\theta = 0, \frac{\pi}{2}$

Si $\operatorname{sen} 2\theta < 0$, esta ecuación no tiene puntos de solución. Por tanto, se restringen los valores de θ a aquellos para los cuales $\operatorname{sen} 2\theta \geq 0$.

$$0 \leq \theta \leq \frac{\pi}{2} \quad \text{o} \quad \pi \leq \theta \leq \frac{3\pi}{2}$$

Además, usando simetría, es necesario considerar sólo el primero de estos dos intervalos. Al hallar unos cuantos puntos adicionales (vea la tabla a continuación) se obtiene la gráfica que se ilustra en la Figura 10.78.

θ	0	$\frac{\pi}{12}$	$\frac{\pi}{4}$	$\frac{5\pi}{12}$	$\frac{\pi}{2}$
$r = \pm 3\sqrt{\operatorname{sen} 2\theta}$	0	$\frac{\pm 3}{\sqrt{2}}$	± 3	$\frac{\pm 3}{\sqrt{2}}$	0

PUNTO *de repaso* Ahora trate de hacer el Ejercicio 47.

10.8 EJERCICIOS

En www.CalcChat.com vea las soluciones a los ejercicios impares.

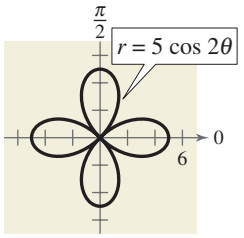
VOCABULARIO: Llene los espacios en blanco.

1. La gráfica de $r = f(\text{sen } \theta)$ es simétrica respecto a la recta _____.
2. La gráfica de $r = g(\cos \theta)$ es simétrica respecto a la _____ _____.
3. La ecuación $r = 2 + \cos \theta$ representa una _____.
4. La ecuación $r = 2 \cos \theta$ representa una _____.
5. La ecuación $r^2 = 4 \text{ sen } 2\theta$ representa una _____.
6. La ecuación $r = 1 + \text{sen } \theta$ representa una _____.

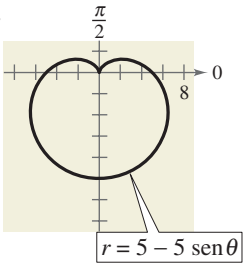
HABILIDADES Y APLICACIONES

En los Ejercicios 7-12, identifique el tipo de gráfica polar.

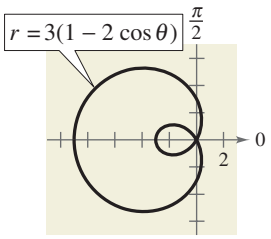
7.



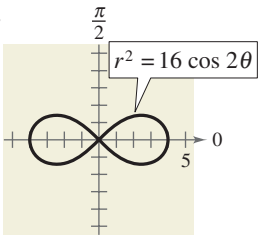
8.



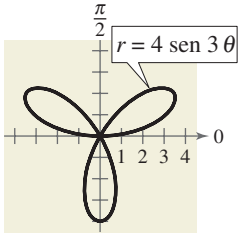
9.



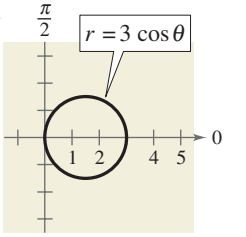
10.



11.



12.



En los Ejercicios 13-18, pruebe la simetría respecto a $\theta = \pi/2$, el eje polar y el polo.

13. $r = 4 + 3 \cos \theta$

14. $r = 9 \cos 3\theta$

15. $r = \dfrac{2}{1 + \text{sen } \theta}$

16. $r = \dfrac{3}{2 + \cos \theta}$

17. $r^2 = 36 \cos 2\theta$

18. $r^2 = 25 \text{ sen } 2\theta$

En los Ejercicios 19-22, encuentre el valor máximo de $|r|$ y cualesquier ceros de r.

19. $r = 10 - 10 \text{ sen } \theta$

20. $r = 6 + 12 \cos \theta$

21. $r = 4 \cos 3\theta$

22. $r = 3 \text{ sen } 2\theta$

En los Ejercicios 23-48, trace la gráfica de la ecuación polar usando simetría, ceros, valores máximos de r y cualesquier otros puntos adicionales.

23. $r = 4$

24. $r = -7$

25. $r = \dfrac{\pi}{3}$

26. $r = -\dfrac{3\pi}{4}$

27. $r = \text{sen } \theta$

28. $r = 4 \cos \theta$

29. $r = 3(1 - \cos \theta)$

30. $r = 4(1 - \text{sen } \theta)$

31. $r = 4(1 + \text{sen } \theta)$

32. $r = 2(1 + \cos \theta)$

33. $r = 3 + 6 \text{ sen } \theta$

34. $r = 4 - 3 \text{ sen } \theta$

35. $r = 1 - 2 \text{ sen } \theta$

36. $r = 2 - 4 \cos \theta$

37. $r = 3 - 4 \cos \theta$

38. $r = 4 + 3 \cos \theta$

39. $r = 5 \text{ sen } 2\theta$

40. $r = 2 \cos 2\theta$

41. $r = 6 \cos 3\theta$

42. $r = 3 \text{ sen } 3\theta$

43. $r = 2 \sec \theta$

44. $r = 5 \csc \theta$

45. $r = \dfrac{3}{\text{sen } \theta - 2 \cos \theta}$

46. $r = \dfrac{6}{2 \text{ sen } \theta - 3 \cos \theta}$

47. $r^2 = 9 \cos 2\theta$

48. $r^2 = 4 \text{ sen } \theta$

En los Ejercicios 49-58, use una calculadora de gráficas para graficar la ecuación polar. Describa la pantalla de su calculadora.

49. $r = \dfrac{9}{4}$

50. $r = -\dfrac{5}{2}$

51. $r = \dfrac{5\pi}{8}$

52. $r = -\dfrac{\pi}{10}$

53. $r = 8 \cos \theta$

54. $r = \cos 2\theta$

55. $r = 3(2 - \text{sen } \theta)$

56. $r = 2 \cos(3\theta - 2)$

57. $r = 8 \text{ sen } \theta \cos^2 \theta$

58. $r = 2 \csc \theta + 5$

En los Ejercicios 59-64, use una calculadora de gráficas para graficar la ecuación polar. Encuentre un intervalo para θ para el cual la gráfica se trace *sólo una vez*

59. $r = 3 - 8 \cos \theta$

60. $r = 5 + 4 \cos \theta$

61. $r = 2 \cos\left(\dfrac{3\theta}{2}\right)$

62. $r = 3 \text{ sen}\left(\dfrac{5\theta}{2}\right)$

63. $r^2 = 16 \operatorname{sen} 2\theta$ **64.** $r^2 = \dfrac{1}{\theta}$

En los Ejercicios 65-68, use una calculadora de gráficas para graficar la ecuación polar y demostrar que la recta indicada es una asíntota de la gráfica.

Nombre de la gráfica	*Ecuación polar*	*Asíntota*
65. Concoide	$r = 2 - \sec\theta$	$x = -1$
66. Concoide	$r = 2 + \csc\theta$	$y = 1$
67. Espiral hiperbólica	$r = \dfrac{3}{\theta}$	$y = 3$
68. Estrofoide	$r = 2\cos 2\theta \sec\theta$	$x = -2$

EXPLORACIÓN

¿VERDADERO O FALSO? **En los Ejercicios 69 y 70, determine si la proposición es verdadera o falsa. Justifique su respuesta.**

69. En el sistema de coordenadas polares, si una gráfica que tiene simetría respecto al eje polar se doblara en la recta $\theta = 0$, la parte de la gráfica arriba del eje polar coincidiría con la parte de la gráfica que se encuentre abajo del mismo eje.

70. En el sistema de coordenadas polares, si una gráfica que tiene simetría respecto al polo se doblara en la recta $\theta = 3\pi/4$, la parte de la gráfica en un lado del doblez coincidiría con la parte de la gráfica que está en el otro lado del doblez.

71. Trace la gráfica de $r = 6\cos\theta$ sobre cada intervalo. Describa la parte de la gráfica obtenida en cada caso.

(a) $0 \le \theta \le \dfrac{\pi}{2}$ (b) $\dfrac{\pi}{2} \le \theta \le \pi$

(c) $-\dfrac{\pi}{2} \le \theta \le \dfrac{\pi}{2}$ (d) $\dfrac{\pi}{4} \le \theta \le \dfrac{3\pi}{4}$

72. RAZONAMIENTO GRÁFICO Use una calculadora de gráficas para graficar la ecuación polar $r = 6[1 + \cos(\theta - \phi)]$ para (a) $\phi = 0$, (b) $\phi = \pi/4$ y (c) $\phi = \pi/2$. Use las gráficas para describir el efecto del ángulo ϕ. Escriba la ecuación como función de sen θ para el inciso (c).

73. La gráfica de $r = f(\theta)$ es girada alrededor del polo todo un ángulo ϕ. Demuestre que la ecuación de dicha gráfica es $r = f(\theta - \phi)$.

74. Considere la gráfica de $r = f(\operatorname{sen}\theta)$.

(a) Demuestre que si la gráfica es girada en sentido contrario al giro de las manecillas de un reloj en $\pi/2$ radianes alrededor del polo, la ecuación de dicha gráfica es $r = f(-\cos\theta)$.

(b) Demuestre que si la gráfica es girada en sentido contrario al giro de las manecillas de un reloj en π radianes alrededor del polo, la ecuación de dicha gráfica es $r = f(-\operatorname{sen}\theta)$.

(c) Demuestre que si la gráfica es girada en sentido contrario al giro de las manecillas de un reloj en $3\pi/2$ radianes alrededor del polo, la ecuación de dicha gráfica es $r = f(\cos\theta)$.

En los Ejercicios 75-78, use los resultados de los Ejercicios 73 y 74.

75. Escriba una ecuación para el limaçon $r = 2 - \operatorname{sen}\theta$ después de haber sido girado todo el ángulo dado.

(a) $\dfrac{\pi}{4}$ (b) $\dfrac{\pi}{2}$ (c) π (d) $\dfrac{3\pi}{2}$

76. Escriba una ecuación de la curva roseta $r = 2\operatorname{sen} 2\theta$ después de haber sido girada todo el ángulo dado.

(a) $\dfrac{\pi}{6}$ (b) $\dfrac{\pi}{2}$ (c) $\dfrac{2\pi}{3}$ (d) π

77. Trace la gráfica de cada ecuación.

(a) $r = 1 - \operatorname{sen}\theta$ (b) $r = 1 - \operatorname{sen}\left(\theta - \dfrac{\pi}{4}\right)$

78. Trace la gráfica de cada ecuación

(a) $r = 3\sec\theta$ (b) $r = 3\sec\left(\theta - \dfrac{\pi}{4}\right)$

(c) $r = 3\sec\left(\theta + \dfrac{\pi}{3}\right)$ (d) $r = 3\sec\left(\theta - \dfrac{\pi}{2}\right)$

79. PIÉNSELO ¿Cuántos pétalos tienen las curvas roseta dadas por $r = 2\cos 4\theta$ y $r = 2\operatorname{sen} 3\theta$? Determine el número de pétalos para las curvas dadas por $r = 2\cos n\theta$ y $r = 2\operatorname{sen} n\theta$, donde n es un entero positivo.

80. Use una calculadora de gráficas para graficar e identificar $r = 2 + k\operatorname{sen}\theta$ para $k = 0, 1, 2$, y 3.

81. Considere la ecuación $r = 3\operatorname{sen} k\theta$.

(a) Use una calculadora de gráficas para graficar la ecuación para $k = 1.5$. Encuentre el intervalo para θ en el que la gráfica se trace sólo una vez.

(b) Use una calculadora de gráficas para graficar la ecuación para $k = 2.5$. Encuentre el intervalo para θ en el que la gráfica se trace sólo una vez.

(c) ¿Es posible hallar un intervalo para θ en el que la gráfica se trace sólo una vez para cualquier número racional k? Explique.

82. TOQUE FINAL Escriba un breve párrafo que describa por qué algunas curvas polares tienen ecuaciones que son más sencillas en forma polar que rectangular. Además de una circunferencia, dé un ejemplo de una curva que sea más sencilla en forma polar que en rectangular. Dé un ejemplo de una curva que sea más sencilla en forma rectangular que en forma polar.

10.9 Ecuaciones polares de cónicas

Lo que debe aprender

- Definir cónicas en términos de excentricidad.
- Escribir y graficar ecuaciones de cónicas en forma polar.
- Usar ecuaciones de cónicas en forma polar para modelar problemas de la vida real.

Por qué debe aprenderlo

Las órbitas de planetas y satélites se pueden modelar con ecuaciones polares. Por ejemplo, en el Ejercicio 65 de la página 796 se usa una ecuación polar para modelar la órbita de un satélite.

Corbis

Definición alternativa de cónica

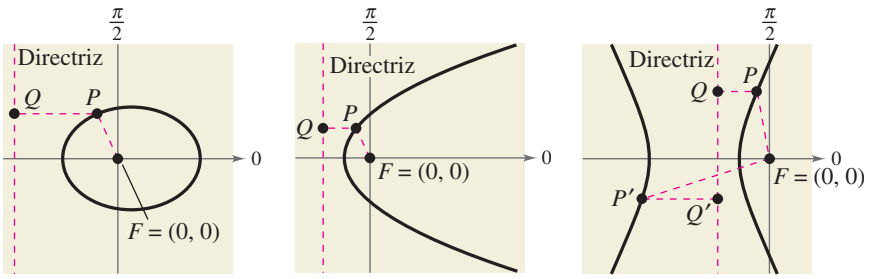
En las secciones 10.3 y 10.4 aprendimos que las ecuaciones rectangulares de elipses e hipérbolas toman formas sencillas cuando el origen se encuentra en sus *centros*. Cuando es así, hay numerosas e importantes aplicaciones de las cónicas en la que es más práctico usar uno de los *focos* como el origen. En esta sección aprenderemos que las ecuaciones polares de cónicas toman formas más sencillas si uno de los focos se encuentra en el polo.

Para empezar, considere la siguiente definición alternativa de cónica que usa el concepto de excentricidad.

Definición alternativa de cónica

El lugar geométrico de un punto en el plano que se mueve de modo que su distancia desde un punto fijo (foco) es una razón constante respecto a su distancia desde una recta fija (directriz) es una **cónica**. La razón constante es la excentricidad de la cónica y se denota con e. Además, la cónica es una **elipse** si $e < 1$, una **parábola** si $e = 1$ y una **hipérbola** si $e > 1$. (Vea Figura 10.79.)

En la Figura 10.79, observe que para cada tipo de cónica el foco está en el polo.



Elipse: $0 < e < 1$
$\frac{PF}{PQ} < 1$

Parábola: $e = 1$
$\frac{PF}{PQ} = 1$

Hipérbola $e > 1$
$\frac{PF}{PQ} = \frac{P'F}{P'Q'} > 1$

FIGURA 10.79

Ecuaciones polares de cónicas

El beneficio de localizar un foco de una cónica en el polo es que la ecuación de ésta toma una forma más sencilla. Para una demostración de las ecuaciones polares de cónicas, vea la página 806.

Ecuaciones polares de cónicas

La gráfica de una ecuación polar de la forma

1. $r = \dfrac{ep}{1 \pm e\cos\theta}$ o **2.** $r = \dfrac{ep}{1 \pm e\,\text{sen}\,\theta}$

es una cónica, donde $e > 0$ es la excentricidad y $|p|$ es la distancia entre el foco (polo) y la directriz.

Ecuaciones de la forma

$$r = \frac{ep}{1 \pm e\cos\theta} = g(\cos\theta)$$ Directriz vertical

corresponde a cónicas con una directriz vertical y simetría respecto al eje polar. Ecuaciones de la forma

$$r = \frac{ep}{1 \pm e\,\text{sen}\,\theta} = g(\text{sen}\,\theta)$$ Directriz horizontal

corresponde a cónicas con una directriz horizontal y simetría respecto a la recta $\theta = \pi/2$. Además, lo contrario también es cierto, es decir, cualquier cónica con un foco en el polo y que tenga una directriz horizontal o vertical puede ser representada por una de estas ecuaciones.

Ejemplo 1 Identificar una cónica a partir de su ecuación

Identifique el tipo de cónica representada por la ecuación $r = \dfrac{15}{3 - 2\cos\theta}$.

Solución algebraica

Para identificar el tipo de cónica, reescriba la ecuación en la forma $r = (ep)/(1 \pm e\cos\theta)$.

$$r = \frac{15}{3 - 2\cos\theta}$$ Escribir la ecuación original.

$$= \frac{5}{1 - (2/3)\cos\theta}$$ Dividir numerador y denominador entre 3.

Como $e = \frac{2}{3} < 1$, se puede concluir que la gráfica es una elipse.

Solución gráfica

Se puede empezar por trazar la gráfica al localizar puntos de $\theta = 0$ a $\theta = \pi$. Como la ecuación es de la forma $r = g(\cos\theta)$, la gráfica de r es simétrica respecto al eje polar. Por tanto, se puede completar el bosquejo, como se muestra en la Figura 10.80. A partir de esto, se puede concluir que la gráfica es una elipse.

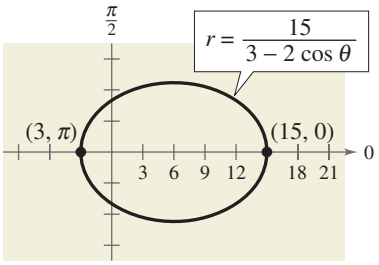


FIGURA 10.80

PUNTO *de repaso* Ahora trate de hacer el Ejercicio 15.

Para la elipse de la Figura 10.80, el eje mayor es horizontal y los vértices se encuentran en (15, 0) y $(3, \pi)$. Por tanto, la longitud del eje *mayor* es $2a = 18$. Para hallar la longitud del eje *menor*, se pueden usar las ecuaciones $e = c/a$ y $b^2 = a^2 - c^2$ para concluir que

$$\begin{aligned} b^2 &= a^2 - c^2 \\ &= a^2 - (ea)^2 \\ &= a^2(1 - e^2). \end{aligned}$$ Elipse

Como $e = \frac{2}{3}$, tenemos $b^2 = 9^2\left[1 - \left(\frac{2}{3}\right)^2\right] = 45$, lo cual implica que $b = \sqrt{45} = 3\sqrt{5}$. En consecuencia, la longitud del eje menor es $2b = 6\sqrt{5}$. Un análisis similar para hipérbolas da

$$\begin{aligned} b^2 &= c^2 - a^2 \\ &= (ea)^2 - a^2 \\ &= a^2(e^2 - 1). \end{aligned}$$ Hipérbola

Ejemplo 2 Trazar una cónica a partir de su ecuación polar

Identifique la cónica $r = \dfrac{32}{3 + 5 \operatorname{sen} \theta}$ y trace su gráfica.

Solución

Dividiendo numerador y denominador entre 3 tendremos

$$r = \frac{32/3}{1 + (5/3) \operatorname{sen} \theta}.$$

Como $e = \frac{5}{3} > 1$, la gráfica es una hipérbola. El eje transverso de la hipérbola se encuentra sobre la recta $\theta = \pi/2$, y los vértices se presentan en $(4, \pi/2)$ y $(-16, 3\pi/2)$. Como la longitud del eje transverso es 12, se puede ver que $a = 6$. Para hallar b, escriba

$$b^2 = a^2(e^2 - 1) = 6^2\left[\left(\frac{5}{3}\right)^2 - 1\right] = 64.$$

Por tanto, $b = 8$. Finalmente, se pueden usar a y b para determinar que las asíntotas de la hipérbola son $y = 10 \pm \frac{3}{4}x$. La gráfica se muestra en la Figura 10.81.

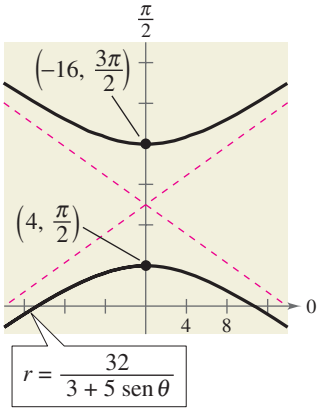


FIGURA 10.81

PUNTO *de repaso* Ahora trate de hacer el Ejercicio 23.

En el siguiente ejemplo se pide al estudiante hallar una ecuación polar de una cónica especificada. Para hacer esto, sea p la distancia entre el polo y la directriz.

1. *Directriz horizontal arriba del polo:* $r = \dfrac{ep}{1 + e \operatorname{sen} \theta}$

2. *Directriz horizontal abajo del polo:* $r = \dfrac{ep}{1 - e \operatorname{sen} \theta}$

3. *Directriz vertical a la derecha del polo:* $r = \dfrac{ep}{1 + e \cos \theta}$

4. *Directriz vertical a la izquierda del polo:* $r = \dfrac{ep}{1 - e \cos \theta}$

TECNOLOGÍA

Use una calculadora de gráficas puesta en el modo *polar* para verificar las cuatro orientaciones mostradas a la derecha. Recuerde que *e* debe ser positiva, pero *p* puede ser positiva o negativa.

Ejemplo 3 Hallar la ecuación polar de una cónica

Encuentre la ecuación polar de la parábola cuyo foco es el polo y cuya directriz es la recta $y = 3$.

Solución

En la Figura 10.82 se puede ver que la directriz es horizontal y arriba del polo, de modo que se puede escoger una ecuación de la forma

$$r = \frac{ep}{1 + e \operatorname{sen} \theta}.$$

Además, como la excentricidad de la parábola es $e = 1$ y la distancia entre el polo y la directriz es $p = 3$, tenemos la ecuación

$$r = \frac{3}{1 + \operatorname{sen} \theta}.$$

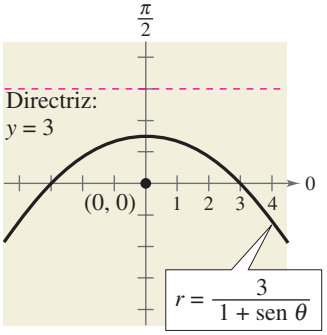


FIGURA 10.82

PUNTO *de repaso* Ahora trate de hacer el Ejercicio 39.

Aplicaciones

Las leyes de Kepler (citadas a continuación), que reciben ese nombre en honor al astrónomo alemán Johannes Kepler (1571-1630), se pueden usar para describir las órbitas de los planetas alrededor del Sol.

1. Cada planeta se mueve en una órbita elíptica con el Sol en un foco.
2. Un rayo del Sol al planeta recorre áreas iguales de la elipse en tiempos iguales.
3. El cuadrado del periodo (el tiempo que tarda un planeta en orbitar alrededor del Sol) es proporcional al cubo de la distancia media entre el planeta y el Sol.

Aun cuando Kepler simplemente expresó estas leyes con base en la observación, posteriormente fueron validadas por Isaac Newton (1642-1727). De hecho, Newton pudo demostrar que cada una de las leyes se puede deducir de un conjunto de leyes universales del movimiento y la gravitación que gobiernan el movimiento de todos los cuerpos celestes, incluidos cometas y satélites. Esto se ilustra en el siguiente ejemplo, que comprende al cometa llamado en honor al matemático y físico inglés Edmund Halley (1656-1742).

Si usted usa la Tierra como referencia con un periodo de 1 año y una distancia de 1 unidad astronómica (una *unidad astronómica* se define como la distancia media entre la Tierra y el Sol, o sea, unos 93 millones de millas), la constante de proporcionalidad en la tercera ley de Kepler es 1. Por ejemplo, como Marte tiene una distancia media al Sol de $d = 1.524$ unidades astronómicas, su periodo P está dado por $d^3 = P^2$. En consecuencia, el periodo de Marte es $P \approx 1.88$ años.

Ejemplo 4 Cometa Halley

El cometa Halley tiene una órbita elíptica con excentricidad de $e \approx 0.967$. La longitud del eje mayor de la órbita es aproximadamente 35.88 unidades astronómicas. Encuentre una ecuación polar para la órbita. ¿Cuánto se acerca el cometa Halley al Sol?

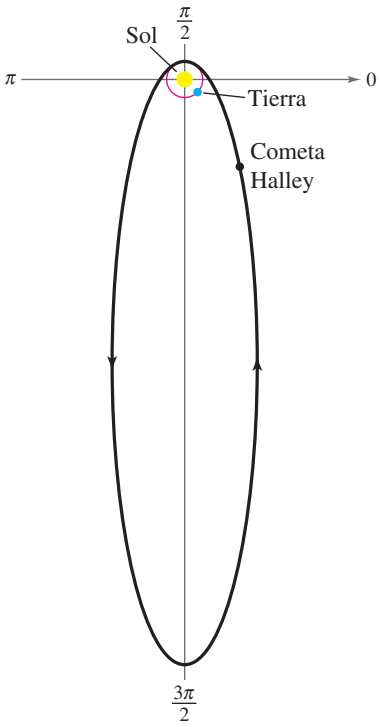


FIGURA 10.83

Solución

Usando un eje vertical, como se muestra en la Figura 10.83, escoja una ecuación de la forma $r = ep/(1 + e \operatorname{sen} \theta)$. Como los vértices de la elipse ocurren cuando $\theta = \pi/2$ y $\theta = 3\pi/2$, se puede determinar que la longitud del eje mayor es la suma de los valores r de los vértices. Esto es,

$$2a = \frac{0.967p}{1 + 0.967} + \frac{0.967p}{1 - 0.967} \approx 29.79p \approx 35.88.$$

Por tanto, $p \approx 1.204$ y $ep \approx (0.967)(1.204) \approx 1.164$. Usando este valor de ep en la ecuación, tendremos

$$r = \frac{1.164}{1 + 0.967 \operatorname{sen} \theta}$$

donde r se mide en unidades astronómicas. Para hallar el punto más cercano al Sol (el foco), sustituya $\theta = \pi/2$ en esta ecuación para obtener

$$r = \frac{1.164}{1 + 0.967 \operatorname{sen}(\pi/2)}$$

$$\approx 0.59 \text{ unidades astronómica}$$

$$\approx 55\,000\,000 \text{ millas}$$

PUNTO *de repaso* Ahora trate de hacer el Ejercicio 63.

10.9 EJERCICIOS

En www.CalcChat.com vea las soluciones a los ejercicios impares.

VOCABULARIO

En los Ejercicios 1-3, llene los espacios en blanco.

1. El lugar geométrico de un punto en el plano que se mueve de modo que su distancia desde un punto fijo (foco) es una razón constante, respecto a su distancia desde una recta fija (directriz), es una _____.
2. La razón constante es la _____ de la cónica y se denota con _____.
3. Una ecuación de la forma $r = \dfrac{ep}{1 + e\cos\theta}$ tiene una directriz _____ al _____ del polo.

4. Relacione la cónica con su excentricidad.

(a) $e < 1$ (b) $e = 1$ (c) $e > 1$

(i) parábola (ii) hipérbola (iii) elipse

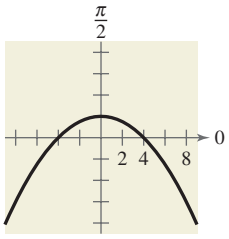
HABILIDADES Y APLICACIONES

En los Ejercicios 5-8, escriba la ecuación polar de la cónica para $e = 1$, $e = 0.5$ y $e = 1.5$. Identifique la cónica para cada ecuación. Verifique sus respuestas con una calculadora de gráficas.

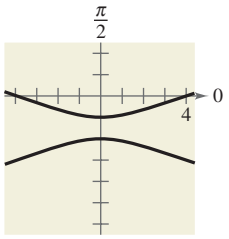
5. $r = \dfrac{2e}{1 + e\cos\theta}$
6. $r = \dfrac{2e}{1 - e\cos\theta}$
7. $r = \dfrac{2e}{1 - e\operatorname{sen}\theta}$
8. $r = \dfrac{2e}{1 + e\operatorname{sen}\theta}$

En los Ejercicios 9-14, relacione la ecuación polar con su gráfica. [Las gráficas están marcadas (a),(b),(c),(d) y (f).]

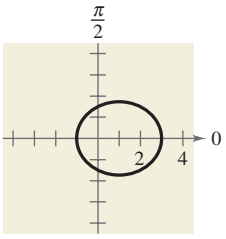
(a)



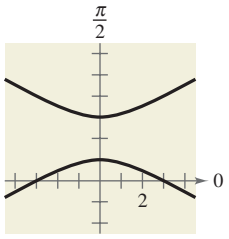
(b)



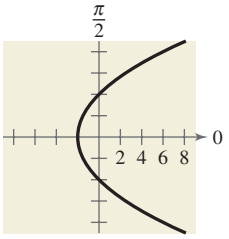
(c)



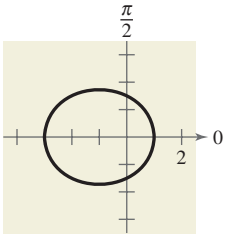
(d)



(e)



(f)



9. $r = \dfrac{4}{1 - \cos\theta}$
10. $r = \dfrac{3}{2 - \cos\theta}$
11. $r = \dfrac{3}{1 + 2\operatorname{sen}\theta}$
12. $r = \dfrac{3}{2 + \cos\theta}$
13. $r = \dfrac{4}{1 + \operatorname{sen}\theta}$
14. $r = \dfrac{4}{1 - 3\operatorname{sen}\theta}$

En los Ejercicios 15-28, identifique la cónica y trace su gráfica.

15. $r = \dfrac{3}{1 - \cos\theta}$
16. $r = \dfrac{7}{1 + \operatorname{sen}\theta}$
17. $r = \dfrac{5}{1 + \operatorname{sen}\theta}$
18. $r = \dfrac{6}{1 + \cos\theta}$
19. $r = \dfrac{2}{2 - \cos\theta}$
20. $r = \dfrac{4}{4 + \operatorname{sen}\theta}$
21. $r = \dfrac{6}{2 + \operatorname{sen}\theta}$
22. $r = \dfrac{9}{3 - 2\cos\theta}$
23. $r = \dfrac{3}{2 + 4\operatorname{sen}\theta}$
24. $r = \dfrac{5}{-1 + 2\cos\theta}$
25. $r = \dfrac{3}{2 - 6\cos\theta}$
26. $r = \dfrac{3}{2 + 6\operatorname{sen}\theta}$
27. $r = \dfrac{4}{2 - \cos\theta}$
28. $r = \dfrac{2}{2 + 3\operatorname{sen}\theta}$

En los Ejercicios 29-34, use una calculadora de gráficas para graficar la ecuación polar. Identifique la gráfica.

29. $r = \dfrac{-1}{1 - \operatorname{sen}\theta}$
30. $r = \dfrac{-5}{2 + 4\operatorname{sen}\theta}$
31. $r = \dfrac{3}{-4 + 2\cos\theta}$
32. $r = \dfrac{4}{1 - 2\cos\theta}$
33. $r = \dfrac{14}{14 + 17\operatorname{sen}\theta}$
34. $r = \dfrac{12}{2 - \cos\theta}$

En los Ejercicios 35-38, use una calculadora de gráficas para graficar la cónica rotada.

35. $r = \dfrac{3}{1 - \cos(\theta - \pi/4)}$ (Ver Ejercicio 15.)

36. $r = \dfrac{4}{4 + \operatorname{sen}(\theta - \pi/3)}$ (Ver Ejercicio 20.)

37. $r = \dfrac{6}{2 + \operatorname{sen}(\theta + \pi/6)}$ (Ver Ejercicio 21.)

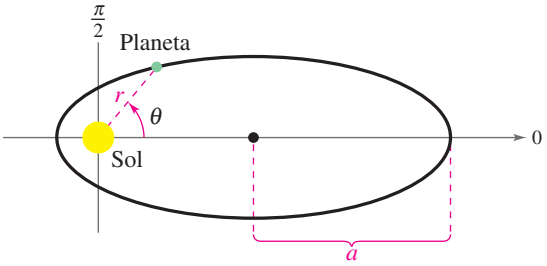
38. $r = \dfrac{5}{-1 + 2\cos(\theta + 2\pi/3)}$ (Ver Ejercicio 24.)

En los Ejercicios 39-54, encuentre una ecuación polar de la cónica con su foco en el polo.

	Cónica	*Excentricidad*	*Directriz*
39.	Parábola	$e = 1$	$x = -1$
40.	Parábola	$e = 1$	$y = -4$
41.	Elipse	$e = \frac{1}{2}$	$y = 1$
42.	Elipse	$e = \frac{3}{4}$	$y = -2$
43.	Hipérbola	$e = 2$	$x = 1$
44.	Hipérbola	$e = \frac{3}{2}$	$x = -1$

	Cónica	*Vértice(es)*
45.	Parábola	$(1, -\pi/2)$
46.	Parábola	$(8, 0)$
47.	Parábola	$(5, \pi)$
48.	Parábola	$(10, \pi/2)$
49.	Elipse	$(2, 0), (10, \pi)$
50.	Elipse	$(2, \pi/2), (4, 3\pi/2)$
51.	Elipse	$(20, 0), (4, \pi)$
52.	Hipérbola	$(2, 0), (8, 0)$
53.	Hipérbola	$(1, 3\pi/2), (9, 3\pi/2)$
54.	Hipérbola	$(4, \pi/2), (1, \pi/2)$

55. MOVIMIENTO PLANETARIO El planeta se desplaza en órbitas elípticas con el Sol en un foco. Suponga que el foco está en el polo, el eje mayor se encuentra sobre el eje polar y la longitud del eje mayor es $2a$ (vea figura). Demuestre que la ecuación polar de la órbita es $r = a(1 - e^2)/(1 - e\cos\theta)$, donde e es la excentricidad.



56. MOVIMIENTO PLANETARIO Use el resultado del Ejercicio 55 para demostrar que la distancia mínima (*distancia del perihelio*) del Sol al planeta es $r = a(1 - e)$ y que la distancia máxima (*distancia del afelio*) es $r = a(1 + e)$.

MOVIMIENTO PLANETARIO En los Ejercicios 57-62, use los resultados de los Ejercicios 55 y 56 para hallar la ecuación polar de la órbita del planeta, así como las distancias del perihelio y el afelio.

57. Tierra $a = 95.956 \times 10^6$ millas, $e = 0.0167$

58. Saturno $a = 1.427 \times 10^9$ kilómetros, $e = 0.0542$

59. Venus $a = 108.209 \times 10^6$ kilómetros, $e = 0.0068$

60. Mercurio $a = 35.98 \times 10^6$ millas, $e = 0.2056$

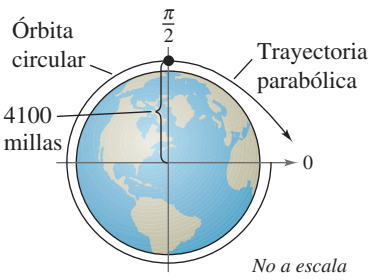
61. Marte $a = 141.63 \times 10^6$ millas, $e = 0.0934$

62. Júpiter $a = 778.41 \times 10^6$ kilómetros, $e = 0.0484$

63. ASTRONOMÍA El cometa Encke tiene una órbita elíptica con una excentricidad de $e \approx 0.847$. La longitud del eje mayor de la órbita es aproximadamente 4.42 unidades astronómicas. Encuentre una ecuación polar para la órbita. ¿Cuánto se acerca el cometa al Sol?

64. ASTRONOMÍA El cometa Hale-Bopp tiene una órbita elíptica con excentricidad de $e \approx 0.995$. La longitud del eje mayor de la órbita es de aproximadamente 500 unidades astronómicas. Encuentre una ecuación polar para la órbita. ¿Cuánto se acerca el cometa al Sol?

65. RASTREO DE SATÉLITES Un satélite en una órbita circular de 100 millas de altura alrededor de la Tierra tiene una velocidad de alrededor de 17 500 millas por hora. Si esta velocidad se multiplica por $\sqrt{2}$, el satélite tendrá la velocidad mínima necesaria para escapar de la atracción gravitacional de la Tierra y seguirá una trayectoria parabólica con el centro de la Tierra como foco (vea figura).



(a) Encuentre una ecuación polar de la trayectoria parabólica del satélite (suponga que el radio de la Tierra es de 4000 millas).

(b) Use una calculadora de gráficas para trazar la ecuación hallada en el inciso anterior.

(c) Encuentre la distancia entre la superficie de la Tierra y el satélite cuando $\theta = 30°$.

(d) Encuentre la distancia entre la superficie de la Tierra y el satélite cuando $\theta = 60°$.

66. COLISEO ROMANO El coliseo romano es un anfiteatro elíptico que mide alrededor de 188 metros de largo y 156 metros de ancho.

(a) Encuentre una ecuación para modelar el coliseo, que sea de la forma

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1.$$

(b) Encuentre una ecuación polar para modelar el coliseo. (Suponga que $e \approx 0.5581$ y $p \approx 115.98$.)

(c) Use una calculadora de gráficas para graficar las ecuaciones que encontró en los incisos (a) y (b). ¿Las gráficas son iguales? ¿Por qué sí o por qué no?

(d) En el inciso (c), ¿prefirió usted graficar la ecuación rectangular o la ecuación polar? Explique.

EXPLORACIÓN

¿VERDADERO O FALSO? En los Ejercicios 67-70, determine si la proposición es verdadera o falsa. Justifique su respuesta.

67. Para un valor determinado de $e > 1$ en el intervalo $\theta = 0$ a $\theta = 2\pi$, la gráfica de

$$r = \frac{ex}{1 - e\cos\theta}$$

es la misma que la gráfica de

$$r = \frac{e(-x)}{1 + e\cos\theta}.$$

68. La gráfica de

$$r = \frac{4}{-3 - 3\operatorname{sen}\theta}$$

tiene una directriz horizontal arriba del polo.

69. La cónica representada por la siguiente ecuación es una elipse.

$$r^2 = \frac{16}{9 - 4\cos\left(\theta + \frac{\pi}{4}\right)}$$

70. La cónica representada por la siguiente ecuación es una parábola.

$$r = \frac{6}{3 - 2\cos\theta}$$

71. ESCRITURA Explique cómo difiere la gráfica de cada una de las cónicas respecto a la gráfica de $r = \dfrac{5}{1 + \operatorname{sen}\theta}$. (Vea Ejercicio 17.)

(a) $r = \dfrac{5}{1 - \cos\theta}$ (b) $r = \dfrac{5}{1 - \operatorname{sen}\theta}$

(c) $r = \dfrac{5}{1 + \cos\theta}$ (d) $r = \dfrac{5}{1 - \operatorname{sen}[\theta - (\pi/4)]}$

72. TOQUE FINAL Con sus propias palabras, defina el término *excentricidad* y explique cómo se puede usar para clasificar cónicas.

73. Demuestre que la ecuación polar de la elipse

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1 \quad \text{es} \quad r^2 = \frac{b^2}{1 - e^2\cos^2\theta}.$$

74. Demuestre que la ecuación polar de la hipérbola

$$\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1 \quad \text{es} \quad r^2 = \frac{-b^2}{1 - e^2\cos^2\theta}.$$

En los Ejercicios 75-80, use los resultados de los Ejercicios 73 y 74 para escribir la forma polar de la ecuación de la cónica.

75. $\dfrac{x^2}{169} + \dfrac{y^2}{144} = 1$ **76.** $\dfrac{x^2}{25} + \dfrac{y^2}{16} = 1$

77. $\dfrac{x^2}{9} - \dfrac{y^2}{16} = 1$ **78.** $\dfrac{x^2}{36} - \dfrac{y^2}{4} = 1$

79. Hipérbola Un foco: $\left(5, \frac{\pi}{2}\right)$

Vértices: $\left(4, \frac{\pi}{2}\right), \left(4, -\frac{\pi}{2}\right)$

80. Elipse Un foco: $(4, 0)$

Vértices: $(5, 0), (5, \pi)$

81. Considere la ecuación polar

$$r = \frac{4}{1 - 0.4\cos\theta}.$$

(a) Identifique la cónica sin graficar la ecuación.

(b) Sin graficar las siguientes ecuaciones polares, describa cómo difiere cada una de la ecuación polar dada.

$$r_1 = \frac{4}{1 + 0.4\cos\theta} \qquad r_2 = \frac{4}{1 - 0.4\operatorname{sen}\theta}$$

(c) Use una calculadora de gráficas para verificar sus resultados del inciso (b).

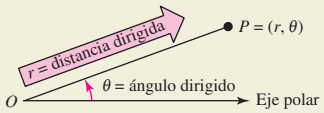
82. La ecuación

$$r = \frac{ep}{1 \pm e\operatorname{sen}\theta}$$

es la de una elipse con $e < 1$. ¿Qué pasa a las longitudes del eje mayor y del eje menor cuando el valor de e permanece fijo y el valor de p cambia? Use un ejemplo para explicar su razonamiento.

10 Resumen del capítulo

	¿Qué aprendió?	Explicación/Ejemplos	Ejercicios de repaso
Sección 10.1	Hallar la inclinación de una recta *(p. 726)*.	Si una recta no vertical tiene inclinación θ y pendiente m, entonces $m = \tan\theta$.	1–4
	Hallar el ángulo entre dos rectas *(p. 727)*.	Si dos rectas no perpendiculares tienen pendientes m_1 y m_2, el ángulo entre las rectas es $\tan\theta = \left\|(m_2 - m_1)/(1 + m_1m_2)\right\|$.	5–8
	Hallar la distancia entre un punto y una recta *(p. 728)*.	La distancia entre el punto (x_1, y_1) y la recta $Ax + By + C = 0$ es $d = \left\|Ax_1 + By_1 + C\right\|/\sqrt{A^2 + B^2}$.	9, 10
Sección 10.2	Reconocer una cónica como la intersección de un plano y un cono de doble rama *(p. 733)*.	En la formación de las cuatro cónicas básicas, el plano de intersección no pasa por el vértice del cono. (Vea figura 10.9.)	11, 12
	Escribir ecuaciones de parábolas en forma estándar y graficar parábolas *(p. 734)*.	La forma estándar de la ecuación de una parábola con vértice en (h, k) es $(x - h)^2 = 4p(y - k)$, $p \neq 0$ (eje vertical), o $(y - k)^2 = 4p(x - h)$, $p \neq 0$ (eje horizontal).	13–16
	Usar la propiedad reflectora de parábolas para resolver problemas prácticos *(p. 736)*.	La recta tangente a una parábola en un punto P forma ángulos iguales con (1) la recta que pasa por P y el foco y (2) el eje de la parábola.	17–20
Sección 10.3	Escribir ecuaciones de elipses en forma estándar y graficar elipses *(p. 742)*.	**Eje mayor horizontal** $\dfrac{(x-h)^2}{a^2} + \dfrac{(y-k)^2}{b^2} = 1$ **Eje mayor vertical** $\dfrac{(x-h)^2}{b^2} + \dfrac{(y-k)^2}{a^2} = 1$	21–24
	Usar propiedades de elipses para modelar y resolver problemas de la vida real *(p. 746)*.	Las propiedades de elipses se pueden usar para hallar distancias del centro de la Tierra al centro de la Luna en su órbita. (Vea Ejemplo 4.)	25, 26
	Hallar excentricidades *(p. 746)*.	La excentricidad e de una elipse está dada por $e = c/a$.	27–30
Sección 10.4	Escribir ecuaciones de hipérbolas en forma estándar *(p. 751)* y hallar asíntotas y graficar hipérbolas *(p. 753)*.	**Eje transverso horizontal** $\dfrac{(x-h)^2}{a^2} - \dfrac{(y-k)^2}{b^2} = 1$ **Asíntotas** $y = k \pm (b/a)(x - h)$ **Eje transverso vertical** $\dfrac{(y-k)^2}{a^2} - \dfrac{(x-h)^2}{b^2} = 1$ **Asíntotas** $y = k \pm (a/b)(x - h)$	31–38
	Usar propiedades de hipérbolas para resolver problemas prácticos *(p. 756)*.	Las propiedades de hipérbolas se pueden usar en el radar y otros sistemas de detección. (Vea Ejemplo 5.)	39, 40
	Clasificar cónicas a partir de sus ecuaciones generales *(p. 757)*.	La gráfica de $Ax^2 + Cy^2 + Dx + Ey + F = 0$ es una circunferencia si $A = C$, una parábola si $AC = 0$, una elipse si $AC > 0$, y una hipérbola si $AC < 0$.	41–44
Sección 10.5	Girar los ejes de coordenadas para eliminar el término en xy en ecuaciones de cónicas *(p. 761)*.	La ecuación $Ax^2 + Bxy + Cy^2 + Dx + Ey + F = 0$ se puede reescribir como $A'(x')^2 + C'(y')^2 + D'x' + E'y' + F' = 0$ al girar los ejes de coordenadas un ángulo θ, donde $\cot 2\theta = (A - C)/B$.	45–48
	Usar el discriminante para clasificar cónicas *(p. 765)*.	La gráfica de $Ax^2 + Bxy + Cy^2 + Dx + Ey + F = 0$ es, excepto en casos degenerados, una elipse o una circunferencia si $B^2 - 4AC < 0$, una parábola si $B^2 - 4AC = 0$, y una hipérbola si $B^2 - 4AC > 0$.	49–52

	¿Qué aprendió?	Explicación/Ejemplos	Ejercicios de repaso
Sección 10.6	Evaluar conjuntos de ecuaciones paramétricas para valores dados del parámetro *(p. 769)*.	Si f y g son funciones continuas de t en un intervalo I, el conjunto de pares ordenados $(f(t), g(t))$ es una curva plana C. Las ecuaciones $x = f(t)$ y $y = g(t)$ son ecuaciones paramétricas para C, y t es el parámetro.	53, 54
	Trazar curvas que son representadas por conjuntos de ecuaciones paramétricas *(p. 770)*.	Trazar una curva representada por ecuaciones paramétricas requiere localizar puntos en el plano xy. Cada conjunto de coordenadas (x, y) se determina a partir de un valor escogido para t.	55–60
	Reescribir conjuntos de ecuaciones paramétricas como ecuaciones rectangulares individuales al eliminar el parámetro *(p. 771)*.	Para eliminar el parámetro en un par de ecuaciones paramétricas, despeje t en una ecuación y sustituya ese valor de t en la otra. El resultado es la ecuación rectangular correspondiente.	55–60
	Hallar conjuntos de ecuaciones paramétricas para gráficas *(p. 772)*.	Cuando busque un conjunto de ecuaciones paramétricas para una gráfica determinada, recuerde que las ecuaciones paramétricas no son únicas.	61–64
Sección 10.7	Localizar puntos en el sistema de coordenadas polares *(p. 777)*.		65–68
	Convertir puntos *(p. 778)* y ecuaciones *(p. 780)* de forma rectangular a polar y viceversa.	**Coordenadas polares (r, θ) y coordenadas rectangulares (x, y)** Polar a rectangular: $x = r\cos\theta$, $y = r\operatorname{sen}\theta$ Rectangular a polar: $\tan\theta = y/x$, $r^2 = x^2 + y^2$ Para convertir una ecuación rectangular a forma polar, sustituya x por $r\cos\theta$ y y por $r\operatorname{sen}\theta$. Convertir de una ecuación polar a forma rectangular es más complejo.	69–88
Sección 10.8	Usar localización de puntos *(p. 783)* y simetría *(p. 784)* para trazar gráficas de ecuaciones polares.	Graficar una ecuación polar por localización de puntos es similar a graficar una ecuación rectangular. Una gráfica polar es simétrica respecto a lo siguiente si la sustitución dada resulta en una ecuación equivalente. **1.** Recta $\theta = \pi/2$: Sustituir (r, θ) por $(r, \pi - \theta)$ o $(-r, -\theta)$. **2.** Eje polar: Sustituir (r, θ) por $(r, -\theta)$ o $(-r, \pi - \theta)$. **3.** Polo: Sustituir (r, θ) por $(r, \pi + \theta)$ o $(-r, \theta)$.	89–98
	Usar ceros y valores máximos de r para trazar gráficas de ecuaciones polares *(p. 785)*.	Dos ayudas adicionales para graficar ecuaciones polares son saber los valores de θ para los cuales $\lvert r\rvert$ es máxima y saber los valores de θ para los cuales $r = 0$.	89–98
	Reconocer gráficas polares especiales *(p. 787)*.	Varios tipos de gráficas, por ejemplo limaçon, curvas roseta, circunferencias y lemniscatas, tienen ecuaciones que son más sencillas en forma polar que en forma rectangular. (Vea página 787.)	99–102
Sección 10.9	Definir cónicas en términos de excentricidad *(p. 791)*.	La excentricidad de una cónica se denota con e. **elipse:** $e < 1$ **parábola:** $e = 1$ **hipérbola:** $e > 1$	103–110
	Escribir y graficar ecuaciones de cónicas en forma polar *(p. 791)*.	La gráfica de una ecuación polar de la forma (1) $r = (ep)/(1 \pm e\cos\theta)$ o (2) $r = (ep)/(1 \pm e\operatorname{sen}\theta)$ es una cónica, donde $e > 0$ es la excentricidad y $\lvert p\rvert$ es la distancia entre el foco (polo) y la directriz.	103–110
	Usar ecuaciones de cónicas en forma polar para modelar problemas de la vida real *(p. 794)*.	Se pueden usar ecuaciones de cónicas en forma polar para modelar la órbita del cometa Halley. (Vea Ejemplo 4.)	111, 112

10 EJERCICIOS DE REPASO

En www.CalcChat.com vea las soluciones a los ejercicios impares.

10.1 En los Ejercicios 1-4, encuentre la inclinación θ (en radianes y grados) de la recta con las características dadas.

1. Pasa por los puntos $(-1, 2)$ y $(2, 5)$
2. Pasa por los puntos $(3, 4)$ y $(-2, 7)$
3. Ecuación: $y = 2x + 4$
4. Ecuación: $x - 5y = 7$

En los Ejercicios 5-8, encuentre el ángulo θ (en radianes y grados) entre las rectas.

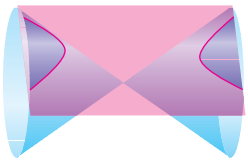
5. $4x + y = 2$, $-5x + y = -1$
6. $-5x + 3y = 3$, $-2x + 3y = 1$
7. $2x - 7y = 8$, $0.4x + y = 0$
8. $0.02x + 0.07y = 0.18$, $0.09x - 0.04y = 0.17$

En los Ejercicios 9 y 10, encuentre la distancia entre el punto y la recta.

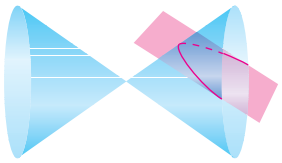
	Punto	*Recta*
9.	$(5, 3)$	$x - y - 10 = 0$
10.	$(0, 4)$	$x + 2y - 2 = 0$

10.2 En los Ejercicios 11 y 12, diga qué tipo de cónica se forma por la intersección del plano y el cono de doble rama.

11.



12.



En los Ejercicios 13-16, encuentre la forma estándar de la ecuación de la parábola con las características dadas. A continuación grafique la parábola.

13. Vértice: $(0, 0)$; Foco: $(4, 0)$
14. Vértice: $(2, 0)$; Foco: $(0, 0)$
15. Vértice: $(0, 2)$; Directriz: $x = -3$
16. Vértice: $(-3, -3)$; Directriz: $y = 0$

En los Ejercicios 17 y 18, encuentre una ecuación de la recta tangente a la parábola en el punto dado y encuentre la intersección de la recta con el eje x.

17. $y = 2x^2$, $(-1, 2)$
18. $x^2 = -2y$, $(-4, -8)$

19. **ARQUITECTURA** Un arco parabólico mide 12 metros de alto en el vértice. A una altura de 10 metros, el ancho del arco es de 8 metros (vea figura). ¿Cuál es el ancho del arco al nivel del suelo?

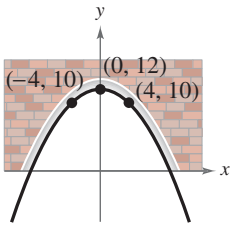


FIGURA PARA EJERCICIO 19

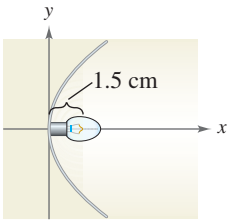


FIGURA PARA EJERCICIO 20

20. **LINTERNA ELÉCTRICA** El foco de una linterna eléctrica está en el foco de su reflector parabólico, 1.5 centímetros desde el vértice del reflector (vea figura). Escriba una ecuación de la sección transversal del reflector de la linterna con su foco en el eje x positivo y su vértice en el origen.

10.3 En los Ejercicios 21-24, encuentre la forma estándar de la ecuación de la elipse con las características dadas. A continuación grafique la elipse.

21. Vértices: $(-2, 0), (8, 0)$; focos: $(0, 0), (6, 0)$
22. Vértices: $(4, 3), (4, 7)$; focos: $(4, 4), (4, 6)$
23. Vértices: $(0, 1), (4, 1)$; puntos extremos del eje menor: $(2, 0), (2, 2)$
24. Vértices: $(-4, -1), (-4, 11)$; puntos extremos del eje menor: $(-6, 5), (-2, 5)$

25. **ARQUITECTURA** Un arco semielíptico se ha de construir sobre la entrada de una finca. El arco debe levantarse sobre pilares que estarán a 10 pies entre sí y tener una altura (por sobre los pilares) de 4 pies. ¿Dónde deben colocarse los focos para trazar el arco?
26. **PISCINA DE POCA PROFUNDIDAD** Una persona está construyendo una piscina de poca profundidad que tiene forma de elipse. Los planos dan una ecuación para la forma elíptica de la piscina medida en pies como

$$\frac{x^2}{324} + \frac{y^2}{196} = 1.$$

Encuentre la distancia más larga de un lado al otro de la piscina, la distancia más corta y la distancia entre focos.

En los Ejercicios 27-30, encuentre el centro, vértices, focos y excentricidad de la elipse.

27. $\dfrac{(x+1)^2}{25} + \dfrac{(y-2)^2}{49} = 1$
28. $\dfrac{(x-5)^2}{1} + \dfrac{(y+3)^2}{36} = 1$
29. $16x^2 + 9y^2 - 32x + 72y + 16 = 0$
30. $4x^2 + 25y^2 + 16x - 150y + 141 = 0$

10.4 En los Ejercicios 31-34, encuentre la forma estándar de la ecuación de la hipérbola con las características dadas.

31. Vértices: $(0, \pm 1)$; focos: $(0, \pm 2)$

32. Vértices: $(3, 3), (-3, 3)$; focos: $(4, 3), (-4, 3)$

33. Focos: $(0, 0), (8, 0)$; asíntotas: $y = \pm 2(x - 4)$

34. Focos: $(3, \pm 2)$; asíntotas: $y = \pm 2(x - 3)$

En los Ejercicios 35-38, encuentre el centro, vértices, focos y las ecuaciones de las asíntotas de la hipérbola, y trace su gráfica usando estas últimas como ayuda.

35. $\dfrac{(x-5)^2}{36} - \dfrac{(y+3)^2}{16} = 1$

36. $\dfrac{(y-1)^2}{4} - x^2 = 1$

37. $9x^2 - 16y^2 - 18x - 32y - 151 = 0$

38. $-4x^2 + 25y^2 - 8x + 150y + 121 = 0$

39. LORÁN La estación radiotransmisora A está situada a 200 millas al este de la estación radiotransmisora B. Un barco está en un lugar al Norte y 40 millas al Oeste de la estación A. Pulsos sincronizados de radio transmitidos a 186 000 millas por segundo por las dos estaciones son recibidos 0.0005 segundos más pronto de la estación A que de la estación B. ¿A qué distancia al Norte está el barco?

40. LOCALIZAR UNA EXPLOSIÓN Dos de sus amigos viven a 4 millas uno del otro y en la misma calle "este-oeste" y usted vive a la mitad entre ellos. Usted está en conversación telefónica de tres líneas cuando escucha una explosión. Seis segundos más tarde, su amigo al Este la escucha y su amigo del Oeste la escucha 8 segundos después de usted. Encuentre ecuaciones de dos hipérbolas que localizarían la explosión. (Suponga que el sistema de coordenadas se mide en pies y que el sonido viaja a 1100 pies por segundo.)

En los Ejercicios 41-44, clasifique la gráfica de la ecuación como circunferencia, parábola, elipse o hipérbola.

41. $5x^2 - 2y^2 + 10x - 4y + 17 = 0$

42. $-4y^2 + 5x + 3y + 7 = 0$

43. $3x^2 + 2y^2 - 12x + 12y + 29 = 0$

44. $4x^2 + 4y^2 - 4x + 8y - 11 = 0$

10.5 En los Ejercicios 45-48, gire los ejes para eliminar el término en xy de la ecuación. A continuación escriba la ecuación en forma estándar. Trace la gráfica de la ecuación resultante, mostrando ambos conjuntos de ejes.

45. $xy + 3 = 0$

46. $x^2 - 4xy + y^2 + 9 = 0$

47. $5x^2 - 2xy + 5y^2 - 12 = 0$

48. $4x^2 + 8xy + 4y^2 + 7\sqrt{2}x + 9\sqrt{2}y = 0$

En los Ejercicios 49-52, (a) use el discriminante para clasificar la gráfica, (b) use la fórmula cuadrática para despejar y y (c) use una calculadora de gráficas para graficar la ecuación.

49. $16x^2 - 24xy + 9y^2 - 30x - 40y = 0$

50. $13x^2 - 8xy + 7y^2 - 45 = 0$

51. $x^2 + y^2 + 2xy + 2\sqrt{2}x - 2\sqrt{2}y + 2 = 0$

52. $x^2 - 10xy + y^2 + 1 = 0$

10.6 En los Ejercicios 53 y 54, (a) genere una tabla de valores x y y para las ecuaciones paramétricas usando $t = -2, -1, 0, 1$ y 2, y (b) localice los puntos (x, y) generados en el inciso (a) y trace una gráfica de las ecuaciones paramétricas.

53. $x = 3t - 2$ y $y = 7 - 4t$

54. $x = \dfrac{1}{4}t$ y $y = \dfrac{6}{t+3}$

En los Ejercicios 55-60, (a) trace la curva representada por las ecuaciones paramétricas (indique la orientación de la curva) y (b) elimine el parámetro y escriba la ecuación rectangular correspondiente cuya gráfica represente la curva. Ajuste el dominio de la ecuación rectangular correspondiente, si es necesario. (c) Verifique su resultado con una calculadora de gráficas.

55. $x = 2t$, $y = 4t$

56. $x = 1 + 4t$, $y = 2 - 3t$

57. $x = t^2$, $y = \sqrt{t}$

58. $x = t + 4$, $y = t^2$

59. $x = 3\cos\theta$, $y = 3\operatorname{sen}\theta$

60. $x = 3 + 3\cos\theta$, $y = 2 + 5\operatorname{sen}\theta$

61. Encuentre una representación paramétrica de la recta que pasa por los puntos $(-4, 4)$ y $(9, -10)$.

62. Encuentre una representación paramétrica de la circunferencia con centro en $(5, 4)$ y radio 6.

63. Encuentre una representación paramétrica de la elipse con centro en $(-3, 4)$, eje mayor horizontal y ocho unidades de longitud, y eje menor seis unidades de longitud.

64. Encuentre una representación paramétrica de la hipérbola con vértices en $(0, \pm 4)$ y focos en $(0, \pm 5)$.

10.7 En los Ejercicios 65-68, localice el punto dado en coordenadas polares y encuentre dos representaciones polares adicionales del punto, usando $-2\pi < \theta < 2\pi$.

65. $\left(2, \dfrac{\pi}{4}\right)$

66. $\left(-5, -\dfrac{\pi}{3}\right)$

67. $(-7, 4.19)$

68. $(\sqrt{3}, 2.62)$

En los Ejercicios 69-72, se da un punto en coordenadas polares. Conviértalo a coordenadas rectangulares.

69. $\left(-1, \frac{\pi}{3}\right)$ **70.** $\left(2, \frac{5\pi}{4}\right)$

71. $\left(3, \frac{3\pi}{4}\right)$ **72.** $\left(0, \frac{\pi}{2}\right)$

En los Ejercicios 73-76, se da un punto en coordenadas rectangulares. Conviértalo en coordenadas polares.

73. $(0, 1)$ **74.** $(-\sqrt{5}, \sqrt{5})$

75. $(4, 6)$ **76.** $(3, -4)$

En los Ejercicios 77-82, convierta la ecuación rectangular en forma polar.

77. $x^2 + y^2 = 81$ **78.** $x^2 + y^2 = 48$

79. $x^2 + y^2 - 6y = 0$ **80.** $x^2 + y^2 - 4x = 0$

81. $xy = 5$ **82.** $xy = -2$

En los Ejercicios 83-88, convierta la ecuación polar en forma rectangular.

83. $r = 5$ **84.** $r = 12$

85. $r = 3 \cos \theta$ **86.** $r = 8 \operatorname{sen} \theta$

87. $r^2 = \operatorname{sen} \theta$ **88.** $r^2 = 4 \cos 2\theta$

10.8 En los Ejercicios 89-98, determine la simetría de r, el valor máximo de $|r|$ y cualesquier ceros de r. A continuación trace la gráfica de la ecuación polar (localice puntos adicionales, si es necesario).

89. $r = 6$ **90.** $r = 11$

91. $r = 4 \operatorname{sen} 2\theta$ **92.** $r = \cos 5\theta$

93. $r = -2(1 + \cos \theta)$ **94.** $r = 1 - 4 \cos \theta$

95. $r = 2 + 6 \operatorname{sen} \theta$ **96.** $r = 5 - 5 \cos \theta$

97. $r = -3 \cos 2\theta$ **98.** $r^2 = \cos 2\theta$

En los Ejercicios 99-102, identifique el tipo de gráfica polar y use una calculadora de gráficas para graficar la ecuación.

99. $r = 3(2 - \cos \theta)$ **100.** $r = 5(1 - 2 \cos \theta)$

101. $r = 8 \cos 3\theta$ **102.** $r^2 = 2 \operatorname{sen} 2\theta$

10.9 En los Ejercicios 103-106, identifique la cónica y trace su gráfica.

103. $r = \dfrac{1}{1 + 2 \operatorname{sen} \theta}$ **104.** $r = \dfrac{6}{1 + \operatorname{sen} \theta}$

105. $r = \dfrac{4}{5 - 3 \cos \theta}$ **106.** $r = \dfrac{16}{4 + 5 \cos \theta}$

En los Ejercicios 107-110, encuentra una ecuación polar de la cónica con su foco en el polo.

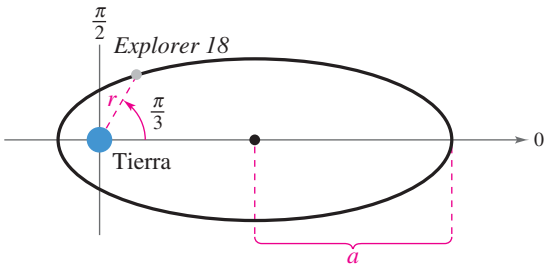
107. Parábola Vértice: $(2, \pi)$

108. Parábola Vértice: $(2, \pi/2)$

109. Elipse Vértices: $(5, 0), (1, \pi)$

110. Hipérbola Vértices: $(1, 0), (7, 0)$

111. EXPLORER 18 El 7 de noviembre de 1963, los Estados Unidos lanzaron el *Explorer 18*. Sus puntos bajo y alto sobre la superficie terrestre fueron 118 millas y 122 800 millas, respectivamente. El centro de la Tierra estaba en un foco de la órbita (vea figura). Encuentre la ecuación polar de la órbita y encuentre la distancia entre la superficie de la Tierra (suponga que la Tierra tiene un radio de 4000 millas) y el satélite cuando $\theta = \pi/3$.



112. ASTEROIDE Un asteroide toma una trayectoria parabólica con la Tierra en su foco. Está a unos 6 000 000 de millas de la Tierra en su más cercana aproximación. Escriba la ecuación polar de la trayectoria del asteroide con su vértice en $\theta = \pi/2$. Encuentre la distancia entre el asteroide y la Tierra cuando $\theta = -\pi/3$.

EXPLORACIÓN

¿VERDADERO O FALSO? En los Ejercicios 113-115, determine si la proposición es verdadera o falsa. Justifique su respuesta.

113. La gráfica de $\frac{1}{4}x^2 - y^4 = 1$ es una hipérbola.

114. Sólo un conjunto de ecuaciones paramétricas puede representar la recta $y = 3 - 2x$.

115. Hay una representación única de coordenadas polares de cada punto en el plano.

116. Considere una elipse con el eje mayor horizontal y 10 unidades de longitud. El número b en la forma estándar de la ecuación de una elipse ¿debe ser menor a qué número real? Explique el cambio en la forma de la elipse cuando b se aproxime a ese número.

117. ¿Cuál es la relación entre las gráficas de las ecuaciones rectangulares y polares?

(a) $x^2 + y^2 = 25, \quad r = 5$

(b) $x - y = 0, \quad \theta = \dfrac{\pi}{4}$

10 EXAMEN DEL CAPÍTULO

En www.CalcChat.com vea las soluciones a los ejercicios impares.

Tome este examen como lo haría en clase. Cuando termine, verifique su trabajo contra las respuestas dadas al final del libro.

1. Encuentre la inclinación de la recta $2x - 5y + 5 = 0$.

2. Encuentre el ángulo entre las rectas $3x + 2y - 4 = 0$ y $4x - y + 6 = 0$.

3. Encuentre la distancia entre el punto $(7, 5)$ y la recta $y = 5 - x$.

En los Ejercicios 4-7, clasifique la cónica y escriba la ecuación en forma normal. Identifique el centro, vértices, focos y asíntotas (si es aplicable). A continuación, trace la gráfica de la cónica.

4. $y^2 - 2x + 2 = 0$

5. $x^2 - 4y^2 - 4x = 0$

6. $9x^2 + 16y^2 + 54x - 32y - 47 = 0$

7. $2x^2 + 2y^2 - 8x - 4y + 9 = 0$

8. Encuentre la forma estándar de la ecuación de la parábola con vértice en $(2, -3)$, con un eje vertical y que pasa por el punto $(4, 0)$.

9. Encuentre la forma estándar de la ecuación de la hipérbola con focos en $(0, 0)$ y $(0, 4)$ y asíntotas $y = \pm\frac{1}{2}x + 2$.

10. (a) Determine el número de grados que el eje debe ser rotado para eliminar el término en xy de la cónica $x^2 + 6xy + y^2 - 6 = 0$.

(b) Grafique la cónica del inciso (a) y use una calculadora de gráficas para confirmar su resultado.

11. Trace la curva representada por las ecuaciones paramétricas $x = 2 + 3\cos\theta$ y $y = 2\operatorname{sen}\theta$. Elimine el parámetro y escriba la ecuación rectangular correspondiente.

12. Encuentre un conjunto de ecuaciones paramétricas de la recta que pasa por los puntos $(2, -3)$ y $(6, 4)$. (Hay numerosas respuestas correctas.)

13. Convierta la coordenada polar $\left(-2, \frac{5\pi}{6}\right)$ a forma rectangular.

14. Convierta la coordenada rectangular $(2, -2)$ a forma polar y encuentre otras dos representaciones polares de este punto.

15. Convierta la ecuación rectangular $x^2 + y^2 - 3x = 0$ a forma polar.

En los Ejercicios 16-19, trace la gráfica de la ecuación polar. Identifique el tipo de gráfica.

16. $r = \dfrac{4}{1 + \cos\theta}$

17. $r = \dfrac{4}{2 + \operatorname{sen}\theta}$

18. $r = 2 + 3\operatorname{sen}\theta$

19. $r = 2\operatorname{sen}4\theta$

20. Encuentre una ecuación polar de la elipse con foco en el polo, excentricidad $e = \frac{1}{4}$ y directriz $y = 4$.

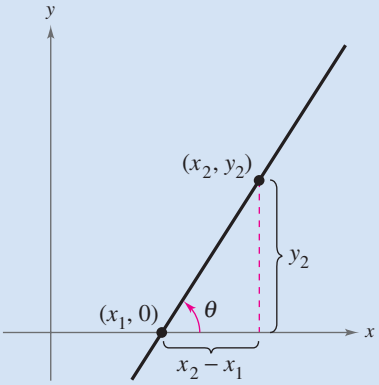
21. Una carretera recta sube con una inclinación de 0.15 radianes a partir de la horizontal. Encuentre la pendiente de la carretera y el cambio en elevación en un tramo de una milla de la carretera.

22. Una pelota de béisbol recibe el impacto del bate en un punto a 3 pies sobre el suelo y va hacia la barda del jardín izquierdo. La barda mide 10 pies de alto y está a 375 pies de la placa de *home*. La trayectoria de la pelota puede ser modelada por las ecuaciones paramétricas $x = (115\cos\theta)t$ y $y = 3 + (115\operatorname{sen}\theta)t - 16t^2$. ¿La pelota pasará sobre la barda si es golpeada a un ángulo de $\theta = 30°$? ¿Pasará sobre la barda si $\theta = 35°$?

DEMOSTRACIONES EN MATEMÁTICAS

Inclinación y pendiente *(p. 726)*

Si una recta no vertical tiene inclinación θ y pendiente m, entonces $m = \tan\theta$.



Demostración

Si $m = 0$, la recta es horizontal y $\theta = 0$. Por tanto, el resultado es verdadero para rectas horizontales porque $m = 0 = \tan 0$.

Si la recta tiene una pendiente positiva intersecará el eje x. Marque este punto como $(x_1, 0)$, como se muestra en la figura. Si (x_2, y_2) es un segundo punto sobre la recta, la pendiente es

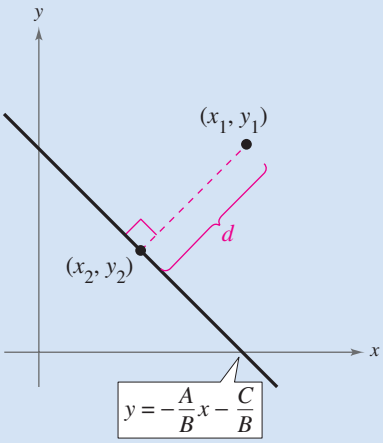
$$m = \frac{y_2 - 0}{x_2 - x_1} = \frac{y_2}{x_2 - x_1} = \tan\theta.$$

El caso en el que la recta tiene pendiente negativa se puede demostrar de manera similar.

Distancia entre un punto y una recta *(p. 728)*

La distancia entre el punto (x_1, y_1) y la recta $Ax + By + C = 0$ es

$$d = \frac{|Ax_1 + By_1 + C|}{\sqrt{A^2 + B^2}}.$$



Demostración

Para mayor sencillez, suponga que la recta dada no es horizontal ni vertical (vea figura). Al escribir la ecuación $Ax + By + C = 0$ en forma pendiente-intersección

$$y = -\frac{A}{B}x - \frac{C}{B}$$

se puede ver que la recta tiene una pendiente de $m = -A/B$. Por tanto, la pendiente de la recta que pasa por (x_1, y_1) y es perpendicular a la recta dada es B/A, y su ecuación es $y - y_1 = (B/A)(x - x_1)$. Estas dos rectas se cortan en el punto (x_2, y_2), donde

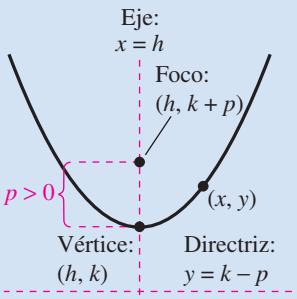
$$x_2 = \frac{B(Bx_1 - Ay_1) - AC}{A^2 + B^2} \quad \text{y} \quad y_2 = \frac{A(-Bx_1 + Ay_1) - BC}{A^2 + B^2}.$$

Finalmente, la distancia entre (x_1, y_1) y (x_2, y_2) es

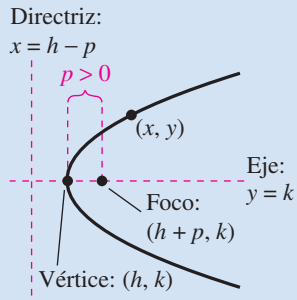
$$\begin{aligned} d &= \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2} \\ &= \sqrt{\left(\frac{B^2x_1 - ABy_1 - AC}{A^2 + B^2} - x_1\right)^2 + \left(\frac{-ABx_1 + A^2y_1 - BC}{A^2 + B^2} - y_1\right)^2} \\ &= \sqrt{\frac{A^2(Ax_1 + By_1 + C)^2 + B^2(Ax_1 + By_1 + C)^2}{(A^2 + B^2)^2}} \\ &= \frac{|Ax_1 + By_1 + C|}{\sqrt{A^2 + B^2}}. \end{aligned}$$

Trayectorias parabólicas

Hay muchos casos naturales de parábolas en la práctica. Por ejemplo, el famoso astrónomo Galileo descubrió en el siglo XVII que un cuerpo que se lance hacia arriba, oblicuamente a la atracción de la gravitación, se moverá en una trayectoria parabólica. Ejemplos de esto son el centro de gravedad de un delfín que salta y la trayectoria de moléculas de agua en una fuente para beber agua.



Parábola con eje vertical



Parábola con eje horizontal

Ecuación estándar de una parábola *(p. 734)*

La forma estándar de la ecuación de una parábola con vértice en (h, k) es como sigue.

$(x - h)^2 = 4p(y - k), \quad p \neq 0$ Eje vertical, directriz: $y = k - p$

$(y - k)^2 = 4p(x - h), \quad p \neq 0$ Eje horizontal, directriz: $x = h - p$

El foco se encuentra sobre el eje p unidades (*distancia dirigida*) desde el vértice. Si el vértice está en el origen $(0, 0)$, la ecuación toma una de las formas siguientes.

$x^2 = 4py$ Eje vertical

$y^2 = 4px$ Eje horizontal

Demostración

Para el caso en que la directriz es paralela al eje x y el foco está arriba del vértice, como se muestra en la figura superior, si (x, y) es cualquier punto sobre la parábola, entonces, por definición, es equidistante del foco $(h, k + p)$ y la directriz $y = k - p$. Por tanto, tenemos

$$\sqrt{(x - h)^2 + [y - (k + p)]^2} = y - (k - p)$$
$$(x - h)^2 + [y - (k + p)]^2 = [y - (k - p)]^2$$
$$(x - h)^2 + y^2 - 2y(k + p) + (k + p)^2 = y^2 - 2y(k - p) + (k - p)^2$$
$$(x - h)^2 + y^2 - 2ky - 2py + k^2 + 2pk + p^2 = y^2 - 2ky + 2py + k^2 - 2pk + p^2$$
$$(x - h)^2 - 2py + 2pk = 2py - 2pk$$
$$(x - h)^2 = 4p(y - k).$$

Para el caso en el que la directriz es paralela al eje y y el foco está a la derecha del vértice, como se ve en la figura inferior, si (x, y) es cualquier punto sobre la parábola, entonces, por definición, es equidistante del foco $(h + p, k)$ y la directriz $x = h - p$. Por tanto, tenemos

$$\sqrt{[x - (h + p)]^2 + (y - k)^2} = x - (h - p)$$
$$[x - (h + p)]^2 + (y - k)^2 = [x - (h - p)]^2$$
$$x^2 - 2x(h + p) + (h + p)^2 + (y - k)^2 = x^2 - 2x(h - p) + (h - p)^2$$
$$x^2 - 2hx - 2px + h^2 + 2ph + p^2 + (y - k)^2 = x^2 - 2hx + 2px + h^2 - 2ph + p^2$$
$$-2px + 2ph + (y - k)^2 = 2px - 2ph$$
$$(y - k)^2 = 4p(x - h).$$

Observe que si una parábola está centrada en el origen, entonces las dos ecuaciones de líneas antes se simplificarían a $x^2 = 4py$ y $y^2 = 4px$, respectivamente.

Ecuaciones polares de cónicas *(p. 791)*

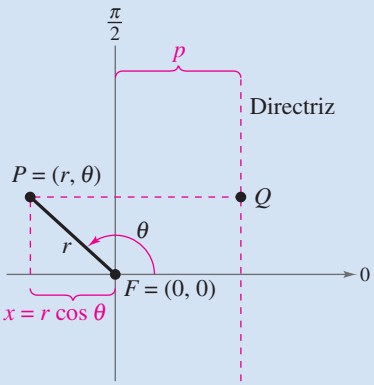
La gráfica de una ecuación polar de la forma

1. $r = \dfrac{ep}{1 \pm e\cos\theta}$

o

2. $r = \dfrac{ep}{1 \pm e\,\text{sen}\,\theta}$

es una cónica, donde $e > 0$ es la excentricidad y $|p|$ es la distancia entre el foco (polo) y la directriz.



Demostración

Una demostración para $r = \dfrac{ep}{1 + e\cos\theta}$, con $p > 0$, se muestra aquí. Las demostraciones de los otros casos son semejantes. En la figura, considere una directriz vertical, p unidades a la derecha del foco $F = (0, 0)$. Si $P = (r, \theta)$ es un punto sobre la gráfica de

$$r = \frac{ep}{1 + e\cos\theta}$$

la distancia entre P y la directriz es

$$\begin{aligned} PQ &= |p - x| \\ &= |p - r\cos\theta| \\ &= \left|p - \left(\frac{ep}{1 + e\cos\theta}\right)\cos\theta\right| \\ &= \left|p\left(1 - \frac{e\cos\theta}{1 + e\cos\theta}\right)\right| \\ &= \left|\frac{p}{1 + e\cos\theta}\right| \\ &= \left|\frac{r}{e}\right|. \end{aligned}$$

Además, como la distancia entre P y el polo es simplemente $PF = |r|$, la razón entre PF y PQ es

$$\begin{aligned} \frac{PF}{PQ} &= \frac{|r|}{\left|\frac{r}{e}\right|} \\ &= |e| \\ &= e \end{aligned}$$

y, por definición, la gráfica de la ecuación debe ser una cónica.

en un pa
evación
. Un te
3250

(a) Ene
picos.

(b) Aproxime la
necesario para lleg

2. El salón de estatuas es un
Estados Unidos en Washing
recibe el nombre de Galería de s
na que se encuentre en un foco d
incluso un susurro pronunciado
encuentre en el otro foco. Esto
sonido que se transmita de un fo
jará del lado de la elipse al otro f
tiene 46 pies de ancho y 97 pies

(a) Encuentre una ecuación que

(b) ¿Cuál es la distancia entre l

(c) ¿Cuál es el área del piso d
elipse es $A = \pi ab$.)

3. Encuentre la ecuación(es) de to
nen el eje x como eje de simetr

4. Encuentre el área del cuadrado
sigue.

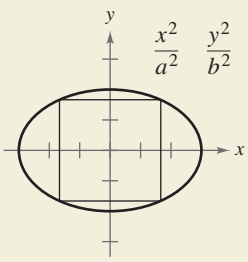


FIGURA PARA EJERCICIO 4

5. La *involuta* de un círculo se d
P de un hilo que se mantenga t
un carrete (vea figura). El carr

(a)

(b)

(c) ¿En

APÉNDICE A REPASO DE CONCEPTOS FUNDAMENTALES DE ÁLGEBRA

A.1 NÚMEROS REALES Y SUS PROPIEDADES

Lo que debe aprender

- Representar y clasificar números reales.
- Ordenar números reales y usar desigualdades.
- Hallar los valores absolutos de números reales y hallar la distancia entre dos números reales.
- Evaluar expresiones algebraicas.
- Usar las reglas básicas y propiedades de álgebra.

Por qué debe aprenderlo

Se usan números reales para representar muchas cantidades de la vida real. Por ejemplo, en los Ejercicios 83-88 en la página A12 usaremos números reales para representar el déficit federal.

Números reales

Se usan **números reales** en la vida diaria para describir cantidades como edad, millas por galón y población. Los números reales se representan con símbolos tales como

$$-5,\ 9,\ 0,\ \frac{4}{3},\ 0.666\ .\ .\ .,\ 28.21,\ \sqrt{2},\ \pi \text{ y } \sqrt[3]{-32}.$$

A continuación veamos algunos **subconjuntos** importantes (cada número del subconjunto B es también miembro del conjunto A) de los números reales. Los tres puntos, llamados *puntos suspensivos*, indican que el patrón continúa indefinidamente.

$\{1, 2, 3, 4, \ldots\}$ Conjunto de los números naturales

$\{0, 1, 2, 3, 4, \ldots\}$ Conjunto de los números enteros positivos

$\{\ldots, -3, -2, -1, 0, 1, 2, 3, \ldots\}$ Conjunto de los números enteros

Un número real es racional si se puede escribir como la razón p/q entre dos enteros, donde $q \neq 0$. Por ejemplo, los números

$$\frac{1}{3} = 0.3333\ \ldots = 0.\overline{3},\ \frac{1}{8} = 0.125 \text{ y } \frac{125}{111} = 1.126126\ \ldots = 1.\overline{126}$$

son racionales. La representación decimal de un número racional o bien se repite $\left(\text{como en } \frac{173}{55} = 3.1\overline{45}\right)$ o termina $\left(\text{como en } \frac{1}{2} = 0.5\right)$. Un número real que no se pueda escribir como la razón entre dos enteros se llama **irracional**. Los números irracionales tienen representaciones decimales no periódicas (no repetitivas). Por ejemplo, los números

$$\sqrt{2} = 1.4142135\ldots \approx 1.41 \quad \text{y} \quad \pi = 3.1415926\ldots \approx 3.14$$

son irracionales. (El símbolo $\approx$ significa "aproximadamente igual a".) La figura A.1 muestra subconjuntos de los números reales y sus relaciones mutuas.

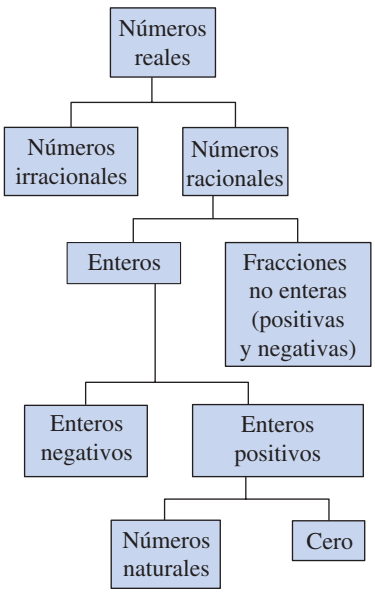


FIGURA A.1 Subconjuntos de los números reales

Ejemplo 1 **Clasificar números reales**

Determine cuáles números del conjunto

$$\left\{-13, -\sqrt{5}, -1, -\frac{1}{3}, 0, \frac{5}{8}, \sqrt{2}, \pi, 7\right\}$$

son (a) números naturales, (b) números enteros positivos, (c) números enteros, (d) números racionales y (e) números irracionales.

Solución

a. Números naturales: $\{7\}$

b. Números enteros positivos: $\{0, 7\}$

c. Números enteros: $\{-13, -1, 0, 7\}$

d. Números racionales: $\left\{-13, -1, -\frac{1}{3}, 0, \frac{5}{8}, 7\right\}$

e. Números irracionales: $\left\{-\sqrt{5}, \sqrt{2}, \pi\right\}$

PUNTO *de repaso* Ahora trate de hacer el Ejercicio 11.

Los números reales se representan gráficamente sobre la **recta de números reales**. Al trazar un punto sobre la recta de números reales que corresponda a un número real, estamos **graficando** el número real. El punto 0 sobre la recta de números reales es el **origen**. Los números a la derecha del 0 son positivos y a la izquierda son negativos, como se ve en la Figura A.2. El término **no negativo** describe un número que es positivo o cero.

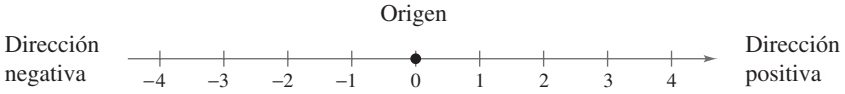


FIGURA A.2 La recta de númeos reales

Como se ilustra en la Figura A.3, hay una *correspondencia biunívoca* entre números reales y puntos sobre la recta de números reales.

Todo número real corresponde exactamente a un punto sobre la recta de números reales.

Todo punto sobre la recta de números reales corresponde exactamente a un número real.

FIGURA A.3 Correspondencia biunívoca

Ejemplo 2 Graficar puntos sobre la recta de números reales

Grafique los números reales sobre la recta de números reales.

a. $-\frac{7}{4}$

b. 2.3

c. $\frac{2}{3}$

d. -1.8

Solución

Los cuatro puntos se muestran en la figura A.4.

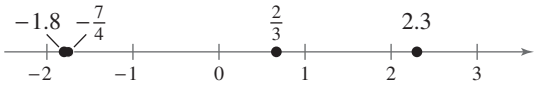


FIGURA A.4

a. El punto que representa al número real $-\frac{7}{4} = -1.75$ se encuentra entre -2 y -1, pero más cercano a -2, en la recta de números reales.

b. El punto que representa al número real 2.3 se encuentra entre 2 y 3, pero más cercano a 2, en la recta de números reales.

c. El punto que representa al número real $\frac{2}{3} = 0.666\ldots$ se encuentra entre 0 y 1, pero más cercano a 1, en la recta de números reales.

d. El punto que representa al número real -1.8 se encuentra entre -2 y -1, pero más cercano a -2, en la recta de números reales. Observe que el punto que representa a -1.8 está ligeramente a la izquierda del punto que representa a $-\frac{7}{4}$.

PUNTO *de repaso* Ahora trate de hacer el Ejercicio 17.

Orden de los números reales

Una propiedad importante de los números reales es que tienen un *orden*.

Definición del orden de la recta de números reales

Si a y b son números reales, a es menor que b si $b - a$ es positivo. El **orden** de a y b se denota con la **desigualdad** $a < b$. Esta relación también se puede describir diciendo que b es *mayor que* a y escribiendo $b > a$. La desigualdad $a \leq b$ significa que a es *menor o igual que* b y la desigualdad $b \geq a$ significa que b es *mayor o igual que* a. Los símbolos $<$, $>$, $\leq$ y $\geq$ son *símbolos de desigualdad*.

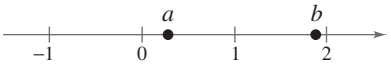


FIGURA A.5 $a < b$ si y sólo si a está a la izquierda de b.

Geométricamente, esta definición implica que $a < b$ si y sólo si a está a la *izquierda* de b en la recta de números reales, como se ve en la Figura A.5

Ejemplo 3 Orden de los números reales

Ponga el símbolo de desigualdad apropiado ($<$ o $>$) entre el par de números reales.

a. $-3, 0$ **b.** $-2, -4$ **c.** $\frac{1}{4}, \frac{1}{3}$ **d.** $-\frac{1}{5}, -\frac{1}{2}$

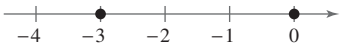


FIGURA A.6

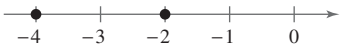


FIGURA A.7

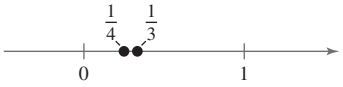


FIGURA A.8

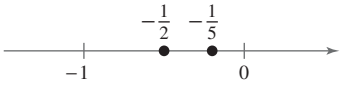


FIGURA A.9

Solución

a. Como -3 está a la izquierda de 0 en la recta de números reales, como se ve en la Figura A.6, se puede decir que -3 es *menor que* 0, y escribimos $-3 < 0$.

b. Como -2 está a la derecha de -4 en la recta de números reales, como se ve en la Figura A.7, se puede decir que -2 es *mayor que* -4, y escribimos $-2 > -4$.

c. Como $\frac{1}{4}$ está a la izquierda de $\frac{1}{3}$ en la recta de números reales, como se ve en la Figura A.8, se puede decir que $\frac{1}{4}$ es *menor a* $\frac{1}{3}$, y escribimos $\frac{1}{4} < \frac{1}{3}$.

d. Como $-\frac{1}{5}$ está a la derecha de $-\frac{1}{2}$ en la recta de números reales, como se ve en la Figura A.9, se puede decir que $-\frac{1}{5}$ es *mayor que* $-\frac{1}{2}$, y escribimos $-\frac{1}{5} > -\frac{1}{2}$.

PUNTO *de repaso* Ahora trate de hacer el Ejercicio 25.

Ejemplo 4 Interpretar las desigualdades

Describa el subconjunto de números reales representado por cada desigualdad.

a. $x \leq 2$ **b.** $-2 \leq x < 3$

Solución

a. La desigualdad $x \leq 2$ denota todos los números reales menores o iguales a 2, como se ve en la Figura A.10.

b. La desigualdad $-2 \leq x < 3$ significa que $x \geq -2$ y $x < 3$. Esta "doble desigualdad" denota todos los números reales entre -2 y 3, incluido -2 pero no 3, como se muestra en la Figura A.11.

PUNTO *de repaso* Ahora trate de hacer el Ejercicio 31.

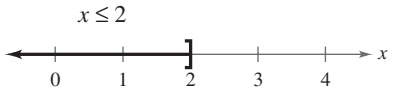


FIGURA A.10

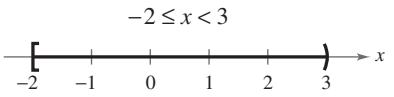
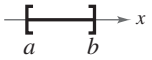
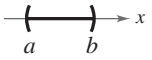
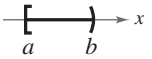
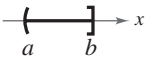


FIGURA A.11

Se pueden usar desigualdades para describir subconjuntos de números reales llamados **intervalos**. En los intervalos acotados a continuación, los números reales a y b son los puntos extremos de cada intervalo. Los puntos extremos de un intervalo cerrado están incluidos en él, en tanto que los puntos extremos de un intervalo abierto no están incluidos en el él.

Intervalos acotados en la recta de números reales

Notación	*Tipo de intervalo*	*Desigualdad*	*Gráfica*
$[a, b]$	Cerrado	$a \le x \le b$	
(a, b)	Abierto	$a < x < b$	
$[a, b)$		$a \le x < b$	
$(a, b]$		$a < x \le b$	

Tip de estudio

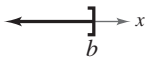
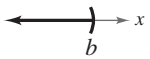
La razón por la que los cuatro tipos de intervalos de la derecha se llaman *acotados* es que cada uno tiene una longitud finita. Un intervalo que no tiene longitud finita *es no acotado* (vea abajo).

ATENCIÓN

Siempre que escribamos un intervalo que contenga ∞ o $-\infty$, usamos invariablemente un paréntesis y nunca corchetes. Esto es porque ∞ y $-\infty$ nunca son puntos extremos de un intervalo y, por tanto, no están incluidos en él.

Los símbolos ∞, **infinito positivo**, y $-\infty$, **infinito negativo**, no representan números reales. Simplemente son símbolos prácticos que se utilizan para describir lo ilimitado de un intervalo como $(1, \infty)$ o $(-\infty, 3]$.

Intervalos no acotados en la recta de números reales

Notación	*Tipo de intervalo*	*Desigualdad*	*Gráfica*
$[a, \infty)$		$x \ge a$	
(a, ∞)	Abierto	$x > a$	
$(-\infty, b]$		$x \le b$	
$(-\infty, b)$	Abierto	$x < b$	
$(-\infty, \infty)$	Toda la recta real	$-\infty < x < \infty$	

Ejemplo 5 Usar desigualdades para representar intervalos

Use notación de desigualdades para describir cada uno de lo siguiente.

a. c es como máximo 2. **b.** m es al menos -3. **c.** Toda x en el intervalo $(-3, 5]$

Solución

a. El enunciado "c es a lo más 2" puede representarse con $c \le 2$.

b. El enunciado "m es al menos -3" puede representarse con $m \ge -3$.

c. "Toda x en el intervalo $(-3, 5]$" puede representarse con $-3 < x \le 5$.

PUNTO *de repaso* Ahora trate de hacer el Ejercicio 45.

Ejemplo 6 Interpretar intervalos

Dé una descripción verbal de cada uno de los intervalos siguientes.

a. $(-1, 0)$ **b.** $[2, \infty)$ **c.** $(-\infty, 0)$

Solución

a. Este intervalo está formado por todos los números reales que sean mayores a -1 y menores que 0

b. Este intervalo está formado por todos los números reales que sean mayores o iguales a 2.

c. Este intervalo está formado por todos los números reales negativos.

PUNTO *de repaso* Ahora trate de hacer el Ejercicio 41.

Valor absoluto y distancia

El **valor absoluto** de un número real es su *magnitud*, o sea la distancia entre el origen y el punto que represente al número real en la recta de números reales

Definición de valor absoluto

Si a es un número real, entonces el valor absoluto de a es

$$|a| = \begin{cases} a, & \text{si } a \geq 0 \\ -a, & \text{si } a < 0 \end{cases}.$$

Observe en esta definición que el valor absoluto de un número real nunca es negativo. Por ejemplo, si $a = -5$, entonces $|-5| = -(-5) = 5$. El valor absoluto de un número real es positivo o cero. Además, 0 es el único número real cuyo valor absoluto es 0. Así, $|0| = 0$.

Ejemplo 7 Hallar valores absolutos

a. $|-15| = 15$ **b.** $\left|\frac{2}{3}\right| = \frac{2}{3}$

c. $|-4.3| = 4.3$ **d.** $-|-6| = -(6) = -6$

PUNTO *de repaso* Ahora trate de hacer el Ejercicio 51.

Ejemplo 8 Evaluar el valor absoluto de un número

Evalúe $\frac{|x|}{x}$ para (a) $x > 0$ y (b) $x < 0$.

Solución

a. Si $x > 0$, entonces $|x| = x$ y $\frac{|x|}{x} = \frac{x}{x} = 1$.

b. Si $x < 0$, entonces $|x| = -x$ y $\frac{|x|}{x} = \frac{-x}{x} = -1$.

PUNTO *de repaso* Ahora trate de hacer el Ejercicio 59.

La **ley de tricotomía** dice que para cualesquier dos números reales a y b, *precisamente* una de tres relaciones es posible:

$$a = b, \quad a < b \quad \text{o} \quad a > b.$$ Ley de tricotomía

Ejemplo 9 Comparar números reales

Ponga el símbolo apropiado ($<$, $>$, o $=$) entre el par de números reales.

a. $|-4| \square |3|$ **b.** $|-10| \square |10|$ **c.** $-|-7| \square |-7|$

Solución

a. $|-4| > |3|$ porque $|-4| = 4$ y $|3| = 3$, y 4 es mayor a 3.

b. $|-10| = |10|$ porque $|-10| = 10$ y $|10| = 10$.

c. $-|-7| < |-7|$ porque $-|-7| = -7$ y $|-7| = 7$, y -7 es menor a 7.

PUNTO *de repaso* Ahora trate de hacer el Ejercicio 61.

Propiedades de valores absolutos

1. $|a| \geq 0$

2. $|-a| = |a|$

3. $|ab| = |a||b|$

4. $\left|\frac{a}{b}\right| = \frac{|a|}{|b|}, \quad b \neq 0$

Se puede usar el valor absoluto para definir la distancia entre dos puntos en la recta de números reales. Por ejemplo, la distancia entre -3 y 5 es

$$|-3 - 4| = |-7|$$
$$= 7$$

como se ve en la Figura A.12.

FIGURA A.12 La distancia entre -3 y 4 es 7.

Distancia entre dos puntos en la recta de números reales

Sean a y b números reales. La **distancia entre *a* y *b*** es

$$d(a, b) = |b - a| = |a - b|.$$

Ejemplo 10 Hallar una distancia

Encuentre la distancia entre -25 y 13.

Solución

La distancia entre -25 y 13 está dada por

$$|-25 - 13| = |-38| = 38.$$ Distancia entre -25 y 13

La distancia también se puede hallar como sigue.

$$|13 - (-25)| = |38| = 38$$ Distancia entre -25 y 13

PUNTO *de repaso* Ahora trate de hacer el Ejercicio 67.

Expresiones algebraicas

Una característica del álgebra es el uso de letras para representar números. Las letras son **variables**, y las combinaciones de letras y números son **expresiones algebraicas.** A continuación veamos unos ejemplos de expresiones algebraicas

$$5x, \qquad 2x - 3, \qquad \frac{4}{x^2 + 2}, \qquad 7x + y$$

Definición de expresión algebraica

Una **expresión algebraica** es un conjunto de letras (**variables**) y números reales (**constantes**) combinados que usan operaciones de adición, sustracción, multiplicación, división y exponenciación.

Los **términos** de una expresión algebraica son las partes que están separadas por *adición*. Por ejemplo,

$$x^2 - 5x + 8 = x^2 + (-5x) + 8$$

tiene tres términos: x^2 y $-5x$ son los **términos variables** y 8 es el **término constante**. El factor numérico de un término se llama **coeficiente.** Por ejemplo, el coeficiente de $-5x$ es -5, y el de x^2 es 1.

Ejemplo 11 Identificar términos y coeficientes

Expresión algebraica	*Términos*	*Coeficientes*
a. $5x - \frac{1}{7}$	$5x, -\frac{1}{7}$	$5, -\frac{1}{7}$
b. $2x^2 - 6x + 9$	$2x^2, -6x, 9$	$2, -6, 9$
c. $\frac{3}{x} + \frac{1}{2}x^4 - y$	$\frac{3}{x}, \frac{1}{2}x^4, -y$	$3, \frac{1}{2}, -1$

PUNTO *de repaso* Ahora trate de hacer el Ejercicio 89.

Para **evaluar** una expresión algebraica, sustituya valores numéricos por cada una de las variables de la expresión, como se muestra en el ejemplo siguiente.

Ejemplo 12 Evaluar expresiones algebraicas

Expresión	*Valor de variable*	*Sustituya*	*Valor de expresión*
a. $-3x + 5$	$x = 3$	$-3(3) + 5$	$-9 + 5 = -4$
b. $3x^2 + 2x - 1$	$x = -1$	$3(-1)^2 + 2(-1) - 1$	$3 - 2 - 1 = 0$
c. $\frac{2x}{x + 1}$	$x = -3$	$\frac{2(-3)}{-3 + 1}$	$\frac{-6}{-2} = 3$

Observe que se debe sustituir el valor *cada vez* que se presente la variable.

PUNTO *de repaso* Ahora trate de hacer el Ejercicio 95.

Al evaluar una expresión algebraica, se usa el **principio de sustitución**, que dice que "si $a = b$, entonces a puede ser sustituida por b en cualquier expresión en donde aparezca a". En el Ejemplo 12(a), por ejemplo, 3 es *sustituido* por x en la expresión $-3x + 5$.

Reglas básicas del álgebra

Hay cuatro operaciones aritméticas con números reales: *adición*, *multiplicación*, *sustracción* y *división*, denotadas por los símbolos $+$, $\times$ o $\cdot$, $-$ y $\div$ o $/$. De éstos, la adición y multiplicación son las dos operaciones primarias. Sustracción y división son operaciones inversas de adición y multiplicación, respectivamente.

Definiciones de sustracción y división

Sustracción: Sume lo opuesto.

$$a - b = a + (-b)$$

División: multiplique por el recíproco.

$$\text{Si } b \neq 0, \text{ entonces } a/b = a\left(\frac{1}{b}\right) = \frac{a}{b}.$$

En estas definiciones, $-b$ es el **inverso aditivo** (u opuesto) de b, y $1/b$ es el **inverso multiplicativo** (o recíproco) de b. En la forma fraccionaria a/b, a es el **numerador** de la fracción y b es el **denominador.**

Como las propiedades de los números reales siguientes son verdaderas para variables y expresiones algebraicas, así como para números reales, con frecuencia reciben el nombre de **reglas básicas del álgebra**. Trate de formular una descripción verbal de cada una de ellas. Por ejemplo, la primera propiedad dice que *el orden en el que se suman dos números reales no afecta su suma*.

Reglas básicas de álgebra

Sean a, b y c números reales, variables o expresiones algebraicas.

Propiedad		*Ejemplo*
Propiedad conmutativa de la adición:	$a + b = b + a$	$4x + x^2 = x^2 + 4x$
Propiedad conmutativa de la multiplicación:	$ab = ba$	$(4 - x)x^2 = x^2(4 - x)$
Propiedad asociativa de la adición:	$(a + b) + c = a + (b + c)$	$(x + 5) + x^2 = x + (5 + x^2)$
Propiedad asociativa de la multiplicación:	$(ab)c = a(bc)$	$(2x \cdot 3y)(8) = (2x)(3y \cdot 8)$
Propiedades distributivas:	$a(b + c) = ab + ac$	$3x(5 + 2x) = 3x \cdot 5 + 3x \cdot 2x$
	$(a + b)c = ac + bc$	$(y + 8)y = y \cdot y + 8 \cdot y$
Propiedad aditiva de identidad:	$a + 0 = a$	$5y^2 + 0 = 5y^2$
Propiedad multiplicativa de identidad:	$a \cdot 1 = a$	$(4x^2)(1) = 4x^2$
Propiedad aditiva inversa:	$a + (-a) = 0$	$5x^3 + (-5x^3) = 0$
Propiedad multiplicativa inversa:	$a \cdot \frac{1}{a} = 1, \quad a \neq 0$	$(x^2 + 4)\left(\frac{1}{x^2 + 4}\right) = 1$

Como la sustracción se define como "sumar lo opuesto", las propiedades distributivas también son verdaderas para la sustracción. Por ejemplo, la "forma de sustracción" de $a(b + c) = ab + ac$ es $a(b - c) = ab - ac$. Observe que las operaciones de sustracción y división no son conmutativas ni asociativas. Los ejemplos

$$7 - 3 \neq 3 - 7 \quad \text{y} \quad 20 \div 4 \neq 4 \div 20$$

demuestran que la sustracción y división no son conmutativas. Del mismo modo

$$5 - (3 - 2) \neq (5 - 3) - 2 \quad \text{y} \quad 16 \div (4 \div 2) \neq (16 \div 4) \div 2$$

demuestran que la sustracción y la división no son asociativas.

Ejemplo 13 Identificar reglas del álgebra

Identifique la regla del álgebra ilustrada por el enunciado.

a. $(5x^3)2 = 2(5x^3)$

b. $\left(4x + \frac{1}{3}\right) - \left(4x + \frac{1}{3}\right) = 0$

c. $7x \cdot \frac{1}{7x} = 1, \quad x \neq 0$

d. $(2 + 5x^2) + x^2 = 2 + (5x^2 + x^2)$

Solución

a. Este enunciado ilustra la propiedad conmutativa de la multiplicación. En otras palabras, se obtiene el mismo resultado si se multiplica $5x^3$ por 2 o 2 por $5x^3$.

b. Este enunciado ilustra la propiedad aditiva inversa. En términos de sustracción, esta propiedad simplemente dice que cuando cualquier expresión se resta de sí misma el resultado es 0.

c. Este enunciado ilustra la propiedad del inverso multiplicativo. Observe que es importante que x sea un número diferente de cero. Si x fuera 0, el recíproco de x sería no definido.

d. Este enunciado ilustra la propiedad asociativa de la adición. En otras palabras, para formar la suma

$$2 + 5x^2 + x^2$$

no importa si 2 y $5x^2$, o $5x^2$ y x^2 se suman primero.

PUNTO *de repaso* Ahora trate de hacer el Ejercicio 101.

Propiedades de negación e igualdad

Sean a, b y c números reales, variables o expresiones algebraicas.

Propiedad	*Ejemplo*
1. $(-1)a = -a$	$(-1)7 = -7$
2. $-(-a) = a$	$-(-6) = 6$
3. $(-a)b = -(ab) = a(-b)$	$(-5)3 = -(5 \cdot 3) = 5(-3)$
4. $(-a)(-b) = ab$	$(-2)(-x) = 2x$
5. $-(a + b) = (-a) + (-b)$	$-(x + 8) = (-x) + (-8)$ $= -x - 8$
6. Si $a = b$, entonces $a \pm c = b \pm c$.	$\frac{1}{2} + 3 = 0.5 + 3$
7. Si $a = b$, entonces $ac = bc$.	$4^2 \cdot 2 = 16 \cdot 2$
8. Si $a \pm c = b \pm c$, entonces $a = b$.	$1.4 - 1 = \frac{7}{5} - 1 \Rightarrow 1.4 = \frac{7}{5}$
9. Si $ac = bc$ y $c \neq 0$, entonces $a = b$.	$3x = 3 \cdot 4 \Rightarrow x = 4$

Tip de estudio

Nótese la diferencia entre el *opuesto de un número* y un *número negativo*. Si a ya es negativo, entonces su opuesto, $-a$, es positivo. Por ejemplo, si $a = -5$, entonces

$$-a = -(-5) = 5.$$

Tip de estudio

La "o" en la propiedad del factor cero incluye la posibilidad de que cualquiera de los dos factores, o ambos, sean cero. Esto es una *o* **inclusiva**, y es la forma en que la conjunción "o" se usa por lo general en matemáticas.

Propiedades de cero

Sean a y b números reales, variables o expresiones algebraicas.

1. $a + 0 = a$ y $a - 0 = a$ **2.** $a \cdot 0 = 0$

3. $\dfrac{0}{a} = 0, \quad a \neq 0$ **4.** $\dfrac{a}{0}$ no está definida.

5. Propiedad del factor cero: si $ab = 0$, entonces $a = 0$ o $b = 0$.

Propiedades y operaciones de fracciones

Sean a, b, c y d números reales, variables o expresiones algebraicas tales que $b \neq 0$ y $d \neq 0$.

1. Fracciones equivalentes: $\dfrac{a}{b} = \dfrac{c}{d}$ si y sólo si $ad = bc$.

2. Reglas de los signos: $-\dfrac{a}{b} = \dfrac{-a}{b} = \dfrac{a}{-b}$ y $\dfrac{-a}{-b} = \dfrac{a}{b}$

3. Generar fracciones equivalentes: $\dfrac{a}{b} = \dfrac{ac}{bc}, \quad c \neq 0$

4. Sumar o restar denominadores comunes: $\dfrac{a}{b} \pm \dfrac{c}{b} = \dfrac{a \pm c}{b}$

5. Sumar o restar con denominadores diferentes: $\dfrac{a}{b} \pm \dfrac{c}{d} = \dfrac{ad \pm bc}{bd}$

6. Multiplicar fracciones: $\dfrac{a}{b} \cdot \dfrac{c}{d} = \dfrac{ac}{bd}$

7. Dividir fracciones: $\dfrac{a}{b} \div \dfrac{c}{d} = \dfrac{a}{b} \cdot \dfrac{d}{c} = \dfrac{ad}{bc}, \quad c \neq 0$

Tip de estudio

En la propiedad 1 de fracciones, la frase "si y sólo si" implica dos enunciados. Un enunciado es: si $a/b = c/d$, entonces $ad = bc$. El otro enunciado es: si $ad = bc$, donde $b \neq 0$ y $d \neq 0$, entonces $a/b = c/d$.

Ejemplo 14 Propiedades y operaciones con fracciones

a. Fracciones equivalentes: $\dfrac{x}{5} = \dfrac{3 \cdot x}{3 \cdot 5} = \dfrac{3x}{15}$

b. Dividir fracciones: $\dfrac{7}{x} \div \dfrac{3}{2} = \dfrac{7}{x} \cdot \dfrac{2}{3} = \dfrac{14}{3x}$

c. Sumar fracciones con denominadores diferentes: $\dfrac{x}{3} + \dfrac{2x}{5} = \dfrac{5 \cdot x + 3 \cdot 2x}{3 \cdot 5} = \dfrac{11x}{15}$

PUNTO *de repaso* Ahora trate de hacer el Ejercicio 119.

Si a, b y c son enteros tales que $ab = c$, entonces a y b son **factores** o **divisores** de c. Un **número primo** es un entero que tiene exactamente dos factores positivos, el propio número y 1, tales como 2, 3, 5, 7 y 11. Los números 4, 6, 8, 9 y 10 son **compuestos** porque cada uno de ellos se puede escribir como el producto de dos o más números primos. El número 1 no es primo ni compuesto. El **teorema fundamental de la aritmética** dice que todo entero positivo mayor a 1 puede escribirse como el producto de números primos en precisamente una forma (sin tomar en cuenta el orden). Por ejemplo, la *factorización prima* de 24 es $24 = 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 3$.

A.1 EJERCICIOS

En www.CalcChat.com vea las soluciones a los ejercicios impares.

VOCABULARIO: Llene los espacios en blanco.

1. Un número real es _____ si se puede escribir como la razón $\frac{p}{q}$ entre dos enteros, donde $q \neq 0$.
2. Los números _____ tienen representaciones decimales no periódicas infinitas.
3. El punto 0 sobre la recta de números reales se llama _____.
4. La distancia entre el origen y un punto que represente un número real en la recta de números reales es el _____ _____ de los números reales.
5. Un número real que se pueda escribir como el producto de dos o más números primos se llama número _____.
6. Un entero que tenga exactamente dos factores positivos, el entero mismo y 1, se llama número _____.
7. Una expresión algebraica es un conjunto de letras llamadas _____ y números reales llamados _____.
8. Los _____ de una expresión algebraica son aquellas partes separadas por adición.
9. El factor numérico de un término variable es el _____ del término variable.
10. La _____ _____ _____ _____ dice que si $ab = 0$, entonces $a = 0$ o $b = 0$.

HABILIDADES Y APLICACIONES

En los Ejercicios 11-16, determine cuáles números del conjunto son (a) números naturales, (b) números enteros, (c) enteros (neg. y pos.), (d) números racionales y (e) números irracionales.

11. $\left\{-9, -\frac{7}{2}, 5, \frac{2}{3}, \sqrt{2}, 0, 1, -4, 2, -11\right\}$
12. $\left\{\sqrt{5}, -7, -\frac{7}{3}, 0, 3.12, \frac{5}{4}, -3, 12, 5\right\}$
13. $\{2.01, 0.666\ldots, -13, 0.010110111\ldots, 1, -6\}$
14. $\{2.3030030003\ldots, 0.7575, -4.63, \sqrt{10}, -75, 4\}$
15. $\left\{-\pi, -\frac{1}{3}, \frac{6}{3}, \frac{1}{2}\sqrt{2}, -7.5, -1, 8, -22\right\}$
16. $\left\{25, -17, -\frac{12}{5}, \sqrt{9}, 3.12, \frac{1}{2}\pi, 7, -11.1, 13\right\}$

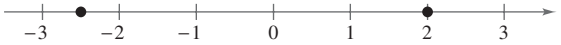
En los Ejercicios 17 y 18, grafique los números reales en la recta de números reales.

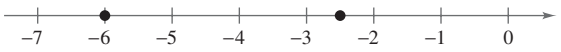
17. (a) 3 (b) $\frac{7}{2}$ (c) $-\frac{5}{2}$ (d) -5.2
18. (a) 8.5 (b) $\frac{4}{3}$ (c) -4.75 (d) $-\frac{8}{3}$

En los Ejercicios 19-22, use una calculadora para hallar la forma decimal del número racional. Si es un decimal no finito, escribe el patrón repetitivo o periódico.

19. $\frac{5}{8}$
20. $\frac{1}{3}$
21. $\frac{41}{333}$
22. $\frac{6}{11}$

En los Ejercicios 23 y 24, aproxime los números y ponga el símbolo correcto ($<$ o $>$) entre ellos.

23.


24.


En los Ejercicios 25-30, localice los dos números reales en la recta de números reales. A continuación, ponga el símbolo apropiado de desigualdad ($<$ o $>$) entre ellos.

25. $-4, -8$
26. $-3.5, 1$
27. $\frac{3}{2}, 7$
28. $1, \frac{16}{3}$
29. $\frac{5}{6}, \frac{2}{3}$
30. $-\frac{8}{7}, -\frac{3}{7}$

En los Ejercicios 31-42, (a) haga una descripción verbal del subconjunto de los números reales representados por la desigualdad o el intervalo, (b) trace el subconjunto en la recta de números reales, y (c) diga si el intervalo es acotado o no acotado.

31. $x \leq 5$
32. $x \geq -2$
33. $x < 0$
34. $x > 3$
35. $[4, \infty)$
36. $(-\infty, 2)$
37. $-2 < x < 2$
38. $0 \leq x \leq 5$
39. $-1 \leq x < 0$
40. $0 < x \leq 6$
41. $[-2, 5)$
42. $(-1, 2]$

En los Ejercicios 43-50, use notación de desigualdad y notación de intervalo para describir el conjunto.

43. y es no negativo.
44. y es no mayor a 25.
45. x es mayor a -2 y a lo más 4.
46. y es al menos -6 y menor que 0.
47. t es al menos 10 y a lo más 22.
48. k es menor que 5 pero no menor que -3.
49. El peso del perro, W, es más de 65 libras.
50. Se espera que la tasa anual de inflación, r, sea al menos 2.5% pero no mayor a 5%.

En los Ejercicios 51-60, evalúe la expresión.

51. $|-10|$

52. $|0|$

53. $|3 - 8|$

54. $|4 - 1|$

55. $|-1| - |-2|$

56. $-3 - |-3|$

57. $\dfrac{-5}{|-5|}$

58. $-3|-3|$

59. $\dfrac{|x + 2|}{x + 2}, \quad x < -2$

60. $\dfrac{|x - 1|}{x - 1}, \quad x > 1$

En los Ejercicios 61-66, ponga el símbolo correcto ($<$, $>$, o $=$) entre los dos números reales.

61. $|-3|$ ☐ $-|-3|$

62. $|-4|$ ☐ $|4|$

63. -5 ☐ $-|5|$

64. $-|-6|$ ☐ $|-6|$

65. $-|-2|$ ☐ $-|2|$

66. $-(-2)$ ☐ -2

En los Ejercicios 67-72, encuentre la distancia entre a y b.

67. $a = 126, b = 75$

68. $a = -126, b = -75$

69. $a = -\frac{5}{2}, b = 0$

70. $a = \frac{1}{4}, b = \frac{11}{4}$

71. $a = \frac{16}{5}, b = \frac{112}{75}$

72. $a = 9.34, b = -5.65$

En los Ejercicios 73-78, use notación de valor absoluto para describir la situación.

73. La distancia entre x y 5 es no mayor a 3.

74. La distancia entre x y -10 es al menos 6.

75. y está al menos a seis unidades de 0.

76. y está como máximo a dos unidades de a.

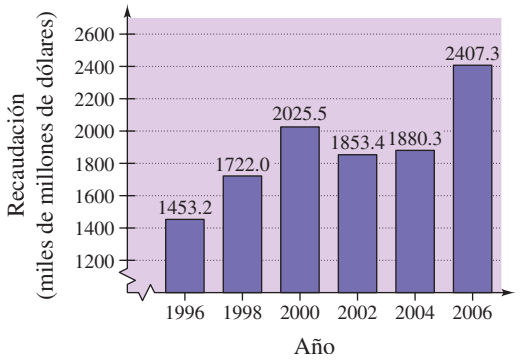
77. Cuando una persona viaja por la autopista de Pennsylvania, pasa el señalamiento de distancia 57 (en millas) cerca de Pittsburgh y luego el 236 cerca de Gettysburg. ¿Cuántas millas ha recorrido durante ese tiempo?

78. La temperatura en Bismarck, Dakota del Norte, era de 60 °F al mediodía, luego 23 °F a medianoche. ¿Cuál fue el cambio en temperatura en el periodo de 12 horas?

VARIANZA EN PRESUPUESTO En los Ejercicios 79-82, el departamento de contabilidad de una compañía embotelladora de bebidas para deporte está comprobando si los gastos reales de un departamento difieren, en más de \$500 o en más de 5%, respecto de los gastos presupuestados. Llene las partes faltantes de la tabla y determine si cada gasto real pasa el "examen de varianza de presupuesto".

	Gasto presupuestado, b	*Gasto real, a*	$\lvert a - b \rvert$ ☐ $0.05b$
79. Sueldos	\$112 700	\$113 356	
80. Utilidades	\$9400	\$9772	
81. Impuestos	\$37 640	\$37 335	
82. Seguros	\$2575	\$2613	

DÉFICIT FEDERAL En los Ejercicios 83-88, use la gráfica de barras, que muestra la recaudación del gobierno federal (en miles de millones de dólares) para años seleccionados de 1996 a 2006. En cada ejercicio se indican los gastos del gobierno federal. Encuentre la magnitud del excedente o déficit para el año. (Fuente: U.S. Office of Management and Budget)



Año	*Recaudación*	*Gastos*	$\lvert$*Recaudación* $-$ *Gastos*$\rvert$
83. 1996		\$1560.6 miles de millones	
84. 1998		\$1652.7 miles de millones	
85. 2000		\$1789.2 miles de millones	
86. 2002		\$2011.2 miles de millones	
87. 2004		\$2293.0 miles de millones	
88. 2006		\$2655.4 miles de millones	

En los Ejercicios 89-94, identifique los términos. A continuación, identifique los coeficientes de los términos variables de la expresión.

89. $7x + 4$

90. $6x^3 - 5x$

91. $\sqrt{3}x^2 - 8x - 11$

92. $3\sqrt{3}x^2 + 1$

93. $4x^3 + \dfrac{x}{2} - 5$

94. $3x^4 - \dfrac{x^2}{4}$

En los Ejercicios 95-100, evalúe la expresión para cada uno de los valores de x. (Si no es posible, diga la razón.)

	Expresión	*Valores*	
95.	$4x - 6$	(a) $x = -1$	(b) $x = 0$
96.	$9 - 7x$	(a) $x = -3$	(b) $x = 3$
97.	$x^2 - 3x + 4$	(a) $x = -2$	(b) $x = 2$
98.	$-x^2 + 5x - 4$	(a) $x = -1$	(b) $x = 1$
99.	$\dfrac{x+1}{x-1}$	(a) $x = 1$	(b) $x = -1$
100.	$\dfrac{x}{x+2}$	(a) $x = 2$	(b) $x = -2$

En los Ejercicios 101-112, identifique la o las reglas del álgebra ilustrada por el enunciado.

101. $x + 9 = 9 + x$

102. $2\left(\frac{1}{2}\right) = 1$

103. $\dfrac{1}{h+6}(h+6) = 1, \quad h \neq -6$

104. $(x + 3) - (x + 3) = 0$

105. $2(x + 3) = 2 \cdot x + 2 \cdot 3$

106. $(z - 2) + 0 = z - 2$

107. $1 \cdot (1 + x) = 1 + x$

108. $(z + 5)x = z \cdot x + 5 \cdot x$

109. $x + (y + 10) = (x + y) + 10$

110. $x(3y) = (x \cdot 3)y = (3x)y$

111. $3(t - 4) = 3 \cdot t - 3 \cdot 4$

112. $\frac{1}{7}(7 \cdot 12) = \left(\frac{1}{7} \cdot 7\right)12 = 1 \cdot 12 = 12$

En los Ejercicios 113-120, realice la(s) operación(es). (Escriba respuestas fraccionarias en su forma más sencilla.)

113. $\frac{3}{16} + \frac{5}{16}$

114. $\frac{6}{7} - \frac{4}{7}$

115. $\frac{5}{8} - \frac{5}{12} + \frac{1}{6}$

116. $\frac{10}{11} + \frac{6}{33} - \frac{13}{66}$

117. $12 \div \frac{1}{4}$

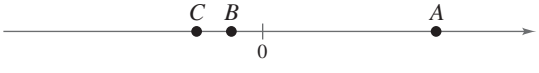
118. $-\left(6 \cdot \frac{4}{8}\right)$

119. $\dfrac{2x}{3} - \dfrac{x}{4}$

120. $\dfrac{5x}{6} \cdot \dfrac{2}{9}$

EXPLORACIÓN

En los Ejercicios 121 y 122, use los números reales A, B y C mostrados en la recta numérica. Determine el signo de cada expresión.



121. (a) $-A$ (b) $B - A$

122. (a) $-C$ (b) $A - C$

123. CONJETURA

(a) Use una calculadora para completar la tabla.

n	1	0.5	0.01	0.0001	0.000001
$5/n$					

(b) Use el resultado del inciso (a) para hacer una conjetura acerca del valor de $5/n$ cuando n se aproxima a 0.

124. CONJETURA

(a) Use una calculadora para completar la tabla.

n	1	10	100	10 000	100 000
$5/n$					

(b) Use el resultado del inciso (a) para hacer una conjetura acerca del valor de $5/n$ cuando n aumenta sin límite.

¿VERDADERO O FALSO? En los Ejercicios 125-128, determine si la proposición es verdadera o falsa. Justifique su respuesta.

125. Si $a > 0$ y $b < 0$, entonces $a - b > 0$.

126. Si $a > 0$ y $b < 0$, entonces $ab > 0$.

127. Si $a < b$, entonces $\dfrac{1}{a} < \dfrac{1}{b}$, donde $a \neq 0$ y $b \neq 0$.

128. Como $\dfrac{a+b}{c} = \dfrac{a}{c} + \dfrac{b}{c}$, entonces $\dfrac{c}{a+b} = \dfrac{c}{a} + \dfrac{c}{b}$.

129. PIÉNSELO Considere $|u + v|$ y $|u| + |v|$, donde $u \neq 0$ y $v \neq 0$.

(a) ¿Los valores de las expresiones son siempre iguales? Si no es así, ¿bajo qué condiciones son desiguales?

(b) Si las dos expresiones no son iguales para ciertos valores de u y v, ¿una de las expresiones es siempre mayor que la otra? Explique.

130. PIÉNSELO ¿Hay diferencia entre decir que un número real es positivo y decir que un número real es no negativo? Explique.

131. PIÉNSELO Debido a que todo número par es divisible entre 2, ¿es posible que existan algunos números primos pares? Explique.

132. PIÉNSELO ¿Es posible que un número real sea racional e irracional? Explique.

133. ESCRITURA ¿Puede alguna vez ser cierto que $|a| = -a$ para un número real a? Explique.

134. TOQUE FINAL Describa las diferencias entre los conjuntos de números naturales, números enteros (sólo positivos), enteros (pos. y neg.), números racionales y números irracionales.

A.2 Exponentes y radicales

Lo que debe aprender

- Usar propiedades de los exponentes.
- Usar notación científica para representar números reales.
- Usar propiedades de los radicales.
- Simplificar y combinar radicales.
- Racionalizar denominadores y numeradores.
- Usar propiedades de exponentes racionales.

Por qué debe aprenderlo

Es frecuente escribir números reales y expresiones algebraicas con exponentes y radicales. Por ejemplo, en el Ejercicio 121 de la página A26 usaremos una expresión que contiene exponentes racionales para hallar los tiempos necesarios para que un embudo se vacíe para diferentes alturas de agua.

Exponentes enteros (neg. y pos.)

Una *multiplicación* repetida se puede escribir en **forma exponencial.**

Multiplicación repetida	*Forma exponencial*
$a \cdot a \cdot a \cdot a \cdot a$	a^5
$(-4)(-4)(-4)$	$(-4)^3$
$(2x)(2x)(2x)(2x)$	$(2x)^4$

Notación exponencial

Si a es un número real y n es un entero positivo, entonces

$$a^n = \underbrace{a \cdot a \cdot a \cdot \cdots \cdot a}_{n \text{ factores}}$$

donde n es el **exponente** y a es la **base**. La expresión a^n se lee "a a la n-ésima **potencia**".

Un exponente también puede ser negativo. En la propiedad 3 que sigue, asegúrese de ver cómo usar un exponente negativo.

Propiedades de exponentes

Sean a y b números reales, o expresiones algebraicas, y sean m y n enteros. (Todos los denominadores y bases son diferentes de cero.)

Propiedad	*Ejemplo*
1. $a^m a^n = a^{m+n}$	$3^2 \cdot 3^4 = 3^{2+4} = 3^6 = 729$
2. $\dfrac{a^m}{a^n} = a^{m-n}$	$\dfrac{x^7}{x^4} = x^{7-4} = x^3$
3. $a^{-n} = \dfrac{1}{a^n} = \left(\dfrac{1}{a}\right)^n$	$y^{-4} = \dfrac{1}{y^4} = \left(\dfrac{1}{y}\right)^4$
4. $a^0 = 1, \quad a \neq 0$	$(x^2 + 1)^0 = 1$
5. $(ab)^m = a^m b^m$	$(5x)^3 = 5^3 x^3 = 125x^3$
6. $(a^m)^n = a^{mn}$	$(y^3)^{-4} = y^{3(-4)} = y^{-12} = \dfrac{1}{y^{12}}$
7. $\left(\dfrac{a}{b}\right)^m = \dfrac{a^m}{b^m}$	$\left(\dfrac{2}{x}\right)^3 = \dfrac{2^3}{x^3} = \dfrac{8}{x^3}$
8. $\lvert a^2 \rvert = \lvert a \rvert^2 = a^2$	$\lvert (-2)^2 \rvert = \lvert -2 \rvert^2 = (2)^2 = 4$

TECNOLOGÍA

Se puede usar calculadora para evaluar expresiones exponenciales. Al hacerlo, es importante saber cuándo usar paréntesis porque la calculadora sigue el orden de operaciones. Por ejemplo, evalúe $(-2)^4$ como sigue.

Científica:

(2 +/−) y^x 4 =

De gráficas:

((−) 2) ^ 4 ENTER

La pantalla indica 16. Si se omiten los paréntesis, la pantalla indicará -16.

Es importante reconocer la diferencia entre expresiones como $(-2)^4$ y -2^4. En $(-2)^4$, el paréntesis indica que el exponente se aplica al signo negativo al igual que al 2, pero en $-2^4 = -(2^4)$, el exponente se aplica sólo al 2. Por tanto, $(-2)^4 = 16$ y $-2^4 = -16$.

Las propiedades de los exponentes citadas en la página precedente se aplican a *todos* los enteros m y n, no sólo a enteros positivos, como se muestra en los ejemplos de esta sección.

Ejemplo 1 Evaluar expresiones exponenciales

a. $(-5)^2 = (-5)(-5) = 25$ El signo negativo es parte de la base

b. $-5^2 = -(5)(5) = -25$ El signo negativo *no es* parte de la base.

c. $2 \cdot 2^4 = 2^{1+4} = 2^5 = 32$ Propiedad 1

d. $\dfrac{4^4}{4^6} = 4^{4-6} = 4^{-2} = \dfrac{1}{4^2} = \dfrac{1}{16}$ Propiedades 2 y 3

PUNTO *de repaso* Ahora trate de hacer el Ejercicio 11.

Ejemplo 2 Evaluar expresiones algebraicas

Evalúe cada una de las expresiones algebraicas cuando $x = 3$.

a. $5x^{-2}$ **b.** $\dfrac{1}{3}(-x)^3$

Solution

a. Cuando $x = 3$, la expresión $5x^{-2}$ tiene un valor de

$$5x^{-2} = 5(3)^{-2} = \frac{5}{3^2} = \frac{5}{9}.$$

b. Cuando $x = 3$, la expresión $\dfrac{1}{3}(-x)^3$ tiene un valor de

$$\frac{1}{3}(-x)^3 = \frac{1}{3}(-3)^3 = \frac{1}{3}(-27) = -9.$$

PUNTO *de repaso* Ahora trate de hacer el Ejercicio 23.

Ejemplo 3 Usar propiedades de exponentes

Use las propiedades de los exponentes para simplificar cada expresión.

a. $(-3ab^4)(4ab^{-3})$ **b.** $(2xy^2)^3$ **c.** $3a(-4a^2)^0$ **d.** $\left(\dfrac{5x^3}{y}\right)^2$

Solución

a. $(-3ab^4)(4ab^{-3}) = (-3)(4)(a)(a)(b^4)(b^{-3}) = -12a^2b$

b. $(2xy^2)^3 = 2^3(x)^3(y^2)^3 = 8x^3y^6$

c. $3a(-4a^2)^0 = 3a(1) = 3a, \quad a \neq 0$

d. $\left(\dfrac{5x^3}{y}\right)^2 = \dfrac{5^2(x^3)^2}{y^2} = \dfrac{25x^6}{y^2}$

PUNTO *de repaso* Ahora trate de hacer el Ejercicio 31.

Tip de estudio

Muy raras veces, en álgebra, hay sólo una forma de resolver un problema. El lector no debe preocuparse si los pasos que usa para resolver un problema no son exactamente iguales a los que aquí presentamos. Lo importante es usar pasos que entienda y, desde luego, que estén justificados por las reglas del álgebra. Por ejemplo, podría preferir los siguientes pasos para el ejemplo 4(d).

$$\left(\frac{3x^2}{y}\right)^{-2} = \left(\frac{y}{3x^2}\right)^{2} = \frac{y^2}{9x^4}$$

Nótese la forma en que la propiedad 3 se usa en el primer paso de esta solución. La forma fraccionaria de esta propiedad es

$$\left(\frac{a}{b}\right)^{-m} = \left(\frac{b}{a}\right)^{m}.$$

Ejemplo 4 **Reescribir con exponentes positivos**

Reescriba cada una de las expresiones con exponentes positivos.

a. x^{-1} **b.** $\dfrac{1}{3x^{-2}}$ **c.** $\dfrac{12a^3b^{-4}}{4a^{-2}b}$ **d.** $\left(\dfrac{3x^2}{y}\right)^{-2}$

Solución

a. $x^{-1} = \dfrac{1}{x}$ Propiedad 3

b. $\dfrac{1}{3x^{-2}} = \dfrac{1(x^2)}{3} = \dfrac{x^2}{3}$ El exponente -2 no se aplica al 3.

c. $\dfrac{12a^3b^{-4}}{4a^{-2}b} = \dfrac{12a^3 \cdot a^2}{4b \cdot b^4}$ Propiedad 3

$= \dfrac{3a^5}{b^5}$ Propiedad 1

d. $\left(\dfrac{3x^2}{y}\right)^{-2} = \dfrac{3^{-2}(x^2)^{-2}}{y^{-2}}$ Propiedades 5 y 7

$= \dfrac{3^{-2}x^{-4}}{y^{-2}}$ Propiedad 6

$= \dfrac{y^2}{3^2x^4}$ Propiedad 3

$= \dfrac{y^2}{9x^4}$ Simplificar.

PUNTO *de repaso* Ahora trate de hacer el Ejercicio 41.

Notación científica

Los exponentes son una eficiente forma de escribir y calcular números muy grandes (o muy pequeños). Por ejemplo, hay unos 359 trillones de galones de agua en la Tierra, es decir, 359 seguido de 18 ceros.

359 000 000 000 000 000 000

Es práctico escribir esos números en **notación científica**. Esta notación tiene la forma $\pm c \times 10^n$, donde $1 \le c < 10$ y n es un entero. Por tanto, el número de galones de agua en la Tierra se puede escribir en notación científica como

$$3.59 \times 100\,000\,000\,000\,000\,000\,000 = 3.59 \times 10^{20}.$$

El exponente *positivo* 20 indica que el número es *grande* (10 o más) y que el punto decimal se ha movido 20 lugares. Un exponente *negativo* indica que el número es *pequeño* (menor a 1). Por ejemplo, la masa (en gramos) de un electrón es aproximadamente

$$9.0 \times 10^{-28} = 0.000000000000000000000000000009.$$

28 lugares decimales

Ejemplo 5 Notación científica

Escriba cada número en notación científica.

a. 0.0000782 **b.** 836 100 000

Solución

a. $0.0000782 = 7.82 \times 10^{-5}$

b. $836\,100\,000 = 8.361 \times 10^{8}$

PUNTO *de repaso* Ahora trate de hacer el Ejercicio 45.

Ejemplo 6 Notación decimal

Escriba cada número en notación decimal.

a. -9.36×10^{-6}

b. 1.345×10^{2}

Solución

a. $-9.36 \times 10^{-6} = -0.00000936$

b. $1.345 \times 10^{2} = 134.5$

PUNTO *de repaso* Ahora trate de hacer el Ejercicio 55.

TECNOLOGÍA

Casi todas las calculadoras, de manera automática, cambian a notación científica cuando exhiben números grandes (o pequeños) que rebasan la capacidad de su pantalla.

Para *ingresar* números en notación científica, su calculadora debe tener una tecla exponencial marcada como

EE o EXP

Consulte las instrucciones en la guía del usuario de su calculadora sobre tecleo y la forma en que se exhiben en notación científica.

Ejemplo 7 Usar notación científica

Evalúe $\dfrac{(2\,400\,000\,000)(0.0000045)}{(0.00003)(1500)}$.

Solución

Empiece por reescribir cada número en notación científica y simplificar.

$$\begin{aligned}\frac{(2{,}400\,000\,000)(0.0000045)}{(0.00003)(1500)} &= \frac{(2.4 \times 10^{9})(4.5 \times 10^{-6})}{(3.0 \times 10^{-5})(1.5 \times 10^{3})} \\ &= \frac{(2.4)(4.5)(10^{3})}{(4.5)(10^{-2})} \\ &= (2.4)(10^{5}) \\ &= 240\,000\end{aligned}$$

PUNTO *de repaso* Ahora trate de hacer el Ejercicio 63(b).

Radicales y sus propiedades

Una raíz cuadrada de un número es uno de sus dos factores iguales. Por ejemplo, 5 es una raíz cuadrada de 25 porque 5 es uno de los dos factores iguales de 25. En forma semejante, una raíz cúbica de un número es uno de sus tres factores iguales, como en $125 = 5^3$.

Definición de raíz *n*-ésima de un número

Sean a y b números reales y sea $n \geq 2$ un entero positivo. Si

$$a = b^n$$

entonces b es una **raíz *n*-ésima de *a*.** Si $n = 2$, la raíz es una **raíz cuadrada.** Si $n = 3$, la raíz es una **raíz cúbica.**

Algunos números tienen más de una raíz n-ésima. Por ejemplo, tanto 5 como -5 son raíces cuadradas de 25. La *raíz cuadrada principal* de 25, escrita como $\sqrt{25}$, es la raíz positiva, 5. La ***n*-ésima *raíz principal*** de un número se define como sigue.

n-ésima raíz principal de un número

Sea a un número real que tiene al menos una raíz n-ésima. La raíz ***n*-ésima principal de *a*** es la que tiene el mismo signo que a. Se denota con el **símbolo radical**

$$\sqrt[n]{a}.$$ n-ésima raíz principal

El entero positivo n es el **índice** del radical, y el número a es el **radicando.** Si $n = 2$, omita el índice y escriba $\sqrt{a}$ en lugar de $\sqrt[2]{a}$.

Un malentendido común es que el signo de raíz cuadrada implica raíces tanto negativas como positivas. Esto no es correcto. El signo de raíz cuadrada implica sólo una raíz positiva. Cuando se hace necesaria una raíz negativa, se debe usar el signo negativo con el signo de raíz cuadrada.

Incorrecto: $\sqrt{4} = \pm 2$ *Correcto:* $-\sqrt{4} = -2$ *y* $\sqrt{4} = 2$

Ejemplo 8 Evaluar expresiones con radicales

a. $\sqrt{36} = 6$ porque $6^2 = 36$.

b. $-\sqrt{36} = -6$ porque $-\left(\sqrt{36}\right) = -\left(\sqrt{6^2}\right) = -(6) = -6$.

c. $\sqrt[3]{\dfrac{125}{64}} = \dfrac{5}{4}$ porque $\left(\dfrac{5}{4}\right)^3 = \dfrac{5^3}{4^3} = \dfrac{125}{64}$.

d. $\sqrt[5]{-32} = -2$ porque $(-2)^5 = -32$.

e. $\sqrt[4]{-81}$ no es un número real porque no hay número real que pueda elevarse a la cuarta potencia para producir -81.

PUNTO *de repaso* Ahora trate de hacer el Ejercicio 65.

A continuación veamos algunas generalizaciones acerca de las raíces n-ésimas de los números reales.

Generalizaciones acerca de las raíces n-ésimas de los números reales			
Número real a	Entero n	Raíz(ces) de a	Ejemplo
$a > 0$	$n > 0$, n es par.	$\sqrt[n]{a}$, $-\sqrt[n]{a}$	$\sqrt[4]{81} = 3$, $-\sqrt[4]{81} = -3$
$a > 0$ o $a < 0$	n es impar.	$\sqrt[n]{a}$	$\sqrt[3]{-8} = -2$
$a < 0$	n es par.	No hay raíces reales	$\sqrt{-4}$ no es un número real.
$a = 0$	n es par o impar.	$\sqrt[n]{0} = 0$	$\sqrt[5]{0} = 0$

Los enteros como 1, 4, 9, 16, 25 y 36 se denominan **cuadrados perfectos** porque tienen raíces cuadradas enteras. Del mismo modo, enteros como 1, 8, 27, 64 y 125 se llaman **cubos perfectos** porque tienen raíces cúbicas enteras.

Propiedades de los radicales

Sean a y b números reales, variables o expresiones algebraicas tales que las raíces indicadas son números reales, y sean m y n enteros positivos.

	Propiedad	*Ejemplo*
1.	$\sqrt[n]{a^m} = \left(\sqrt[n]{a}\right)^m$	$\sqrt[3]{8^2} = \left(\sqrt[3]{8}\right)^2 = (2)^2 = 4$
2.	$\sqrt[n]{a} \cdot \sqrt[n]{b} = \sqrt[n]{ab}$	$\sqrt{5} \cdot \sqrt{7} = \sqrt{5 \cdot 7} = \sqrt{35}$
3.	$\dfrac{\sqrt[n]{a}}{\sqrt[n]{b}} = \sqrt[n]{\dfrac{a}{b}}, \quad b \neq 0$	$\dfrac{\sqrt[4]{27}}{\sqrt[4]{9}} = \sqrt[4]{\dfrac{27}{9}} = \sqrt[4]{3}$
4.	$\sqrt[m]{\sqrt[n]{a}} = \sqrt[mn]{a}$	$\sqrt[3]{\sqrt{10}} = \sqrt[6]{10}$
5.	$\left(\sqrt[n]{a}\right)^n = a$	$\left(\sqrt{3}\right)^2 = 3$
6.	Para n par, $\sqrt[n]{a^n} = \lvert a \rvert$.	$\sqrt{(-12)^2} = \lvert -12 \rvert = 12$
	Para n impar, $\sqrt[n]{a^n} = a$.	$\sqrt[3]{(-12)^3} = -12$

Un caso especial de la propiedad 6 es $\sqrt{a^2} = |a|$.

Ejemplo 9 Usar propiedades de los radicales

Use las propiedades de los radicales para simplificar cada expresión.

a. $\sqrt{8} \cdot \sqrt{2}$ **b.** $\left(\sqrt[3]{5}\right)^3$ **c.** $\sqrt[3]{x^3}$ **d.** $\sqrt[6]{y^6}$

Solución

a. $\sqrt{8} \cdot \sqrt{2} = \sqrt{8 \cdot 2} = \sqrt{16} = 4$

b. $\left(\sqrt[3]{5}\right)^3 = 5$

c. $\sqrt[3]{x^3} = x$

d. $\sqrt[6]{y^6} = |y|$

PUNTO *de repaso* Ahora trate de hacer el Ejercicio 77.

Simplificación de radicales

Una expresión que contenga radicales está en su **forma más simple** cuando se satisfacen las siguientes condiciones.

1. Todos los factores posibles han sido eliminados del radical.
2. Todas las fracciones tienen denominadores sin radicales (lo que se logra mediante un proceso llamado *racionalización del denominador*).
3. El índice del radical está reducido.

Para simplificar un radical, factorice el radicando en factores cuyos exponentes sean múltiplos del índice. Las raíces de estos factores se escriben fuera del radical y los factores "sobrantes" forman el nuevo radicando.

ATENCIÓN

Al simplificar un radical, es importante que ambas expresiones estén definidas para los mismos valores de la variable. Por citar un caso, en el Ejemplo 10(b), $\sqrt{75x^3}$ y $5x\sqrt{3x}$ están definidos sólo para valores no negativos de x. Del mismo modo, en el Ejemplo 10(c), $\sqrt[4]{(5x)^4}$ y $5|x|$ están ambos definidos para todos los valores reales de x.

Ejemplo 10 Simplificar raíces pares

Raíz 4ª perfecta / Factor sobrante

a. $\sqrt[4]{48} = \sqrt[4]{16 \cdot 3} = \sqrt[4]{2^4 \cdot 3} = 2\sqrt[4]{3}$

Cuadrado perfecto / Factor sobrante

b. $\sqrt{75x^3} = \sqrt{25x^2 \cdot 3x}$ Encontrar el máximo factor cuadrado.

$= \sqrt{(5x)^2 \cdot 3x}$

$= 5x\sqrt{3x}$ Encontrar la raíz del cuadrado perfecto.

c. $\sqrt[4]{(5x)^4} = |5x| = 5|x|$

PUNTO *de repaso* Ahora trate de hacer el Ejercicio 79(a).

Ejemplo 11 Simplificar raíces impares

Cubo perfecto / Factor sobrante

a. $\sqrt[3]{24} = \sqrt[3]{8 \cdot 3} = \sqrt[3]{2^3 \cdot 3} = 2\sqrt[3]{3}$

Cubo perfecto / Factor sobrante

b. $\sqrt[3]{24a^4} = \sqrt[3]{8a^3 \cdot 3a}$ Encontrar el máximo factor cúbico.

$= \sqrt[3]{(2a)^3 \cdot 3a}$

$= 2a\sqrt[3]{3a}$ Encontrar la raíz del cubo perfecto.

c. $\sqrt[3]{-40x^6} = \sqrt[3]{(-8x^6) \cdot 5}$ Encontrar el máximo factor cúbico.

$= \sqrt[3]{(-2x^2)^3 \cdot 5}$

$= -2x^2\sqrt[3]{5}$ Encontrar la raíz del cubo perfecto.

PUNTO *de repaso* Ahora trate de hacer el Ejercicio 79(b).

Se pueden combinar expresiones radicales (sumadas o restadas) si son **radicales semejantes**, es decir, si tienen índice y radicando iguales. Por ejemplo, $\sqrt{2}$, $3\sqrt{2}$ y $\frac{1}{2}\sqrt{2}$ son radicales semejantes, pero $\sqrt{3}$ y $\sqrt{2}$ son radicales diferentes. Para determinar si dos radicales se pueden combinar, primero se debe simplificar cada radical.

Ejemplo 12 Combinación de radicales

a. $2\sqrt{48} - 3\sqrt{27} = 2\sqrt{16 \cdot 3} - 3\sqrt{9 \cdot 3}$ Encontrar factores cuadrados.

$= 8\sqrt{3} - 9\sqrt{3}$ Encontrar raíces cuadradas y multiplicar por coeficientes.

$= (8 - 9)\sqrt{3}$ Combinar términos iguales.

$= -\sqrt{3}$ Simplificar.

b. $\sqrt[3]{16x} - \sqrt[3]{54x^4} = \sqrt[3]{8 \cdot 2x} - \sqrt[3]{27 \cdot x^3 \cdot 2x}$ Encontrar factores cúbicos.

$= 2\sqrt[3]{2x} - 3x\sqrt[3]{2x}$ Encontrar raíces cúbicas.

$= (2 - 3x)\sqrt[3]{2x}$ Combinar términos iguales.

PUNTO *de repaso* Ahora trate de hacer el Ejercicio 87.

Racionalización de denominadores y numeradores

Para racionalizar un denominador o numerador de la forma $a - b\sqrt{m}$ o $a + b\sqrt{m}$, multiplique numerador y denominador por un **conjugado:** $a + b\sqrt{m}$ y $a - b\sqrt{m}$ son conjugados entre sí. Si $a = 0$, entonces el factor racionalizador para $\sqrt{m}$ es el mismo, $\sqrt{m}$. Para raíces cúbicas, escoja un factor racionalizador que genere un cubo perfecto.

Ejemplo 13 Racionalizar denominadores de un solo término

Racionalice el denominador de cada expresión.

a. $\dfrac{5}{2\sqrt{3}}$ **b.** $\dfrac{2}{\sqrt[3]{5}}$

Solución

a. $\dfrac{5}{2\sqrt{3}} = \dfrac{5}{2\sqrt{3}} \cdot \dfrac{\sqrt{3}}{\sqrt{3}}$ $\sqrt{3}$ es factor racionalizador.

$= \dfrac{5\sqrt{3}}{2(3)}$ Multiplicar.

$= \dfrac{5\sqrt{3}}{6}$ Simplificar.

b. $\dfrac{2}{\sqrt[3]{5}} = \dfrac{2}{\sqrt[3]{5}} \cdot \dfrac{\sqrt[3]{5^2}}{\sqrt[3]{5^2}}$ $\sqrt[3]{5^2}$ es factor racionalizador.

$= \dfrac{2\sqrt[3]{5^2}}{\sqrt[3]{5^3}}$ Multiplicar.

$= \dfrac{2\sqrt[3]{25}}{5}$ Simplificar.

PUNTO *de repaso* Ahora trate de hacer el Ejercicio 95.

Ejemplo 14 Racionalizar un denominador con dos términos

$$\frac{2}{3+\sqrt{7}} = \frac{2}{3+\sqrt{7}} \cdot \frac{3-\sqrt{7}}{3-\sqrt{7}}$$

Multiplicar numerador y denominador por el conjugado del numerador.

$$= \frac{2(3-\sqrt{7})}{3(3)+3(-\sqrt{7})+\sqrt{7}(3)-(\sqrt{7})(\sqrt{7})}$$

Usar propiedad distributiva.

$$= \frac{2(3-\sqrt{7})}{(3)^2-(\sqrt{7})^2}$$

Simplificar.

$$= \frac{2(3-\sqrt{7})}{9-7}$$

Términos cuadrados del denominador.

$$= \frac{2(3-\sqrt{7})}{2} = 3-\sqrt{7}$$

Simplificar.

PUNTO *de repaso* Ahora trate de hacer el Ejercicio 97.

A veces es necesario racionalizar el numerador de una expresión. Por ejemplo, en el Apéndice A.4 usaremos la técnica mostrada en el siguiente ejemplo para racionalizar el numerador de una expresión tomada del cálculo.

ATENCIÓN

No confunda la expresión $\sqrt{5}+\sqrt{7}$ con la expresión $\sqrt{5+7}$. En general, $\sqrt{x+y}$ no es igual a $\sqrt{x}+\sqrt{y}$. Del mismo modo, $\sqrt{x^2+y^2}$ no es igual a $x+y$.

Ejemplo 15 Racionalizar un numerador

$$\frac{\sqrt{5}-\sqrt{7}}{2} = \frac{\sqrt{5}-\sqrt{7}}{2} \cdot \frac{\sqrt{5}+\sqrt{7}}{\sqrt{5}+\sqrt{7}}$$

Multiplicar numerador y denominador por el conjugado del numerador.

$$= \frac{(\sqrt{5})^2-(\sqrt{7})^2}{2(\sqrt{5}+\sqrt{7})}$$

Simplificar.

$$= \frac{5-7}{2(\sqrt{5}+\sqrt{7})}$$

Elevar al cuadrado términos del numerador.

$$= \frac{-2}{2(\sqrt{5}+\sqrt{7})} = \frac{-1}{\sqrt{5}+\sqrt{7}}$$

Simplificar.

PUNTO *de repaso* Ahora trate de hacer el Ejercicio 101.

Exponentes racionales

Definición de exponentes racionales

Si a es un número real y n es un entero positivo tal que la n-ésima raíz principal de a existe, entonces $a^{1/n}$ se define como

$$a^{1/n} = \sqrt[n]{a}, \text{ donde } 1/n \text{ es el } \textbf{exponente racional} \text{ de } a.$$

Además, si m es un entero positivo que no tenga factor común con n, entonces

$$a^{m/n} = (a^{1/n})^m = \left(\sqrt[n]{a}\right)^m \quad \text{y} \quad a^{m/n} = (a^m)^{1/n} = \sqrt[n]{a^m}.$$

El símbolo ∫ indica un ejemplo o ejercicio que destaca técnicas algebraicas que específicamente se usan en cálculo.

ATENCIÓN

Los exponentes racionales pueden ser engañosos y es necesario recordar que la expresión $b^{m/n}$ no está definida, a menos que $\sqrt[n]{b}$ sea un número real. Esta restricción produce algunos resultados que se ven rara vez. Por ejemplo, el número $(-8)^{1/3}$ está definido porque $\sqrt[3]{-8} = -2$, pero el número $(-8)^{2/6}$ no está definido porque $\sqrt[6]{-8}$ no es un número real.

El numerador de un exponente racional denota la *potencia* a la que se eleva la base y el denominador denota el *índice* o la *raíz* que se toma.

Potencia, Índice

$$b^{m/n} = \left(\sqrt[n]{b}\right)^m = \sqrt[n]{b^m}$$

Al trabajar con exponentes racionales, también se aplican las propiedades de los exponentes enteros. Por ejemplo, $2^{1/2}2^{1/3} = 2^{(1/2)+(1/3)} = 2^{5/6}$.

Ejemplo 16 Cambiar de forma radical a exponencial

a. $\sqrt{3} = 3^{1/2}$

b. $\sqrt{(3xy)^5} = \sqrt[2]{(3xy)^5} = (3xy)^{5/2}$

c. $2x\sqrt[4]{x^3} = (2x)(x^{3/4}) = 2x^{1+(3/4)} = 2x^{7/4}$

PUNTO *de repaso* Ahora trate de hacer el Ejercicio 103.

TECNOLOGÍA

Hay cuatro métodos de evaluar radicales en casi todas las calculadoras de gráficas. Para raíces cuadradas, se puede usar la *tecla square root* [√]. Para raíces cúbicas, se puede usar la tecla *cube root* [∛]. Para otras raíces, se puede convertir primero el radical a forma exponencial y luego usar la tecla *exponential* [^], o usar la tecla [ⁿ√] (u opción de menú). Consulte secuencias de tecleo específicas en la guía del usuario de su calculadora.

Ejemplo 17 Cambiar de forma exponencial a radical

a. $(x^2 + y^2)^{3/2} = \left(\sqrt{x^2 + y^2}\right)^3 = \sqrt{(x^2 + y^2)^3}$

b. $2y^{3/4}z^{1/4} = 2(y^3z)^{1/4} = 2\sqrt[4]{y^3z}$

c. $a^{-3/2} = \dfrac{1}{a^{3/2}} = \dfrac{1}{\sqrt{a^3}}$

d. $x^{0.2} = x^{1/5} = \sqrt[5]{x}$

PUNTO *de repaso* Ahora trate de hacer el Ejercicio 105.

Los exponentes racionales son útiles para evaluar raíces de números en una calculadora, para reducir el índice de un radical, así como para simplificar expresiones en cálculo.

Ejemplo 18 Simplificación con exponentes racionales

a. $(-32)^{-4/5} = \left(\sqrt[5]{-32}\right)^{-4} = (-2)^{-4} = \dfrac{1}{(-2)^4} = \dfrac{1}{16}$

b. $(-5x^{5/3})(3x^{-3/4}) = -15x^{(5/3)-(3/4)} = -15x^{11/12}, \quad x \neq 0$

c. $\sqrt[9]{a^3} = a^{3/9} = a^{1/3} = \sqrt[3]{a}$ Reducir índice.

d. $\sqrt[3]{\sqrt{125}} = \sqrt[6]{125} = \sqrt[6]{(5)^3} = 5^{3/6} = 5^{1/2} = \sqrt{5}$

e. $(2x - 1)^{4/3}(2x - 1)^{-1/3} = (2x - 1)^{(4/3)-(1/3)}$

$$= 2x - 1, \qquad x \neq \frac{1}{2}$$

PUNTO *de repaso* Ahora trate de hacer el Ejercicio 115.

La expresión del ejemplo 18(e) no está definida cuando $x = \dfrac{1}{2}$ porque

$$\left(2 \cdot \frac{1}{2} - 1\right)^{-1/3} = (0)^{-1/3}$$

no es un número real.

A.2 EJERCICIOS

En www.CalcChat.com vea las soluciones a los ejercicios impares.

VOCABULARIO: Llene los espacios en blanco.

1. En la forma exponencial a^n, n es el _____ y a es la _____.
2. Una forma práctica de escribir números muy grandes o muy pequeños se denomina _____ _____.
3. Uno de los dos factores iguales de un número se llama _____ _____ del número.
4. La _____ _____ _____ de un número a es la n-ésima raíz que tiene el mismo signo de a y se denota con $\sqrt[n]{a}$.
5. En la forma radical $\sqrt[n]{a}$, el entero positivo n-ésimo se llama _____ del radical y el número a se llama _____.
6. Cuando a una expresión con radicales se le eliminan todos los factores posibles, tiene denominadores sin radical e índice reducido, está en _____ _____.
7. Las expresiones radicales se pueden combinar (sumar o restar) si son _____ _____.
8. Las expresiones $a + b\sqrt{m}$ y $a - b\sqrt{m}$ son _____ entre sí.
9. El proceso que se usa para crear un denominador sin radical se conoce como _____ el denominador.
10. En la expresión $b^{m/n}$, m denota el _____ al que la base se eleva y n denota el _____ o raíz a tomar.

HABILIDADES Y APLICACIONES

En los Ejercicios 11-18, evalúe cada expresión.

11. (a) $3^2 \cdot 3$ (b) $3 \cdot 3^3$

12. (a) $\dfrac{5^5}{5^2}$ (b) $\dfrac{3^2}{3^4}$

13. (a) $(3^3)^0$ (b) -3^2

14. (a) $(2^3 \cdot 3^2)^2$ (b) $\left(-\frac{3}{5}\right)^3\left(\frac{5}{3}\right)^2$

15. (a) $\dfrac{3}{3^{-4}}$ (b) $48(-4)^{-3}$

16. (a) $\dfrac{4 \cdot 3^{-2}}{2^{-2} \cdot 3^{-1}}$ (b) $(-2)^0$

17. (a) $2^{-1} + 3^{-1}$ (b) $(2^{-1})^{-2}$

18. (a) $3^{-1} + 2^{-2}$ (b) $(3^{-2})^2$

En los Ejercicios 19-22, use una calculadora para evaluar la expresión. (Si es necesario, redondee su respuesta a tres lugares decimales.)

19. $(-4)^3(5^2)$ **20.** $(8^{-4})(10^3)$

21. $\dfrac{3^6}{7^3}$ **22.** $\dfrac{4^3}{3^{-4}}$

En los Ejercicios 23-30, evalúe la expresión para el valor de x dado.

23. $-3x^3, \quad x = 2$ **24.** $7x^{-2}, \quad x = 4$

25. $6x^0, \quad x = 10$ **26.** $5(-x)^3, \quad x = 3$

27. $2x^3, \quad x = -3$ **28.** $-3x^4, \quad x = -2$

29. $-20x^2, \quad x = -\frac{1}{2}$ **30.** $12(-x)^3, \quad x = -\frac{1}{3}$

En los Ejercicios 31-38, simplifique cada expresión.

31. (a) $(-5z)^3$ (b) $5x^4(x^2)$

32. (a) $(3x)^2$ (b) $(4x^3)^0, \quad x \neq 0$

33. (a) $6y^2(2y^0)^2$ (b) $\dfrac{3x^5}{x^3}$

34. (a) $(-z)^3(3z^4)$ (b) $\dfrac{25y^8}{10y^4}$

35. (a) $\dfrac{7x^2}{x^3}$ (b) $\dfrac{12(x + y)^3}{9(x + y)}$

36. (a) $\dfrac{r^4}{r^6}$ (b) $\left(\dfrac{4}{y}\right)^3\left(\dfrac{3}{y}\right)^4$

37. (a) $[(x^2y^{-2})^{-1}]^{-1}$ (b) $\left(\dfrac{a^{-2}}{b^{-2}}\right)\left(\dfrac{b}{a}\right)^3$

38. (a) $(6x^7)^0, \quad x \neq 0$ (b) $(5x^2z^6)^3(5x^2z^6)^{-3}$

En los Ejercicios 39-44, reescriba cada expresión con exponentes positivos y simplifique.

39. (a) $(x + 5)^0, \quad x \neq -5$ (b) $(2x^2)^{-2}$

40. (a) $(2x^5)^0, \quad x \neq 0$ (b) $(z + 2)^{-3}(z + 2)^{-1}$

41. (a) $(-2x^2)^3(4x^3)^{-1}$ (b) $\left(\dfrac{x}{10}\right)^{-1}$

42. (a) $(4y^{-2})(8y^4)$ (b) $\left(\dfrac{x^{-3}y^4}{5}\right)^{-3}$

43. (a) $3^n \cdot 3^{2n}$ (b) $\left(\dfrac{a^{-2}}{b^{-2}}\right)\left(\dfrac{b}{a}\right)^3$

44. (a) $\dfrac{x^2 \cdot x^n}{x^3 \cdot x^n}$ (b) $\left(\dfrac{a^{-3}}{b^{-3}}\right)\left(\dfrac{a}{b}\right)^3$

En los Ejercicios 45-52, escriba el número en notación científica.

45. 10 250.4

46. $-7\,280\,000$

47. -0.000125

48. 0.00052

49. Superficie de la Tierra: 57 300 000 millas cuadradas.

50. Año luz: 9 460 000 000 000 kilómetros.

51. Densidad relativa del hidrógeno: 0.0000899 gramos por centímetro cúbico.

52. Un micrón (millonésima de metro): 0.00003937 pulgadas.

En los Ejercicios 53-60, escriba el número en notación decimal.

53. 1.25×10^5

54. -1.801×10^5

55. -2.718×10^{-3}

56. 3.14×10^{-4}

57. Temperatura interior del Sol: 1.5×10^7 grados Celsius.

58. Carga de un electrón: 1.6022×10^{-19} coulombs.

59. Ancho de un cabello humano: 9.0×10^{-5} metros.

60. Producto interno bruto de Estados Unidos en 2007: 1.3743021×10^{13} dólares. (Fuente: U.S. Department of Commerce)

En los Ejercicios 61 y 62, evalúe cada expresión sin usar calculadora.

61. (a) $(2.0 \times 10^9)(3.4 \times 10^{-4})$

(b) $(1.2 \times 10^7)(5.0 \times 10^{-3})$

62. (a) $\dfrac{6.0 \times 10^8}{3.0 \times 10^{-3}}$

(b) $\dfrac{2.5 \times 10^{-3}}{5.0 \times 10^2}$

En los Ejercicios 63 y 64, use una calculadora para evaluar cada expresión. (Redondee su respuesta a tres lugares decimales.)

63. (a) $750\left(1 + \dfrac{0.11}{365}\right)^{800}$

(b) $\dfrac{67\,000\,000 + 93\,000\,000}{0.0052}$

64. (a) $(9.3 \times 10^6)^3(6.1 \times 10^{-4})$

(b) $\dfrac{(2.414 \times 10^4)^6}{(1.68 \times 10^5)^5}$

En los Ejercicios 65-70, evalúe cada expresión sin usar calculadora.

65. (a) $\sqrt{9}$

(b) $\sqrt[3]{\frac{27}{8}}$

66. (a) $27^{1/3}$

(b) $36^{3/2}$

67. (a) $32^{-3/5}$

(b) $\left(\frac{16}{81}\right)^{-3/4}$

68. (a) $100^{-3/2}$

(b) $\left(\frac{9}{4}\right)^{-1/2}$

69. (a) $\left(-\dfrac{1}{64}\right)^{-1/3}$

(b) $\left(\dfrac{1}{\sqrt{32}}\right)^{-2/5}$

70. (a) $\left(-\dfrac{125}{27}\right)^{-1/3}$

(b) $-\left(\dfrac{1}{125}\right)^{-4/3}$

En los Ejercicios 71-76, use una calculadora para aproximar el número. (Redondee su respuesta a tres lugares decimales.)

71. (a) $\sqrt{57}$

(b) $\sqrt[5]{-27^3}$

72. (a) $\sqrt[3]{45^2}$

(b) $\sqrt[6]{125}$

73. (a) $(-12.4)^{-1.8}$

(b) $\left(5\sqrt{3}\right)^{-2.5}$

74. (a) $\dfrac{7 - (4.1)^{-3.2}}{2}$

(b) $\left(\dfrac{13}{3}\right)^{-3/2} - \left(-\dfrac{3}{2}\right)^{13/3}$

75. (a) $\sqrt{4.5 \times 10^9}$

(b) $\sqrt[3]{6.3 \times 10^4}$

76. (a) $(2.65 \times 10^{-4})^{1/3}$

(b) $\sqrt{9 \times 10^{-4}}$

En los Ejercicios 77 y 78, use las propiedades de radicales para simplificar cada expresión.

77. (a) $\left(\sqrt[5]{2}\right)^5$

(b) $\sqrt[5]{96x^5}$

78. (a) $\sqrt{12} \cdot \sqrt{3}$

(b) $\sqrt[4]{(3x^2)^4}$

En los Ejercicios 79-90, simplifique cada expresión radical.

79. (a) $\sqrt{20}$

(b) $\sqrt[3]{128}$

80. (a) $\sqrt[3]{\frac{16}{27}}$

(b) $\sqrt{\frac{75}{4}}$

81. (a) $\sqrt{72x^3}$

(b) $\sqrt{\dfrac{18^2}{z^3}}$

82. (a) $\sqrt{54xy^4}$

(b) $\sqrt{\dfrac{32a^4}{b^2}}$

83. (a) $\sqrt[3]{16x^5}$

(b) $\sqrt{75x^2y^{-4}}$

84. (a) $\sqrt[4]{3x^4y^2}$

(b) $\sqrt[5]{160x^8z^4}$

85. (a) $2\sqrt{50} + 12\sqrt{8}$

(b) $10\sqrt{32} - 6\sqrt{18}$

86. (a) $4\sqrt{27} - \sqrt{75}$

(b) $\sqrt[3]{16} + 3\sqrt[3]{54}$

87. (a) $5\sqrt{x} - 3\sqrt{x}$

(b) $-2\sqrt{9y} + 10\sqrt{y}$

88. (a) $8\sqrt{49x} - 14\sqrt{100x}$

(b) $-3\sqrt{48x^2} + 7\sqrt{75x^2}$

89. (a) $3\sqrt{x+1} + 10\sqrt{x+1}$

(b) $7\sqrt{80x} - 2\sqrt{125x}$

90. (a) $-\sqrt{x^3 - 7} + 5\sqrt{x^3 - 7}$

(b) $11\sqrt{245x^3} - 9\sqrt{45x^3}$

En los Ejercicios 91-94, complete el enunciado con $<$, $=$, o $>$.

91. $\sqrt{5} + \sqrt{3} \quad \sqrt{5+3}$

92. $\sqrt{\dfrac{3}{11}} \quad \dfrac{\sqrt{3}}{\sqrt{11}}$

93. $5 \quad \sqrt{3^2 + 2^2}$

94. $5 \quad \sqrt{3^2 + 4^2}$

En los Ejercicios 95-98, racionalice el denominador de la expresión. A continuación, simplifique su respuesta.

95. $\dfrac{1}{\sqrt{3}}$

96. $\dfrac{8}{\sqrt[3]{2}}$

97. $\dfrac{5}{\sqrt{14} - 2}$

98. $\dfrac{3}{\sqrt{5} + \sqrt{6}}$

En los Ejercicios 99-102, racionalice el numerador de la expresión. A continuación, simplifique su respuesta.

99. $\dfrac{\sqrt{8}}{2}$ **100.** $\dfrac{\sqrt{2}}{3}$

101. $\dfrac{\sqrt{5}+\sqrt{3}}{3}$ **102.** $\dfrac{\sqrt{7}-3}{4}$

En los Ejercicios 103-110, llene la forma faltante de la expresión.

	Forma radical	*Forma exponente racional*
103.	$\sqrt{2.5}$	
104.	$\sqrt[3]{64}$	
105.		$81^{1/4}$
106.		$-(144^{1/2})$
107.	$\sqrt[3]{-216}$	
108.		$(-243)^{1/5}$
109.	$\left(\sqrt[4]{81}\right)^3$	
110.		$16^{5/4}$

En los Ejercicios 111-114, realice las operaciones y simplifique.

111. $\dfrac{(2x^2)^{3/2}}{2^{1/2}x^4}$ **112.** $\dfrac{x^{4/3}y^{2/3}}{(xy)^{1/3}}$

113. $\dfrac{x^{-3}\cdot x^{1/2}}{x^{3/2}\cdot x^{-1}}$ **114.** $\dfrac{5^{-1/2}\cdot 5x^{5/2}}{(5x)^{3/2}}$

En los Ejercicios 115 y 116, reduzca el índice de cada radical.

115. (a) $\sqrt[4]{3^2}$ (b) $\sqrt[6]{(x+1)^4}$

116. (a) $\sqrt[6]{x^3}$ (b) $\sqrt[4]{(3x^2)^4}$

En los Ejercicios 117 y 118, escriba cada expresión como un solo radical. A continuación, simplifique su respuesta.

117. (a) $\sqrt{\sqrt{32}}$ (b) $\sqrt{\sqrt[4]{2x}}$

118. (a) $\sqrt{\sqrt{243(x+1)}}$ (b) $\sqrt{\sqrt[3]{10a^7b}}$

119. PERIODO DE UN PÉNDULO El periodo T (en segundos) de un péndulo es $T = 2\pi\sqrt{L/32}$, donde L es la longitud del péndulo (en pies). Encuentre el periodo del péndulo cuya longitud es de 2 pies.

120. EROSIÓN Un arroyo de agua que se mueve a razón de v pies por segundo puede llevar partículas de tamaño $0.03\sqrt{v}$ pulgadas. Encuentre el tamaño de la partícula más grande que pueda ser llevada por el arroyo que fluye a razón de $\frac{3}{4}$ de pie por segundo.

121. MODELADO MATEMÁTICO Un embudo se llena de agua a una altura de h centímetros. La fórmula

$$t = 0.03[12^{5/2} - (12-h)^{5/2}], \quad 0 \le h \le 12$$

representa el tiempo t (en segundos) que tardará el embudo en vaciarse.

(a) Use el comando *table* de una calculadora de gráficas para hallar el tiempo necesario para que el embudo se vacíe para alturas de agua de $h = 0$, $h = 1$, $h = 2$, . . . $h = 12$ centímetros.

(b) ¿A qué valores parece aproximarse t cuando la altura del agua se acerca cada vez más a 12 centímetros?

122. VELOCIDAD DE LA LUZ La velocidad de la luz es aproximadamente 11 180 000 millas por minuto. La distancia del Sol a la Tierra es aproximadamente 93 000 000 de millas. Encuentre el tiempo para que la luz viaje del Sol a la Tierra.

EXPLORACIÓN

¿VERDADERO O FALSO? En los Ejercicios 123 y 124, determine si la proposición es verdadera o falsa. Justifique su respuesta.

123. $\dfrac{x^{k+1}}{x} = x^k$ **124.** $(a^n)^k = a^{n^k}$

125. Verifique que $a^0 = 1$, $a \neq 0$. (*Sugerencia:* use la propiedad de los exponentes $a^m/a^n = a^{m-n}$.)

126. Explique por qué cada uno de los siguientes pares no es igual.

(a) $(3x)^{-1} \neq \dfrac{3}{x}$ (b) $y^3\cdot y^2 \neq y^6$

(c) $(a^2b^3)^4 \neq a^6b^7$ (d) $(a+b)^2 \neq a^2+b^2$

(e) $\sqrt{4x^2} \neq 2x$ (f) $\sqrt{2}+\sqrt{3} \neq \sqrt{5}$

127. PIÉNSELO ¿La cantidad 52.7×10^5 está escrita en notación científica? ¿Por qué sí o por qué no?

128. Haga una lista de todos los posibles dígitos que se presenten en el lugar de las unidades del cuadrado de un entero positivo. Use esa lista para determinar si $\sqrt{5233}$ es entero.

129. PIÉNSELO Eleve al cuadrado el número real $5/\sqrt{3}$ y observe que el radical se elimina del denominador. ¿Es esto equivalente a racionalizar el denominador? ¿Por qué sí o por qué no?

130. TOQUE FINAL

(a) Explique cómo simplificar la expresión $(3x^3\,y^{-2})^{-2}$.

(b) ¿La expresión $\sqrt{\dfrac{4}{x^3}}$ está en su forma más simple? ¿Por qué sí o por qué no?

El símbolo indica un ejemplo o ejercicio que destaca técnicas algebraicas que específicamente se usan en cálculo.

El símbolo indica un ejercicio, o parte de un ejercicio en el que se le indica que use una calculadora de gráficas.

A.3 Polinomios y factorización

Lo que debe aprender

- Escribir polinomios en forma estándar.
- Sumar, restar y multiplicar polinomios.
- Usar productos notables para multiplicar polinomios.
- Eliminar factores comunes de los polinomios.
- Factorizar formas de polinomios notables.
- Factorizar trinomios como el producto de dos binomios.
- Factorizar polinomios por agrupación.

Por qué debe aprenderlo

Se pueden usar polinomios para modelar y resolver problemas de la vida real. Por ejemplo, en el Ejercicio 224 de la página A37 se usa un polinomio para modelar el volumen de una caja de envío.

Polinomios

El tipo más común de expresión algebraica es el **polinomio.** Algunos ejemplos son $2x + 5$, $3x^4 - 7x^2 + 2x + 4$ y $5x^2y^2 - xy + 3$. Los primeros dos son *polinomios* en x y el tercero es un *polinomio en x y y*. Los términos de un polinomio en x tienen la forma ax^k, donde a es el **coeficiente** y k es el **grado** del término. Por ejemplo, el polinomio

$$2x^3 - 5x^2 + 1 = 2x^3 + (-5)x^2 + (0)x + 1$$

tiene coeficientes 2, -5, 0 y 1.

Definición de un polinomio en x

Sean $a_0, a_1, a_2, \ldots, a_n$ números reales y sea k un entero no negativo. Un polinomio en x es una expresión de la forma

$$a_nx^n + a_{n-1}x^{n-1} + \cdots + a_1x + a_0$$

donde $a_n \neq 0$. El polinomio es de **grado** n, a_n es el **coeficiente principal** y a_0 es el **término constante.**

Los polinomios con uno, dos y tres términos se llaman **monomios**, **binomios** y **trinomios**, respectivamente. En **forma estándar**, un polinomio se escribe con potencias descendentes de x.

Ejemplo 1 Escribir polinomios en forma estándar

Polinomio	*Forma normal*	*Grado*	*Coeficiente principal*
a. $4x^2 - 5x^7 - 2 + 3x$	$-5x^7 + 4x^2 + 3x - 2$	7	-5
b. $4 - 9x^2$	$-9x^2 + 4$	2	-9
c. 8	$8 \ (8 = 8x^0)$	0	8

PUNTO *de repaso* Ahora trate de hacer el Ejercicio 19.

Un polinomio cuyos coeficientes son todos cero se llama **polinomio cero,** denotado con 0. No se asigna grado a este polinomio particular. Para polinomios con más de una variable, el grado de un *término* es la suma de los exponentes de las variables del término. El grado del *polinomio* es el grado más alto de sus términos. Por ejemplo, el grado del polinomio $-2x^3y^6 + 4xy - x^7y^4$ es 11 porque la suma de los exponentes del último término es el máximo. El coeficiente principal del polinomio es el coeficiente del término de grado superior. Las expresiones no son polinomios si una variable está bajo un radical o si una expresión con polinomio (con grado mayor a 0) está en el denominador de un término. Las siguientes expresiones no son polinomios.

$$x^3 - \sqrt{3x} = x^3 - (3x)^{1/2}$$ El exponente "1/2" no es entero.

$$x^2 + \frac{5}{x} = x^2 + 5x^{-1}$$ El exponente "-1" no es entero no negativo.

Operaciones con polinomios

Se pueden sumar y restar polinomios en forma muy parecida a como se suman y restan números reales. Simplemente se suman o se restan los *términos semejantes* (términos que tienen las mismas variables con las mismas potencias) al sumar sus coeficientes. Por ejemplo, $-3xy^2$ y $5xy^2$ son términos semejantes y su suma es

$$\begin{aligned} -3xy^2 + 5xy^2 &= (-3 + 5)xy^2 \\ &= 2xy^2. \end{aligned}$$

ATENCIÓN

Cuando una expresión dentro de paréntesis está precedida de signo negativo, recuerde distribuir el signo negativo a cada término dentro de los paréntesis, como se muestra.

$$\begin{aligned} -(x^2 - x + 3) \\ = -x^2 + x - 3 \end{aligned}$$

Ejemplo 2 Sumas y diferencias de polinomios

a. $(5x^3 - 7x^2 - 3) + (x^3 + 2x^2 - x + 8)$

$= (5x^3 + x^3) + (-7x^2 + 2x^2) - x + (-3 + 8)$ Agrupar términos semejantes.

$= 6x^3 - 5x^2 - x + 5$ Combinar términos semejantes.

b. $(7x^4 - x^2 - 4x + 2) - (3x^4 - 4x^2 + 3x)$

$= 7x^4 - x^2 - 4x + 2 - 3x^4 + 4x^2 - 3x$ Propiedad distributiva

$= (7x^4 - 3x^4) + (-x^2 + 4x^2) + (-4x - 3x) + 2$ Agrupar términos semejantes.

$= 4x^4 + 3x^2 - 7x + 2$ Combinar términos semejantes.

PUNTO *de repaso* Ahora trate de hacer el Ejercicio 41.

Para hallar el *producto* de dos polinomios, use las propiedades distributivas de la izquierda y derecha. Por ejemplo, si trata usted $5x + 7$ como una sola cantidad, puede multiplicar $3x - 2$ por $5x + 7$ como sigue.

$$\begin{aligned} (3x - 2)(5x + 7) &= 3x(5x + 7) - 2(5x + 7) \\ &= (3x)(5x) + (3x)(7) - (2)(5x) - (2)(7) \\ &= 15x^2 + 21x - 10x - 14 \end{aligned}$$

Producto de **p**rimeros términos — Producto de términos **e**xternos — Producto de términos **i**nternos — Producto de **ú**ltimos términos

$$= 15x^2 + 11x - 14$$

Observe en este **método PEIU** (**FOIL** en inglés, que se puede usar para multiplicar dos binomios) que los términos externos (E) e internos (I) son semejantes y se pueden combinar.

Ejemplo 3 Hallar un producto por el método PEIU

Use el método PEIU para hallar el producto de $2x - 4$ y $x + 5$.

Solución

P E I U

$$\begin{aligned} (2x - 4)(x + 5) &= 2x^2 + 10x - 4x - 20 \\ &= 2x^2 + 6x - 20 \end{aligned}$$

PUNTO *de repaso* Ahora trate de hacer el Ejercicio 55.

Productos notables

Algunos productos con binomios tienen formas notables que se presentan con frecuencia en álgebra. No es necesario memorizar estas fórmulas porque se puede usar la propiedad distributiva para multiplicar, pero familiarizarse con ellas hace posible que se manipule el álgebra con más rapidez.

Productos notables

Sean u y v números reales, variables o expresiones algebraicas.

Productos notables	*Ejemplo*
Suma y diferencia de términos iguales	
$(u + v)(u - v) = u^2 - v^2$	$(x + 4)(x - 4) = x^2 - 4^2 = x^2 - 16$
Cuadrado de un binomio	
$(u + v)^2 = u^2 + 2uv + v^2$	$(x + 3)^2 = x^2 + 2(x)(3) + 3^2 = x^2 + 6x + 9$
$(u - v)^2 = u^2 - 2uv + v^2$	$(3x - 2)^2 = (3x)^2 - 2(3x)(2) + 2^2 = 9x^2 - 12x + 4$
Cubo de un binomio	
$(u + v)^3 = u^3 + 3u^2v + 3uv^2 + v^3$	$(x + 2)^3 = x^3 + 3x^2(2) + 3x(2^2) + 2^3 = x^3 + 6x^2 + 12x + 8$
$(u - v)^3 = u^3 - 3u^2v + 3uv^2 - v^3$	$(x - 1)^3 = x^3 - 3x^2(1) + 3x(1^2) - 1^3 = x^3 - 3x^2 + 3x - 1$

Ejemplo 4 Productos notables

Encuentre cada producto.

a. $(5x + 9)(5x - 9)$ **b.** $(x + y - 2)(x + y + 2)$

Solución

a. El producto de una suma y una diferencia de los *mismos* dos términos no tiene término medio y toma la forma $(u + v)(u - v) = u^2 - v^2$.

$$(5x + 9)(5x - 9) = (5x)^2 - 9^2 = 25x^2 - 81$$

b. Al agrupar $x + y$ en paréntesis, se puede escribir el producto de los trinomios como un producto notable.

Diferencia Suma

$$\begin{aligned}(x + y - 2)(x + y + 2) &= [(x + y) - 2][(x + y) + 2] \\ &= (x + y)^2 - 2^2 \quad \text{Suma y diferencia de los mismos términos.} \\ &= x^2 + 2xy + y^2 - 4\end{aligned}$$

PUNTO *de repaso* Ahora trate de hacer el Ejercicio 75.

Polinomios con factores comunes

El proceso de escribir un polinomio como un producto se llama **factorización**, y es una herramienta importante para resolver ecuaciones y para simplificar expresiones racionales.

A menos que se indique de otra forma, cuando se nos pida factorizar un polinomio, podemos suponer que buscamos factores con coeficientes enteros. Si un polinomio no puede ser factorizado usando coeficientes enteros, entonces es **primo** o **irreductible sobre los enteros**. Por ejemplo, el polinomio $x^2 - 3$ es irreductible sobre los enteros. Sobre los *números reales*, este polinomio se puede factorizar como

$$x^2 - 3 = \left(x + \sqrt{3}\right)\left(x - \sqrt{3}\right).$$

Un polinomio está **completamente factorizado** cuando cada uno de sus factores es primo. Por ejemplo

$$x^3 - x^2 + 4x - 4 = (x - 1)(x^2 + 4)$$ Completamente factorizado.

está completamente factorizado, pero

$$x^3 - x^2 - 4x + 4 = (x - 1)(x^2 - 4)$$ No completamente factorizado.

no está completamente factorizado. Su factorización completa es

$$x^3 - x^2 - 4x + 4 = (x - 1)(x + 2)(x - 2).$$

El tipo más sencillo de factorización implica un polinomio que se puede escribir como el producto de un monomio y otro polinomio. La técnica aquí empleada es la propiedad distributiva, $a(b + c) = ab + ac$, en la *dirección inversa*.

$$ab + ac = a(b + c)$$ a es un factor común.

Eliminar (factorizar) cualesquier factores comunes es el primer paso para factorizar completamente un polinomio.

Ejemplo 5 Eliminar factores comunes

Factorice cada una de las siguientes expresiones.

a. $6x^3 - 4x$

b. $-4x^2 + 12x - 16$

c. $(x - 2)(2x) + (x - 2)(3)$

Solución

a. $6x^3 - 4x = 2x(3x^2) - 2x(2)$ $2x$ es un factor común.

$= 2x(3x^2 - 2)$

b. $-4x^2 + 12x - 16 = -4(x^2) + (-4)(-3x) + (-4)4$ -4 es un factor común.

$= -4(x^2 - 3x + 4)$

c. $(x - 2)(2x) + (x - 2)(3) = (x - 2)(2x + 3)$ $(x - 2)$ es un factor común.

PUNTO *de repaso* Ahora trate de hacer el Ejercicio 99.

Factorización de formas notables de polinomios

Algunos polinomios tienen formas notables que surgen de las formas de productos notables expuestos en la página A29. El lector debe aprender a reconocer estas formas para que pueda factorizar fácilmente tales polinomios.

Factorización de formas notables de polinomios

Forma factorizada	*Ejemplo*
Diferencia de dos cuadrados	
$u^2 - v^2 = (u + v)(u - v)$	$9x^2 - 4 = (3x)^2 - 2^2 = (3x + 2)(3x - 2)$
Trinomio cuadrado perfecto	
$u^2 + 2uv + v^2 = (u + v)^2$	$x^2 + 6x + 9 = x^2 + 2(x)(3) + 3^2 = (x + 3)^2$
$u^2 - 2uv + v^2 = (u - v)^2$	$x^2 - 6x + 9 = x^2 - 2(x)(3) + 3^2 = (x - 3)^2$
Suma o diferencia de dos cubos	
$u^3 + v^3 = (u + v)(u^2 - uv + v^2)$	$x^3 + 8 = x^3 + 2^3 = (x + 2)(x^2 - 2x + 4)$
$u^3 - v^3 = (u - v)(u^2 + uv + v^2)$	$27x^3 - 1 = (3x)^3 - 1^3 = (3x - 1)(9x^2 + 3x + 1)$

Una de las formas notables de polinomios más fáciles de factorizar es la diferencia de dos cuadrados. La forma factorizada es siempre un conjunto de *pares conjugados*.

$$u^2 - v^2 = (u + v)(u - v)$$

Diferencia; Signos opuestos; Pares conjugados

Para reconocer términos cuadrados perfectos, busque coeficientes que sean cuadrados de enteros y variables elevadas a *potencias pares*.

Tip de estudio

En el Ejemplo 6, observe que el primer paso para factorizar un polinomio es buscar cualesquier factores comunes. Una vez eliminados éstos, a veces es posible reconocer patrones que no eran inmediatamente obvios.

Ejemplo 6 Eliminar primero un factor común

$$\begin{aligned} 3 - 12x^2 &= 3(1 - 4x^2) && \text{3 es un factor común.} \\ &= 3[1^2 - (2x)^2] \\ &= 3(1 + 2x)(1 - 2x) && \text{Diferencia de dos cuadrados.} \end{aligned}$$

PUNTO *de repaso* Ahora trate de hacer el Ejercicio 113.

Ejemplo 7 Factorizar la diferencia de dos cuadrados

a. $(x + 2)^2 - y^2 = [(x + 2) + y][(x + 2) - y]$
$= (x + 2 + y)(x + 2 - y)$

b.
$$\begin{aligned} 16x^4 - 81 &= (4x^2)^2 - 9^2 \\ &= (4x^2 + 9)(4x^2 - 9) && \text{Diferencia de dos cuadrados.} \\ &= (4x^2 + 9)[(2x)^2 - 3^2] \\ &= (4x^2 + 9)(2x + 3)(2x - 3) && \text{Diferencia de dos cuadrados.} \end{aligned}$$

PUNTO *de repaso* Ahora trate de hacer el Ejercicio 117.

Un **trinomio cuadrado perfecto** es el cuadrado de un binomio y tiene la siguiente forma.

$$u^2 + 2uv + v^2 = (u + v)^2 \quad \text{o} \quad u^2 - 2uv + v^2 = (u - v)^2$$

Signos iguales — Signos iguales

Observe que los términos primero y último son cuadrados y el término medio es el doble del producto de u y v

Ejemplo 8 Factorizar trinomios cuadrados perfectos

Factorice cada uno de los trinomios siguientes.

a. $x^2 - 10x + 25$

b. $16x^2 + 24x + 9$

Solución

a. $x^2 - 10x + 25 = x^2 - 2(x)(5) + 5^2 = (x - 5)^2$

b. $16x^2 + 24x + 9 = (4x)^2 + 2(4x)(3) + 3^2 = (4x + 3)^2$

PUNTO *de repaso* Ahora trate de hacer el Ejercicio 123.

Las siguientes dos fórmulas muestran las sumas y diferencias de cubos. Preste especial atención a los signos de los términos.

Signos iguales — Signos iguales

$$u^3 + v^3 = (u + v)(u^2 - uv + v^2) \qquad u^3 - v^3 = (u - v)(u^2 + uv + v^2)$$

Signos distintos — Signos distintos

Ejemplo 9 Factorizar la diferencia de cubos

Factorice $x^3 - 27$.

Solución

$$x^3 - 27 = x^3 - 3^3 \qquad \text{Reescribir 27 como } 3^3.$$
$$= (x - 3)(x^2 + 3x + 9) \qquad \text{Factorizar.}$$

PUNTO *de repaso* Ahora trate de hacer el Ejercicio 133.

Ejemplo 10 Factorizar la suma de cubos

a. $y^3 + 8 = y^3 + 2^3$ Reescribir 8 como 2^3.

$= (y + 2)(y^2 - 2y + 4)$ Factorizar.

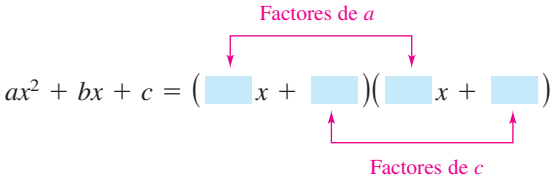
b. $3(x^3 + 64) = 3(x^3 + 4^3)$ Reescribir 64 como 4^3.

$= 3(x + 4)(x^2 - 4x + 16)$ Factorizar.

PUNTO *de repaso* Ahora trate de hacer el Ejercicio 135.

Trinomios con factores binomiales

Para factorizar un trinomio de la forma $ax^2 + bx + c$, use el siguiente modelo.



El objetivo es hallar una combinación de factores de a y c tales que los productos externos e internos se sumen al término medio bx. Por ejemplo, en el trinomio $6x^2 + 17x + 5$, se pueden escribir todas las posibles factorizaciones y determinar cuál tiene productos externos e internos que sumen $17x$.

$$(6x + 5)(x + 1),\ (6x + 1)(x + 5),\ (2x + 1)(3x + 5),\ (2x + 5)(3x + 1)$$

Se puede ver que $(2x + 5)(3x + 1)$ es la factorización correcta porque los productos externos (E) e internos (I) suman $17x$.

$$\begin{matrix} & \text{P} & \text{E} & \text{I} & \text{U} & & \text{E} + \text{I} \\ & \downarrow & \downarrow & \downarrow & \downarrow & & \downarrow \end{matrix}$$
$$(2x + 5)(3x + 1) = 6x^2 + 2x + 15x + 5 = 6x^2 + 17x + 5$$

Ejemplo 11 Factorizar un trinomio: el coeficiente principal es 1

Factorice $x^2 - 7x + 12$.

Solución

Las factorizaciones posibles son

$$(x - 2)(x - 6), \quad (x - 1)(x - 12) \quad \text{y} \quad (x - 3)(x - 4).$$

Al probar el término medio, se encuentra que la factorización correcta es

$$x^2 - 7x + 12 = (x - 3)(x - 4).$$

PUNTO *de repaso* Ahora trate de hacer el Ejercicio 145.

Ejemplo 12 Factorizar un trinomio: coeficiente principal no es 1

Factorice $2x^2 + x - 15$.

Solución

Las ocho posibles factorizaciones son como sigue.

$$(2x - 1)(x + 15) \qquad (2x + 1)(x - 15)$$
$$(2x - 3)(x + 5) \qquad (2x + 3)(x - 5)$$
$$(2x - 5)(x + 3) \qquad (2x + 5)(x - 3)$$
$$(2x - 15)(x + 1) \qquad (2x + 15)(x - 1)$$

Al probar el término medio, se encuentra que la factorización correcta es

$$2x^2 + x - 15 = (2x - 5)(x + 3). \qquad \text{E} + \text{I} = 6x - 5x = x$$

PUNTO *de repaso* Ahora trate de hacer el Ejercicio 153.

Tip de estudio

Factorizar un trinomio puede requerir de prueba y error, pero, una vez obtenida la forma factorizada, es fácil verificar la respuesta. Por ejemplo, se puede verificar la factorización del Ejemplo 11 si multiplicamos $(x - 3)(x - 4)$ para ver que se obtiene el trinomio original, $x^2 - 7x + 12$.

Factorización por agrupación

A veces, polinomios con más de tres términos se pueden factorizar por el método llamado de **factorización por agrupación**. No siempre es obvio cuáles términos agrupar y a veces varias agrupaciones diferentes funcionan.

Ejemplo 13 Factorizar agrupación

Use factorización por agrupación para factorizar $x^3 - 2x^2 - 3x + 6$.

Solución

$$\begin{aligned} x^3 - 2x^2 - 3x + 6 &= (x^3 - 2x^2) - (3x - 6) && \text{Agrupar términos.} \\ &= x^2(x - 2) - 3(x - 2) && \text{Factorizar cada grupo.} \\ &= (x - 2)(x^2 - 3) && \text{Propiedad distributiva} \end{aligned}$$

PUNTO *de repaso* Ahora trate de hacer el Ejercicio 161.

Tip de estudio

Otra forma de factorizar el polinomio del Ejemplo 13 es agrupar los términos como sigue.

$$\begin{aligned} & x^3 - 2x^2 - 3x + 6 \\ &= (x^3 - 3x) - (2x^2 - 6) \\ &= x(x^2 - 3) - 2(x^2 - 3) \\ &= (x^2 - 3)(x - 2) \end{aligned}$$

Como se ve, se obtiene el mismo resultado que en el Ejemplo 13.

Factorizar un trinomio puede hacer necesario recurrir a prueba y error. Parte de esta prueba y error se puede reducir si se usa factorización por agrupación. La clave de este método de factorización es saber cómo reescribir el término medio. En general, para factorizar un trinomio $ax^2 + bx + c$ por agrupación, se escogen factores del producto ac que se sumen para obtener b y se usan estos factores para reescribir el término medio. Esta técnica se ilustra en el Ejemplo 14.

Ejemplo 14 Factorizar un trinomio por agrupación

Use factorización por agrupación para factorizar $2x^2 + 5x - 3$.

Solución

En el trinomio $2x^2 + 5x - 3$, $a = 2$ y $c = -3$, lo cual implica que el producto ac es -6. Ahora, -6 se factoriza como $(6)(-1)$ y $6 - 1 = 5 = b$. Por tanto, se puede reescribir el término medio como $5x = 6x - x$. Esto produce lo siguiente.

$$\begin{aligned} 2x^2 + 5x - 3 &= 2x^2 + 6x - x - 3 && \text{Reescribir el término medio.} \\ &= (2x^2 + 6x) - (x + 3) && \text{Agrupar términos.} \\ &= 2x(x + 3) - (x + 3) && \text{Factorizar grupos.} \\ &= (x + 3)(2x - 1) && \text{Propiedad distributiva} \end{aligned}$$

Así, el trinomio se factoriza como $2x^2 + 5x - 3 = (x + 3)(2x - 1)$.

PUNTO *de repaso* Ahora trate de hacer el Ejercicio 167.

Guías para factorizar polinomios

1. Factorice cualesquier factores comunes usando la propiedad distributiva.
2. Factorice de acuerdo con una de las formas de polinomios notables
3. Factorice como $ax^2 + bx + c = (mx + r)(nx + s)$.
4. Factorice por agrupación.

A.3 EJERCICIOS

En www.CalcChat.com vea las soluciones a los ejercicios impares.

VOCABULARIO: Llene los espacios en blanco.

1. Para el polinomio $a_n x^n + a_{n-1}x^{n-1} + \cdots + a_1 x + a_0$, $a_n \neq 0$, el grado es _____, el coeficiente principal es _____ y el término constante es _____.
2. Un polinomio en x en forma estándar se escribe con potencias _____ de x.
3. Un polinomio con un término se llama _____, en tanto que un polinomio con dos términos se denomina _____ y uno con tres términos recibe el nombre de _____.
4. Para sumar o restar polinomios, sume o reste los _____ _____ al sumar sus coeficientes.
5. Las letras de PEIU representan lo siguiente.
   P _____ E _____ I _____ U _____
6. El proceso de escribir un polinomio como un producto recibe el nombre de _____.
7. Un polinomio es _____ _____ cuando cada uno de sus factores es primo.
8. Un polinomio $u^2 + 2uv + v^2$ se llama _____ _____ _____.

HABILIDADES Y APLICACIONES

En los Ejercicios 9-14, relacione el polinomio con su descripción. [Los polinomios están marcados (a),(b),(c),(d),(e) y (f).]

(a) $3x^2$ (b) $1 - 2x^3$
(c) $x^3 + 3x^2 + 3x + 1$ (d) 12
(e) $-3x^5 + 2x^3 + x$ (f) $\frac{2}{3}x^4 + x^2 + 10$

9. Un polinomio de grado 0.
10. Un trinomio de grado 5.
11. Un binomio con coeficiente principal -2.
12. Un monomio de grado positivo.
13. Un trinomio con coeficiente principal $\frac{2}{3}$.
14. Un polinomio de tercer grado con coeficiente principal 1.

En los Ejercicios 15-18, escriba un polinomio que se ajuste a la descripción. (Hay numerosas respuestas correctas.)

15. Un polinomio de tercer grado con coeficiente principal -2.
16. Un polinomio de quinto grado con coeficiente principal 6.
17. Un binomio de cuarto grado con coeficiente principal negativo.
18. Un binomio de tercer grado con coeficiente principal par.

En los Ejercicios 19-30, (a) escriba el polinomio en forma normal, (b) identifique el grado y coeficiente inicial del polinomio y (c) diga si éste es un monomio, binomio o trinomio.

19. $14x - \frac{1}{2}x^5$
20. $2x^2 - x + 1$
21. $x^2 - 4 - 3x^4$
22. $7x$
23. $3 - x^6$
24. $-y + 25y^2 + 1$
25. 3
26. $-8 + t^2$
27. $1 + 6x^4 - 4x^5$
28. $3 + 2x$
29. $4x^3y$
30. $-x^5y + 2x^2y^2 + xy^4$

En los Ejercicios 31-36, determine si la expresión es un polinomio. Si es así, escríbalo en forma estándar.

31. $2x - 3x^3 + 8$
32. $5x^4 - 2x^2 + x^{-2}$
33. $\dfrac{3x + 4}{x}$
34. $\dfrac{x^2 + 2x - 3}{2}$
35. $y^2 - y^4 + y^3$
36. $y^4 - \sqrt{y}$

En los Ejercicios 37-54, realice la operación y escriba el resultado en forma estándar.

37. $(6x + 5) - (8x + 15)$
38. $(2x^2 + 1) - (x^2 - 2x + 1)$
39. $-(t^3 - 1) + (6t^3 - 5t)$
40. $-(5x^2 - 1) - (-3x^2 + 5)$
41. $(15x^2 - 6) - (-8.3x^3 - 14.7x^2 - 17)$
42. $(15.6w^4 - 14w - 17.4) - (16.9w^4 - 9.2w + 13)$
43. $5z - [3z - (10z + 8)]$
44. $(y^3 + 1) - [(y^2 + 1) + (3y - 7)]$
45. $3x(x^2 - 2x + 1)$
46. $y^2(4y^2 + 2y - 3)$
47. $-5z(3z - 1)$
48. $(-3x)(5x + 2)$
49. $(1 - x^3)(4x)$
50. $-4x(3 - x^3)$
51. $(1.5t^2 + 5)(-3t)$
52. $(2 - 3.5y)(2y^3)$
53. $-2x(0.1x + 17)$
54. $6y(5 - \frac{3}{8}y)$

En los Ejercicios 55-92, multiplique o encuentre el producto notable.

55. $(x + 3)(x + 4)$
56. $(x - 5)(x + 10)$
57. $(3x - 5)(2x + 1)$
58. $(7x - 2)(4x - 3)$
59. $(x + 10)(x - 10)$
60. $(2x + 3)(2x - 3)$
61. $(x + 2y)(x - 2y)$
62. $(4a + 5b)(4a - 5b)$
63. $(2x + 3)^2$
64. $(5 - 8x)^2$

65. $(x + 1)^3$ **66.** $(x - 2)^3$
67. $(2x - y)^3$ **68.** $(3x + 2y)^3$
69. $(4x^3 - 3)^2$ **70.** $(8x + 3)^2$
71. $(x^2 - x + 1)(x^2 + x + 1)$
72. $(x^2 + 3x - 2)(x^2 - 3x - 2)$
73. $(-x^2 + x - 5)(3x^2 + 4x + 1)$
74. $(2x^2 - x + 4)(x^2 + 3x + 2)$
75. $[(m - 3) + n][(m - 3) - n]$
76. $[(x - 3y) + z][(x - 3y) - z]$
77. $[(x - 3) + y]^2$ **78.** $[(x + 1) - y]^2$
79. $(2r^2 - 5)(2r^2 + 5)$ **80.** $(3a^3 - 4b^2)(3a^3 + 4b^2)$
81. $\left(\frac{1}{4}x - 5\right)^2$ **82.** $\left(\frac{3}{5}t + 4\right)^2$
83. $\left(\frac{1}{5}x - 3\right)\left(\frac{1}{5}x + 3\right)$ **84.** $\left(3x + \frac{1}{6}\right)\left(3x - \frac{1}{6}\right)$
85. $(2.4x + 3)^2$ **86.** $(1.8y - 5)^2$
87. $(1.5x - 4)(1.5x + 4)$ **88.** $(2.5y + 3)(2.5y - 3)$
89. $5x(x + 1) - 3x(x + 1)$
90. $(2x - 1)(x + 3) + 3(x + 3)$
91. $(u + 2)(u - 2)(u^2 + 4)$
92. $(x + y)(x - y)(x^2 + y^2)$

En los Ejercicios 93-96, encuentre el producto. (Las expresiones no son polinomios, pero las fórmulas todavía se pueden usar.)

93. $\left(\sqrt{x} + \sqrt{y}\right)\left(\sqrt{x} - \sqrt{y}\right)$
94. $\left(5 + \sqrt{x}\right)\left(5 - \sqrt{x}\right)$
95. $\left(x - \sqrt{5}\right)^2$ **96.** $\left(x + \sqrt{3}\right)^2$

En los Ejercicios 97-104, factorice el factor común.

97. $4x + 16$ **98.** $5y - 30$
99. $2x^3 - 6x$ **100.** $3z^3 - 6z^2 + 9z$
101. $3x(x - 5) + 8(x - 5)$ **102.** $3x(x + 2) - 4(x + 2)$
103. $(x + 3)^2 - 4(x + 3)$ **104.** $(5x - 4)^2 + (5x - 4)$

En los Ejercicios 105-110, encuentre el máximo factor común tal que los factores restantes tengan sólo coeficientes enteros.

105. $\frac{1}{2}x + 4$ **106.** $\frac{1}{3}y + 5$
107. $\frac{1}{2}x^3 + 2x^2 - 5x$ **108.** $\frac{1}{3}y^4 - 5y^2 + 2y$
109. $\frac{2}{3}x(x - 3) - 4(x - 3)$ **110.** $\frac{4}{5}y(y + 1) - 2(y + 1)$

En los Ejercicios 111-120, factorice completamente la diferencia de dos cuadrados.

111. $x^2 - 81$ **112.** $x^2 - 64$
113. $48y^2 - 27$ **114.** $50 - 98z^2$
115. $16x^2 - \frac{1}{9}$ **116.** $\frac{4}{25}y^2 - 64$
117. $(x - 1)^2 - 4$ **118.** $25 - (z + 5)^2$
119. $9u^2 - 4v^2$ **120.** $25x^2 - 16y^2$

En los Ejercicios 121-132, factorice el trinomio cuadrado perfecto.

121. $x^2 - 4x + 4$ **122.** $x^2 + 10x + 25$
123. $4t^2 + 4t + 1$ **124.** $9x^2 - 12x + 4$
125. $25y^2 - 10y + 1$ **126.** $36y^2 - 108y + 81$
127. $9u^2 + 24uv + 16v^2$ **128.** $4x^2 - 4xy + y^2$
129. $x^2 - \frac{4}{3}x + \frac{4}{9}$ **130.** $z^2 + z + \frac{1}{4}$
131. $4x^2 - \frac{4}{3}x + \frac{1}{9}$ **132.** $9y^2 - \frac{3}{2}y + \frac{1}{16}$

En los Ejercicios 133-144, factorice la suma o diferencia de cubos.

133. $x^3 - 8$ **134.** $x^3 - 27$
135. $y^3 + 64$ **136.** $z^3 + 216$
137. $x^3 - \frac{8}{27}$ **138.** $y^3 + \frac{8}{125}$
139. $8t^3 - 1$ **140.** $27x^3 + 8$
141. $u^3 + 27v^3$ **142.** $64x^3 - y^3$
143. $(x + 2)^3 - y^3$ **144.** $(x - 3y)^3 - 8z^3$

En los Ejercicios 145-158, factorice el trinomio.

145. $x^2 + x - 2$ **146.** $x^2 + 5x + 6$
147. $s^2 - 5s + 6$ **148.** $t^2 - t - 6$
149. $20 - y - y^2$ **150.** $24 + 5z - z^2$
151. $x^2 - 30x + 200$ **152.** $x^2 - 13x + 42$
153. $3x^2 - 5x + 2$ **154.** $2x^2 - x - 1$
155. $5x^2 + 26x + 5$ **156.** $12x^2 + 7x + 1$
157. $-9z^2 + 3z + 2$ **158.** $-5u^2 - 13u + 6$

En los Ejercicios 159-166, factorice por agrupación.

159. $x^3 - x^2 + 2x - 2$ **160.** $x^3 + 5x^2 - 5x - 25$
161. $2x^3 - x^2 - 6x + 3$ **162.** $5x^3 - 10x^2 + 3x - 6$
163. $6 + 2x - 3x^3 - x^4$ **164.** $x^5 + 2x^3 + x^2 + 2$
165. $6x^3 - 2x + 3x^2 - 1$ **166.** $8x^5 - 6x^2 + 12x^3 - 9$

En los Ejercicios 167-172, factorice el trinomio por agrupación.

167. $3x^2 + 10x + 8$ **168.** $2x^2 + 9x + 9$
169. $6x^2 + x - 2$ **170.** $6x^2 - x - 15$
171. $15x^2 - 11x + 2$ **172.** $12x^2 - 13x + 1$

En los Ejercicios 173-206, factorice completamente la expresión.

173. $6x^2 - 54$ **174.** $12x^2 - 48$
175. $x^3 - x^2$ **176.** $x^3 - 4x^2$
177. $x^3 - 16x$ **178.** $x^3 - 9x$
179. $x^2 - 2x + 1$ **180.** $16 + 6x - x^2$
181. $1 - 4x + 4x^2$ **182.** $-9x^2 + 6x - 1$
183. $2x^2 + 4x - 2x^3$ **184.** $13x + 6 + 5x^2$
185. $\frac{1}{81}x^2 + \frac{2}{9}x - 8$ **186.** $\frac{1}{8}x^2 - \frac{1}{96}x - \frac{1}{16}$

187. $3x^3 + x^2 + 15x + 5$ **188.** $5 - x + 5x^2 - x^3$

189. $x^4 - 4x^3 + x^2 - 4x$ **190.** $3x^3 + x^2 - 27x - 9$

191. $\frac{1}{4}x^3 + 3x^2 + \frac{3}{4}x + 9$ **192.** $\frac{1}{5}x^3 + x^2 - x - 5$

193. $(t - 1)^2 - 49$ **194.** $(x^2 + 1)^2 - 4x^2$

195. $(x^2 + 8)^2 - 36x^2$ **196.** $2t^3 - 16$

197. $5x^3 + 40$ **198.** $4x(2x - 1) + (2x - 1)^2$

199. $5(3 - 4x)^2 - 8(3 - 4x)(5x - 1)$

200. $2(x + 1)(x - 3)^2 - 3(x + 1)^2(x - 3)$

201. $7(3x + 2)^2(1 - x)^2 + (3x + 2)(1 - x)^3$

202. $7x(2)(x^2 + 1)(2x) - (x^2 + 1)^2(7)$

203. $3(x - 2)^2(x + 1)^4 + (x - 2)^3(4)(x + 1)^3$

204. $2x(x - 5)^4 - x^2(4)(x - 5)^3$

205. $5(x^6 + 1)^4(6x^5)(3x + 2)^3 + 3(3x + 2)^2(3)(x^6 + 1)^5$

206. $\frac{x^2}{2}(x^2 + 1)^4 - (x^2 + 1)^5$

En los Ejercicios 207-212, factorice completamente la expresión.

207. $x^4(4)(2x + 1)^3(2x) + (2x + 1)^4(4x^3)$

208. $x^3(3)(x^2 + 1)^2(2x) + (x^2 + 1)^3(3x^2)$

209. $(2x - 5)^4(3)(5x - 4)^2(5) + (5x - 4)^3(4)(2x - 5)^3(2)$

210. $(x^2 - 5)^3(2)(4x + 3)(4) + (4x + 3)^2(3)(x^2 - 5)^2(x^2)$

211. $\dfrac{(5x - 1)(3) - (3x + 1)(5)}{(5x - 1)^2}$

212. $\dfrac{(2x + 3)(4) - (4x - 1)(2)}{(2x + 3)^2}$

En los Ejercicios 213-216, encuentre todos los valores de *b* para los cuales el trinomio pueda factorizarse.

213. $x^2 + bx - 15$ **214.** $x^2 + bx - 12$

215. $x^2 + bx + 50$ **216.** $x^2 + bx + 24$

En los Ejercicios 217-220, encuentre dos valores enteros de *c* tales que el trinomio pueda factorizarse. (Hay numerosas respuestas correctas.)

217. $2x^2 + 5x + c$ **218.** $3x^2 - 10x + c$

219. $3x^2 - x + c$ **220.** $2x^2 + 9x + c$

221. COSTO, INGRESO Y UTILIDAD Un fabricante de componentes electrónicos puede producir y vender x reproductores de MP3 por semana. El costo total C (en dólares) de producir x reproductores de MP3 es $C = 73x + 25\,000$, y el ingreso total R (en dólares) es $R = 95x$.

(a) Encuentre las utilidades P en términos de x

(b) Encuentre las utilidades obtenidas al vender 5000 reproductores de MP3 por semana.

222. INTERÉS COMPUESTO Después de 3 años, una inversión de \$1200 capitalizada anualmente a una tasa de interés r dará una cantidad de $1200(1 + r)^3$.

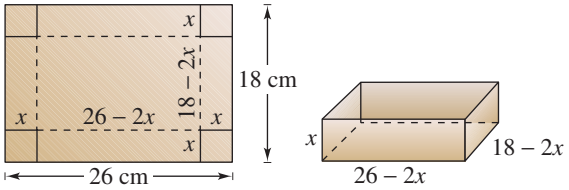
(a) Escriba este polinomio en forma estándar.

(b) Use una calculadora para evaluar el polinomio para los valores de r mostrados en la tabla.

r	2%	3%	$3\frac{1}{2}\%$	4%	$4\frac{1}{2}\%$
$1200(1 + r)^3$					

(c) ¿A qué conclusión se puede llegar a partir de la tabla?

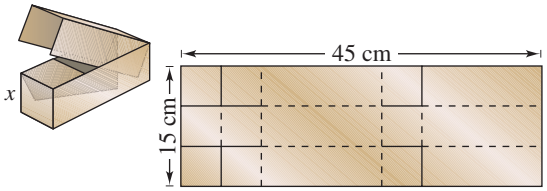
223. VOLUMEN DE UNA CAJA Un restaurante de comida rápida para llevar está construyendo una caja abierta, al cortar cuadrados de las esquinas de un cartón de 18 centímetros por 26 centímetros (vea figura). El borde de cada cuadrado cortado mide x centímetros.



(a) Encuentre el volumen de la caja en términos de x

(b) Encuentre el volumen cuando $x = 1$, $x = 2$ y $x = 3$.

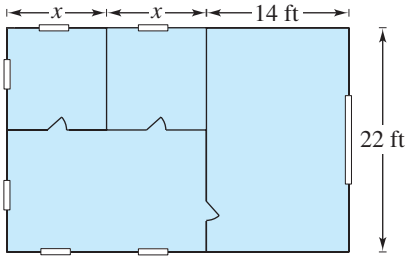
224. VOLUMEN DE UNA CAJA Una compañía de mensajería de entregas de un día para otro está diseñando una caja cerrada al cortar a lo largo de líneas continuas y doblar a lo largo de líneas discontinuas, en una pieza rectangular de cartón acanalado como se muestra en la figura. La longitud y ancho del rectángulo son 45 centímetros y 15 centímetros, respectivamente.



(a) Encuentre el volumen de la caja de envíos en términos de x.

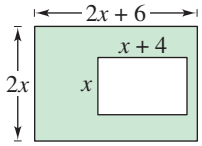
(b) Encuentre el volumen cuando $x = 3$, $x = 5$ y $x = 7$.

225. GEOMETRÍA Encuentre un polinomio que represente el número total de pies cuadrados para el plano del piso que se muestra en la figura.

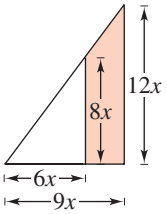


226. GEOMETRÍA Encuentre el área de la región sombreada en cada figura. Escriba su resultado como un polinomio en forma estándar.

(a)



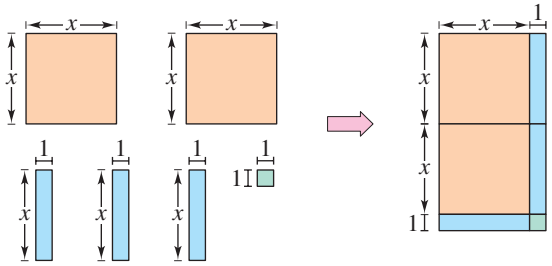
(b)



MODELADO GEOMÉTRICO En los Ejercicios 227-230, dibuje un "modelo geométrico de factorización" para representar la factorización. Por ejemplo, un modelo de factorización para

$2x^2 + 3x + 1 = (2x + 1)(x + 1)$

se ilustra en la figura.



227. $3x^2 + 7x + 2 = (3x + 1)(x + 2)$

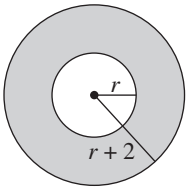
228. $x^2 + 4x + 3 = (x + 3)(x + 1)$

229. $2x^2 + 7x + 3 = (2x + 1)(x + 3)$

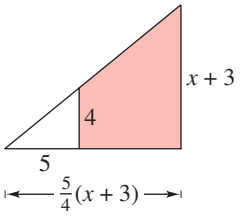
230. $x^2 + 3x + 2 = (x + 2)(x + 1)$

GEOMETRÍA En los Ejercicios 231 y 232, escriba una expresión en forma factorizada para el área de la parte sombreada de la figura.

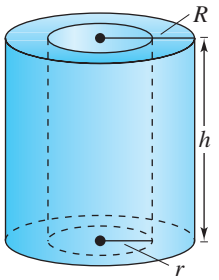
231.



232.



233. GEOMETRÍA El cuerpo cilíndrico mostrado en la figura tiene volumen $V = \pi R^2 h - \pi r^2 h$.



(a) Factorice la expresión para el volumen.

(b) Del resultado del inciso (a), muestre que el volumen es 2π (radio promedio)(grosor del cilindro)h.

234. QUÍMICA El cambio de una reacción química autocatalítica es $kQx - kx^2$, donde Q es la cantidad de la sustancia original, x es la cantidad de sustancia formada y k es la constante de proporcionalidad. Factorice la expresión.

EXPLORACIÓN

¿VERDADERO O FALSO? En los Ejercicios 235-238, determine si la proposición es verdadera o falsa. Justifique su respuesta.

235. El producto de dos binomios es siempre un polinomio de segundo grado.

236. La suma de dos binomios es siempre un binomio.

237. La diferencia de dos cuadrados perfectos se puede factorizar como el producto de pares conjugados.

238. La suma de dos cuadrados perfectos se puede factorizar como el cuadrado de la suma del binomio.

239. Encuentre el grado del producto de dos polinomios de grados m y n.

240. Encuentre el grado de la suma de dos polinomios de grados m y n si $m < n$.

241. PIÉNSELO Cuando el polinomio $-x^3 + 3x^2 + 2x - 1$ se resta de un polinomio desconocido, la diferencia es $5x^2 + 8$. Si es posible, encuentre el polinomio desconocido.

242. RAZONAMIENTO LÓGICO Verifique que $(x + y)^2$ no sea igual a $x^2 + y^2$ haciendo $x = 3$ y $y = 4$ y evaluando ambas expresiones. ¿Hay algunos valores de x y y para los cuales $(x + y)^2 = x^2 + y^2$? Explique.

243. Factorice $x^{2n} - y^{2n}$ en forma tan completa como sea posible.

244. Factorice $x^{3n} + y^{3n}$ en forma tan completa como sea posible.

245. Dé un ejemplo de un polinomio que sea primo respecto a los enteros.

246. TOQUE FINAL Se suman un polinomio de tercer grado y otro de cuarto grado.

(a) ¿La suma puede ser un polinomio de cuarto grado? Explique o dé un ejemplo.

(b) ¿La suma puede ser un polinomio de segundo grado? Explique o dé un ejemplo.

(c) ¿La suma puede ser un polinomio de séptimo grado? Explique o dé un ejemplo.

(d) Después de sumar los dos polinomios y factorizar la suma, usted obtiene un polinomio que está en forma factorizada. Explique qué significa decir que un polinomio está en forma factorizada.

A.4 Expresiones racionales

Lo que debe aprender

- Hallar dominios de expresiones algebraicas.
- Simplificar expresiones racionales.
- Sumar, restar, multiplicar y dividir expresiones racionales.
- Simplificar fracciones complejas y reescribir cocientes de diferencias.

Por qué debe aprenderlo

Se pueden usar expresiones racionales para resolver problemas de la vida real. Por ejemplo, en el Ejercicio 102 de la página A48 se usa una expresión racional para modelar el número proyectado de familias que realizan operaciones bancarias y pagan cuentas en línea de 2002 a 2007.

Dominio de una expresión racional

El conjunto de los números reales para los cuales una expresión algebraica está definida es el **dominio** de la expresión. Dos expresiones algebraicas son **equivalentes** si tienen el mismo dominio y dan los mismos valores para todos los números en su dominio. Por ejemplo, $(x + 1) + (x + 2)$ y $2x + 3$ son equivalentes porque

$$\begin{aligned}(x + 1) + (x + 2) &= x + 1 + x + 2\\ &= x + x + 1 + 2\\ &= 2x + 3.\end{aligned}$$

Ejemplo 1 Hallar el dominio de una expresión algebraica

a. El dominio del polinomio

$$2x^3 + 3x + 4$$

es el conjunto de todos los números reales. De hecho, el dominio de cualquier polinomio es el conjunto de todos los números reales, a menos que sea específicamente restringido.

b. El dominio de la expresión radical

$$\sqrt{x - 2}$$

es el conjunto de los números reales mayores o iguales a 2, porque la raíz cuadrada de un número negativo no es un número real.

c. El dominio de la expresión

$$\frac{x + 2}{x - 3}$$

es el conjunto de todos los números reales excepto $x = 3$, que resultaría en una división entre cero, que no está definida.

PUNTO *de repaso* Ahora trate de hacer el Ejercicio 7.

El cociente de dos expresiones algebraicas es una *expresión fraccionaria*. Además, el cociente de dos *polinomios* como

$$\frac{1}{x}, \qquad \frac{2x - 1}{x + 1} \qquad \text{o} \qquad \frac{x^2 - 1}{x^2 + 1}$$

es una **expresión racional.**

Simplificación de expresiones racionales

Recuerde que una fracción está en la forma más sencilla si su numerador y denominador no tienen factores comunes además de ± 1. Para escribir una fracción en su forma más sencilla, divida factores comunes.

$$\frac{a \cdot \cancel{c}}{b \cdot \cancel{c}} = \frac{a}{b}, \quad c \neq 0$$

La clave del éxito en la simplificación de expresiones racionales está en la capacidad del estudiante para *factorizar* polinomios. Cuando simplifique expresiones racionales, asegúrese de factorizar completamente cada uno de los polinomios antes de concluir que el numerador y denominador no tienen factores comunes.

Ejemplo 2 Simplificar una expresión racional

Escriba $\dfrac{x^2 + 4x - 12}{3x - 6}$ en su forma más sencilla.

Solución

$$\frac{x^2 + 4x - 12}{3x - 6} = \frac{(x + 6)(x - 2)}{3(x - 2)}$$ Factorizar completamente.

$$= \frac{x + 6}{3}, \quad x \neq 2$$ Dividir factores comunes.

Observe que la expresión original no está definida cuando $x = 2$ (porque la división entre cero no está definida). Para asegurarse que la expresión simplificada sea *equivalente* a la expresión original, se debe restringir su dominio excluyendo el valor $x = 2$.

PUNTO *de repaso* Ahora trate de hacer el Ejercicio 33.

ATENCIÓN

En el Ejemplo 2, no se cometa el error de tratar de simplificar más al dividir términos.

$$\frac{x + 6}{3} = \frac{x + 6}{3} = x + 2$$

Recuerde que para simplificar fracciones, se dividen *factores* comunes, no términos.

A veces puede ser necesario cambiar el signo de un factor al factorizar (-1) para simplificar una expresión racional, como se muestra en el Ejemplo 3.

Ejemplo 3 Simplificar expresiones racionales

Escriba $\dfrac{12 + x - x^2}{2x^2 - 9x + 4}$ en su forma más sencilla.

Solución

$$\frac{12 + x - x^2}{2x^2 - 9x + 4} = \frac{(4 - x)(3 + x)}{(2x - 1)(x - 4)}$$ Factorizar completamente.

$$= \frac{-(x - 4)(3 + x)}{(2x - 1)(x - 4)}$$ $(4 - x) = -(x - 4)$

$$= -\frac{3 + x}{2x - 1}, \quad x \neq 4$$ Dividir factores comunes.

PUNTO *de repaso* Ahora trate de hacer el Ejercicio 39.

En este texto, cuando se escribe una expresión racional, por lo general el dominio no se indica con la expresión. Se *entiende* que los números reales que forman el denominador cero están excluidos de la expresión. También, al realizar operaciones con expresiones racionales, este texto sigue la convención de indicar *por la expresión simplificada* todos los valores de x que deben ser excluidos específicamente del dominio para que concuerden los dominios de las expresiones simplificada y original. En el Ejemplo 3, por citar un caso, la restricción $x \neq 4$ se indica con la expresión simplificada para que concuerden los dos dominios. Observe que el valor $x = \frac{1}{2}$ está excluido de *ambos* dominios, de modo que no es necesario indicarlo.

Operaciones con expresiones racionales

Para multiplicar o dividir expresiones racionales, use las propiedades de fracciones que se explican en el Apéndice A.1. Recuerde que para dividir fracciones se invierte el divisor y se multiplica.

Ejemplo 4 Multiplicar expresiones racionales

$$\frac{2x^2 + x - 6}{x^2 + 4x - 5} \cdot \frac{x^3 - 3x^2 + 2x}{4x^2 - 6x} = \frac{(2x - 3)(x + 2)}{(x + 5)(x - 1)} \cdot \frac{x(x - 2)(x - 1)}{2x(2x - 3)}$$

$$= \frac{(x + 2)(x - 2)}{2(x + 5)}, \quad x \neq 0, x \neq 1, x \neq \tfrac{3}{2}$$

PUNTO *de repaso* Ahora trate de hacer el Ejercicio 53.

En el Ejemplo 4, las restricciones $x \neq 0, x \neq 1$ y $x \neq \frac{3}{2}$ están indicadas con la expresión simplificada para que concuerden los dos dominios. Observe que el valor $x = -5$ está excluido de ambos dominios, de manera que no es necesario indicarlo.

Ejemplo 5 Dividir expresiones racionales

$$\frac{x^3 - 8}{x^2 - 4} \div \frac{x^2 + 2x + 4}{x^3 + 8} = \frac{x^3 - 8}{x^2 - 4} \cdot \frac{x^3 + 8}{x^2 + 2x + 4}$$ Invertir y multiplicar.

$$= \frac{(x - 2)(x^2 + 2x + 4)}{(x + 2)(x - 2)} \cdot \frac{(x + 2)(x^2 - 2x + 4)}{(x^2 + 2x + 4)}$$

$$= x^2 - 2x + 4, \quad x \neq \pm 2$$ Dividir factores comunes.

PUNTO *de repaso* Ahora trate de hacer el Ejercicio 55.

Para sumar o restar expresiones racionales se puede usar el método del mínimo común denominador (MCD) o la *definición básica*

$$\frac{a}{b} \pm \frac{c}{d} = \frac{ad \pm bc}{bd}, \quad b \neq 0, d \neq 0.$$ Definición básica

Esta definición es una forma eficiente de sumar o restar *dos* fracciones que no tengan factores comunes en sus denominadores.

Ejemplo 6 Restar expresiones racionales

$$\frac{x}{x - 3} - \frac{2}{3x + 4} = \frac{x(3x + 4) - 2(x - 3)}{(x - 3)(3x + 4)}$$ Definición básica

$$= \frac{3x^2 + 4x - 2x + 6}{(x - 3)(3x + 4)}$$ Propiedad distributiva

$$= \frac{3x^2 + 2x + 6}{(x - 3)(3x + 4)}$$ Combinar términos semejantes.

PUNTO *de repaso* Ahora trate de hacer el Ejercicio 65.

ATENCIÓN

Al restar expresiones racionales, recuerde distribuir el signo negativo a todos los términos de la cantidad que se reste.

Para tres o más fracciones, o para fracciones con un factor repetido en los denominadores, el método del MCD funciona muy bien. Recuerde que el mínimo común denominador de varias fracciones está formado por todos los factores primos de los denominadores, dando a con cada factor la máxima potencia que tenga en cualquier denominador. A continuación veamos un ejemplo numérico.

$$\frac{1}{6}+\frac{3}{4}-\frac{2}{3}=\frac{1\cdot 2}{6\cdot 2}+\frac{3\cdot 3}{4\cdot 3}-\frac{2\cdot 4}{3\cdot 4}$$ El MCD es 12.

$$=\frac{2}{12}+\frac{9}{12}-\frac{8}{12}$$

$$=\frac{3}{12}$$

$$=\frac{1}{4}$$

A veces el numerador de la respuesta tiene un factor común con el denominador. En tales casos, la respuesta debe simplificarse. Por citar un caso, en el ejemplo de líneas antes, $\frac{3}{12}$ se simplificó a $\frac{1}{4}$.

Ejemplo 7 Combinar expresiones racionales: el método MCD

Realice las operaciones y simplifique.

$$\frac{3}{x-1}-\frac{2}{x}+\frac{x+3}{x^2-1}$$

Solución

Usando los denominadores factorizados $(x-1)$, x y $(x+1)(x-1)$ se puede ver que el MCD es $x(x+1)(x-1)$.

$$\frac{3}{x-1}-\frac{2}{x}+\frac{x+3}{(x+1)(x-1)}$$

$$=\frac{3(x)(x+1)}{x(x+1)(x-1)}-\frac{2(x+1)(x-1)}{x(x+1)(x-1)}+\frac{(x+3)(x)}{x(x+1)(x-1)}$$

$$=\frac{3(x)(x+1)-2(x+1)(x-1)+(x+3)(x)}{x(x+1)(x-1)}$$

$$=\frac{3x^2+3x-2x^2+2+x^2+3x}{x(x+1)(x-1)}$$ Propiedad distributiva

$$=\frac{3x^2-2x^2+x^2+3x+3x+2}{x(x+1)(x-1)}$$ Agrupar términos semejantes.

$$=\frac{2x^2+6x+2}{x(x+1)(x-1)}$$ Combinar términos semejantes.

$$=\frac{2(x^2+3x+1)}{x(x+1)(x-1)}$$ Factorizar.

PUNTO *de repaso* Ahora trate de hacer el Ejercicio 67.

Fracciones complejas y el cociente de diferencias

Las expresiones fraccionarias con fracciones separadas en el numerador, denominador, o en ambos, se denominan **fracciones complejas**. A continuación veamos dos ejemplos.

$$\frac{\left(\frac{1}{x}\right)}{x^2+1} \quad \text{y} \quad \frac{\left(\frac{1}{x}\right)}{\left(\frac{1}{x^2+1}\right)}$$

Para simplificar una fracción compleja, combine las fracciones del numerador en una sola fracción y luego combine las del denominador en una sola fracción, después de lo cual debe invertir el denominador y multiplicar.

Ejemplo 8 Simplificar una fracción compleja

$$\frac{\left(\frac{2}{x}-3\right)}{\left(1-\frac{1}{x-1}\right)} = \frac{\left[\frac{2-3(x)}{x}\right]}{\left[\frac{1(x-1)-1}{x-1}\right]}$$ Combinar fracciones.

$$= \frac{\left(\frac{2-3x}{x}\right)}{\left(\frac{x-2}{x-1}\right)}$$ Simplificar.

$$= \frac{2-3x}{x} \cdot \frac{x-1}{x-2}$$ Invertir y multiplicar.

$$= \frac{(2-3x)(x-1)}{x(x-2)}, \quad x \neq 1$$

PUNTO *de repaso* Ahora trate de hacer el Ejercicio 73.

Otra forma de simplificar una fracción compleja es multiplicar su numerador y denominador por el MCD de todas las fracciones de su numerador y denominador. Este método se aplica a la fracción del Ejemplo 8 como sigue.

$$\frac{\left(\frac{2}{x}-3\right)}{\left(1-\frac{1}{x-1}\right)} = \frac{\left(\frac{2}{x}-3\right)}{\left(1-\frac{1}{x-1}\right)} \cdot \frac{x(x-1)}{x(x-1)}$$ el MCD es $x(x-1)$.

$$= \frac{\left(\frac{2-3x}{\cancel{x}}\right) \cdot \cancel{x}(x-1)}{\left(\frac{x-2}{\cancel{x-1}}\right) \cdot x(\cancel{x-1})}$$

$$= \frac{(2-3x)(x-1)}{x(x-2)}, \quad x \neq 1$$

Los siguientes tres ejemplos ilustran algunos métodos para simplificar expresiones racionales que contengan exponentes negativos y radicales. Estos tipos de expresiones se presentan con frecuencia en cálculo.

Para simplificar una expresión con exponentes negativos, un método es empezar por factorizar el factor común con el exponente *más pequeño*. Recuerde que, al factorizar, se *restan* exponentes. Por ejemplo, en $3x^{-5/2} + 2x^{-3/2}$ el exponente más pequeño es $-\frac{5}{2}$ y el factor común es $x^{-5/2}$.

$$\begin{aligned} 3x^{-5/2} + 2x^{-3/2} &= x^{-5/2}[3(1) + 2x^{-3/2-(-5/2)}] \\ &= x^{-5/2}(3 + 2x^1) \\ &= \frac{3 + 2x}{x^{5/2}} \end{aligned}$$

Ejemplo 9 Simplificar una expresión

Simplifique la siguiente expresión que contiene exponentes negativos.

$$x(1 - 2x)^{-3/2} + (1 - 2x)^{-1/2}$$

Solución

Empiece por factorizar el factor común con el *exponente más pequeño*.

$$\begin{aligned} x(1 - 2x)^{-3/2} + (1 - 2x)^{-1/2} &= (1 - 2x)^{-3/2}[x + (1 - 2x)^{(-1/2)-(-3/2)}] \\ &= (1 - 2x)^{-3/2}[x + (1 - 2x)^1] \\ &= \frac{1 - x}{(1 - 2x)^{3/2}} \end{aligned}$$

PUNTO *de repaso* Ahora trate de hacer el Ejercicio 81.

Un segundo método para simplificar una expresión con exponentes negativos se ilustra en el ejemplo siguiente.

Ejemplo 10 Simplificar una expresión con exponentes negativos

$$\frac{(4 - x^2)^{1/2} + x^2(4 - x^2)^{-1/2}}{4 - x^2}$$

$$\begin{aligned} &= \frac{(4 - x^2)^{1/2} + x^2(4 - x^2)^{-1/2}}{4 - x^2} \cdot \frac{(4 - x^2)^{1/2}}{(4 - x^2)^{1/2}} \\ &= \frac{(4 - x^2)^1 + x^2(4 - x^2)^0}{(4 - x^2)^{3/2}} \\ &= \frac{4 - x^2 + x^2}{(4 - x^2)^{3/2}} \\ &= \frac{4}{(4 - x^2)^{3/2}} \end{aligned}$$

PUNTO *de repaso* Ahora trate de hacer el Ejercicio 83.

Ejemplo 11 Reescribir el cociente de diferencias

La siguiente expresión de cálculo es un ejemplo de *cociente de diferencias*.

$$\frac{\sqrt{x+h}-\sqrt{x}}{h}$$

Reescriba esta expresión al racionalizar su numerador.

Solución

$$\frac{\sqrt{x+h}-\sqrt{x}}{h} = \frac{\sqrt{x+h}-\sqrt{x}}{h} \cdot \frac{\sqrt{x+h}+\sqrt{x}}{\sqrt{x+h}+\sqrt{x}}$$

$$= \frac{\left(\sqrt{x+h}\right)^2-\left(\sqrt{x}\right)^2}{h\left(\sqrt{x+h}+\sqrt{x}\right)}$$

$$= \frac{h}{h\left(\sqrt{x+h}+\sqrt{x}\right)}$$

$$= \frac{1}{\sqrt{x+h}+\sqrt{x}}, \quad h \neq 0$$

Observe que la expresión original no está definida cuando $h = 0$. Por tanto, se debe excluir $h = 0$ del dominio de la expresión simplificada para que las expresiones sean equivalentes.

PUNTO *de repaso* Ahora trate de hacer el Ejercicio 89.

Los cocientes de diferencias, como el del Ejemplo 11, se presentan con frecuencia en cálculo. A veces, necesitan reescribirse en forma equivalente que pueda ser evaluada cuando $h = 0$. Observe que la forma equivalente no es más sencilla que la original, pero tiene la ventaja de que está definida cuando $h = 0$.

Ayuda de álgebra

En el Apéndice A.2 se pueden repasar las técnicas para racionalizar un numerador.

A.4 EJERCICIOS

En www.CalcChat.com vea las soluciones a los ejercicios impares.

VOCABULARIO: Llene los espacios en blanco.

1. El conjunto de los números reales para los que una expresión algebraica está definida es el _____ de la expresión.
2. El cociente de dos expresiones algebraicas es una expresión fraccionaria y el cociente de dos polinomios es una _____ _____.
3. Las expresiones fraccionarias con fracciones separadas en el numerador, denominador, o en ambos, se llaman fracciones _____.
4. Para simplificar una expresión con exponentes negativos, es posible empezar por factorizar el factor común con el exponente _____ _____.
5. Dos expresiones algebraicas que tienen el mismo dominio y dan los mismos valores para todos los números en sus dominios se llaman _____.
6. Una expresión racional importante, por ejemplo $\frac{(x+h)^2-x^2}{h}$, que se presenta en cálculo se llama _____ _____ _____ _____.

HABILIDADES Y APLICACIONES

En los Ejercicios 7-22, encuentre el dominio de la expresión.

7. $3x^2 - 4x + 7$

8. $2x^2 + 5x - 2$

9. $4x^3 + 3, \quad x \geq 0$

10. $6x^2 - 9, \quad x > 0$

11. $\dfrac{1}{3 - x}$

12. $\dfrac{x + 6}{3x + 2}$

13. $\dfrac{x^2 - 1}{x^2 - 2x + 1}$

14. $\dfrac{x^2 - 5x + 6}{x^2 - 4}$

15. $\dfrac{x^2 - 2x - 3}{x^2 - 6x + 9}$

16. $\dfrac{x^2 - x - 12}{x^2 - 8x + 16}$

17. $\sqrt{x + 7}$

18. $\sqrt{4 - x}$

19. $\sqrt{2x - 5}$

20. $\sqrt{4x + 5}$

21. $\dfrac{1}{\sqrt{x - 3}}$

22. $\dfrac{1}{\sqrt{x + 2}}$

En los Ejercicios 23 y 24, encuentre el factor faltante en el numerador tal que las dos fracciones sean equivalentes.

23. $\dfrac{5}{2x} = \dfrac{5(\quad)}{6x^2}$

24. $\dfrac{3}{4} = \dfrac{3(\quad)}{4(x + 1)}$

En los Ejercicios 25-42, escriba la expresión racional en su forma más sencilla.

25. $\dfrac{15x^2}{10x}$

26. $\dfrac{18y^2}{60y^5}$

27. $\dfrac{3xy}{xy + x}$

28. $\dfrac{2x^2y}{xy - y}$

29. $\dfrac{4y - 8y^2}{10y - 5}$

30. $\dfrac{9x^2 + 9x}{2x + 2}$

31. $\dfrac{x - 5}{10 - 2x}$

32. $\dfrac{12 - 4x}{x - 3}$

33. $\dfrac{y^2 - 16}{y + 4}$

34. $\dfrac{x^2 - 25}{5 - x}$

35. $\dfrac{x^3 + 5x^2 + 6x}{x^2 - 4}$

36. $\dfrac{x^2 + 8x - 20}{x^2 + 11x + 10}$

37. $\dfrac{y^2 - 7y + 12}{y^2 + 3y - 18}$

38. $\dfrac{x^2 - 7x + 6}{x^2 + 11x + 10}$

39. $\dfrac{2 - x + 2x^2 - x^3}{x^2 - 4}$

40. $\dfrac{x^2 - 9}{x^3 + x^2 - 9x - 9}$

41. $\dfrac{z^3 - 8}{z^2 + 2z + 4}$

42. $\dfrac{y^3 - 2y^2 - 3y}{y^3 + 1}$

43. ***Análisis de error*** Describa el error.

$$\frac{5x^3}{2x^3 + 4} = \frac{5x^3}{2x^3 + 4} = \frac{5}{2 + 4} = \frac{5}{6}$$

44. ***Análisis de error*** Describa el error.

$$\frac{x^3 + 25x}{x^2 - 2x - 15} = \frac{x(x^2 + 25)}{(x - 5)(x + 3)}$$
$$= \frac{x(x + 5)(x - 5)}{(x - 5)(x + 3)} = \frac{x(x + 5)}{x + 3}$$

En los Ejercicios 45 y 46, complete la tabla. ¿Qué se puede concluir?

45.

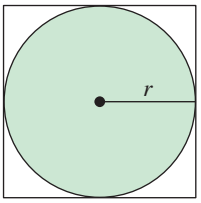
x	0	1	2	3	4	5	6
$\dfrac{x^2 - 2x - 3}{x - 3}$							
$x + 1$							

46.

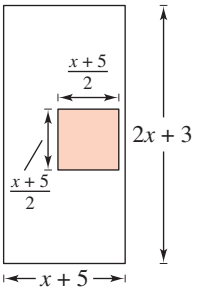
x	0	1	2	3	4	5	6
$\dfrac{x - 3}{x^2 - x - 6}$							
$\dfrac{1}{x + 2}$							

GEOMETRÍA En los Ejercicios 47 y 48, encuentre la razón entre el área de la parte sombreada de la figura y el área total de ésta.

47.



48.



En los Ejercicios 49-56, realice la multiplicación o división y simplifique.

49. $\dfrac{5}{x - 1} \cdot \dfrac{x - 1}{25(x - 2)}$

50. $\dfrac{x + 13}{x^3(3 - x)} \cdot \dfrac{x(x - 3)}{5}$

51. $\dfrac{r}{r - 1} \div \dfrac{r^2}{r^2 - 1}$

52. $\dfrac{4y - 16}{5y + 15} \div \dfrac{4 - y}{2y + 6}$

53. $\dfrac{t^2 - t - 6}{t^2 + 6t + 9} \cdot \dfrac{t + 3}{t^2 - 4}$

54. $\dfrac{x^2 + xy - 2y^2}{x^3 + x^2y} \cdot \dfrac{x}{x^2 + 3xy + 2y^2}$

55. $\dfrac{x^2 - 36}{x} \div \dfrac{x^3 - 6x^2}{x^2 + x}$

56. $\dfrac{x^2 - 14x + 49}{x^2 - 49} \div \dfrac{3x - 21}{x + 7}$

En los Ejercicios 57-68, realice la suma o resta y simplifique.

57. $6 - \dfrac{5}{x+3}$

58. $\dfrac{3}{x-1} - 5$

59. $\dfrac{5}{x-1} + \dfrac{x}{x-1}$

60. $\dfrac{2x-1}{x+3} + \dfrac{1-x}{x+3}$

61. $\dfrac{3}{x-2} + \dfrac{5}{2-x}$

62. $\dfrac{2x}{x-5} - \dfrac{5}{5-x}$

63. $\dfrac{4}{2x+1} - \dfrac{x}{x+2}$

64. $\dfrac{2}{x-3} + \dfrac{5x}{3x+4}$

65. $\dfrac{1}{x^2-x-2} - \dfrac{x}{x^2-5x+6}$

66. $\dfrac{2}{x^2-x-2} + \dfrac{10}{x^2+2x-8}$

67. $-\dfrac{1}{x} + \dfrac{2}{x^2+1} + \dfrac{1}{x^3+x}$

68. $\dfrac{2}{x+1} + \dfrac{2}{x-1} + \dfrac{1}{x^2-1}$

ANÁLISIS DE ERROR En los Ejercicios 69 y 70, describa el error.

69.
$$\frac{x+4}{x+2} - \frac{3x-8}{x+2} = \frac{x+4-3x-8}{x+2}$$
$$= \frac{-2x-4}{x+2} = \frac{-2(x+2)}{x+2} = -2$$

70.
$$\frac{6-x}{x(x+2)} + \frac{x+2}{x^2} + \frac{8}{x^2(x+2)}$$
$$= \frac{x(6-x) + (x+2)^2 + 8}{x^2(x+2)}$$
$$= \frac{6x - x^2 + x^2 + 4 + 8}{x^2(x+2)}$$
$$= \frac{6(x+2)}{x^2(x+2)} = \frac{6}{x^2}$$

En los Ejercicios 71-76, simplifique la fracción compleja.

71. $\dfrac{\left(\dfrac{x}{2} - 1\right)}{(x-2)}$

72. $\dfrac{(x-4)}{\left(\dfrac{x}{4} - \dfrac{4}{x}\right)}$

73. $\dfrac{\left[\dfrac{x^2}{(x+1)^2}\right]}{\left[\dfrac{x}{(x+1)^3}\right]}$

74. $\dfrac{\left(\dfrac{x^2-1}{x}\right)}{\left[\dfrac{(x-1)^2}{x}\right]}$

75. $\dfrac{\left(\sqrt{x} - \dfrac{1}{2\sqrt{x}}\right)}{\sqrt{x}}$

76. $\dfrac{\left(\dfrac{t^2}{\sqrt{t^2+1}} - \sqrt{t^2+1}\right)}{t^2}$

En los Ejercicios 77-82, factorice la expresión al eliminar el factor común con el exponente más pequeño.

77. $x^5 - 2x^{-2}$

78. $x^5 - 5x^{-3}$

79. $x^2(x^2+1)^{-5} - (x^2+1)^{-4}$

80. $2x(x-5)^{-3} - 4x^2(x-5)^{-4}$

81. $2x^2(x-1)^{1/2} - 5(x-1)^{-1/2}$

82. $4x^3(2x-1)^{3/2} - 2x(2x-1)^{-1/2}$

En los Ejercicios 83 y 84, simplifique la expresión.

83. $\dfrac{3x^{1/3} - x^{-2/3}}{3x^{-2/3}}$

84. $\dfrac{-x^3(1-x^2)^{-1/2} - 2x(1-x^2)^{1/2}}{x^4}$

En los Ejercicios 85-88, simplifique el cociente de diferencias.

85. $\dfrac{\left(\dfrac{1}{x+h} - \dfrac{1}{x}\right)}{h}$

86. $\dfrac{\left[\dfrac{1}{(x+h)^2} - \dfrac{1}{x^2}\right]}{h}$

87. $\dfrac{\left(\dfrac{1}{x+h-4} - \dfrac{1}{x-4}\right)}{h}$

88. $\dfrac{\left(\dfrac{x+h}{x+h+1} - \dfrac{x}{x+1}\right)}{h}$

En los Ejercicios 89-94, simplifique el cociente de diferencias al racionalizar el numerador.

89. $\dfrac{\sqrt{x+2} - \sqrt{x}}{2}$

90. $\dfrac{\sqrt{z-3} - \sqrt{z}}{3}$

91. $\dfrac{\sqrt{t+3} - \sqrt{3}}{t}$

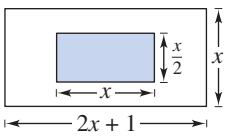
92. $\dfrac{\sqrt{x+5} - \sqrt{5}}{x}$

93. $\dfrac{\sqrt{x+h+1} - \sqrt{x+1}}{h}$

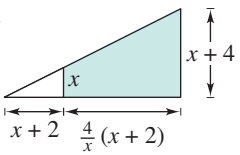
94. $\dfrac{\sqrt{x+h-2} - \sqrt{x-2}}{h}$

PROBABILIDAD En los Ejercicios 95 y 96, considere un experimento en el que una canica se lanza en una caja cuya base se muestra en la figura. La probabilidad de que la canica llegue al reposo en la parte sombreada de la caja es igual a la razón entre el área sombreada y el área total de la figura. Encuentre la probabilidad.

95.



96.



97. RAPIDEZ Una copiadora digital hace copias en color a razón de 50 páginas por minuto.

(a) Encuentre el tiempo necesario para copiar una página.

(b) Encuentre el tiempo necesario para copiar x páginas.

(c) Encuentre el tiempo necesario para copiar 120 páginas.

98. RAPIDEZ Después de trabajar juntos durante t horas en una tarea común, dos trabajadores han realizado partes fraccionarias del trabajo iguales a $t/3$ y $t/5$, respectivamente. ¿Qué parte fraccionaria del trabajo se ha completado?

FINANZAS En los Ejercicios 99 y 100, la fórmula que aproxima la tasa r de interés anual de un préstamo para pagar mensualmente está dada por

$$r = \frac{\left[\frac{24(NM - P)}{N}\right]}{\left(P + \frac{NM}{12}\right)}$$

donde N es el número total de pagos, M es el pago mensual y P es la cantidad financiada.

99. (a) Aproxime la tasa de interés anual para un préstamo de \$20 000 para comprar un auto, que tiene pagos mensuales de \$475.

(b) Simplifique la expresión para la tasa r de interés anual y luego vuelva a trabajar el inciso (a).

100. (a) Aproxime la tasa de interés anual para un préstamo de \$28 000 para un auto de cinco años, que tiene pagos mensuales de \$525.

(b) Simplifique la expresión para la tasa r de interés anual, y luego vuelva a trabajar el inciso (a).

101. REFRIGERACIÓN Cuando se colocan alimentos (a temperatura ambiente) en un refrigerador, el tiempo necesario para que se enfríen depende de la cantidad de alimento, de la circulación de aire en el refrigerador, de la temperatura original de los alimentos y de la temperatura del refrigerador. El modelo que da la temperatura del alimento que tiene una temperatura original de 75 °F y se pone en un refrigerador de 40 °F es

$$T = 10\left(\frac{4t^2 + 16t + 75}{t^2 + 4t + 10}\right)$$

donde T es la temperatura (en grados Fahrenheit) y t es el tiempo (en horas).

(a) Complete la tabla.

t	0	2	4	6	8	10	12
T							

t	14	16	18	20	22
T					

(b) ¿A qué valor de T parece aproximarse el modelo matemático?

102. ADMINISTRACIÓN INTERACTIVA DE DINERO La tabla siguiente muestra el número proyectado de familias de Estados Unidos (en millones) que realizan operaciones bancarias en línea y pagan facturas en línea, de 2002 a 2007. (Fuente: eMarketer; Forrester Research)

Año	Banca	Pagan cuentas
2002	21.9	13.7
2003	26.8	17.4
2004	31.5	20.9
2005	35.0	23.9
2006	40.0	26.7
2007	45.0	29.1

Los modelos matemáticos para estos datos son

$$\text{Número con operaciones de banca en línea} = \frac{-0.728t^2 + 23.81t - 0.3}{-0.049t^2 + 0.61t + 1.0}$$

y

$$\text{Número que pagan facturas en línea} = \frac{4.39t + 5.5}{0.002t^2 + 0.01t + 1.0}$$

donde t representa el año, con $t = 2$ correspondiente a 2002.

(a) Usando los modelos, genere una tabla para estimar el número proyectado de familias que hacen operaciones en línea, y el número proyectado de familias que pagan cuentas en línea, para los años dados.

(b) Compare los valores dados por los modelos con los datos reales.

(c) Determine un modelo para la razón entre el número proyectado de familias que pagan cuentas en línea y el de familias que hacen operaciones en línea.

(d) Use el modelo del inciso (c) para hallar las razones para los años dados. Interprete sus resultados.

EXPLORACIÓN

¿VERDADERO O FALSO? En los Ejercicios 103 y 104, determine si la proposición es verdadera o falsa. Justifique su respuesta.

103. $\dfrac{x^{2n} - 1^{2n}}{x^n - 1^n} = x^n + 1^n$

104. $\dfrac{x^2 - 3x + 2}{x - 1} = x - 2$, para todos los valores de x

105. PIÉNSELO ¿Cómo determina usted si una expresión racional está en su forma más sencilla?

106. TOQUE FINAL En sus propias palabras, explique cómo dividir expresiones racionales.

A.5 Resolución de ecuaciones

Lo que debe aprender

- Identificar diferentes tipos de ecuaciones.
- Resolver ecuaciones lineales con una variable y ecuaciones que lleven a ecuaciones lineales.
- Resolver ecuaciones cuadráticas por factorización, extracción de raíces cuadradas, completar el cuadrado y usar la fórmula cuadrática.
- Resolver ecuaciones con polinomios de grado tres o superior.
- Resolver ecuaciones con radicales.
- Resolver ecuaciones con valores absolutos.
- Usar fórmulas comunes para resolver problemas de la vida real.

Por qué debe aprenderlo

Se usan ecuaciones lineales en numerosas aplicaciones de la vida real. Por ejemplo, en los Ejercicios 155 y 156 de las páginas A61 y A62 se pueden usar ecuaciones lineales para modelar la relación entre la longitud de un hueso de fémur y la estatura de una persona, ayudando así a los investigadores a aprender acerca de culturas antiguas.

Ecuaciones y resolución de ecuaciones

Una **ecuación** en x es una afirmación de que dos expresiones algebraicas son iguales. Por ejemplo,

$$3x - 5 = 7,\ x^2 - x - 6 = 0 \text{ y } \sqrt{2x} = 4$$

son ecuaciones. **Resolver** una ecuación en x significa hallar todos los valores de x para los cuales la ecuación es verdadera. Tales valores son **soluciones**. Por ejemplo, $x = 4$ es una **solución** de la ecuación

$$3x - 5 = 7$$

Porque $3(4) - 5 = 7$ es un enunciado verdadero.

Las soluciones de una ecuación dependen de las clases de números bajo consideración. Por ejemplo, en el conjunto de los números racionales, $x^2 = 10$ no tiene solución porque no hay número racional cuyo cuadrado sea 10. No obstante, en el conjunto de los números reales, la ecuación tiene dos solucioness $x = \sqrt{10}$ y $x = -\sqrt{10}$.

Una ecuación que es verdadera para *todo* número real en el *dominio* de la variable se llama **identidad**. El dominio es el conjunto de todos los números reales para los cuales la ecuación está definida. Por ejemplo,

$$x^2 - 9 = (x + 3)(x - 3) \qquad \text{Identidad}$$

es una identidad porque es un enunciado verdadero para cualquier valor real de x. La ecuación

$$\frac{x}{3x^2} = \frac{1}{3x} \qquad \text{Identidad}$$

donde $x \neq 0$, es una identidad porque es verdadera para cualquier valor real de x diferente de cero.

Una ecuación que sea verdadera sólo para *algunos* (o incluso ninguno) de los números reales del dominio de la variable se llama **ecuación condicional**. Por ejemplo, la ecuación

$$x^2 - 9 = 0 \qquad \text{Ecuación condicional}$$

es condicional porque $x = 3$ y $x = -3$ son los únicos valores del dominio que la satisfacen. La ecuación $2x - 4 = 2x + 1$ es condicional porque no hay valores reales de x para los cuales resulte verdadera.

Ecuaciones lineales con una variable

Definición de una ecuación lineal

Una **ecuación lineal con una variable** x es una ecuación que se puede escribir en la forma estándar

$$ax + b = 0$$

donde a y b son números reales, con $a \neq 0$.

Una ecuación lineal con una variable, escrita en forma estándar, siempre tiene exactamente una solución. Para ver esto, considere los pasos siguientes.

$ax + b = 0$ Ecuación original, con $a \neq 0$

$ax = -b$ Restar b de cada lado

$x = -\frac{b}{a}$ Dividir cada lado entre a.

Para resolver una ecuación condicional con x, aísle x en un lado (miembro) de la ecuación mediante una sucesión de **ecuaciones equivalentes** (por lo general más sencillas), cada una de las cuales tiene la(s) misma(s) solución(es) que la ecuación original. Las operaciones que dan ecuaciones equivalentes provienen del principio de sustitución (vea Apéndice A.1) y técnicas de simplificación.

Generación de ecuaciones equivalentes

Una ecuación puede ser transformada en una ecuación equivalente por medio de uno o más de los pasos siguientes.

	Ecuación dada	*Ecuación equivalente*
1. Elimine símbolos de agrupación, combine términos semejantes, o simplifique fracciones en uno o ambos lados de la ecuación.	$2x - x = 4$	$x = 4$
2. Sume (o reste) la misma cantidad a *cada* lado de la ecuación.	$x + 1 = 6$	$x = 5$
3. Multiplique (o divida) *cada* lado de la ecuación entre la misma cantidad diferente de cero	$2x = 6$	$x = 3$
4. Intercambie los dos lados de la ecuación	$2 = x$	$x = 2$

Tip de estudio

Observe que algunas ecuaciones lineales en forma no estándar *no tienen solución* o *tienen un número infinito de soluciones*. Por ejemplo,

$$x = x + 1$$

no tiene solución porque no es verdadera para ningún valor de x. Como

$$5x + 10 = 5(x + 2)$$

es verdadera para cualquier valor de x, la ecuación tiene un número infinito de soluciones.

Ejemplo 1 Resolver una ecuación lineal

a. $3x - 6 = 0$ Ecuación original

$3x = 6$ Sumar 6 a cada lado.

$x = 2$ Dividir cada lado entre 3.

b. $5x + 4 = 3x - 8$ Ecuación original

$2x + 4 = -8$ Restar $3x$ de cada lado

$2x = -12$ Restar 4 de cada lado.

$x = -6$ Dividir cada lado entre 2.

PUNTO *de repaso* Ahora trate de hacer el Ejercicio 7(a).

Tip de estudio

Después de resolver una ecuación, se debe comprobar cada solución en la ecuación original. Por ejemplo, se puede verificar la solución del Ejemplo 1(a) como sigue.

$3x - 6 = 0$ Escribir la ecuación original

$3(2) - 6 \stackrel{?}{=} 0$ Sustituir 2 por x.

$0 = 0$ La solución está bien. ✓

Trate de verificar la solución del Ejemplo 1(b).

Tip de estudio

A una ecuación con una *sola fracción* en cada lado (miembro) se le pueden eliminar denominadores al **multiplicar en cruz**. Para hacer esto, multiplique el numerador izquierdo por el denominador derecho y el numerador derecho por el denominador izquierdo como sigue.

$\frac{a}{b} = \frac{c}{d}$ Ecuación original

$ad = cb$ Multiplicación en cruz

Para resolver una ecuación que contenga expresiones fraccionarias, encuentre el mínimo común denominador (MCD) de todos los términos y multiplique éstos por el MCD. Este proceso elimina las fracciones de la ecuación original y produce una ecuación más sencilla.

Ejemplo 2 Una ecuación que contenga expresiones fraccionarias

Resuelva $\frac{x}{3} + \frac{3x}{4} = 2$.

Solución

$$\frac{x}{3} + \frac{3x}{4} = 2$$ Escribir la ecuación original.

$$(12)\frac{x}{3} + (12)\frac{3x}{4} = (12)2$$ Multiplicar cada término por el MCD (12).

$$4x + 9x = 24$$ Dividir y multiplicar.

$$13x = 24$$ Combinar términos semejantes.

$$x = \frac{24}{13}$$ Dividir cada lado entre 13.

La solución es $x = \frac{24}{13}$. Compruébelo en la ecuación original.

PUNTO *de repaso* Ahora trate de hacer el Ejercicio 23.

Cuando multiplique o divida una ecuación por una cantidad *variable*, es posible introducir una solución extraña. Una **solución extraña** es la que no satisface la ecuación original. Por tanto, es esencial que usted compruebe sus soluciones.

Ejemplo 3 Una ecuación con una solución extraña

Resuelva $\frac{1}{x-2} = \frac{3}{x+2} - \frac{6x}{x^2-4}$.

Tip de estudio

Recuerde que el mínimo común denominador (MCD) de dos o más fracciones está formado por el producto de todos los factores primos de los denominadores, dando a cada factor la potencia más alta de su presencia en cualquier denominador. Para muestra, en el Ejemplo 3, al factorizar cada denominador se puede determinar que el MCD es $(x + 2)(x - 2)$.

Solución

El MCD es $x^2 - 4$, o $(x + 2)(x - 2)$. Multiplique cada término por este MCD.

$$\frac{1}{x-2}(x+2)(x-2) = \frac{3}{x+2}(x+2)(x-2) - \frac{6x}{x^2-4}(x+2)(x-2)$$

$$x + 2 = 3(x - 2) - 6x, \quad x \neq \pm 2$$

$$x + 2 = 3x - 6 - 6x$$

$$x + 2 = -3x - 6$$

$$4x = -8 \Rightarrow x = -2$$ Solución extraña

En la ecuación original, $x = -2$ da un denominador de cero. Por tanto, $x = -2$ es una solución extraña y la ecuación original *no tiene* solución.

PUNTO *de repaso* Ahora trate de hacer el Ejercicio 35.

Ecuaciones cuadráticas

Una **ecuación cuadrática** en x es una ecuación que se puede escribir en la forma general

$$ax^2 + bx + c = 0$$

donde a, b y c son números reales, con $a \neq 0$. Una ecuación cuadrática en x también se conoce como **ecuación de segundo grado con polinomios** en x.

El lector debe estar familiarizado con los siguientes cuatro métodos de resolver ecuaciones cuadráticas.

Resolución de una ecuación cuadrática

Factorización: si $ab = 0$, entonces $a = 0$ o $b = 0$.

Ejemplo:
$$x^2 - x - 6 = 0$$
$$(x - 3)(x + 2) = 0$$
$$x - 3 = 0 \quad \Rightarrow \quad x = 3$$
$$x + 2 = 0 \quad \Rightarrow \quad x = -2$$

Principio de raíz cuadrada: si $u^2 = c$, donde $c > 0$, entonces $u = \pm\sqrt{c}$.

Ejemplo:
$$(x + 3)^2 = 16$$
$$x + 3 = \pm 4$$
$$x = -3 \pm 4$$
$$x = 1 \quad \text{o} \quad x = -7$$

Completar el cuadrado: si $x^2 + bx = c$, entonces

$$x^2 + bx + \left(\frac{b}{2}\right)^2 = c + \left(\frac{b}{2}\right)^2 \qquad \text{Sumar } \left(\frac{b}{2}\right)^2 \text{ a cada lado.}$$
$$\left(x + \frac{b}{2}\right)^2 = c + \frac{b^2}{4}.$$

Ejemplo:
$$x^2 + 6x = 5$$
$$x^2 + 6x + 3^2 = 5 + 3^2 \qquad \text{Sumar } \left(\frac{6}{2}\right)^2 \text{ a cada lado.}$$
$$(x + 3)^2 = 14$$
$$x + 3 = \pm\sqrt{14}$$
$$x = -3 \pm \sqrt{14}$$

Fórmula cuadrática: si $ax^2 + bx + c = 0$, entonces $x = \dfrac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$.

Ejemplo:
$$2x^2 + 3x - 1 = 0$$
$$x = \frac{-3 \pm \sqrt{3^2 - 4(2)(-1)}}{2(2)}$$
$$= \frac{-3 \pm \sqrt{17}}{4}$$

Tip de estudio

El principio de raíz cuadrada también se conoce como *extraer raíces cuadradas*.

Tip de estudio

Se puede resolver toda ecuación cuadrática al completar el cuadrado o usar la fórmula cuadrática.

Ejemplo 4 Resolver una ecuación cuadrática por factorización

a. $2x^2 + 9x + 7 = 3$ Ecuación original

$2x^2 + 9x + 4 = 0$ Escribir en forma general.

$(2x + 1)(x + 4) = 0$ Factorizar.

$2x + 1 = 0 \Rightarrow x = -\frac{1}{2}$ Igualar a 0 el primer factor.

$x + 4 = 0 \Rightarrow x = -4$ Igualar a cero el 2º factor.

Las soluciones son $x = -\frac{1}{2}$ y $x = -4$. Compruébelo en la ecuación original.

b. $6x^2 - 3x = 0$ Ecuación original.

$3x(2x - 1) = 0$ Factorizar.

$3x = 0 \Rightarrow x = 0$ Igualar a 0 el primer factor.

$2x - 1 = 0 \Rightarrow x = \frac{1}{2}$ Igualar a cero el 2º factor.

Las soluciones son $x = 0$ y $x = \frac{1}{2}$. Compruébelo en la ecuación original.

PUNTO *de repaso* Ahora trate de hacer el Ejercicio 49.

Observe que el método de solución en el Ejemplo 4 está basado en la propiedad del factor cero del Apéndice A.1. Asegúrese de ver que esta propiedad funciona sólo para ecuaciones escritas en forma general (en la que el lado derecho de la ecuación es cero). Por tanto, todos los términos deben reunirse en un lado *antes* de factorizar. Por ejemplo, en la ecuación $(x - 5)(x + 2) = 8$, es incorrecto igualar a 8 cada factor. Trate de resolver esta ecuación correctamente.

Ejemplo 5 Extraer raíces cuadradas

Resuelva cada ecuación extrayendo raíces cuadradas

a. $4x^2 = 12$ **b.** $(x - 3)^2 = 7$

Solución

a. $4x^2 = 12$ Escribir la ecuación original.

$x^2 = 3$ Dividir cada lado entre 4.

$x = \pm\sqrt{3}$ Extraer raíces cuadrada.

Cuando obtenga la raíz cuadrada de una expresión variable, debe tener en cuenta las dos soluciones, es decir, la positiva y la negativa. Por tanto, las soluciones son $x = \sqrt{3}$ y $x = -\sqrt{3}$. Compruébelo en la ecuación original.

b. $(x - 3)^2 = 7$ Escribir la ecuación original.

$x - 3 = \pm\sqrt{7}$ Extraer raíces cuadradas.

$x = 3 \pm \sqrt{7}$ Sumar 3 a cada lado.

Las soluciones son $x = 3 \pm \sqrt{7}$. Compruébelo en la ecuación original.

PUNTO *de repaso* Ahora trate de hacer el Ejercicio 65.

Cuando resuelva ecuaciones cuadráticas al completar el cuadrado, debe sumar $(b/2)^2$ a *cada lado* (miembro) para mantener la igualdad. Si el coeficiente principal no es 1, debe dividir cada lado de la ecuación entre ese coeficiente antes de completar el cuadrado, como se ve en el Ejemplo 7.

Ejemplo 6 Completar el cuadrado: el coeficiente inicial es 1

Resuelva $x^2 + 2x - 6 = 0$ completando el cuadrado.

Solución

$$x^2 + 2x - 6 = 0$$ Escribir ecuación original.

$$x^2 + 2x = 6$$ Sumar 6 a cada lado.

$$x^2 + 2x + 1^2 = 6 + 1^2$$ Sumar 1^2 a cada lado.

1^2 = (mitad de 2)^2

$$(x + 1)^2 = 7$$ Simplificar.

$$x + 1 = \pm\sqrt{7}$$ Obtener la raíz cuadrada de cada lado.

$$x = -1 \pm \sqrt{7}$$ Restar 1 de cada lado.

Las soluciones son $x = -1 \pm \sqrt{7}$. Compruébelo en la ecuación original.

PUNTO *de repaso* Ahora trate de hacer el Ejercicio 73.

Ejemplo 7 Completar el cuadrado: el coeficiente inicial no es 1

$$3x^2 - 4x - 5 = 0$$ Ecuación original

$$3x^2 - 4x = 5$$ Sumar 4 a cada lado.

$$x^2 - \frac{4}{3}x = \frac{5}{3}$$ Dividir cada lado entre 3.

$$x^2 - \frac{4}{3}x + \left(-\frac{2}{3}\right)^2 = \frac{5}{3} + \left(-\frac{2}{3}\right)^2$$ Sumar $\left(-\frac{2}{3}\right)^2$ a cada lado.

$\left(-\frac{2}{3}\right)^2$ = (mitad de $-\frac{4}{3}$)^2

$$x^2 - \frac{4}{3}x + \frac{4}{9} = \frac{19}{9}$$ Simplificar.

$$\left(x - \frac{2}{3}\right)^2 = \frac{19}{9}$$ Trinomio cuadrado perfecto.

$$x - \frac{2}{3} = \pm\frac{\sqrt{19}}{3}$$ Obtener raíces cuadradas.

$$x = \frac{2}{3} \pm \frac{\sqrt{19}}{3}$$ Soluciones

PUNTO *de repaso* Ahora trate de hacer el Ejercicio 77.

ATENCIÓN

Cuando use la fórmula cuadrática, recuerde que *antes* de aplicarla primero debe escribir la ecuación cuadrática en forma general.

Ejemplo 8 La fórmula cuadrática: dos soluciones distintas

Use la fórmula cuadrática para resolver $x^2 + 3x = 9$.

Solución

$$x^2 + 3x = 9$$ Escribir la ecuación original.

$$x^2 + 3x - 9 = 0$$ Escribir en forma general.

$$x = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$$ Fórmula cuadrática

$$x = \frac{-3 \pm \sqrt{(3)^2 - 4(1)(-9)}}{2(1)}$$ Sustituir $a = 1$, $b = 3$ y $c = -9$.

$$x = \frac{-3 \pm \sqrt{45}}{2}$$ Simplificar.

$$x = \frac{-3 \pm 3\sqrt{5}}{2}$$ Simplificar.

La ecuación tiene dos soluciones:

$$x = \frac{-3 + 3\sqrt{5}}{2} \quad \text{y} \quad x = \frac{-3 - 3\sqrt{5}}{2}.$$

Compruébelo en la ecuación original.

PUNTO *de repaso* Ahora trate de hacer el Ejercicio 87.

Ejemplo 9 La fórmula cuadrática: una solución

Use la fórmula cuadrática para resolver $8x^2 - 24x + 18 = 0$.

Solución

$$8x^2 - 24x + 18 = 0$$ Escribir la ecuación original.

$$4x^2 - 12x + 9 = 0$$ Dividir entre el factor común (2).

$$x = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$$ Fórmula cuadrática

$$x = \frac{-(-12) \pm \sqrt{(-12)^2 - 4(4)(9)}}{2(4)}$$ Sustituir $a = 4$, $b = -12$ y $c = 9$.

$$x = \frac{12 \pm \sqrt{0}}{8} = \frac{3}{2}$$ Simplificar.

Esta ecuación cuadrática tiene sólo una solución: $x = \frac{3}{2}$. Compruébelo en la ecuación original.

PUNTO *de repaso* Ahora trate de hacer el Ejercicio 91.

Observe que el Ejemplo 9 podría haberse resuelto sin dividir primero entre un factor común de 2. Sustituyendo $a = 8$, $b = -24$ y $c = 18$ en la fórmula cuadrática se obtiene el mismo resultado

ATENCIÓN

Un error común que se comete al resolver ecuaciones como la del Ejemplo 10 es dividir cada lado de la ecuación por el factor variable x^2. Esto pierde la solución $x = 0$. Cuando resuelva una ecuación, siempre escríbala en forma general, luego factorícela e iguale cada factor a cero. No divida cada lado de una ecuación entre un factor variable en un intento por simplificar la ecuación

Ecuaciones con polinomios de grado superior

Los métodos empleados para resolver ecuaciones cuadráticas a veces se pueden extender para resolver ecuaciones con polinomios de grado superior.

Ejemplo 10 Resolver una ecuación con polinomios por factorización

Resuelva $3x^4 = 48x^2$.

Solución

Primero escriba la ecuación con polinomios en forma general con cero en un lado, factorice el otro lado y luego iguale a cero cada factor y resuelva.

$$3x^4 = 48x^2$$ Escribir la ecuación original.

$$3x^4 - 48x^2 = 0$$ Escribir en forma general.

$$3x^2(x^2 - 16) = 0$$ Factorizar el factor común.

$$3x^2(x + 4)(x - 4) = 0$$ Escribir en forma factorizada.

$$3x^2 = 0 \Rightarrow x = 0$$ Igualar a 0 el primer factor.

$$x + 4 = 0 \Rightarrow x = -4$$ Igualar a 0 el 2º factor.

$$x - 4 = 0 \Rightarrow x = 4$$ Igualar a 0 el 3er factor.

Se pueden verificar estas soluciones al sustituir en la ecuación original, como sigue

Comprobación

$3(0)^4 = 48(0)^2$ 0 está bien. ✓

$3(-4)^4 = 48(-4)^2$ -4 está bien. ✓

$3(4)^4 = 48(4)^2$ 4 está bien. ✓

Por tanto, se puede concluir que las soluciones son $x = 0, x = -4$ y $x = 4$.

PUNTO *de repaso* Ahora trate de hacer el Ejercicio 113.

Ejemplo 11 Resolver una ecuación con polinomios por factorización

Resuelva $x^3 - 3x^2 - 3x + 9 = 0$.

Resuelva

$$x^3 - 3x^2 - 3x + 9 = 0$$ Escribir la ecuación original.

$$x^2(x - 3) - 3(x - 3) = 0$$ Factorizar por agrupación.

$$(x - 3)(x^2 - 3) = 0$$ Propiedad distributiva

$$x - 3 = 0 \Rightarrow x = 3$$ Igualar a 0 el 1er factor.

$$x^2 - 3 = 0 \Rightarrow x = \pm\sqrt{3}$$ Igualar a 0 el 2º factor.

Las soluciones son $x = 3, x = \sqrt{3}$ y $x = -\sqrt{3}$. Compruébelo en la ecuación original.

PUNTO *de repaso* Ahora trate de hacer el Ejercicio 119.

Ecuaciones con radicales

Operaciones como elevar al cuadrado cada lado de una ecuación, elevar cada lado de una ecuación a una potencia racional y multiplicar cada lado de una ecuación por una cantidad variable pueden introducir soluciones extrañas. Por tanto, cuando se use cualquiera de estas operaciones, verificar las soluciones es de importancia decisiva.

Ejemplo 12 Resolver ecuaciones con radicales

a. $\sqrt{2x+7} - x = 2$ Ecuación original

$\sqrt{2x+7} = x + 2$ Aislar el radical.

$2x + 7 = x^2 + 4x + 4$ Elevar al cuadrado cada lado.

$0 = x^2 + 2x - 3$ Escribir en forma general.

$0 = (x + 3)(x - 1)$ Factorizar.

$x + 3 = 0 \Rightarrow x = -3$ Igualar a 0 el 1er factor.

$x - 1 = 0 \Rightarrow x = 1$ Igualar a 0 el 2º factor.

Al comprobar estos valores, se puede determinar que la única solución es $x = 1$.

b. $\sqrt{2x-5} - \sqrt{x-3} = 1$ Ecuación original

$\sqrt{2x-5} = \sqrt{x-3} + 1$ Aislar $\sqrt{2x-5}$.

$2x - 5 = x - 3 + 2\sqrt{x-3} + 1$ Elevar al cuadrado cada lado.

$2x - 5 = x - 2 + 2\sqrt{x-3}$ Combinar términos semejantes.

$x - 3 = 2\sqrt{x-3}$ Aislar $2\sqrt{x-3}$.

$x^2 - 6x + 9 = 4(x - 3)$ Escribir en forma general.

$x^2 - 10x + 21 = 0$ Escribir en forma general.

$(x - 3)(x - 7) = 0$ Factorizar

$x - 3 = 0 \Rightarrow x = 3$ Igualar a 0 el 1er factor.

$x - 7 = 0 \Rightarrow x = 7$ Igualar a 0 el 2º factor

Las solucione son $x = 3$ y $x = 7$. Compruébelo en la ecuación original.

PUNTO *de repaso* Ahora trate de hacer el Ejercicio 129.

Tip de estudio

Cuando una ecuación contiene dos radicales, puede no ser posible aislar ambos. En tales casos, puede ser necesario elevar cada lado de la ecuación a una potencia en dos etapas en la solución, como se ve en el Ejemplo 12(b).

Ejemplo 13 Resolver una ecuación con un exponente racional

$(x - 4)^{2/3} = 25$ Ecuación original

$\sqrt[3]{(x-4)^2} = 25$ Reescribir en forma radical.

$(x - 4)^2 = 15\,625$ Elevar al cubo cada lado.

$x - 4 = \pm 125$ Tomar raíz cuadrada de cada lado.

$x = 129, \quad x = -121$ Sumar 4 a cada lado.

PUNTO *de repaso* Ahora trate de hacer el Ejercicio 137.

Ecuaciones con valores absolutos

Para resolver una ecuación con un valor absoluto, recuerde que la expresión dentro de los signos de valor absoluto puede ser positiva o negativa. Esto resulta en dos ecuaciones separadas, cada una de las cuales debe resolverse. Por ejemplo, la ecuación

$$|x - 2| = 3$$

resulta en las dos ecuaciones $x - 2 = 3$ y $-(x - 2) = 3$, que implica que la ecuación tiene dos soluciones: $x = 5$ y $x = -1$.

Ejemplo 14 Resolver una ecuación que tiene valor absoluto

Resuelva $|x^2 - 3x| = -4x + 6$.

Solución

Como la expresión variable dentro de los signos de valor absoluto puede ser positiva o negativa, es necesario resolver las siguientes dos ecuaciones.

Primera ecuación

$$x^2 - 3x = -4x + 6$$ Usar expresión positiva.

$$x^2 + x - 6 = 0$$ Escribir en forma general

$$(x + 3)(x - 2) = 0$$ Factorizar.

$$x + 3 = 0 \Rightarrow x = -3$$ Igualar a 0 el 1er factor.

$$x - 2 = 0 \Rightarrow x = 2$$ Igualar a 0 el 2º factor

Segunda ecuación

$$-(x^2 - 3x) = -4x + 6$$ Usar expresión negativa.

$$x^2 - 7x + 6 = 0$$ Escribir en forma general.

$$(x - 1)(x - 6) = 0$$ Factorizar.

$$x - 1 = 0 \Rightarrow x = 1$$ Igualar a 0 el 1er factor.

$$x - 6 = 0 \Rightarrow x = 6$$ Igualar a 0 el 2º factor.

Comprobación

$$|(-3)^2 - 3(-3)| \stackrel{?}{=} -4(-3) + 6$$ Sustituir -3 por x.

$$18 = 18$$ -3 está bien. ✓

$$|(2)^2 - 3(2)| \stackrel{?}{=} -4(2) + 6$$ Sustituir 2 por x.

$$2 \neq -2$$ no está bien.

$$|(1)^2 - 3(1)| \stackrel{?}{=} -4(1) + 6$$ Sustituir 1 por x.

$$2 = 2$$ 1 está bien. ✓

$$|(6)^2 - 3(6)| \stackrel{?}{=} -4(6) + 6$$ Sustituir 6 por x.

$$18 \neq -18$$ 6 no está bien.

Las soluciones son $x = -3$ y $x = 1$.

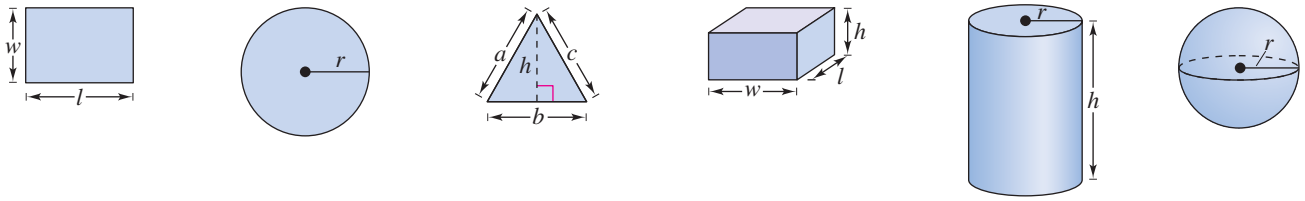
PUNTO *de repaso* Ahora trate de hacer el Ejercicio 151.

Fórmulas comunes

Las siguientes fórmulas geométricas se usan en varias ocasiones en todo este curso. Para comodidad del lector, algunas de estas fórmulas junto con varias otras también se ven al final de este texto.

Fórmulas comunes para área *A*, perímetro *P*, circunferencia *C* y volumen *V*

Rectángulo	*Círculo*	*Triángulo*	*Sólido rectangular*	*Cilindro circular*	*Esfera*
$A = lw$	$A = \pi r^2$	$A = \frac{1}{2}bh$	$V = lwh$	$V = \pi r^2 h$	$V = \frac{4}{3}\pi r^3$
$P = 2l + 2w$	$C = 2\pi r$	$P = a + b + c$			



Ejemplo 15 Usar una fórmula geométrica

Una lata cilíndrica tiene un volumen de 200 centímetros cúbicos (cm^3) y un radio de 4 centímetros (cm), como se ve en la Figura A.13. Encuentre la altura de la lata.

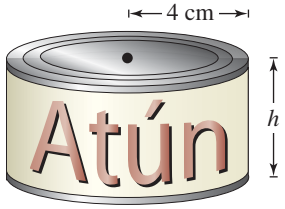


FIGURA A.13

Solución

La fórmula para el *volumen de un cilindro* es $V = \pi r^2 h$. Para hallar la altura de la lata, despeje h.

$$h = \frac{V}{\pi r^2}$$

A continuación, usando $V = 200$ y $r = 4$, encuentre la altura.

$$h = \frac{200}{\pi(4)^2}$$ Sustituir 200 por V y 4 por r.

$$= \frac{200}{16\pi}$$ Simplificar denominador.

$$\approx 3.98$$ Usar una calculadora.

Como el valor de h ha sido redondeado en la solución, una prueba de ésta no resultará en una igualdad. Si la solución es válida, las expresiones a cada lado del signo igual serán aproximadamente iguales entre sí.

$$V = \pi r^2 h$$ Escribir la ecuación original.

$$200 \stackrel{?}{\approx} \pi(4)^2(3.98)$$ Sustituir 200 por V, 4 por r y 3.98 por h.

$$200 \approx 200.06$$ La solución está bien. ✓

También se puede usar análisis unitario para comprobar que la respuesta es razonable

$$\frac{200\ \text{cm}^3}{16\pi\ \text{cm}^2} \approx 3.98\ \text{cm}$$

PUNTO *de repaso* Ahora trate de hacer el Ejercicio 157.

A.5 EJERCICIOS

En www.CalcChat.com vea las soluciones a los ejercicios impares.

VOCABULARIO: Llene los espacios en blanco.

1. Una _____ es un enunciado que iguala dos expresiones algebraicas.
2. Una ecuación lineal con una variable es una ecuación que se puede escribir en la forma estándar _____.
3. Cuando se resuelve una ecuación, es posible introducir una solución _____, que es un valor que no satisface la ecuación original.
4. Los cuatro métodos que se pueden usar para resolver una ecuación cuadrática son _____, _____, _____ y el _____.

HABILIDADES Y APLICACIONES

En los Ejercicios 5-12, determine si la ecuación es una identidad o una ecuación condicional.

5. $4(x + 1) = 4x + 4$
6. $2(x - 3) = 7x - 1$
7. $-6(x - 3) + 5 = -2x + 10$
8. $3(x + 2) - 5 = 3x + 1$
9. $4(x + 1) - 2x = 2(x + 2)$
10. $x^2 + 2(3x - 2) = x^2 + 6x - 4$
11. $3 + \dfrac{1}{x + 1} = \dfrac{4x}{x + 1}$
12. $\dfrac{5}{x} + \dfrac{3}{x} = 24$

En los Ejercicios 13-26, resuelva la ecuación y compruebe su solución.

13. $x + 11 = 15$
14. $7 - x = 19$
15. $7 - 2x = 25$
16. $7x + 2 = 23$
17. $8x - 5 = 3x + 20$
18. $7x + 3 = 3x - 17$
19. $4y + 2 - 5y = 7 - 6y$
20. $3(x + 3) = 5(1 - x) - 1$
21. $x - 3(2x + 3) = 8 - 5x$
22. $9x - 10 = 5x + 2(2x - 5)$
23. $\dfrac{3x}{8} - \dfrac{4x}{3} = 4$
24. $\dfrac{x}{5} - \dfrac{x}{2} = 3 + \dfrac{3x}{10}$
25. $\frac{3}{2}(z + 5) - \frac{1}{4}(z + 24) = 0$
26. $0.60x + 0.40(100 - x) = 50$

En los Ejercicios 27-42, resuelva la ecuación y compruebe su solución. (Si no es posible, explique por qué.)

27. $x + 8 = 2(x - 2) - x$
28. $8(x + 2) - 3(2x + 1) = 2(x + 5)$
29. $\dfrac{100 - 4x}{3} = \dfrac{5x + 6}{4} + 6$
30. $\dfrac{17 + y}{y} + \dfrac{32 + y}{y} = 100$
31. $\dfrac{5x - 4}{5x + 4} = \dfrac{2}{3}$
32. $\dfrac{15}{x} - 4 = \dfrac{6}{x} + 3$
33. $3 = 2 + \dfrac{2}{z + 2}$
34. $\dfrac{1}{x} + \dfrac{2}{x - 5} = 0$
35. $\dfrac{x}{x + 4} + \dfrac{4}{x + 4} + 2 = 0$
36. $\dfrac{7}{2x + 1} - \dfrac{8x}{2x - 1} = -4$
37. $\dfrac{2}{(x - 4)(x - 2)} = \dfrac{1}{x - 4} + \dfrac{2}{x - 2}$
38. $\dfrac{1}{x - 2} + \dfrac{3}{x + 3} = \dfrac{4}{x^2 + x - 6}$
39. $\dfrac{3}{x^2 - 3x} + \dfrac{4}{x} = \dfrac{1}{x - 3}$
40. $\dfrac{6}{x} - \dfrac{2}{x + 3} = \dfrac{3(x + 5)}{x^2 + 3x}$
41. $(x + 2)^2 + 5 = (x + 3)^2$
42. $(2x + 1)^2 = 4(x^2 + x + 1)$

En los Ejercicios 43-46, escriba la ecuación cuadrática en forma general.

43. $2x^2 = 3 - 8x$
44. $13 - 3(x + 7)^2 = 0$
45. $\frac{1}{5}(3x^2 - 10) = 18x$
46. $x(x + 2) = 5x^2 + 1$

En los Ejercicios 47-58, resuelva la ecuación cuadrática por factorización.

47. $6x^2 + 3x = 0$
48. $9x^2 - 4 = 0$
49. $x^2 - 2x - 8 = 0$
50. $x^2 - 10x + 9 = 0$
51. $x^2 - 12x + 35 = 0$
52. $4x^2 + 12x + 9 = 0$
53. $3 + 5x - 2x^2 = 0$
54. $2x^2 = 19x + 33$
55. $x^2 + 4x = 12$
56. $\frac{1}{8}x^2 - x - 16 = 0$
57. $x^2 + 2ax + a^2 = 0$, a es un número real
58. $(x + a)^2 - b^2 = 0$, a y b son números reales

En los Ejercicios 59-70, resuelva la ecuación al extraer raíces cuadradas

59. $x^2 = 49$
60. $x^2 = 32$
61. $3x^2 = 81$
62. $9x^2 = 36$
63. $(x - 12)^2 = 16$
64. $(x + 13)^2 = 25$

65. $(x + 2)^2 = 14$ **66.** $(x - 5)^2 = 30$

67. $(2x - 1)^2 = 18$ **68.** $(2x + 3)^2 - 27 = 0$

69. $(x - 7)^2 = (x + 3)^2$ **70.** $(x + 5)^2 = (x + 4)^2$

En los Ejercicios 71-80, resuelva la ecuación cuadrática al completar el cuadrado.

71. **72.**

73. **74.**

75. **76.**

77. **78.**

79. **80.**

En los Ejercicios 81-98, use la fórmula cuadrática para resolver la ecuación.

81. **82.**

83. **84.**

85. **86.**

87. **88.**

89. **90.**

91. **92.**

93. **94.**

95. **96.**

97. **98.**

En los Ejercicios 99-104, use la fórmula cuadrática para resolver la ecuación. (Redondee la respuesta a tres lugares decimales).

99.

100.

101.

102.

103.

104.

En los Ejercicios 105-112, resuelva la ecuación usando cualquier método conveniente.

105. **106.**

107. **108.**

109. **110.**

111.

112. y son números reales,

En los Ejercicios 113-126, encuentre todas las soluciones reales de la ecuación. Compruebe las soluciones en la ecuación original.

113. **114.**

115. **116.**

117.

118.

119.

120.

121.

122.

123. **124.**

125. **126.**

En los Ejercicios 127-154, encuentre todas las soluciones de la ecuación. Compruébelas en la ecuación original.

127. **128.**

129. **130.**

131. **132.**

133. **134.**

135. **136.**

137. **138.**

139. **140.**

141.

142.

143. **144.**

145. **146.**

147. **148.**

149. **150.**

151. **152.**

153. **154.**

ANTROPOLOGÍA En los Ejercicios 155 y 156, use la siguiente información. La relación entre la longitud del fémur de un adulto y la estatura de éste puede ser aproximada por las ecuaciones lineales.

Mujer

Hombre

donde y es la longitud del fémur en pulgadas y x es la estatura de la persona en pulgadas (vea figura).

155. Un antropólogo descubre un fémur perteneciente a una mujer adulta. El hueso mide 16 pulgadas de largo. Estime la estatura de la mujer.

156. A partir de los huesos del pie de un hombre adulto, un antropólogo estima que la estatura de la persona era de 69 pulgadas. A pocos pies de distancia donde se hallaron los huesos del pie, el antropólogo descubre el fémur de una mujer adulta que mide 19 pulgadas de largo. ¿Es probable que los huesos del pie y el fémur provengan de la misma persona?

157. VOLUMEN DE UNA BOLA DE BILLAR Una bola de billar tiene un volumen de 5.96 pulgadas cúbicas. Encuentre el radio de una bola de billar.

158. LONGITUD DE UN TANQUE El diámetro de un tanque cilíndrico de gas propano es 4 pies. El volumen total del tanque es de 603.2 pies cúbicos. Encuentre la longitud del tanque.

159. GEOMETRÍA Un señalamiento de "Vehículo de baja velocidad" tiene la forma de triángulo equilátero. El señalamiento tiene un perímetro de 129 centímetros. Encuentre la longitud de cada lado del señalamiento y el área de éste.

160. GEOMETRÍA El radio de un cono de tráfico es de 14 centímetros y el área de superficie lateral del cono es de 1617 centímetros cuadrados. Encuentre la altura del cono.

161. POBLACIÓN VOTANTE El total de población P en edad de votar (en millones) en Estados Unidos, de 1990 a 2006, puede ser modelado con

$$P = \frac{182.17 - 1.542t}{1 - 0.018t}, \quad 0 \le t \le 16$$

donde t representa el año, con $t = 0$ correspondiente a 1990 (Source: U.S. Census Bureau)

(a) ¿En qué año llegó a 200 millones el total de población en edad de votar?

(b) Use el modelo para pronosticar el año en el que el total de población en edad de votar llegará a 241 millones. ¿Es razonable esta predicción? Explique.

162. PASAJEROS DE UNA AEROLÍNEA Una línea aérea ofrece diariamente vuelos entre Chicago y Denver. El costo C total mensual (en millones de dólares) de estos vuelos es $C = \sqrt{0.2x + 1}$, donde x es el número de pasajeros (en miles). El costo total de los vuelos durante junio es 2.5 millones de dólares. ¿Cuántos pasajeros volaron en junio?

EXPLORACIÓN

VERDADERO O FALSO? En los Ejercicios 163 y 164, determine si la proposición es verdadera o falsa. Justifique su respuesta.

163. Una ecuación nunca puede tener más de una solución extraña.

164. Cuando resuelva una ecuación de valor absoluto, siempre tendremos que verificar más de una solución.

165. PIÉNSELO ¿Qué se quiere decir con *ecuaciones equivalentes*? Dé un ejemplo de dos ecuaciones equivalentes.

166. Resuelva $3(x + 4)^2 + (x + 4) - 2 = 0$ en dos fomas.

(a) Sea $u = x + 4$, y de la ecuación resultante despeje u. A continuación despeje x de la solución para u.

(b) Expanda y recolecte términos semejantes en la ecuación, y despeje x de la ecuación resultante.

(c) ¿Cuál método es más fácil? Explique.

PIÉNSELO En los Ejercicios 167-170, escriba una ecuación cuadrática que tenga las soluciones dadas. (Hay numerosas respuestas correctas.)

167. -3 y 6

168. -4 y -11

169. $1 + \sqrt{2}$ y $1 - \sqrt{2}$

170. $-3 + \sqrt{5}$ y $-3 - \sqrt{5}$

En los Ejercicios 171 y 172, considere una ecuación de la forma $x + |x - a| = b$, donde a y b son constantes.

171. Encuentre a y b cuando la solución de la ecuación es $x = 9$. (Hay numerosas respuestas correctas.)

172. ESCRITURA Escriba un breve párrafo que indique los pasos necesarios para resolver esta ecuación que contiene valores absolutos, y explique por qué es importante verificar sus soluciones.

En los Ejercicios 173 y 174, considere una ecuación de la forma $x + \sqrt{x - a} = b$, donde a y b son constantes.

173. Encuentre a y b cuando la solución de la ecuación es $x = 20$. (Hay numerosas respuestas correctas.)

174. ESCRITURA Escriba un breve párrafo que indique los pasos necesarios para resolver esta ecuación que contiene radicales y explique por qué es importante verificar sus soluciones.

175. Resuelva cada ecuación, dado que a y b no son cero.

(a) $ax^2 + bx = 0$

(b) $ax^2 - ax = 0$

176. TOQUE FINAL

(a) Explique la diferencia entre una ecuación condicional y una identidad.

(b) Dé un ejemplo de una ecuación de valor absoluto que tenga sólo una solución.

(c) Exprese la fórmula cuadrática verbalmente.

(d) ¿Elevar cada lado de una ecuación a la n-ésima potencia siempre da una ecuación equivalente? Explique.

A.6 Desigualdades lineales con una variable

Lo que debe aprender

- Representar soluciones de desigualdades lineales con una variable.
- Usar propiedades de desigualdades para crear desigualdades equivalentes.
- Resolver desigualdades lineales con una variable.
- Resolver desigualdades que contengan valores absolutos.
- Usar desigualdades para modelar y resolver problemas prácticos.

Por qué debe aprenderlo

Se pueden usar desigualdades para modelar y resolver problemas de la vida real. Por ejemplo, en el Ejercicio 121 de la página A71 usaremos una desigualdad lineal para analizar el promedio de salario para maestros de escuelas elementales.

Introducción

En el Apéndice A.1 se discutieron desigualdades sencillas. Ahí usamos los símbolos de desigualdad $<$, $\leq$, $>$ y $\geq$ para comparar dos números y denotar subconjuntos de números reales. Por ejemplo, la desigualdad simple

$$x \geq 3$$

denota todos los números reales x que son mayores o iguales a 3.

Ahora expandiremos nuestro trabajo con desigualdades para incluir enunciados más complejos como

$$5x - 7 < 3x + 9$$

y

$$-3 \leq 6x - 1 < 3.$$

Al igual que en una ecuación, se **resuelve una desigualdad** en la variable x al hallar todos los valores de x para los que la desigualdad sea verdadera. Estos valores son **soluciones** y se dice que **satisfacen** la desigualdad. El conjunto de todos los números reales que son soluciones de una desigualdad es el **conjunto solución** de la desigualdad. Por ejemplo, el conjunto solución de

$$x + 1 < 4$$

es todos los números reales que sean menores a 3.

El conjunto de todos los puntos sobre la recta de números reales que represente el conjunto solución es la **gráfica de la desigualdad**. Las gráficas de numerosos tipos de desigualdades están formadas por intervalos en la recta de números reales. Vea el Apéndice A.1 para repasar los nueve tipos básicos de intervalos en la recta de números reales. Observe que cada tipo de intervalo puede ser clasificado como *acotado* o *no acotado*.

Ejemplo 1 Intervalos y desigualdades

Escriba una desigualdad para representar cada intervalo y diga si el intervalo es acotado o no acotado.

a. $(-3, 5]$

b. $(-3, \infty)$

c. $[0, 2]$

d. $(-\infty, \infty)$

Solución

a. $(-3, 5]$ corresponde a $-3 < x \leq 5$. Acotado

b. $(-3, \infty)$ corresponde a $-3 < x$. No acotado

c. $[0, 2]$ corresponde a $0 \leq x \leq 2$. Acotado

d. $(-\infty, \infty)$ corresponde a $-\infty < x < \infty$. No acotado

PUNTO *de repaso* Ahora trate de hacer el Ejercicio 9.

Propiedades de las desigualdades

Los procedimientos para resolver desigualdades lineales con una variable son muy semejantes a los que hay para resolver ecuaciones lineales. Para aislar la variable, se puede hacer uso de las **propiedades de las desigualdades**. Estas propiedades son semejantes a las de las igualdades, pero hay dos excepciones importantes. Cuando cada lado de una desigualdad se multiplica o se divide entre un número negativo, la dirección del símbolo de desigualdad debe invertirse. A continuación veamos un ejemplo

$$-2 < 5 \qquad \text{Desigualdad original}$$

$$(-3)(-2) > (-3)(5) \qquad \text{Multiplicar cada lado por } -3 \text{ e invierta la desigualdad.}$$

$$6 > -15 \qquad \text{Simplificar.}$$

Observe que si la desigualdad no se invierte, se obtendría el enunciado falso de $6 < -15$.

Dos desigualdades que tienen el mismo conjunto de solución son **equivalentes.** Por ejemplo, las desigualdades

$$x + 2 < 5$$

y

$$x < 3$$

son equivalentes. Para obtener la segunda desigualdad a partir de la primera, se puede restar 2 de cada lado de la desigualdad. La lista siguiente describe las operaciones que se pueden usar para crear desigualdades equivalentes.

Propiedades de las desigualdades

Sean a, b, c y d números reales.

1. Propiedad transitiva

$$a < b \text{ y } b < c \Rightarrow a < c$$

2. Suma de desigualdades

$$a < b \text{ y } c < d \Rightarrow a + c < b + d$$

3. Suma de una constante

$$a < b \Rightarrow a + c < b + c$$

4. Multiplicación por una constante

$$\text{Para } c > 0, a < b \Rightarrow ac < bc$$

$$\text{Para } c < 0, a < b \Rightarrow ac > bc \qquad \text{Invertir la desigualdad.}$$

Cada una de las propiedades citadas es verdadera si el símbolo $<$ se sustituye con $\leq$ y el símbolo $>$ con $\geq$. Por ejemplo, otra forma de la propiedad de multiplicación sería como sigue.

$$\text{Para } c > 0, a \leq b \Rightarrow ac \leq bc$$

$$\text{Para } c < 0, a \leq b \Rightarrow ac \geq bc$$

Resolver una desigualdad lineal con una variable

El tipo más sencillo de desigualdad es una **desigualdad lineal** con una variable. Por ejemplo $2x + 3 > 4$ es una desigualdad lineal en x.

En los siguientes ejemplos, preste especial atención a los pasos en los que se invierte el signo de desigualdad. Recuerde que cuando multiplique o divida entre un número negativo, debe invertir el símbolo de desigualdad.

Ejemplo 2 Resolver una desigualdad lineal

Resuelva $5x - 7 > 3x + 9$.

Solución

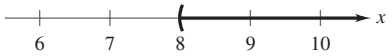
$$5x - 7 > 3x + 9$$ Escribir la desigualdad original.

$$2x - 7 > 9$$ Restar $3x$ de cada lado.

$$2x > 16$$ Sumar 7 a cada lado.

$$x > 8$$ Dividir cada lado entre 2.

El conjunto solución es todos los números reales que sean mayores a 8, lo cual se denota con $(8, \infty)$. La gráfica de esta solución es el conjunto solución que se muestra en la Figura A.14. Observe que un paréntesis en 8 en la recta de números reales indica que el 8 *no es* parte del conjunto solución.



Intervalo de solución: $(8, \infty)$

FIGURA A.14

PUNTO *de repaso* Ahora trate de hacer el Ejercicio 35.

> **Tip de estudio**
>
> Comprobar el conjunto solución de una desigualdad no es tan fácil como comprobar las soluciones de una igualdad, pero se puede obtener una indicación de la validez de un conjunto solución al sustituir unos cuantos valores convenientes de x. Por citar un caso, en el Ejemplo 2, trate de sustituir $x = 5$ y $x = 10$ en la desigualdad original.

Ejemplo 3 Resolver una desigualdad lineal

Resuelva $1 - \frac{3}{2}x \geq x - 4$.

Solución algebraica

$$1 - \frac{3x}{2} \geq x - 4$$ Escribir la ecuación original.

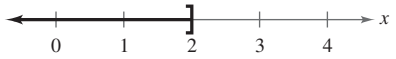
$$2 - 3x \geq 2x - 8$$ Multiplicar cada lado por 2.

$$2 - 5x \geq -8$$ Restar $2x$ de cada lado.

$$-5x \geq -10$$ Restar 2 de cada lado.

$$x \leq 2$$ Dividir cada lado entre -5 e invertir la desigualdad.

El conjunto solución es todos los números reales que sean menores o iguales a 2, lo cual se denota con $(-\infty, 2]$. La gráfica de este conjunto solución se muestra en la Figura A.15. Nótese que un corchete en el 2 sobre la recta de números reales indica que el 2 *es* parte del conjunto solución.



Intervalo de solución: $(-\infty, 2]$

FIGURA A.15

PUNTO *de repaso* Ahora trate de hacer el Ejercicio 37.

Solución gráfica

Use una calculadora de gráficas para graficar $y_1 = 1 - \frac{3}{2}x$ y $y_2 = x - 4$ en la misma pantalla. En la Figura A.16, se puede ver que las gráficas parecen cruzarse en el punto $(2, -2)$. Use el comando *intersect* de la calculadora de gráficas para confirmar esto. La gráfica de y_1 está arriba de la gráfica de y_2 a la izquierda de su punto de intersección, lo cual implica que $y_1 \geq y_2$ para toda $x \leq 2$.

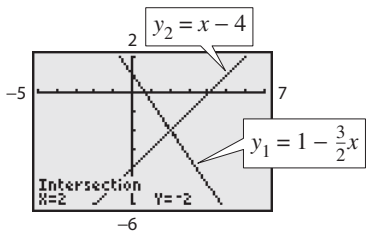


FIGURA A.16

A veces es posible escribir dos desigualdades como una **doble desigualdad.** Por ejemplo, se pueden escribir las dos desigualdades $-4 \leq 5x - 2$ y $5x - 2 < 7$ en forma más sencilla como

$$-4 \leq 5x - 2 < 7.$$ Doble desigualdad

Esta forma permite resolver las dos desigualdades juntas, como se demuestra en el Ejemplo 4.

Ejemplo 4 Resolver una doble desigualdad

Para resolver una doble desigualdad, se puede aislar la x como el término medio.

$$-3 \leq 6x - 1 < 3$$ Desigualdad original

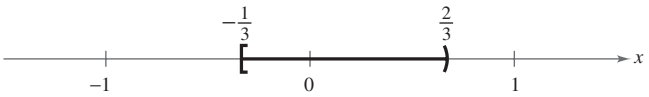
$$-3 + 1 \leq 6x - 1 + 1 < 3 + 1$$ Sumar 1 a cada parte.

$$-2 \leq 6x < 4$$ Simplificar.

$$\frac{-2}{6} \leq \frac{6x}{6} < \frac{4}{6}$$ Dividir cada parte entre 6.

$$-\frac{1}{3} \leq x < \frac{2}{3}$$ Simplificar.

El conjunto solución es todos los números reales que sean mayores o iguales a $-\frac{1}{3}$ y menores a $\frac{2}{3}$, lo cual está denotado con $\left[-\frac{1}{3}, \frac{2}{3}\right)$. La gráfica de este conjunto solución se muestra en la Figura A.17.



Intervalo solución: $\left[-\frac{1}{3}, \frac{2}{3}\right)$

FIGURA A.17

PUNTO *de repaso* Ahora trate de hacer el Ejercicio 47.

La doble desigualdad del Ejemplo 4 podría haberse resuelto en dos partes, como sigue.

$$-3 \leq 6x - 1 \quad \text{y} \quad 6x - 1 < 3$$
$$-2 \leq 6x \qquad\qquad 6x < 4$$
$$-\frac{1}{3} \leq x \qquad\qquad x < \frac{2}{3}$$

El conjunto solución está formado por todos los números reales que satisfacen *ambas* desigualdades. En otras palabras, el conjunto solución es el conjunto de todos los valores de x para los cuales

$$-\frac{1}{3} \leq x < \frac{2}{3}.$$

Cuando combine dos desigualdades para formar una doble desigualdad, asegúrese que las desigualdades satisfagan la propiedad transitiva. Por ejemplo, es *incorrecto* combinar las desigualdades $3 < x$ y $x \leq -1$ como $3 < x \leq -1$. Esta "desigualdad" está mal porque 3 no es menor que -1.

Desigualdades que contienen valores absolutos

Resolver una desigualdad con valor absoluto

Sea x una variable o una expresión algebraica y sea a un número real tal que $a \geq 0$.

1. Las soluciones de $|x| < a$ son todos los valores de x que se encuentren entre $-a$ y a.

$|x| < a$ si y sólo si $-a < x < a$. Doble desigualdad

2. Las soluciones de $|x| > a$ son todos los valores de x que sean menores que $-a$ o mayores que a.

$|x| > a$ si y sólo si $x < -a$ o $x > a$. Desigualdad compuesta

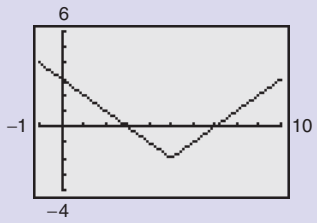
Estas reglas también son válidas si $<$ se sustituye con $\leq$ y $>$ se sustituye con $\geq$.

TECNOLOGÍA

Se puede usar una calculadora de gráficas para identificar el conjunto solución de la gráfica de una desigualdad. Por ejemplo, para hallar el conjunto solución de $|x - 5| < 2$ (vea el Ejemplo 5a), reescriba la desigualdad como $|x - 5| - 2 < 0$, ingrese

$$Y1 = \text{abs}(X - 5) - 2$$

y presione la tecla *graph*. La gráfica debe ser semejante a la mostrada a continuación.



Nótese que la gráfica está abajo del eje x en el intervalo $(3, 7)$.

Ejemplo 5 Resolver una desigualdad con valor absoluto

Resuelva cada una de las siguientes desigualdades.

a. $|x - 5| < 2$ **b.** $|x + 3| \geq 7$

Solución

a. $|x - 5| < 2$ Escribir la desigualdad original.

$-2 < x - 5 < 2$ Escribir desigualdades equivalentes.

$-2 + 5 < x - 5 + 5 < 2 + 5$ Sumar 5 a cada parte.

$3 < x < 7$ Simplificar.

El conjunto solución es todos los números reales que sean mayores a 3 y menores a 7, lo cual se denota con $(3, 7)$. La gráfica de este conjunto solución se muestra en la Figura A.18.

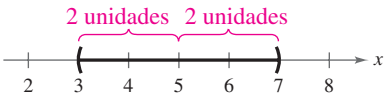
b. $|x + 3| \geq 7$ Escribir la desigualdad original.

$x + 3 \leq -7$ o $x + 3 \geq 7$ Escribir desigualdades equivalentes.

$x + 3 - 3 \leq -7 - 3$ $x + 3 - 3 \geq 7 - 3$ Restar 3 de cada lado.

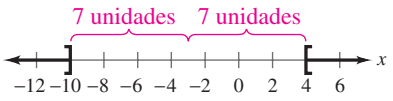
$x \leq -10$ $x \geq 4$ Simplificar.

El conjunto solución es todos los números reales que sean menores o iguales a -10 *o bien*, mayores o iguales a 4. La notación de intervalo para este conjunto solución es $(-\infty, -10] \cup [4, \infty)$. El símbolo $\cup$ se denomina símbolo de *unión* y se usa para denotar la combinación de dos conjuntos. La gráfica de este conjunto solución se muestra en la Figura A.19.



$|x - 5| < 2$: Las soluciones están dentro de $(3, 7)$.

FIGURA A.18



$|x + 3| \geq 7$: Las soluciones están fuera de $(-10, 4)$.

FIGURA A.19

Tip de estudio

Observe que la gráfica de la desigualdad $|x - 5| < 2$ puede describirse como todos los números reales *a no más* de dos unidades de 5, como se muestra en la Figura A.18.

PUNTO *de repaso* Ahora trate de hacer el Ejercicio 61.

Aplicaciones

Se puede usar un plan para modelar y resolver problemas de la vida real que contengan desigualdades, como se ilustra en el Ejemplo 6.

Ejemplo 6 Compras comparativas

Una persona está escogiendo entre dos planes de teléfono celular. El Plan A cuesta \$49.99 por mes para 500 minutos más \$0.40 por cada minuto adicional. El Plan B cuesta \$45.99 por mes para 500 minutos más \$0.45 por cada minuto adicional. ¿Cuántos minutos *adicionales* debe usar en un mes para que el Plan B cueste más que el Plan A?

Solución

Modelo Verbal: Costo mensual para Plan B $>$ Costo mensual para Plan A

Leyendas:
Minutos usados (más de 500) en un mes $= m$ (minutos)
Costo mensual para Plan A $= 0.40m + 49.99$ (dólares)
Costo mensual para Plan B $= 0.45m + 45.99$ (dólares)

Desigualdad: $0.45m + 45.99 > 0.40m + 49.99$

$$0.05m > 4$$

$$m > 80 \text{ minutos}$$

El Plan B cuesta más si se usan más de 80 minutos adicionales en un mes.

PUNTO *de repaso* Ahora trate de hacer el Ejercicio 111.

Ejemplo 7 Precisión de una medición

Una persona va a una dulcería a comprar chocolates que cuestan \$9.89 por libra. La báscula que se usa en la tienda tiene un sello estatal de aprobación que indica que es precisa a una tolerancia de media onza ($\frac{1}{32}$ de libra). De acuerdo con la báscula, la compra pesa media libra y cuesta \$4.95. ¿Cuánto pudo cobrársele de menos o de más como resultado de la imprecisión de la báscula?

Solución

Con x represente el *verdadero* peso del dulce. Como la báscula es precisa a una tolerancia de media onza (o $\frac{1}{32}$ de libra), la diferencia entre el peso exacto (x) y el peso de la báscula $\left(\frac{1}{2}\right)$ es menor o igual a $\frac{1}{32}$ de libra. Esto es, $\left|x - \frac{1}{2}\right| \leq \frac{1}{32}$. Se puede resolver esta desigualdad como sigue.

$$-\frac{1}{32} \leq x - \frac{1}{2} \leq \frac{1}{32}$$

$$\frac{15}{32} \leq x \leq \frac{17}{32}$$

$$0.46875 \leq x \leq 0.53125$$

En otras palabras, la "media libra" de chocolate podría haber pesado sólo 0.46875 de libra (que hubiera costado \$4.64) o hasta 0.53125 de libra (que hubiera costado \$5.25). Por tanto, podría habérsele cobrado de más hasta \$0.31 o de menos hasta \$0.30.

PUNTO *de repaso* Ahora trate de hacer el Ejercicio 125.

A.6 EJERCICIOS

En www.CalcChat.com vea las soluciones a los ejercicios impares.

VOCABULARIO: Llene los espacios en blanco.

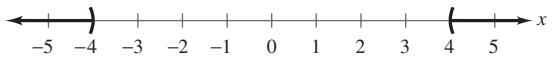
1. El conjunto de todos los números reales que son soluciones de una desigualdad es el _____ _____ _____ de la desigualdad.
2. El conjunto de todos los puntos en la recta de números reales que representa el conjunto solución de una desigualdad es la _____ de ésta.
3. Para resolver una desigualdad con una variable, se pueden usar las propiedades de las desigualdades, que son idénticas a las empleadas para resolver ecuaciones, con excepción de multiplicar o dividir cada lado entre un número _____.
4. Dos desigualdades que tienen el mismo conjunto solución son _____.
5. A veces es posible escribir dos desigualdades como una desigualdad, llamada desigualdad _____.
6. El símbolo $\cup$ se denomina símbolo de _____ y se usa para denotar la combinación de dos conjuntos.

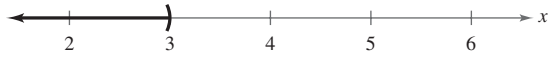
HABILIDADES Y APLICACIONES

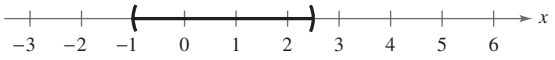
En los Ejercicios 7-14, (a) escriba una desigualdad que represente el intervalo y (b) diga si éste es acotado o no acotado.

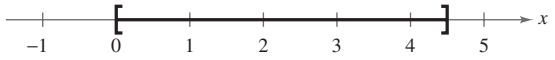
7. $[0, 9)$
8. $(-7, 4)$
9. $[-1, 5]$
10. $(2, 10]$
11. $(11, \infty)$
12. $[-5, \infty)$
13. $(-\infty, -2)$
14. $(-\infty, 7]$

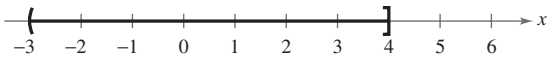
En los Ejercicios 15-22, relacione la desigualdad con su gráfica. [Las gráficas están marcadas (a)-(h).]

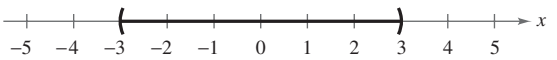
(a)


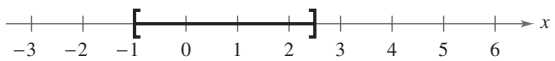
(b)


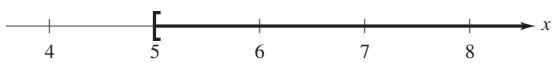
(c)


(d)


(e)


(f)


(g)


(h)


15. $x < 3$
16. $x \geq 5$
17. $-3 < x \leq 4$
18. $0 \leq x \leq \frac{9}{2}$
19. $|x| < 3$
20. $|x| > 4$
21. $-1 \leq x \leq \frac{5}{2}$
22. $-1 < x < \frac{5}{2}$

En los Ejercicios 23-28, determine si cada uno de los valores de x es una solución de la desigualdad.

Desigualdad	*Valores*	
23. $5x - 12 > 0$	(a) $x = 3$	(b) $x = -3$
	(c) $x = \frac{5}{2}$	(d) $x = \frac{3}{2}$
24. $2x + 1 < -3$	(a) $x = 0$	(b) $x = -\frac{1}{4}$
	(c) $x = -4$	(d) $x = -\frac{3}{2}$
25. $0 < \frac{x-2}{4} < 2$	(a) $x = 4$	(b) $x = 10$
	(c) $x = 0$	(d) $x = \frac{7}{2}$
26. $-5 < 2x - 1 \leq 1$	(a) $x = -\frac{1}{2}$	(b) $x = -\frac{5}{2}$
	(c) $x = \frac{4}{3}$	(d) $x = 0$
27. $\lvert x - 10 \rvert \geq 3$	(a) $x = 13$	(b) $x = -1$
	(c) $x = 14$	(d) $x = 9$
28. $\lvert 2x - 3 \rvert < 15$	(a) $x = -6$	(b) $x = 0$
	(c) $x = 12$	(d) $x = 7$

En los Ejercicios 29-56, resuelva la desigualdad y trace la solución en la recta de números reales. (Algunas desigualdades no tienen solución.)

29. $4x < 12$
30. $10x < -40$
31. $-2x > -3$
32. $-6x > 15$
33. $x - 5 \geq 7$
34. $x + 7 \leq 12$
35. $2x + 7 < 3 + 4x$
36. $3x + 1 \geq 2 + x$
37. $2x - 1 \geq 1 - 5x$
38. $6x - 4 \leq 2 + 8x$
39. $4 - 2x < 3(3 - x)$
40. $4(x + 1) < 2x + 3$
41. $\frac{3}{4}x - 6 \leq x - 7$
42. $3 + \frac{2}{7}x > x - 2$
43. $\frac{1}{2}(8x + 1) \geq 3x + \frac{5}{2}$
44. $9x - 1 < \frac{3}{4}(16x - 2)$
45. $3.6x + 11 \geq -3.4$
46. $15.6 - 1.3x < -5.2$
47. $1 < 2x + 3 < 9$
48. $-8 \leq -(3x + 5) < 13$
49. $-8 \leq 1 - 3(x - 2) < 13$
50. $0 \leq 2 - 3(x + 1) < 20$
51. $-4 < \frac{2x - 3}{3} < 4$
52. $0 \leq \frac{x + 3}{2} < 5$

53. $\frac{3}{4} > x + 1 > \frac{1}{4}$ **54.** $-1 < 2 - \frac{x}{3} < 1$

55. $3.2 \leq 0.4x - 1 \leq 4.4$ **56.** $4.5 > \frac{1.5x + 6}{2} > 10.5$

En los Ejercicios 57-72, resuelva la desigualdad y trace la solución sobre la recta de números reales. (Algunas desigualdades no tienen solución.)

57. $|x| < 5$ **58.** $|x| \geq 8$

59. $\left|\frac{x}{2}\right| > 1$ **60.** $\left|\frac{x}{5}\right| > 3$

61. $|x - 5| < -1$ **62.** $|x - 7| < -5$

63. $|x - 20| \leq 6$ **64.** $|x - 8| \geq 0$

65. $|3 - 4x| \geq 9$ **66.** $|1 - 2x| < 5$

67. $\left|\frac{x - 3}{2}\right| \geq 4$ **68.** $\left|1 - \frac{2x}{3}\right| < 1$

69. $|9 - 2x| - 2 < -1$ **70.** $|x + 14| + 3 > 17$

71. $2|x + 10| \geq 9$ **72.** $3|4 - 5x| \leq 9$

ANÁLISIS GRÁFICO En los Ejercicios 73-82, use una calculadora de gráficas para graficar la desigualdad e identificar el conjunto solución.

73. $6x > 12$ **74.** $3x - 1 \leq 5$

75. $5 - 2x \geq 1$ **76.** $20 < 6x - 1$

77. $4(x - 3) \leq 8 - x$ **78.** $3(x + 1) < x + 7$

79. $|x - 8| \leq 14$ **80.** $|2x + 9| > 13$

81. $2|x + 7| \geq 13$ **82.** $\frac{1}{2}|x + 1| \leq 3$

ANÁLISIS GRÁFICO En los Ejercicios 73-82, use una calculadora de gráficas para graficar la ecuación. Use la gráfica para aproximar los valores de x que satisfagan cada una de las desigualdades.

Ecuación	*Desigualdades*	
83. $y = 2x - 3$	(a) $y \geq 1$	(b) $y \leq 0$
84. $y = \frac{2}{3}x + 1$	(a) $y \leq 5$	(b) $y \geq 0$
85. $y = -\frac{1}{2}x + 2$	(a) $0 \leq y \leq 3$	(b) $y \geq 0$
86. $y = -3x + 8$	(a) $-1 \leq y \leq 3$	(b) $y \leq 0$
87. $y = \|x - 3\|$	(a) $y \leq 2$	(b) $y \geq 4$
88. $y = \left\|\frac{1}{2}x + 1\right\|$	(a) $y \leq 4$	(b) $y \geq 1$

En los Ejercicios 89-94, encuentre el intervalo(s) en la recta de números reales para el que el radicando es no negativo.

89. $\sqrt{x - 5}$ **90.** $\sqrt{x - 10}$

91. $\sqrt{x + 3}$ **92.** $\sqrt{3 - x}$

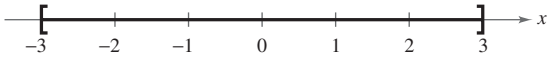
93. $\sqrt[4]{7 - 2x}$ **94.** $\sqrt[4]{6x + 15}$

95. PIÉNSELO La gráfica $|x - 5| < 3$ puede describirse como todos los números reales a no más de tres unidades de 5. Dé una descripción similar de $|x - 10| < 8$.

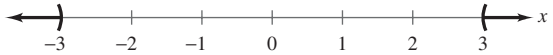
96. PIÉNSELO La gráfica $|x - 2| > 5$ puede describirse como todos los números reales a no más de cinco unidades de 2. Dé una descripción similar de $|x - 8| > 4$.

En los Ejercicios 97-104, use notación de valor absoluto para definir el intervalo (o par de intervalos) en la recta de números reales.

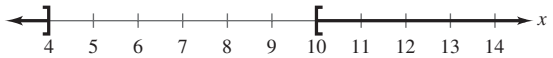
97.



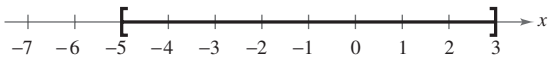
98.



99.



100.



101. Todos los números reales a menos de 10 unidades de 12.

102. Todos los números reales al menos a cinco unidades de 8.

103. Todos los números reales a más de cuatro unidades de -3.

104. Todos los números reales a no más de siete unidades de -6.

En los Ejercicios 105-108, use notación de desigualdad para describir el subconjunto de los números reales.

105. Una compañía espera que sus ganancias por la acción E para el siguiente trimestre sean de no menos de \$4.10 ni más de \$4.25.

106. La producción de petróleo p diaria estimada en una refinería es mayor a 2 millones de barriles pero menor a 2.4 millones de barriles.

107. De acuerdo con un estudio, el porcentaje p de ciudadanos de Estados Unidos que ahora realizan casi todas sus transacciones bancarias en línea es no mayor a 45%.

108. Se espera que el ingreso neto I de una compañía sea no menor a \$239 millones.

FISIOLOGÍA En los Ejercicios 109 y 110, use la siguiente información. La frecuencia cardiaca máxima de una persona de salud normal está relacionada con la edad de la persona mediante la ecuación $r = 220 - A$, donde r es la frecuencia cardiaca máxima en pulsaciones por minuto y A es la edad de la persona en años. Algunos fisiólogos recomiendan que durante una actividad física, una persona sedentaria debe esforzarse por aumentar su frecuencia cardiaca al menos 50% de la frecuencia cardiaca máxima, y una persona en muy buenas condiciones físicas debe esforzarse en aumentarla a lo sumo a un 85% de la frecuencia cardiaca máxima. (Fuente: American Heart Association)

109. Exprese como intervalo la variación de la frecuencia cardiaca objetivo para una persona de 20 años de edad.

110. Exprese como intervalo la variación de la frecuencia cardiaca objetivo para una persona de 40 años de edad.

111. OFERTAS DE TRABAJO Una persona está considerando dos ofertas de trabajo. La primera paga \$13.50 por hora; la segunda, paga \$9.00 por hora más \$0.75 por unidad producida por hora. Escriba una desigualdad que dé el número de unidades x que deben ser producidas por hora para hacer que el segundo trabajo pague más sueldo por hora. Resuelva la desigualdad.

112. OFERTAS DE TRABAJO Una persona está considerando dos ofertas de trabajo. La primera paga \$3000 por mes; la segunda, paga \$1000 por mes más una comisión de 4% de sus ventas brutas. Escriba una desigualdad que dé las ventas brutas x por mes para las que el segundo trabajo pague más sueldo por mes. Resuelva la desigualdad.

113. INVERSIÓN Para que una inversión de \$1000 crezca a más de \$1062.50 en 2 años, ¿cuál debe ser la tasa de interés anual? $[A = P(1 + rt)]$

114. INVERSIÓN Para que una inversión de \$750 crezca a más de \$825 en 2 años, ¿cuál debe ser la tasa de interés anual? $[A = P(1 + rt)]$

115. COSTO, INGRESO Y UTILIDAD El ingreso por vender x unidades de un producto es $R = 115.95x$. El costo de producir x unidades es $C = 95x + 750$. Para obtener una utilidad, el ingreso debe ser mayor al costo. ¿Para qué valores de x dará utilidades este producto?

116. COSTO, INGRESO Y UTILIDAD El ingreso por vender x unidades de un producto es $R = 24.55x$. El costo de producir x unidades es $C = 15.4x + 150\,000$. Para obtener una utilidad, el ingreso debe ser mayor al costo. ¿Para qué valores de x dará utilidades este producto?

117. VENTAS DIARIAS Una panadería que elabora rosquillas vende una docena de éstas en \$4.50. Además de costos fijos (renta, luz, seguros, etc.) de \$220 por día, cuesta \$2.75 en materiales suficientes (harina, azúcar, etc.) y mano de obra para producir una docena de rosquillas. La utilidad diaria por la venta de éstas varía de \$60 a \$270. ¿Entre qué niveles (en docenas) varían las ventas diarias?

118. PROGRAMA DE PÉRDIDA DE PESO Una persona se inscribe en un programa de dieta y ejercicio que garantiza una pérdida de peso de al menos $1\frac{1}{2}$ libras por semana. El peso de la persona al principio del programa es de 164 libras. Encuentre el número máximo de semanas antes de que la persona alcance un peso objetivo de 128 libras.

119. ANÁLISIS DE DATOS: PUNTOS DE IQ Y DE GPA La oficina de inscripciones de un colegio desea determinar si hay una relación entre los puntos x de IQ y el promedio de calificaciones y después del primer año de escuela. Una ecuación que modela los datos obtenidos por la oficina de inscripciones es $y = 0.067x - 5.638$.

(a) Use una calculadora de gráficas para graficar el modelo.

(b) Use la gráfica para estimar los valores de x que predigan un promedio de calificaciones de al menos 3.0.

120. ANÁLISIS DE DATOS: LEVANTAMIENTO DE PESAS Una persona desea determinar si hay relación entre el peso x de un atleta (en libras) y el peso máximo y (en libras) que levanta (estilo *bench-press*). En la tabla siguiente se ve una muestra de datos de 12 atletas.

Peso del atleta, x	Peso que levanta, y
165	170
184	185
150	200
210	255
196	205
240	295
202	190
170	175
185	195
190	185
230	250
160	155

(a) Use una calculadora de gráficas para graficar los datos.

(b) Un modelo para los datos es $y = 1.3x - 36$. Use una calculadora de gráficas para graficar el modelo en la misma pantalla empleada en el inciso (a).

(c) Use la gráfica para estimar los valores de x que pronostiquen un peso máximo de levantamiento de al menos 200 libras.

(d) Verifique algebraicamente su estimación del inciso (c).

(e) Use la gráfica para escribir un enunciado acerca de la precisión del modelo. Si piensa que la gráfica indica que el peso de un atleta no es un indicador particularmente bueno del peso máximo de levantamiento del atleta, haga una lista de otros factores que podrían influir en el peso máximo de levantamiento de una persona.

121. SALARIOS DE MAESTROS El promedio de salarios S (en miles de dólares) para maestros de escuela elemental en Estados Unidos, de 1990 a 2005, está aproximado por el modelo

$$S = 1.09t + 30.9, \quad 0 \le t \le 15$$

donde t representa el año, con $t = 0$ correspondiente a 1990. (Fuente: National Education Association)

(a) De acuerdo con este modelo, ¿cuándo es que el promedio de salario era por lo menos \$32 500 pero no más de \$42 000?

(b) De acuerdo con este modelo, ¿cuándo pasará de \$54 000 el promedio de salario?

122. PRODUCCIÓN DE HUEVO El número de huevos E (en miles de millones) producidos en Estados Unidos, de 1990 a 2006, puede ser modelado por

$$E = 1.52t + 68.0, \quad 0 \le t \le 16$$

donde t representa el año, con $t = 0$ correspondiente a 1990. (Fuente: U.S. Department of Agriculture)

(a) De acuerdo con este modelo, ¿cuándo fue de 70 mil millones la producción anual de huevo, pero no más de 80 mil millones?

(b) De acuerdo con este modelo, ¿cuándo pasará de 100 mil millones la producción anual de huevo?

123. GEOMETRÍA El lado de un cuadrado se mide como 10.4 pulgadas con un error posible de $\frac{1}{16}$ de pulgada. Usando estas mediciones, determine el intervalo que contenga las posibles áreas del cuadrado.

124. GEOMETRÍA El lado de un cuadrado se mide como 24.2 centímetros con un posible error de 0.25 centímetros. Usando estas mediciones, determine el intervalo que contenga las posibles áreas del cuadrado.

125. PRECISIÓN DE MEDICIÓN Un automóvil se detiene en una gasolinera para comprar 15 galones de gasolina de 87 octanos a \$2.09 por galón. La bomba de gasolina es precisa a una tolerancia de no más de $\frac{1}{10}$ de galón. ¿Cuánto podría cobrársele de menos o de más al comprador?

126. PRECISIÓN DE MEDICIÓN Una persona compra 6 chuletas de res que cuestan \$14.99 por libra. El peso marcado en el paquete es 5.72 libras. La báscula que pesó el paquete tiene una tolerancia de $\frac{1}{2}$ onza. ¿Cuánto podría cobrársele de menos o de más al comprador?

127. ESTUDIO DE TIEMPOS Se llevó a cabo un estudio de tiempos para determinar el tiempo necesario para efectuar un trabajo en un proceso de manufactura. El tiempo requerido por alrededor de dos tercios de los trabajadores del estudio satisficieron la desigualdad

$$\left|\frac{t - 15.6}{1.9}\right| < 1$$

donde t es el tiempo en minutos. Determine el intervalo en la recta de números reales en el que se encuentren estos tiempos.

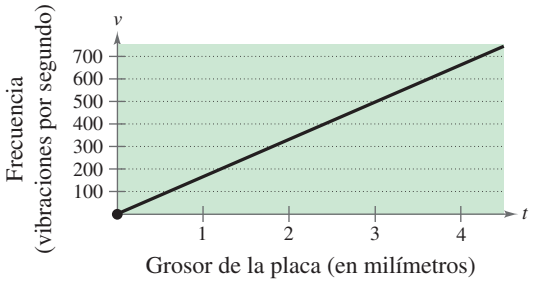
128. ESTATURA Las estaturas h de dos tercios de los miembros de una población satisfacen la desigualdad

$$\left|\frac{h - 68.5}{2.7}\right| \le 1$$

donde h se mide en pulgadas. Determine el intervalo en la recta de números reales en el que se encuentren estas estaturas.

129. METEOROLOGÍA Se pone en operación un aparato electrónico en un ambiente con humedad relativa h en el intervalo definido por $|h - 50| \le 30$. ¿Cuáles son las humedades relativas mínima y máxima para la operación de este aparato?

130. MÚSICA Michael Kasha, de la Universidad de Florida, utilizó física y matemáticas para diseñar una nueva guitarra electrónica. El modelo que utilizó para la frecuencia de las vibraciones en una placa circular fue $v = (2.6t/d^2)\sqrt{E/\rho}$, donde v es la frecuencia (en vibraciones por segundo), t es el grosor (en milímetros) de la placa, d es el diámetro, E es la elasticidad del material y ρ es la densidad de éste. Para valores fijos de d, E y ρ, la gráfica de la ecuación es una recta (vea figura).



(a) Estime la frecuencia cuando el grosor de la placa sea de 2 milímetros.

(b) Estime el grosor de la placa cuando la frecuencia sea de 600 vibraciones por segundo.

(c) Aproxime el intervalo para el grosor de la placa cuando la frecuencia sea entre 200 y 400 vibraciones por segundo.

(d) Aproxime el intervalo para la frecuencia cuando el grosor de la placa sea menor a 3 milímetros.

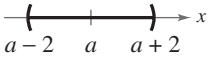
EXPLORACIÓN

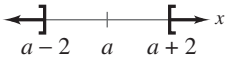
¿VERDADERO O FALSO? En los Ejercicios 131 y 132, determine si la proposición es verdadera o falsa. Justifique su respuesta.

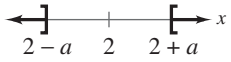
131. Si a, b y c son números reales, y $a \le b$, entonces $ac \le bc$.

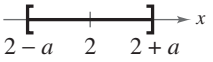
132. Si $-10 \le x \le 8$, entonces $-10 \ge -x$ y $-x \ge -8$.

133. Identifique la gráfica de la desigualdad $|x - a| \ge 2$.

(a) 

(b) 

(c) 

(d) 

134. Encuentre conjuntos de valores de a, b y c tales que $0 \le x \le 10$ sea una solución de la desigualdad $|ax - b| \le c$.

135. Dé un ejemplo de una desigualdad con un conjunto solución no acotado.

136. TOQUE FINAL Describa cualesquiera diferencias entre las propiedades de las igualdades y las propiedades de desigualdades.

A.7 Errores y el álgebra del cálculo

Lo que debe aprender

- Evitar errores algebraicos comunes.
- Reconocer y usar técnicas algebraicas que son comunes en cálculo.

Por qué debe aprenderlo

Un eficiente dominio del álgebra es de importancia decisiva para ser un maestro en este curso y en el estudio del cálculo.

Errores algebraicos que se deben evitar

Esta sección contiene cinco listas de errores algebraicos comunes: errores donde intervienen paréntesis, errores con fracciones, errores con exponentes, errores con radicales y errores en divisiones. Muchos de ellos se cometen porque parecen ser lo *más fácil* de hacer. Por ejemplo, a veces se piensa que las operaciones de resta y división son conmutativas y asociativas. Los siguientes ejemplos ilustran el hecho de que la resta y división no son conmutativas ni asociativas.

No conmutativa

$4 - 3 \neq 3 - 4$

$15 \div 5 \neq 5 \div 15$

No asociativa

$8 - (6 - 2) \neq (8 - 6) - 2$

$20 \div (4 \div 2) \neq (20 \div 4) \div 2$

Errores en paréntesis

Error potencial	*Forma correcta*	*Comentario*
$\cancel{a - (x - b) = a - x - b}$	$a - (x - b) = a - x + b$	Cambiar todos los signos cuando distribuya el signo menos.
$\cancel{(a + b)^2 = a^2 + b^2}$	$(a + b)^2 = a^2 + 2ab + b^2$	Recordar el término medio al elevar binomios al cuadrado.
$\cancel{\left(\frac{1}{2}a\right)\left(\frac{1}{2}b\right) = \frac{1}{2}(ab)}$	$\left(\frac{1}{2}a\right)\left(\frac{1}{2}b\right) = \frac{1}{4}(ab) = \frac{ab}{4}$	$\frac{1}{2}$ se presenta dos veces como factor.
$\cancel{(3x + 6)^2 = 3(x + 2)^2}$	$(3x + 6)^2 = [3(x + 2)]^2$ $= 3^2(x + 2)^2$	Al factorizar, aplicar exponentes a todos los factores.

Errores en fracciones

Error potencial	*Forma correcta*	*Comentario*
$\cancel{\frac{a}{x + b} = \frac{a}{x} + \frac{a}{b}}$	Dejar como $\frac{a}{x + b}$.	No sumar denominadores al sumar fracciones.
$\cancel{\frac{\left(\frac{x}{a}\right)}{b} = \frac{bx}{a}}$	$\frac{\left(\frac{x}{a}\right)}{b} = \left(\frac{x}{a}\right)\left(\frac{1}{b}\right) = \frac{x}{ab}$	Multiplicar por el recíproco al dividir fracciones.
$\cancel{\frac{1}{a} + \frac{1}{b} = \frac{1}{a + b}}$	$\frac{1}{a} + \frac{1}{b} = \frac{b + a}{ab}$	Usar la propiedad para sumar fracciones.
$\cancel{\frac{1}{3x} = \frac{1}{3}x}$	$\frac{1}{3x} = \frac{1}{3} \cdot \frac{1}{x}$	Usar la propiedad para multiplicar fracciones.
$\cancel{(1/3)x = \frac{1}{3x}}$	$(1/3)x = \frac{1}{3} \cdot x = \frac{x}{3}$	Tener cuidado cuando use diagonal para denotar división.
$\cancel{(1/x) + 2 = \frac{1}{x + 2}}$	$(1/x) + 2 = \frac{1}{x} + 2 = \frac{1 + 2x}{x}$	Tener cuidado cuando use diagonal para denotar división, y asegúrese de hallar un denominador común antes de sumar fracciones.

Errores con exponentes

Error potencial	*Forma correcta*	*Comentario*
$\cancel{(x^2)^3 = x^5}$	$(x^2)^3 = x^{2\cdot 3} = x^6$	Multiplicar exponentes al elevar una potencia a otra potencia.
$\cancel{x^2 \cdot x^3 = x^6}$	$x^2 \cdot x^3 = x^{2+3} = x^5$	Sumar exponentes al multiplicar potencias con bases iguales.
$\cancel{2x^3 = (2x)^3}$	$2x^3 = 2(x^3)$	Los exponentes tienen prioridad sobre los coeficientes.
$\cancel{\frac{1}{x^2 - x^3} = x^{-2} - x^{-3}}$	Deje como $\frac{1}{x^2 - x^3}$.	No mover término por término de denominador a numerador.

Errores en radicales

Error potencial	*Forma correcta*	*Comentario*
$\cancel{\sqrt{5x} = 5\sqrt{x}}$	$\sqrt{5x} = \sqrt{5}\sqrt{x}$	Se aplican radicales a todo factor dentro del radical.
$\cancel{\sqrt{x^2 + a^2} = x + a}$	Deje como $\sqrt{x^2 + a^2}$.	No aplicar radicales término por término al sumar o restar términos.
$\cancel{\sqrt{-x + a} = -\sqrt{x - a}}$	Deje como $\sqrt{-x + a}$.	No factorizar signos menos de raíces cuadradas.

Errores al dividir

Error potencial	*Forma correcta*	*Comentario*
$\cancel{\frac{a + bx}{a} = 1 + bx}$	$\frac{a + bx}{a} = \frac{a}{a} + \frac{bx}{a} = 1 + \frac{b}{a}x$	Dividir factores comunes, no términos comunes.
$\cancel{\frac{a + ax}{a} = a + x}$	$\frac{a + ax}{a} = \frac{a(1 + x)}{a} = 1 + x$	Factorizar antes de dividir.
$\cancel{1 + \frac{x}{2x} = 1 + \frac{1}{x}}$	$1 + \frac{x}{2x} = 1 + \frac{1}{2} = \frac{3}{2}$	Dividir factores comunes.

Una buena forma de evitar errores es *trabajar despacio*, *escribir nítidamente* y *hablarse a sí mismo*. Cada vez que escriba un paso, pregúntese por qué es algebraicamente legítimo. Puede justificar el paso siguiente porque *dividir el numerador y denominador entre el mismo número diferente de cero produce una fracción equivalente.*

$$\frac{2x}{6} = \frac{2 \cdot x}{2 \cdot 3} = \frac{x}{3}$$

Ejemplo 1 Usar la propiedad para sumar fracciones

Describa y corrija el error. $\cancel{\frac{1}{2x} + \frac{1}{3x} = \frac{1}{5x}}$

Solución

Cuando sume fracciones, use la propiedad para sumar fracciones: $\frac{1}{a} + \frac{1}{b} = \frac{b + a}{ab}$.

$$\frac{1}{2x} + \frac{1}{3x} = \frac{3x + 2x}{6x^2} = \frac{5x}{6x^2} = \frac{5}{6x}$$

PUNTO *de repaso* Ahora trate de hacer el Ejercicio 19.

Un poco de álgebra de cálculo

En cálculo, con frecuencia es necesario tomar una expresión algebraica simplificada y reescribirla. Vea las listas siguientes tomadas de un texto normal de cálculo.

Factorización poco común

Expresión	*Forma útil de cálculo*	*Comentario*
$\frac{5x^4}{8}$	$\frac{5}{8}x^4$	Escribir con coeficiente fraccionario.
$\frac{x^2 + 3x}{-6}$	$-\frac{1}{6}(x^2 + 3x)$	Escribir con coeficiente fraccionario.
$2x^2 - x - 3$	$2\left(x^2 - \frac{x}{2} - \frac{3}{2}\right)$	Factorizar el coeficiente principal.
$\frac{x}{2}(x + 1)^{-1/2} + (x + 1)^{1/2}$	$\frac{(x + 1)^{-1/2}}{2}[x + 2(x + 1)]$	Factorizar el factor con la potencia más baja.

Escribir con exponentes negativos

Expresión	*Forma útil de cálculo*	*Comentario*
$\frac{9}{5x^3}$	$\frac{9}{5}x^{-3}$	Mover el factor al numerador y cambiar el signo del exponente.
$\frac{7}{\sqrt{2x - 3}}$	$7(2x - 3)^{-1/2}$	Mover el factor al numerador y cambiar el signo del exponente.

Escribir una fracción como suma

Expresión	*Forma útil de cálculo*	*Comentario*
$\frac{x + 2x^2 + 1}{\sqrt{x}}$	$x^{1/2} + 2x^{3/2} + x^{-1/2}$	Dividir cada término entre $x^{1/2}$.
$\frac{1 + x}{x^2 + 1}$	$\frac{1}{x^2 + 1} + \frac{x}{x^2 + 1}$	Reescribir la fracción como una suma de fracciones.
$\frac{2x}{x^2 + 2x + 1}$	$\frac{2x + 2 - 2}{x^2 + 2x + 1}$	Sumar y restar el mismo término.
	$= \frac{2x + 2}{x^2 + 2x + 1} - \frac{2}{(x + 1)^2}$	Reescribir la fracción como una diferencia de fracciones.
$\frac{x^2 - 2}{x + 1}$	$x - 1 - \frac{1}{x + 1}$	Usar división larga. (Vea Sección 2.3.)
$\frac{x + 7}{x^2 - x - 6}$	$\frac{2}{x - 3} - \frac{1}{x + 2}$	Usar el método de fracciones parciales. (Vea Sección

Insertar factores y términos

Expresión	*Forma útil de cálculo*	*Comentario*
$(2x - 1)^3$	$\frac{1}{2}(2x - 1)^3(2)$	Multiplicar y dividir entre 2.
$7x^2(4x^3 - 5)^{1/2}$	$\frac{7}{12}(4x^3 - 5)^{1/2}(12x^2)$	Multiplicar y dividir entre 12.
$\frac{4x^2}{9} - 4y^2 = 1$	$\frac{x^2}{9/4} - \frac{y^2}{1/4} = 1$	Escribir con denominadores fraccionarios.
$\frac{x}{x + 1}$	$\frac{x + 1 - 1}{x + 1} = 1 - \frac{1}{x + 1}$	Sumar y restar el mismo término.

Los siguientes cinco ejemplos demuestran muchos de los pasos expuestos en las listas precedentes.

Ejemplo 2 Factores con exponentes negativos

Factorice $x(x + 1)^{-1/2} + (x + 1)^{1/2}$.

Solución

Cuando multiplique factores con bases semejantes, se suman exponentes. Cuando factoriza, deshace una multiplicación y por tanto *resta* exponentes.

$$\begin{aligned} x(x + 1)^{-1/2} + (x + 1)^{1/2} &= (x + 1)^{-1/2}[x(x + 1)^0 + (x + 1)^1] \\ &= (x + 1)^{-1/2}[x + (x + 1)] \\ &= (x + 1)^{-1/2}(2x + 1) \end{aligned}$$

PUNTO *de repaso* Ahora trate de hacer el Ejercicio 29.

Otra forma de simplificar la expresión del Ejemplo 2 es multiplicar la expresión por una forma fraccionaria de 1 y luego usar la propiedad distributiva.

$$\begin{aligned} x(x + 1)^{-1/2} + (x + 1)^{1/2} &= [x(x + 1)^{-1/2} + (x + 1)^{1/2}] \cdot \frac{(x + 1)^{1/2}}{(x + 1)^{1/2}} \\ &= \frac{x(x + 1)^0 + (x + 1)^1}{(x + 1)^{1/2}} = \frac{2x + 1}{\sqrt{x + 1}} \end{aligned}$$

Ejemplo 3 Insertar factores en una expresión

Inserte el factor requerido: $\frac{x + 2}{(x^2 + 4x - 3)^2} = (\quad)\frac{1}{(x^2 + 4x - 3)^2}(2x + 4)$.

Solución

La expresión del lado derecho de la ecuación es dos veces la expresión del lado izquierdo. Para igualar ambos lados, inserte un factor de $\frac{1}{2}$.

$$\frac{x + 2}{(x^2 + 4x - 3)^2} = \left(\frac{1}{2}\right)\frac{1}{(x^2 + 4x - 3)^2}(2x + 4)$$

El lado derecho se multiplica y divide entre 2.

PUNTO *de repaso* Ahora trate de hacer el Ejercicio 31.

Ejemplo 4 Reescribir fracciones

Explique por qué las dos expresiones son equivalentes.

$$\frac{4x^2}{9} - 4y^2 = \frac{x^2}{\frac{9}{4}} - \frac{y^2}{\frac{1}{4}}$$

Solución

Para escribir la expresión del lado izquierdo de la ecuación en la forma dada en el lado derecho, multiplique los numeradores y denominadores de ambos términos por $\frac{1}{4}$.

$$\frac{4x^2}{9} - 4y^2 = \frac{4x^2}{9}\left(\frac{\frac{1}{4}}{\frac{1}{4}}\right) - 4y^2\left(\frac{\frac{1}{4}}{\frac{1}{4}}\right) = \frac{x^2}{\frac{9}{4}} - \frac{y^2}{\frac{1}{4}}$$

PUNTO *de repaso* Ahora trate de hacer el Ejercicio 35.

Ejemplo 5 Reescribir con exponentes negativos

Reescriba cada expresión usando exponentes negativos.

a. $\dfrac{-4x}{(1-2x^2)^2}$ **b.** $\dfrac{2}{5x^3} - \dfrac{1}{\sqrt{x}} + \dfrac{3}{5(4x)^2}$

Solución

a. $\dfrac{-4x}{(1-2x^2)^2} = -4x(1-2x^2)^{-2}$

b. Empiece por escribir el segundo término en forma exponencial.

$$\frac{2}{5x^3} - \frac{1}{\sqrt{x}} + \frac{3}{5(4x)^2} = \frac{2}{5x^3} - \frac{1}{x^{1/2}} + \frac{3}{5(4x)^2}$$

$$= \frac{2}{5}x^{-3} - x^{-1/2} + \frac{3}{5}(4x)^{-2}$$

PUNTO *de repaso* Ahora trate de hacer el Ejercicio 47.

Ejemplo 6 Escribir una fracción como suma de términos

Reescriba cada fracción como la suma de tres términos.

a. $\dfrac{x^2 - 4x + 8}{2x}$ **b.** $\dfrac{x + 2x^2 + 1}{\sqrt{x}}$

Solución

a. $\dfrac{x^2 - 4x + 8}{2x} = \dfrac{x^2}{2x} - \dfrac{4x}{2x} + \dfrac{8}{2x}$

$$= \frac{x}{2} - 2 + \frac{4}{x}$$

b. $\dfrac{x + 2x^2 + 1}{\sqrt{x}} = \dfrac{x}{x^{1/2}} + \dfrac{2x^2}{x^{1/2}} + \dfrac{1}{x^{1/2}}$

$$= x^{1/2} + 2x^{3/2} + x^{-1/2}$$

PUNTO *de repaso* Ahora trate de hacer el Ejercicio 51.

A.7 EJERCICIOS

En www.CalcChat.com vea las soluciones a los ejercicios impares.

VOCABULARIO: Llene los espacios en blanco.

1. Para escribir la expresión $\frac{3}{x^5}$ con exponentes negativos, mueva x^5 al _____ y cambie el signo del exponente.
2. Cuando divida fracciones, multiplique por el _____.

HABILIDADES Y APLICACIONES

En los Ejercicios 3-22, describa y corrija el error.

3. $2x - (3y + 4) = 2x - 3y + 4$
4. $5z + 3(x - 2) = 5z + 3x - 2$
5. $\frac{4}{16x - (2x + 1)} = \frac{4}{14x + 1}$
6. $\frac{1 - x}{(5 - x)(-x)} = \frac{x - 1}{x(x - 5)}$
7. $(5z)(6z) = 30z$
8. $x(yz) = (xy)(xz)$
9. $a\left(\frac{x}{y}\right) = \frac{ax}{ay}$
10. $(4x)^2 = 4x^2$
11. $\sqrt{x + 9} = \sqrt{x} + 3$
12. $\sqrt{25 - x^2} = 5 - x$
13. $\frac{2x^2 + 1}{5x} = \frac{2x + 1}{5}$
14. $\frac{6x + y}{6x - y} = \frac{x + y}{x - y}$
15. $\frac{1}{a^{-1} + b^{-1}} = \left(\frac{1}{a + b}\right)^{-1}$
16. $\frac{1}{x + y^{-1}} = \frac{y}{x + 1}$
17. $(x^2 + 5x)^{1/2} = x(x + 5)^{1/2}$
18. $x(2x - 1)^2 = (2x^2 - x)^2$
19. $\frac{3}{x} + \frac{4}{y} = \frac{7}{x + y}$
20. $\frac{1}{2y} = (1/2)y$
21. $\frac{x}{2y} + \frac{y}{3} = \frac{x + y}{2y + 3}$
22. $5 + (1/y) = \frac{1}{5 + y}$

En los Ejercicios 23-44, inserte el factor necesario en los paréntesis.

23. $\frac{5x + 3}{4} = \frac{1}{4}(\quad)$
24. $\frac{7x^2}{10} = \frac{7}{10}(\quad)$
25. $\frac{2}{3}x^2 + \frac{1}{3}x + 5 = \frac{1}{3}(\quad)$
26. $\frac{3}{4}x + \frac{1}{2} = \frac{1}{4}(\quad)$
27. $x^2(x^3 - 1)^4 = (\quad)(x^3 - 1)^4(3x^2)$
28. $x(1 - 2x^2)^3 = (\quad)(1 - 2x^2)^3(-4x)$
29. $2(y - 5)^{1/2} + y(y - 5)^{-1/2} = (y - 5)^{-1/2}(\quad)$
30. $3t(6t + 1)^{-1/2} + (6t + 1)^{1/2} = (6t + 1)^{-1/2}(\quad)$
31. $\frac{4x + 6}{(x^2 + 3x + 7)^3} = (\quad)\frac{1}{(x^2 + 3x + 7)^3}(2x + 3)$
32. $\frac{x + 1}{(x^2 + 2x - 3)^2} = (\quad)\frac{1}{(x^2 + 2x - 3)^2}(2x + 2)$
33. $\frac{3}{x} + \frac{5}{2x^2} - \frac{3}{2}x = (\quad)(6x + 5 - 3x^3)$
34. $\frac{(x - 1)^2}{169} + (y + 5)^2 = \frac{(x - 1)^3}{169(\quad)} + (y + 5)^2$
35. $\frac{25x^2}{36} + \frac{4y^2}{9} = \frac{x^2}{(\quad)} + \frac{y^2}{(\quad)}$
36. $\frac{5x^2}{9} - \frac{16y^2}{49} = \frac{x^2}{(\quad)} - \frac{y^2}{(\quad)}$
37. $\frac{x^2}{3/10} - \frac{y^2}{4/5} = \frac{10x^2}{(\quad)} - \frac{5y^2}{(\quad)}$
38. $\frac{x^2}{5/8} + \frac{y^2}{6/11} = \frac{8x^2}{(\quad)} + \frac{11y^2}{(\quad)}$
39. $x^{1/3} - 5x^{4/3} = x^{1/3}(\quad)$
40. $3(2x + 1)x^{1/2} + 4x^{3/2} = x^{1/2}(\quad)$
41. $(1 - 3x)^{4/3} - 4x(1 - 3x)^{1/3} = (1 - 3x)^{1/3}(\quad)$
42. $\frac{1}{2\sqrt{x}} + 5x^{3/2} - 10x^{5/2} = \frac{1}{2\sqrt{x}}(\quad)$
43. $\frac{1}{10}(2x + 1)^{5/2} - \frac{1}{6}(2x + 1)^{3/2} = \frac{(2x + 1)^{3/2}}{15}(\quad)$
44. $\frac{3}{7}(t + 1)^{7/3} - \frac{3}{4}(t + 1)^{4/3} = \frac{3(t + 1)^{4/3}}{28}(\quad)$

En los Ejercicios 45-50, escriba la expresión usando exponentes negativos.

45. $\frac{7}{(x + 3)^5}$
46. $\frac{2 - x}{(x + 1)^{3/2}}$
47. $\frac{2x^5}{(3x + 5)^4}$
48. $\frac{x + 1}{x(6 - x)^{1/2}}$
49. $\frac{4}{3x} + \frac{4}{x^4} - \frac{7x}{\sqrt[3]{2x}}$
50. $\frac{x}{x - 2} + \frac{1}{x^2} + \frac{8}{3(9x)^3}$

En los Ejercicios 51-56, escriba la fracción como una suma de dos o más términos.

51. $\frac{x^2 + 6x + 12}{3x}$
52. $\frac{x^3 - 5x^2 + 4}{x^2}$
53. $\frac{4x^3 - 7x^2 + 1}{x^{1/3}}$
54. $\frac{2x^5 - 3x^3 + 5x - 1}{x^{3/2}}$
55. $\frac{3 - 5x^2 - x^4}{\sqrt{x}}$
56. $\frac{x^3 - 5x^4}{3x^2}$

En los Ejercicios 57-68, simplifique la expresión.

57. $\dfrac{-2(x^2-3)^{-3}(2x)(x+1)^3-3(x+1)^2(x^2-3)^{-2}}{[(x+1)^3]^2}$

58. $\dfrac{x^5(-3)(x^2+1)^{-4}(2x)-(x^2+1)^{-3}(5)x^4}{(x^5)^2}$

59. $\dfrac{(6x+1)^3(27x^2+2)-(9x^3+2x)(3)(6x+1)^2(6)}{[(6x+1)^3]^2}$

60. $\dfrac{(4x^2+9)^{1/2}(2)-(2x+3)\left(\frac{1}{2}\right)(4x^2+9)^{-1/2}(8x)}{[(4x^2+9)^{1/2}]^2}$

61. $\dfrac{(x+2)^{3/4}(x+3)^{-2/3}-(x+3)^{1/3}(x+2)^{-1/4}}{[(x+2)^{3/4}]^2}$

62. $(2x-1)^{1/2}-(x+2)(2x-1)^{-1/2}$

63. $\dfrac{2(3x-1)^{1/3}-(2x+1)\left(\frac{1}{3}\right)(3x-1)^{-2/3}(3)}{(3x-1)^{2/3}}$

64. $\dfrac{(x+1)\left(\frac{1}{2}\right)(2x-3x^2)^{-1/2}(2-6x)-(2x-3x^2)^{1/2}}{(x+1)^2}$

65. $\dfrac{1}{(x^2+4)^{1/2}}\cdot\dfrac{1}{2}(x^2+4)^{-1/2}(2x)$

66. $\dfrac{1}{x^2-6}(2x)+\dfrac{1}{2x+5}(2)$

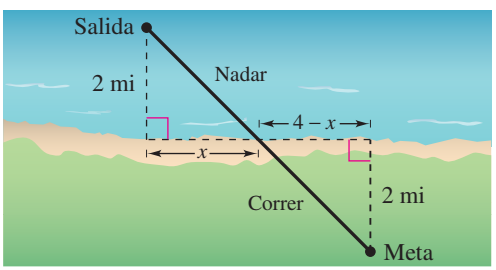
67. $(x^2+5)^{1/2}\left(\frac{3}{2}\right)(3x-2)^{1/2}(3)$
$+(3x-2)^{3/2}\left(\frac{1}{2}\right)(x^2+5)^{-1/2}(2x)$

68. $(3x+2)^{-1/2}(3)(x-6)^{1/2}(1)$
$+(x-6)^3\left(-\frac{1}{2}\right)(3x+2)^{-3/2}(3)$

69. ATLETISMO Una atleta ha preparado un curso para entrenar como parte de su régimen de preparación para un próximo triatlón. Ella es lanzada de un bote a 2 millas del punto más cercano en la orilla. La línea de meta está 4 millas más adelante en la costa y 2 millas tierra adentro (vea la figura). Ella puede nadar 2 millas por hora y correr 6 millas por hora. El tiempo t (en horas) necesario para que llegue a la línea de meta puede ser aproximado por el modelo

$$t=\frac{\sqrt{x^2+4}}{2}+\frac{\sqrt{(4-x)^2+4}}{6}$$

donde x es la distancia costa abajo (en millas) al punto en el que nada y luego sale del agua para empezar a correr.



(a) Encuentre el tiempo necesario para que la triatleta llegue a la meta cuando nada a los puntos $x=0.5$, $x=1.0,\ldots,x=3.5$ y $x=4.0$ millas costa abajo.

(b) Use sus resultados del inciso (a) para determinar la distancia costa abajo que dará el tiempo mínimo necesario para que la triatleta llegue a la línea de meta.

(c) La expresión siguiente se obtuvo usando cálculo. Puede ser empleada para hallar el tiempo mínimo necesario para que la triatleta llegue a la línea de meta. Simplifique la expresión.

$$\tfrac{1}{2}x(x^2+4)^{-1/2}+\tfrac{1}{6}(x-4)(x^2-8x+20)^{-1/2}$$

70. (a) Verifique analíticamente que $y_1=y_2$.

$$y_1=x^2\left(\frac{1}{3}\right)(x^2+1)^{-2/3}(2x)+(x^2+1)^{1/3}(2x)$$

$$y_2=\frac{2x(4x^2+3)}{3(x^2+1)^{2/3}}$$

(b) Complete la tabla y demuestre numéricamente la igualdad del inciso (a).

x	-2	-1	$-\frac{1}{2}$	0	1	2	$\frac{5}{2}$
y_1							
y_2							

EXPLORACIÓN

71. ESCRITURA Escriba un párrafo que explique a un compañero de clase por qué

$$\frac{1}{(x-2)^{1/2}+x^4}\neq(x-2)^{-1/2}+x^{-4}.$$

72. TOQUE FINAL Usted está tomando un curso de cálculo y para uno de los problemas de tarea obtiene la siguiente respuesta.

$$\frac{1}{10}(2x-1)^{5/2}+\frac{1}{6}(2x-1)^{3/2}$$

La respuesta que aparece en la parte final del libro es $\frac{1}{15}(2x-1)^{3/2}(3x+1)$. Demuestre cómo se puede obtener la segunda respuesta a partir de la primera. A continuación, use la misma técnica para simplificar cada una de las siguientes expresiones.

(a) $\dfrac{2}{3}x(2x-3)^{3/2}-\dfrac{2}{15}(2x-3)^{5/2}$

(b) $\dfrac{2}{3}x(4+x)^{3/2}-\dfrac{2}{15}(4+x)^{5/2}$

Respuestas a ejercicios impares y exámenes

Capítulo 1

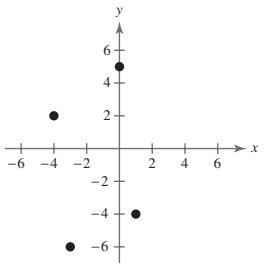
Sección 1.1 *(página 8)*

1. (a) v (b) vi (c) i (d) iv (e) iii (f) ii

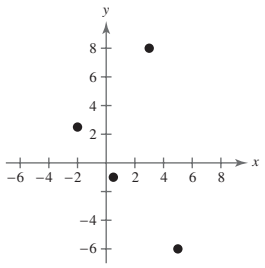
3. Fórmula de la distancia

5. A: $(2, 6)$, B: $(-6, -2)$, C: $(4, -4)$, D: $(-3, 2)$

7.



9.

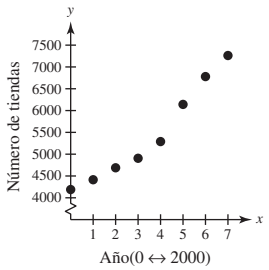


11. $(-3, 4)$ **13.** $(-5, -5)$ **15.** Cuarto cuadrante

17. Segundo cuadrante **19.** Tercer y cuarto cuadrantes

21. Tercer cuadrante **23.** Primer o tercer cuadrantes

25.



27. 8 **29.** 5 **31.** 13 **33.** $\sqrt{61}$ **35.** $\frac{\sqrt{277}}{6}$

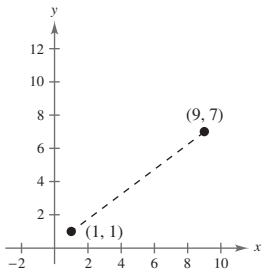
37. 8.47 **39.** (a) 4, 3, 5 (b) $4^2 + 3^2 = 5^2$

41. (a) 10, 3, $\sqrt{109}$ (b) $10^2 + 3^2 = \left(\sqrt{109}\right)^2$

43. $\left(\sqrt{5}\right)^2 + \left(\sqrt{45}\right)^2 = \left(\sqrt{50}\right)^2$

45. Distancias entre los puntos: $\sqrt{29}$, $\sqrt{58}$, $\sqrt{29}$

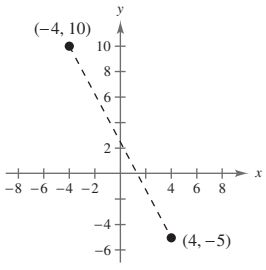
47. (a)



(b) 10

(c) $(5, 4)$

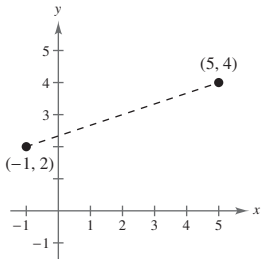
49. (a)



(b) 17

(c) $\left(0, \frac{5}{2}\right)$

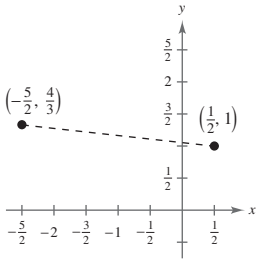
51. (a)



(b) $2\sqrt{10}$

(c) $(2, 3)$

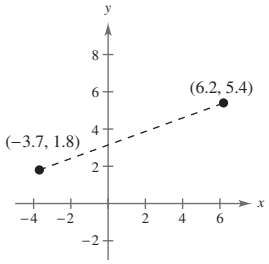
53. (a)



(b) $\frac{\sqrt{82}}{3}$

(c) $\left(-1, \frac{7}{6}\right)$

55. (a)



(b) $\sqrt{110.97}$

(c) $(1.25, 3.6)$

57. $30\sqrt{41} \approx 192$ km **59.** \$4415 millones

61. $(0, 1)$, $(4, 2)$, $(1, 4)$ **63.** $(-3, 6)$, $(2, 10)$, $(2, 4)$, $(-3, 4)$

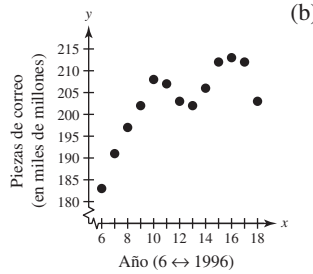
65. \$3.87/gal; 2007

67. (a) Aprox. 9.6% (b) Aprox. 28.6%

69. El número de artistas elegidos cada año parece ser casi constante excepto para los años medios. Cinco artistas serán elegidos en 2010.

71. \$24 331 millones

73. (a)



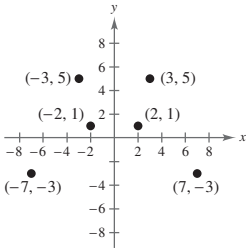
(b) 2008

(c) Las respuestas variarán. Respuesta de muestra: la tecnología ahora hace posible transportar información en muchas formas además de correo. Internet es un ejemplo.

75. $(2x_m - x_1, 2y_m - y_1)$

77. $\left(\frac{3x_1 + x_2}{4}, \frac{3y_1 + y_2}{4}\right), \left(\frac{x_1 + x_2}{2}, \frac{y_1 + y_2}{2}\right), \left(\frac{x_1 + 3x_2}{4}, \frac{y_1 + 3y_2}{4}\right)$

79.



(a) El punto es reflejado por el eje y.
(b) El punto es reflejado por el eje x.
(c) El punto es reflejado por el origen.

81. Falso. La fórmula del punto medio se usaría 15 veces.

83. No. Depende de las magnitudes de las cantidades medidas.

85. Use la fórmula del punto medio para demostrar que las diagonales del paralelogramo se bisecan entre sí.

$$\left(\frac{b+a}{2}, \frac{c+0}{2}\right) = \left(\frac{a+b}{2}, \frac{c}{2}\right)$$

$$\left(\frac{a+b+0}{2}, \frac{c+0}{2}\right) = \left(\frac{a+b}{2}, \frac{c}{2}\right)$$

Sección 1.2 *(página 21)*

1. Solución o punto de solución **3.** Intersecciones

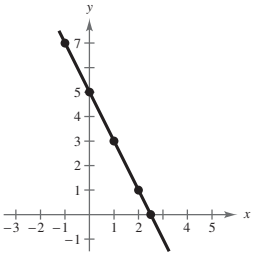
5. Circunferencia; (h, k); r

7. (a) Sí (b) Sí **9.** (a) Sí (b) No

11. (a) Sí (b) No **13.** (a) No (b) Sí

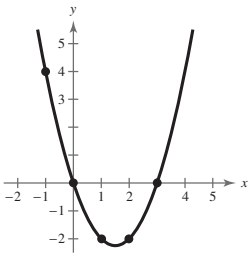
15.

x	-1	0	1	2	$\frac{5}{2}$
y	7	5	3	1	0
(x, y)	$(-1, 7)$	$(0, 5)$	$(1, 3)$	$(2, 1)$	$\left(\frac{5}{2}, 0\right)$



17.

x	-1	0	1	2	3
y	4	0	-2	-2	0
(x, y)	$(-1, 4)$	$(0, 0)$	$(1, -2)$	$(2, -2)$	$(3, 0)$



19. Intersección con el eje x: $(3, 0)$
Intersección con el eje y: $(0, 9)$

21. Intersección con el eje x: $(-2, 0)$
Intersección con el eje y: $(0, 2)$

23. intersección con el eje x: $\left(\frac{6}{5}, 0\right)$
intersección con el eje y: $(0, -6)$

25. intersección con el eje x: $(-4, 0)$
intersección con el eje y: $(0, 2)$

27. intersección con el eje x: $\left(\frac{7}{3}, 0\right)$
intersección con el eje y: $(0, 7)$

29. intersección con el eje x: $(0, 0), (2, 0)$
intersección con el eje y: $(0, 0)$

31. intersección con el eje x: $(6, 0)$
intersección con el eje y: $\left(0, \pm\sqrt{6}\right)$

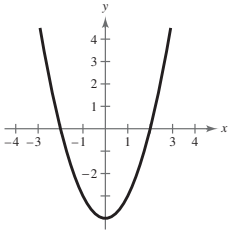
33. Simetría con eje y

35. Simetría con el origen

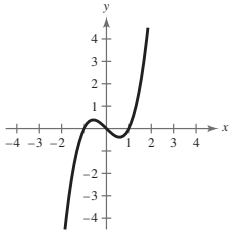
37. Simetría con el origen

39. Simetría con el eje x

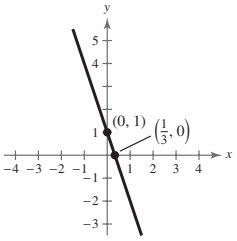
41.



43.

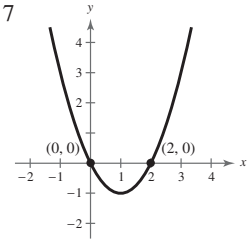


45. Intersección con el eje x: $\left(\frac{1}{3}, 0\right)$
Intersección con el eje y: $(0, 1)$
No hay simetría

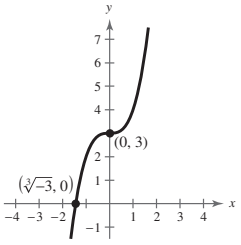


47. Intersección con el eje x: $(0, 0), (2, 0)$
Intersección con el eje y: $(0, 0)$
No hay simetría

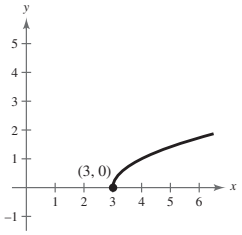
7



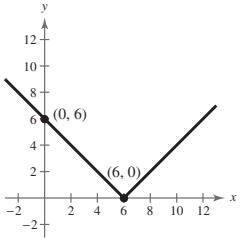
49. Intersección con el eje x: $\left(\sqrt[3]{-3}, 0\right)$
Intersección con el eje y: $(0, 3)$
No hay simetría



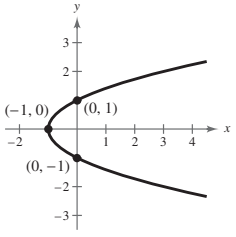
51. Intersección con el eje x: $(3, 0)$
Intersección con el eje y ninguna
No hay simetría



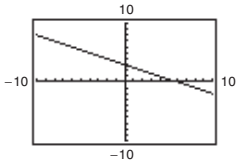
53. Intersección con el eje x: $(6, 0)$
Intersección con el eje y: $(0, 6)$
No hay simetría



55. Intersección con el eje x: $(-1, 0)$
Intersección con el eje y: $(0, \pm 1)$
Simetría con eje x

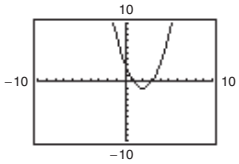


57.



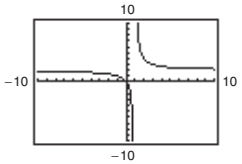
Intersecciones: (6, 0), (0, 3)

59.



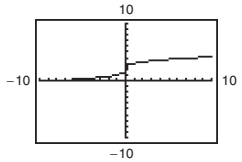
Intersecciones: (3, 0), (1, 0), (0, 3)

61.



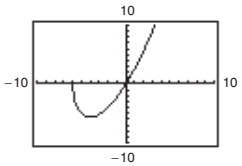
Intersección: (0, 0)

63.



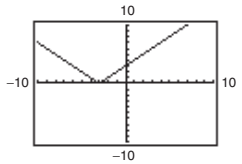
Intersecciones: (−8, 0), (0, 2)

65.



Intersecciones: (0, 0), (−6, 0)

67.



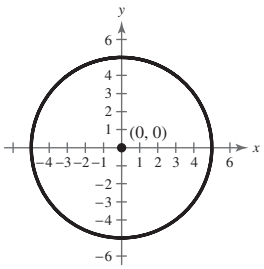
Intersecciones: (−3, 0), (0, 3)

69. $x^2 + y^2 = 16$ **71.** $(x - 2)^2 + (y + 1)^2 = 16$

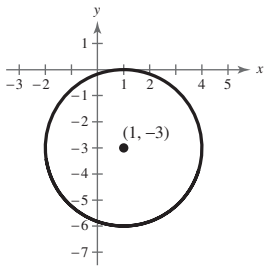
73. $(x + 1)^2 + (y - 2)^2 = 5$

75. $(x - 3)^2 + (y - 4)^2 = 25$

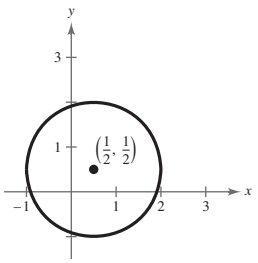
77. Centro: (0, 0); radio: 5



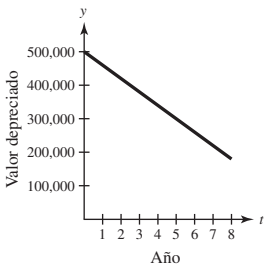
79. Centro: (1, −3); radio: 3



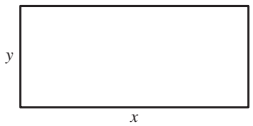
81. Centro: $\left(\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right)$; radio: $\frac{3}{2}$



83.

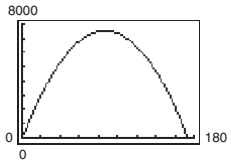


85. (a)



(b) Las respuestas variarán.

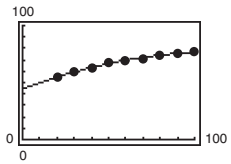
(c)



(d) $x = 86\frac{2}{3}$, $y = 86\frac{2}{3}$

(e) Un campo de juego reglamentario de la NFL mide 120 yardas de largo y $53\frac{1}{3}$ de ancho. El área real es 6400 yardas cuadradas.

87. (a)



(b) 75.66 años

(c) 1993

El modelo se ajusta muy bien a los datos.

(d) La proyección dada por el modelo, 77.2 años, es menor.

(e) Las respuestas variarán.

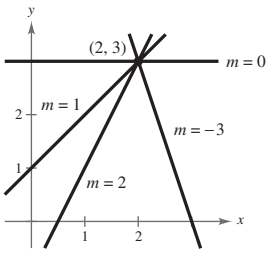
89. (a) $a = 1, b = 0$ (b) $a = 0, b = 1$

Sección 1.3 *(página 33)*

1. Lineal **3.** Paralelo **5.** Rapidez o tasa de cambio

7. General **9.** (a) L_2 (b) L_3 (c) L_1

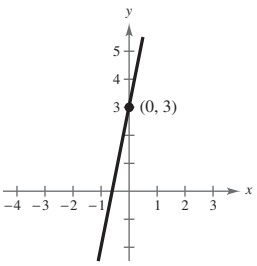
11.



13. $\frac{3}{2}$ **15.** -4

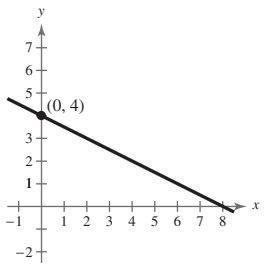
17. $m = 5$

intersección con el eje y: (0, 3)

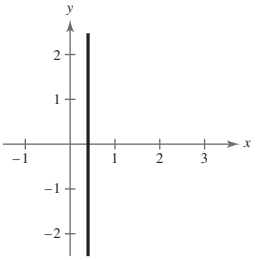


19. $m = -\frac{1}{2}$

intersección con el eje y: (0, 4)

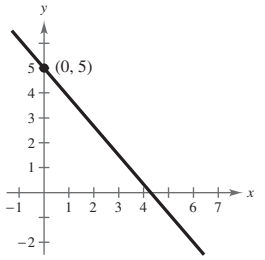


21. m no está definida. No hay intersección con el eje y.

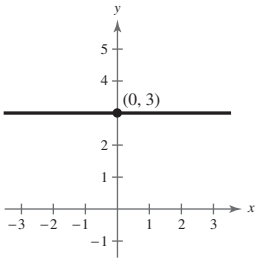


23. $m = -\frac{7}{6}$

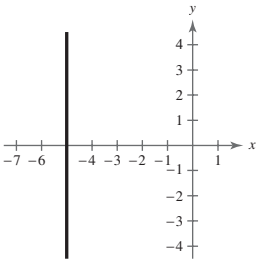
intersección con el eje y: (0, 5)



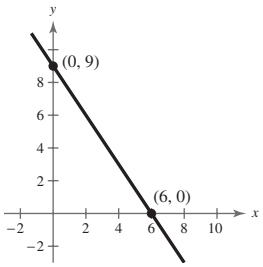
25. $m = 0$
intersección con el eje y: $(0, 3)$



27. m o está definida.
No hay intersección con el eje y.

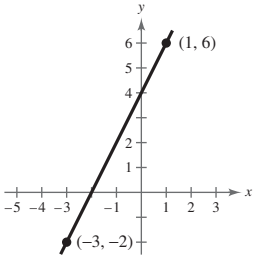


29.



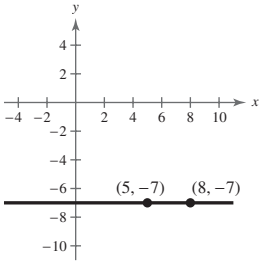
$m = -\frac{3}{2}$

31.



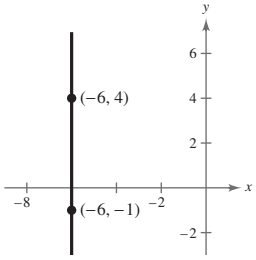
$m = 2$

33.



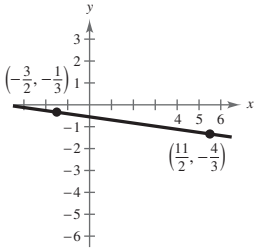
$m = 0$

35.



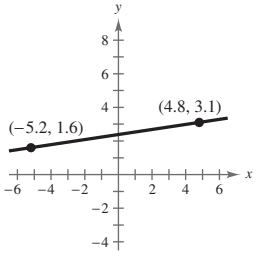
m no está definida.

37.



$m = -\frac{1}{7}$

39.



$m = 0.15$

41. $(0, 1), (3, 1), (-1, 1)$

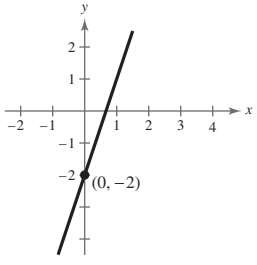
43. $(6, -5), (7, -4), (8, -3)$

45. $(-8, 0), (-8, 2), (-8, 3)$

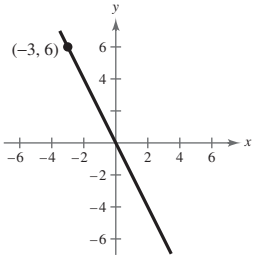
47. $(-4, 6), (-3, 8), (-2, 10)$

49. $(9, -1), (11, 0), (13, 1)$

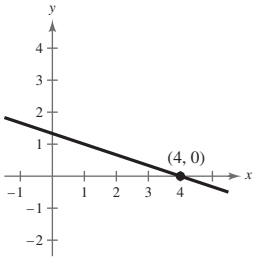
51. $y = 3x - 2$



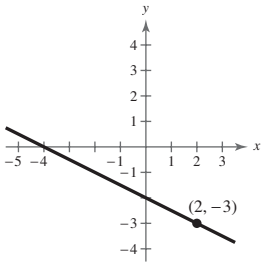
53. $y = -2x$



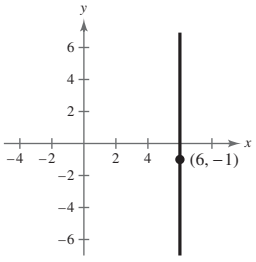
55. $y = -\frac{1}{3}x + \frac{4}{3}$



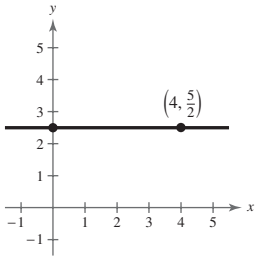
57. $y = -\frac{1}{2}x - 2$



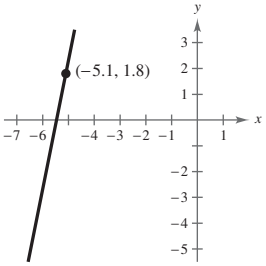
59. $x = 6$



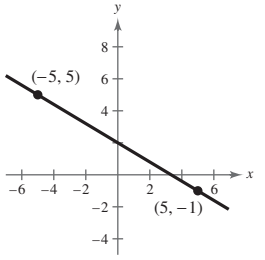
61. $y = \frac{5}{2}$



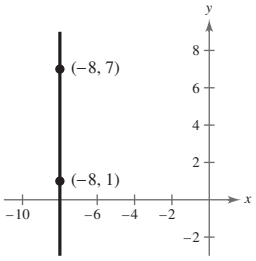
63. $y = 5x + 27.3$



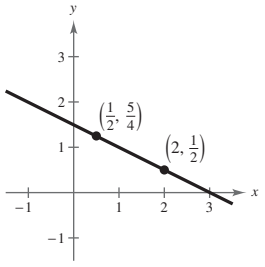
65. $y = -\frac{3}{5}x + 2$



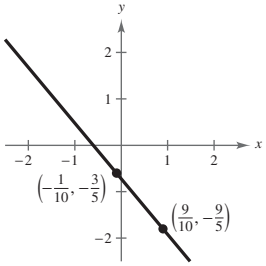
67. $x = -8$



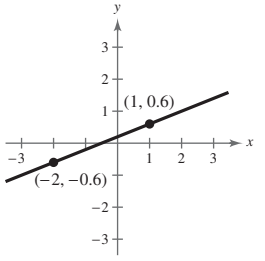
69. $y = -\frac{1}{2}x + \frac{3}{2}$



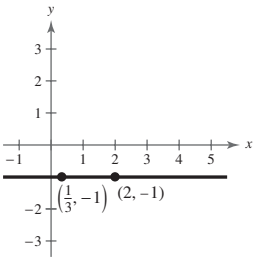
71. $y = -\frac{6}{5}x - \frac{18}{25}$



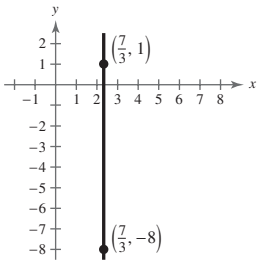
73. $y = 0.4x + 0.2$



75. $y = -1$



77. $x = \frac{7}{3}$



79. Paralelas **81.** Ninguna **83.** Perpendiculares

85. Paralelas **87.** (a) $y = 2x - 3$ (b) $y = -\frac{1}{2}x + 2$

89. (a) $y = -\frac{3}{4}x + \frac{3}{8}$ (b) $y = \frac{4}{3}x + \frac{127}{72}$

91. (a) $y = 0$ (b) $x = -1$

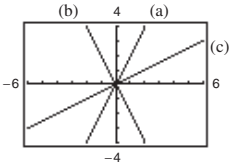
93. (a) $x = 3$ (b) $y = -2$

95. (a) $y = x + 4.3$ (b) $y = -x + 9.3$

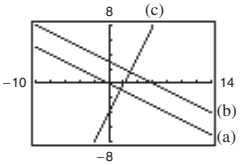
97. $3x + 2y - 6 = 0$ **99.** $12x + 3y + 2 = 0$

101. $x + y - 3 = 0$

103. La recta (b) es perpendicular a la recta (c).



105. La recta (a) es paralela a la recta (b).
La recta (c) es perpendicular a la recta (a) y a la recta (b)



107. $3x - 2y - 1 = 0$ **109.** $80x + 12y + 139 = 0$

111. (a) Las ventas aumentan en 135 unidades/año
(b) No hay cambio en las ventas
(c) Las ventas bajan en 40 unidades/año

113. (a) El salario promedio aumentó más de 2006 a 2008 y disminuyó menos de 2002 a 2004.
(b) $m = 2350.75$
(c) El salario promedio aumentó \$2350.75 por año en los 12 años entre 1996 y 2008.

115. 12 ft **117.** $V(t) = 3790 - 125t$

119. Intersección V: costo inicial; pendiente: depreciación anual

121. $V = -175t + 875$ **123.** $S = 0.8L$

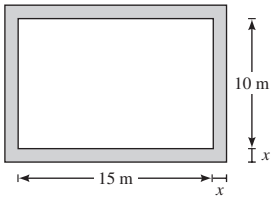
125. $W = 0.07S + 2500$

127. $y = 0.03125t + 0.92875$; $y(22) \approx \$1.62$; $y(24) \approx \$1.68$

129. (a) $y(t) = 442.625t + 40\,571$
(b) $y(10) = 44\,997$; $y(15) = 47\,210$
(c) $m = 442.625$; cada año, la inscripción aumenta en alrededor de 443 estudiantes.

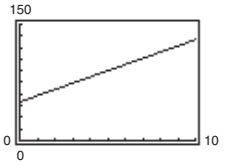
131. (a) $C = 18t + 42\,000$ (b) $R = 30t$
(c) $P = 12t - 42\,000$ (d) $t = 3500$ h

133. (a)



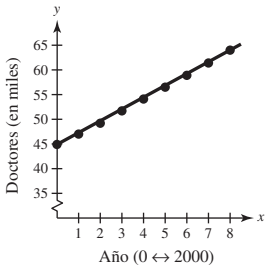
(b) $y = 8x + 50$

(c)



(d) $m = 8$, 8 m

135. (a) y (b)



(c) Las respuestas variarán. Respuesta de muestra: $y = 2.39x + 44.9$
(d) Las respuestas variarán. Respuesta de muestra: la intersección con el eje y indica que en 2000 había 44 900 doctores de medicina osteopática. La pendiente significa que el número de doctores aumenta en 2390 cada año.
(e) El modelo es preciso.
(f) Las respuestas variarán. Respuesta de muestra: 73 600

137. Falso. La pendiente con máxima magnitud corresponde a la recta más inclinada.

139. Encuentre la distancia entre cada dos puntos y use el teorema de Pitágoras.

141. No. La pendiente no puede ser determinada sin saber la escala en el eje y. Las pendientes podrían ser iguales.

143. La recta $y = 4x$ sube con más rapidez, y la recta $y = -4x$ baja con más rapidez. Cuanto mayor es la magnitud de la pendiente (el valor absoluto de la pendiente), más rápido sube o baja la recta.

145. No. Las pendientes de dos rectas perpendiculares tienen signos opuestos (suponga que ninguna recta es vertical u horizontal).

Sección 1.4 *(página 48)*

1. Dominio; rango; función **3.** Independiente; Dependiente

5. Dominio implicado **7.** Sí **9.** No

11. Sí, el valor de cada entrada tiene exactamente un valor de salida

13. No, los valores de entrada 7 y 10 tienen cada uno dos valores diferentes de salida.

15. (a) Función
(b) No es una función, porque el elemento 1 en A corresponde a dos elementos, -2 y 1, en B.
(c) Función
(d) No es una función, porque no todo elemento en A está relacionado con un elemento en B.

17. Cada uno es una función. Para cada año corresponde una y sólo una circulación.
19. No es una función **21.** Función **23.** Función
25. No es una función **27.** No es una función **29.** Función
31. Función **33.** No es una función **35.** Función
37. (a) -1 (b) -9 (c) $2x - 5$
39. (a) 36π (b) $\frac{9}{2}\pi$ (c) $\frac{32}{3}\pi r^3$
41. (a) 15 (b) $4t^2 - 19t + 27$ (c) $4t^2 - 3t - 10$
43. (a) 1 (b) 2.5 (c) $3 - 2|x|$
45. (a) $-\frac{1}{9}$ (b) No definida (c) $\frac{1}{y^2 + 6y}$
47. (a) 1 (b) -1 (c) $\frac{|x-1|}{x-1}$
49. (a) -1 (b) 2 (c) 6 **51.** (a) -7 (b) 4 (c) 9
53.

x	-2	-1	0	1	2
$f(x)$	1	-2	-3	-2	1

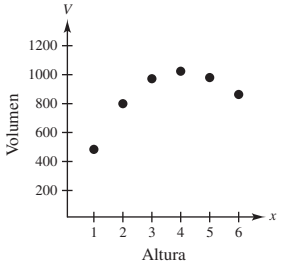
55.

t	-5	-4	-3	-2	-1
$h(t)$	1	$\frac{1}{2}$	0	$\frac{1}{2}$	1

57.

x	-2	-1	0	1	2
$f(x)$	5	$\frac{9}{2}$	4	1	0

59. 5 **61.** $\frac{4}{3}$ **63.** ± 3 **65.** $0, \pm 1$ **67.** $-1, 2$
69. $0, \pm 2$ **71.** Todos los números reales x
73. Todos los números reales t excepto $t = 0$
75. Todos los números reales y tales que $y \geq 10$
77. Todos los números reales x excepto $x = 0, -2$
79. Todos los números reales s tales que $s \geq 1$ excepto $s = 4$
81. Todos los números reales x tales que $x > 0$
83. $\{(-2, 4), (-1, 1), (0, 0), (1, 1), (2, 4)\}$
85. $\{(-2, 4), (-1, 3), (0, 2), (1, 3), (2, 4)\}$
87. $A = \frac{P^2}{16}$
89. (a) El volumen máximo es 1024 centímetros cúbicos.
(b)



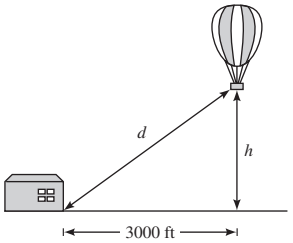
Sí, V es una función de x.
(c) $V = x(24 - 2x)^2, \quad 0 < x < 12$
91. $A = \frac{x^2}{2(x-2)}, \quad x > 2$
93. Sí, la pelota estará a una altura de 6 pies.
95.

1998: \$136 164	2003: \$180 419
1999: \$140 971	2004: \$195 900
2000: \$147 800	2005: \$216 900
2001: \$156 651	2006: \$224 000
2002: \$167 524	2007: \$217 200

97. (a) $C = 12.30x + 98\,000$ (b) $R = 17.98x$
(c) $P = 5.68x - 98\,000$
99. (a) $R = \frac{240n - n^2}{20}, \quad n \geq 80$
(b)

n	90	100	110	120	130	140	150
$R(n)$	\$675	\$700	\$715	\$720	\$715	\$700	\$675

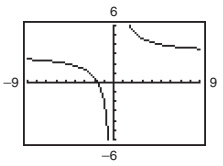
El ingreso es máximo cuando 120 personas toman el viaje.
101. (a)



(b) $h = \sqrt{d^2 - 3000^2}, \quad d \geq 3000$
103. $3 + h, \ h \neq 0$ **105.** $3x^2 + 3xh + h^2 + 3, \ h \neq 0$
107. $-\frac{x+3}{9x^2}, \ x \neq 3$ **109.** $\frac{\sqrt{5x} - 5}{x - 5}$
111. $g(x) = cx^2; \ c = -2$ **113.** $r(x) = \frac{c}{x}; \ c = 32$
115. Falso. Una función es un tipo especial de relación.
117. Falso. El rango es $[-1, \infty)$.
119. Dominio de $f(x)$: todos los números reales $x \geq 1$
Dominio de $g(x)$: todos los números reales $x > 1$
Observe que el dominio de $f(x)$ incluye $x = 1$ y el dominio de $g(x)$ no lo incluye porque no se puede dividir entre 0.
121. No; x es la variable independiente, f es el nombre de la función.
123. (a) Sí. La cantidad que pagó en impuesto de ventas aumentará a medida que aumente el precio del artículo comprado.
(b) No. El tiempo que usted estudie no necesariamente determinará lo bien que haga su examen.

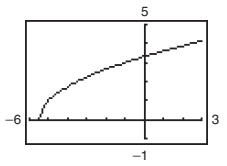
Sección 1.5 *(página 61)*

1. pares ordenados **3.** ceros **5.** máximo **7.** impar
9. Dominio: $(-\infty, -1] \cup [1, \infty)$; rango: $[0, \infty)$
11. Dominio: $[-4, 4]$; rango: $[0, 4]$
13. Dominio: $(-\infty, \infty)$; rango: $[-4, \infty)$
(a) 0 (b) -1 (c) 0 (d) -2
15. Dominio: $(-\infty, \infty)$; rango: $(-2, \infty)$
(a) 0 (b) 1 (c) 2 (d) 3
17. Función **19.** No es función **21.** Función
23. $-\frac{5}{2}, 6$ **25.** 0 **27.** $0, \pm\sqrt{2}$ **29.** $\pm\frac{1}{2}, 6$ **31.** $\frac{1}{2}$
33.

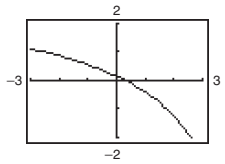


$-\frac{5}{3}$

35.



$-\frac{11}{2}$

37. 

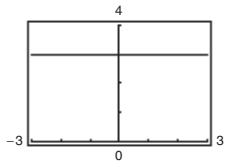
$\frac{1}{3}$

39. Creciente en $(-\infty, \infty)$

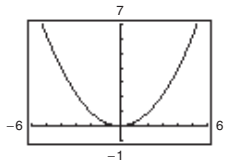
41. Creciente en $(-\infty, 0)$ y $(2, \infty)$
Decreciente en $(0, 2)$

43. Creciente en $(1, \infty)$; Decreciente en $(-\infty, -1)$
Constante en $(-1, 1)$

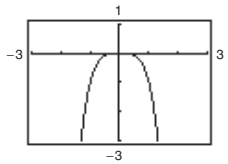
45. Creciente en $(-\infty, 0)$ y $(2, \infty)$; constante en $(0, 2)$

47. 

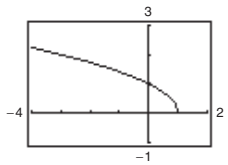
Constante en $(-\infty, \infty)$

49. 

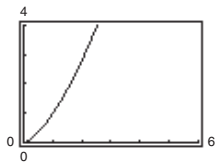
Decreciente en $(-\infty, 0)$
Creciente en $(0, \infty)$

51. 

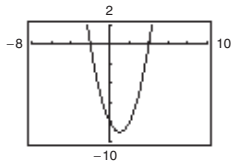
Creciente en $(-\infty, 0)$
Decreciente en $(0, \infty)$

53. 

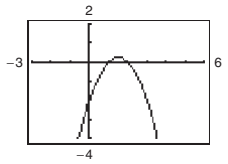
Decreciente en $(-\infty, 1)$

55. 

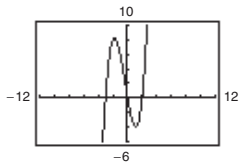
Creciente en $(0, \infty)$

57. 

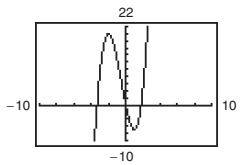
Mínimo relativo:
$(1, -9)$

59. 

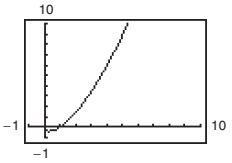
Máximo relativo:
$(1.5, 0.25)$

61. 

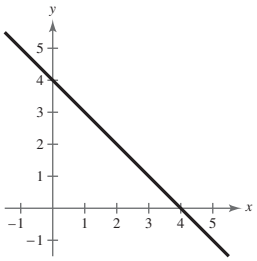
Máximo relativo: $(-1.79, 8.21)$
Mínimo relativo: $(1.12, -4.06)$

63. 

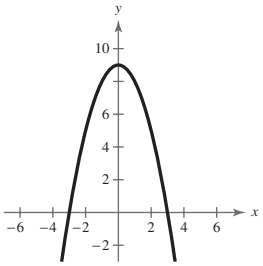
Máximo relativo: $(-2, 20)$
Mínimo relativo: $(1, -7)$

65. 

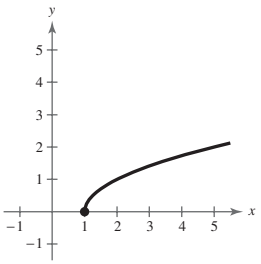
Mínimo relativo: $(0.33, -0.38)$

67. 

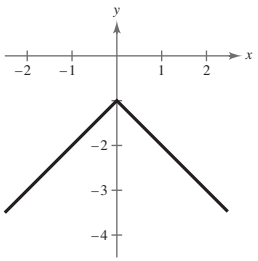
$(-\infty, 4]$

69. 

$[-3, 3]$

71. 

$[1, \infty)$

73. 

$f(x) < 0$ para toda x

75. La razón de cambio promedio $x_1 = 0$ a $x_2 = 3$ es -2.

77. La razón de cambio promedio $x_1 = 1$ a $x_2 = 5$ es 18.

79. La razón de cambio promedio $x_1 = 1$ a $x_2 = 3$ es 0.

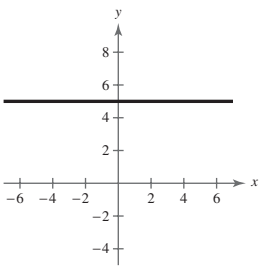
81. La razón de cambio promedio $x_1 = 3$ a $x_2 = 11$ es $-\frac{1}{4}$.

83. Par; simetría con el eje y

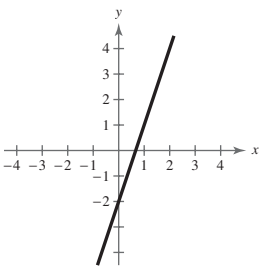
85. Impar; simetría con el origen

87. Ninguno; no hay simetría

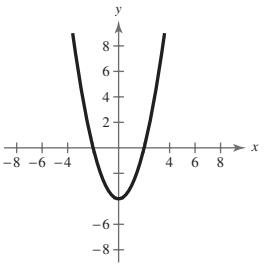
89. Ninguno; no hay simetría

91. 

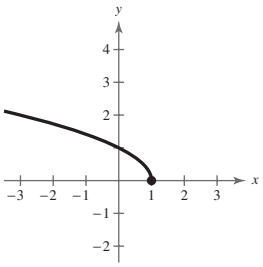
Par

93. 

Ninguno

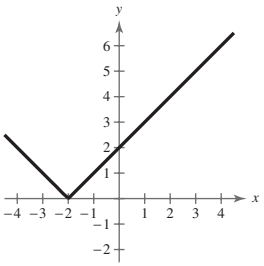
95. 

Par

97. 

Ninguno

99.

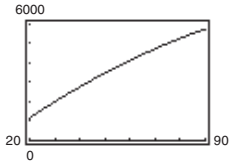


Ninguno

101. $h = -x^2 + 4x - 3$ **103.** $h = 2x - x^2$

105. $L = \frac{1}{2}y^2$ **107.** $L = 4 - y^2$

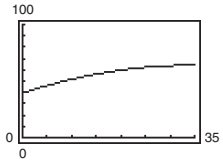
109. (a)



(b) 30 W

111. (a) Diez mil (b) Diez millones (c) Porcentajes

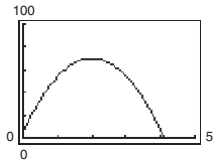
113. (a)



(b) La razón de cambio promedio de 1970 a 2005 es 0.705. El porcentaje de inscripciones de niños en preescolar ha estado aumentando lentamente cada año.

115. (a) $s = -16t^2 + 64t + 6$

(b)

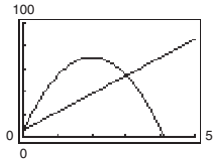


(c) La razón de cambio promedio $= 16$

(d) La pendiente de la recta secante es positiva.

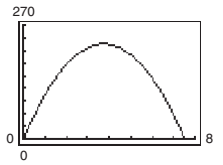
(e) Recta secante: $16t + 6$

(f)



117. (a) $s = -16t^2 + 120t$

(b)

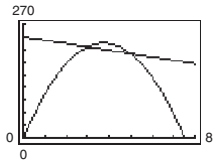


(c) La razón de cambio promedio $= -8$

(d) La pendiente de la recta secante es negativa.

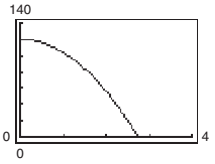
(e) Recta secante: $-8t + 240$

(f)



119. (a) $s = -16t^2 + 120$

(b)

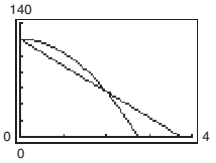


(c) La razón de cambio promedio $= -32$

(d) La pendiente de la recta secante es negativa.

(e) Recta secante: $-32t + 120$

(f)



121. Falso. La función $f(x) = \sqrt{x^2 + 1}$ tiene un dominio de todos los números reales.

123. (a) Par. La gráfica es una reflexión en el eje x.

(b) Par. La gráfica es una reflexión en el eje y.

(c) Par. La gráfica es una traslación vertical de f.

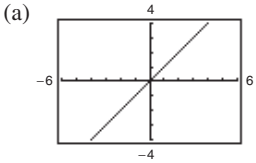
(d) Ninguna. La gráfica es una traslación horizontal de f.

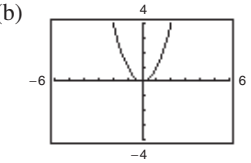
125. (a) $\left(\frac{3}{2}, 4\right)$ (b) $\left(\frac{3}{2}, -4\right)$

127. (a) $(-4, 9)$ (b) $(-4, -9)$

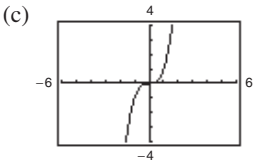
129. (a) $(-x, -y)$ (b) $(-x, y)$

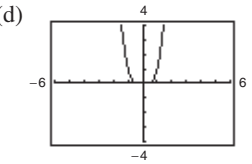
131. (a) (b)



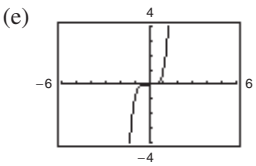


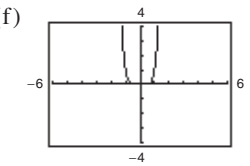
(c) (d)





(e) (f)





Todas las gráficas pasan por el origen. Las gráficas de las potencias impares de x son simétricas respecto al origen, y las gráficas de las potencias pares son simétricas respecto al eje y. Cuando las potencias aumentan, las gráficas se hacen más planas en el intervalo $-1 < x < 1$.

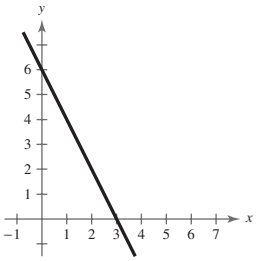
133. 60 ft/sec; cuando aumenta el tiempo de viaje, la distancia aumenta rápidamente, causando que aumente la rapidez media con cada aumento de tiempo. De $t = 0$ a $t = 4$, la rapidez media es menor que de $t = 4$ a $t = 9$. Por tanto, el promedio general de $t = 0$ a $t = 9$ cae por debajo del promedio hallado en el inciso (b).

135. Las respuestas variarán.

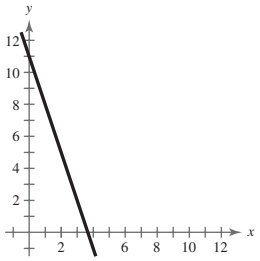
Sección 1.6 *(página 71)*

1. g **2.** i **3.** h **4.** a **5.** b **6.** e **7.** f
8. c **9.** d

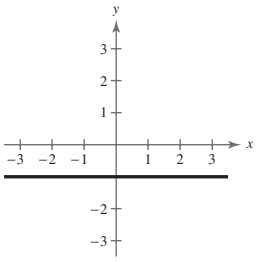
11. (a) $f(x) = -2x + 6$
(b)



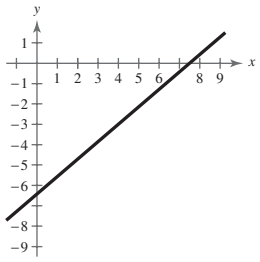
13. (a) $f(x) = -3x + 11$
(b)



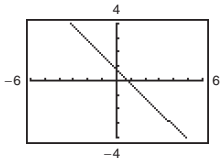
15. (a) $f(x) = -1$
(b)



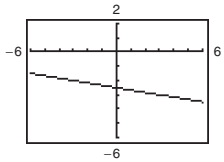
17. (a) $f(x) = \frac{6}{7}x - \frac{45}{7}$
(b)



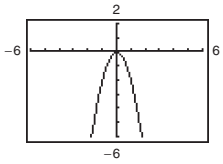
19.



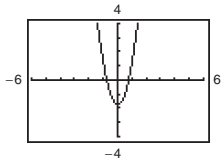
21.



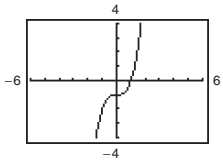
23.



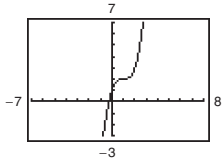
25.



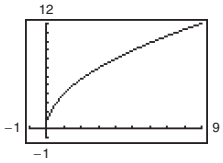
27.



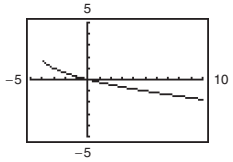
29.



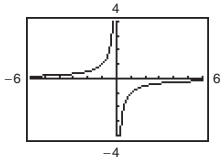
31.



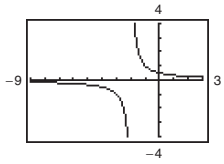
33.



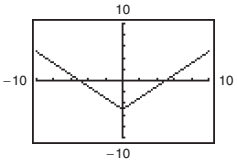
35.



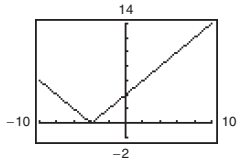
37.



39.

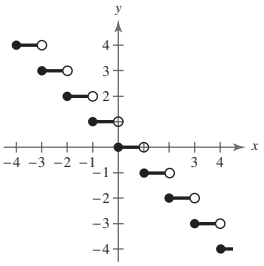


41.

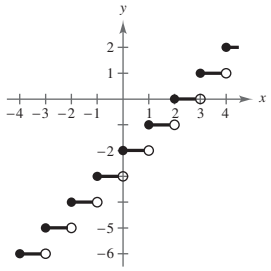


43. (a) 2 (b) 2 (c) -4 (d) 3
45. (a) 1 (b) 3 (c) 7 (d) -19
47. (a) 6 (b) -11 (c) 6 (d) -22
49. (a) -10 (b) -4 (c) -1 (d) 41

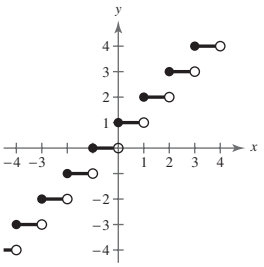
51.



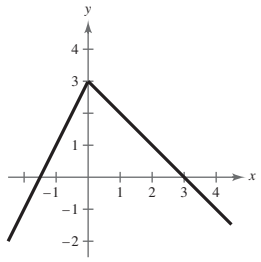
53.



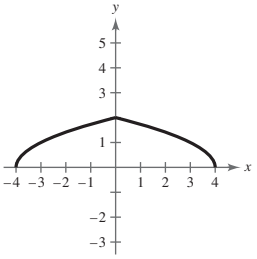
55.



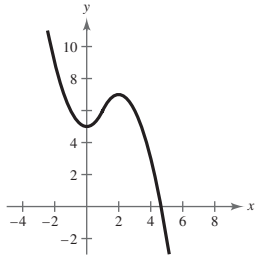
57.



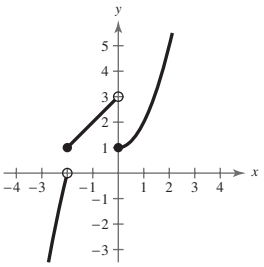
59.



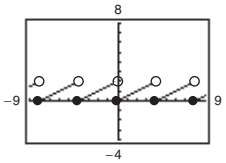
61.



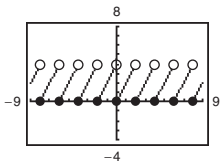
63.



65. (a)

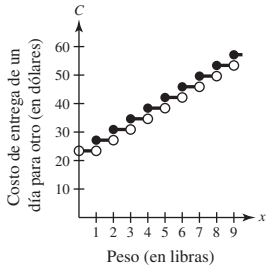


(b) Dominio: $(-\infty, \infty)$
Rango: $[0, 2)$
(c) Forma de diente de sierra

67. (a) 

(b) Dominio: $(-\infty, \infty)$
Rango: $[0, 4)$

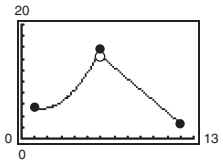
(c) Forma de diente de sierra

69. (a) 

(b) \$57.15

71. (a) $W(30) = 420$; $W(40) = 560$; $W(45) = 665$; $W(50) = 770$

(b) $W(h) = \begin{cases} 14h, & 0 < h \le 45 \\ 21(h - 45) + 630, & h > 45 \end{cases}$

73. (a) 

$f(x) = \begin{cases} 0.505x^2 - 1.47x + 6.3, & 1 \le x \le 6 \\ -1.97x + 26.3, & 6 < x \le 12 \end{cases}$

Las respuestas variarán. Respuesta de muestra: el dominio está determinado por inspección de una gráfica de los datos con los dos modelos.

(b) $f(5) = 11.575$, $f(11) = 4.63$; estos valores representan el ingreso para los meses de mayo y noviembre, respectivamente.

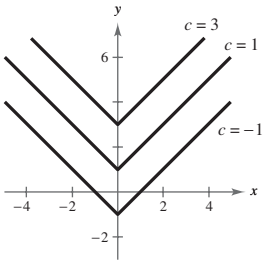
(c) Estos valores son muy cercanos a los valores reales de datos.

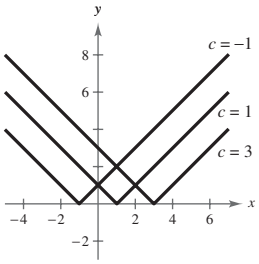
75. Falso. Una ecuación lineal puede ser una recta vertical u horizontal.

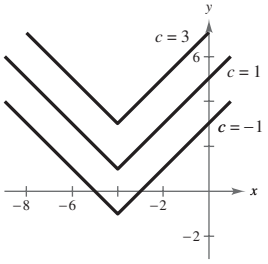
Sección 1.7 *(página 78)*

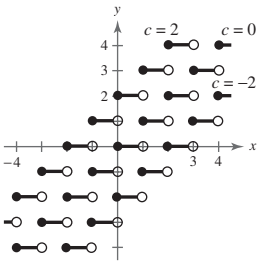
1. rígido **3.** no rígido

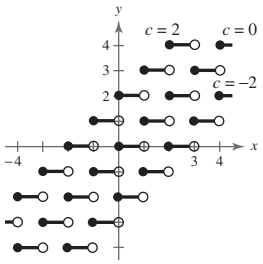
5. estiramiento vertical; contracción vertical

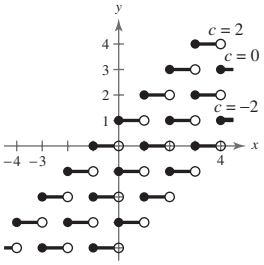
7. (a) 

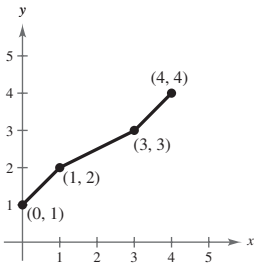
(b) 

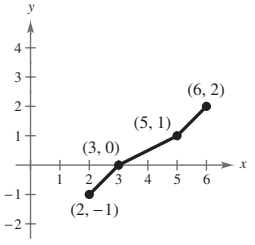
(c) 

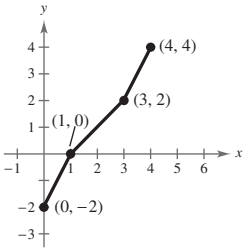
9. (a) 

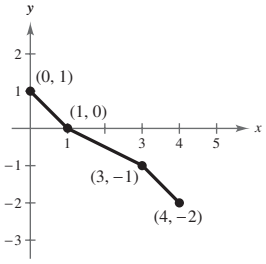
(b) 

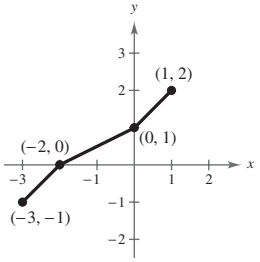
(c) 

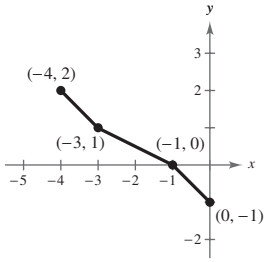
11. (a) 

(b) 

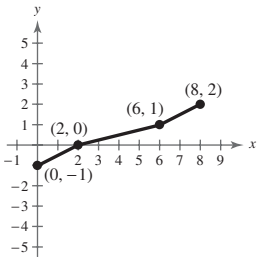
(c) 

(d) 

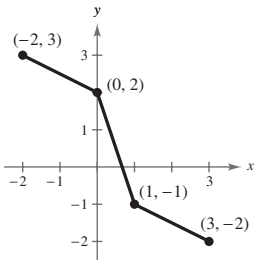
(e) 

(f) 

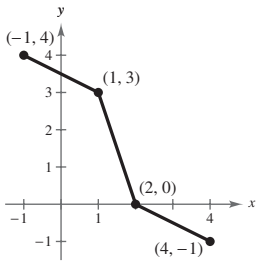
(g)



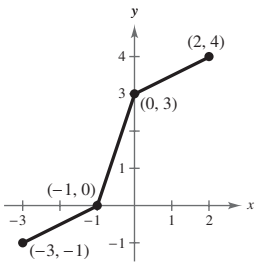
13. (a)



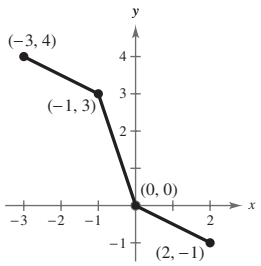
(b)



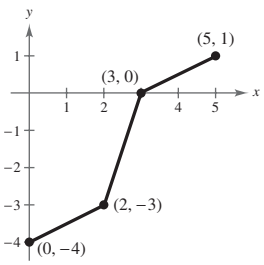
(c)



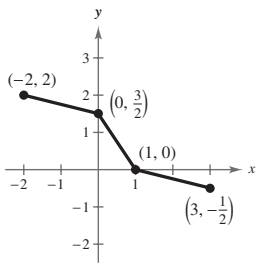
(d)



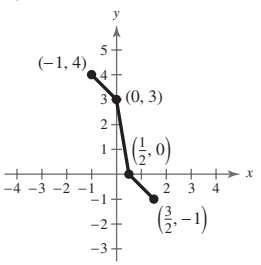
(e)



(f)



(g)



15. (a) $y = x^2 - 1$ (b) $y = 1 - (x + 1)^2$
(c) $y = -(x - 2)^2 + 6$ (d) $y = (x - 5)^2 - 3$

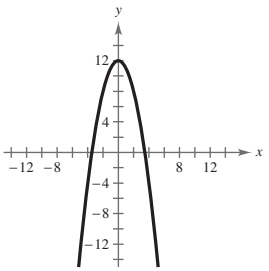
17. (a) $y = |x| + 5$ (b) $y = -|x + 3|$
(c) $y = |x - 2| - 4$ (d) $y = -|x - 6| - 1$

19. Desplazamiento horizontal de $y = x^3$; $y = (x - 2)^3$

21. Reflexión en el eje x de $y = x^2$; $y = -x^2$

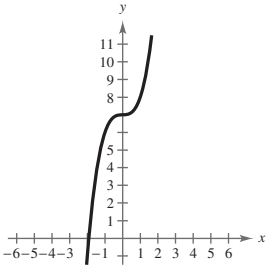
23. Reflexión en el eje x y desplazamiento vertical de $y = \sqrt{x}$; $y = 1 - \sqrt{x}$

25. (a) $f(x) = x^2$
(b) Reflexión en el eje x y desplazamiento vertical de 12 unidades hacia arriba
(c)



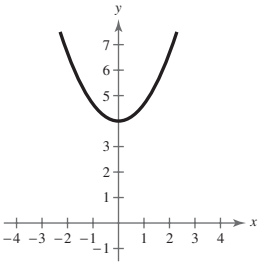
(d) $g(x) = 12 - f(x)$

27. (a) $f(x) = x^3$
(b) Desplazamiento vertical siete unidades hacia arriba
(c)



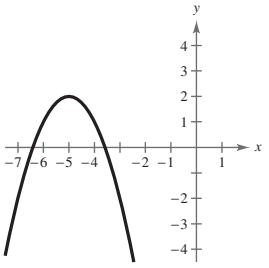
(d) $g(x) = f(x) + 7$

29. (a) $f(x) = x^2$
(b) Contracción vertical de dos tercios y desplazamiento vertical de cuatro unidades hacia arriba
(c)



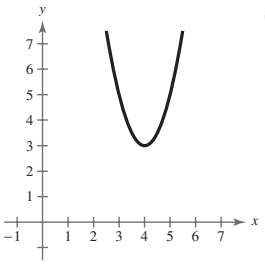
(d) $g(x) = \frac{2}{3}f(x) + 4$

31. (a) $f(x) = x^2$
(b) Reflexión en el eje x, desplazamiento horizontal de 5 unidades a la izquierda y desplazamiento vertical de dos unidades hacia arriba
(c)



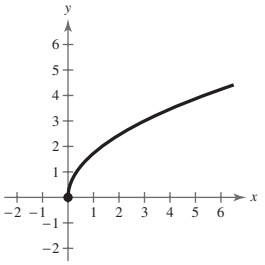
(d) $g(x) = 2 - f(x + 5)$

33. (a) $f(x) = x^2$
(b) Estiramiento vertical de dos, desplazamiento horizontal de cuatro unidades a la derecha y desplazamiento vertical de tres unidades hacia arriba

(c)  (d) $g(x) = 3 + 2f(x - 4)$

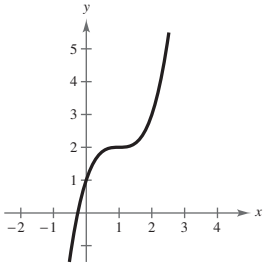
35. (a) $f(x) = \sqrt{x}$

(b) Contracción horizontal de un tercio

(c)  (d) $g(x) = f(3x)$

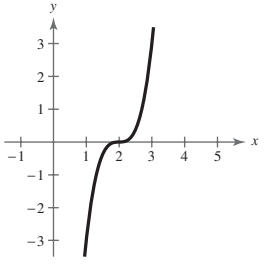
37. (a) $f(x) = x^3$

(b) Desplazamiento vertical de dos unidades y desplazamiento horizontal de una unidad a la derecha

(c)  (d) $g(x) = f(x - 1) + 2$

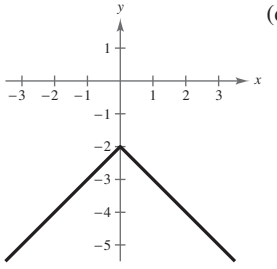
39. (a) $f(x) = x^3$

(b) Estiramiento vertical de tres y desplazamiento horizontal de dos unidades a la derecha

(c)  (d) $g(x) = 3f(x - 2)$

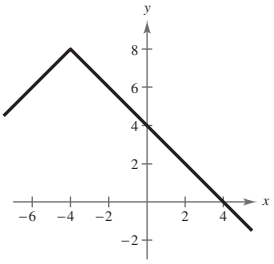
41. (a) $f(x) = |x|$

(b) Reflexión en el eje x y desplazamiento vertical de dos unidades hacia abajo.

(c)  (d) $g(x) = -f(x) - 2$

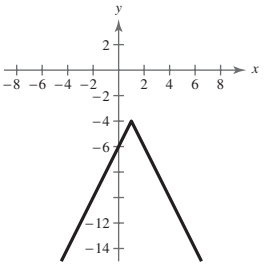
43. (a) $f(x) = |x|$

(b) Reflexión en el eje x, desplazamiento horizontal de cuatro unidades a la izquierda y desplazamiento vertical de ocho unidades hacia arriba

(c)  (d) $g(x) = -f(x + 4) + 8$

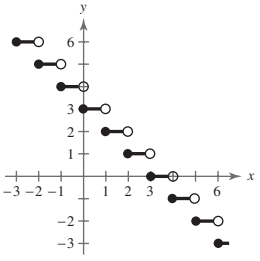
45. (a) $f(x) = |x|$

(b) Reflexión en el eje x, estiramiento vertical de dos, desplazamiento horizontal de una unidad a la derecha y desplazamiento vertical de cuatro unidades hacia abajo

(c)  (d) $g(x) = -2f(x - 1) - 4$

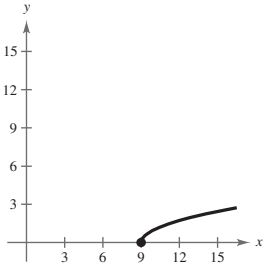
47. (a) $f(x) = [\![x]\!]$

(b) Reflexión en el eje x y desplazamiento vertical de tres unidades hacia arriba

(c)  (d) $g(x) = 3 - f(x)$

49. (a) $f(x) = \sqrt{x}$

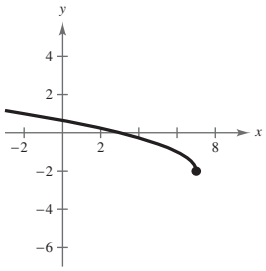
(b) Desplazamiento horizontal de nueve unidades a la derecha

(c)  (d) $g(x) = f(x - 9)$

51. (a) $f(x) = \sqrt{x}$

(b) Reflexión en el eje y, desplazamiento horizontal de siete unidades a la derecha y desplazamiento vertical de dos unidades hacia abajo

(c)

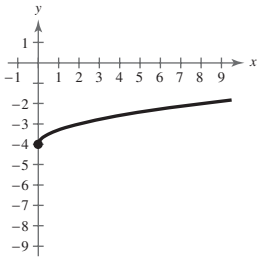


(d) $g(x) = f(7 - x) - 2$

53. (a) $f(x) = \sqrt{x}$

(b) Estiramiento horizontal y desplazamiento vertical de cuatro unidades hacia abajo

(c)



(d) $g(x) = f\left(\frac{1}{2}x\right) - 4$

55. $g(x) = (x - 3)^2 - 7$ **57.** $g(x) = (x - 13)^3$

59. $g(x) = -|x| + 12$ **61.** $g(x) = -\sqrt{-x + 6}$

63. (a) $y = -3x^2$ (b) $y = 4x^2 + 3$

65. (a) $y = -\frac{1}{2}|x|$ (b) $y = 3|x| - 3$

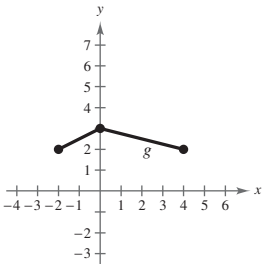
67. Estiramiento vertical de $y = x^3$; $y = 2x^3$

69. Reflexión en el eje x y contracción vertical de $y = x^2$; $y = -\frac{1}{2}x^2$

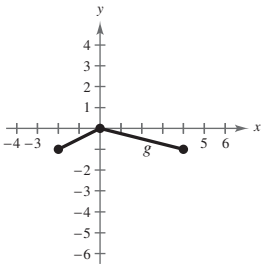
71. Reflexión en el eje y y contracción vertical de $y = \sqrt{x}$; $y = \frac{1}{2}\sqrt{-x}$

73. $y = -(x - 2)^3 + 2$ **75.** $y = -\sqrt{x} - 3$

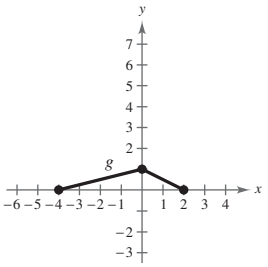
77. (a)



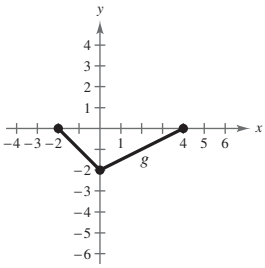
(b)



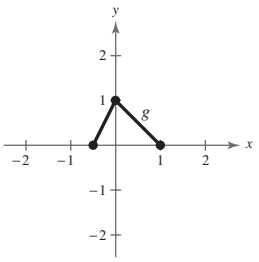
(c)



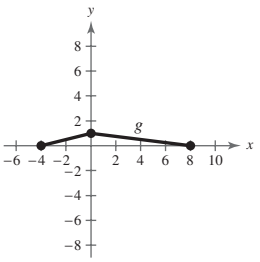
(d)



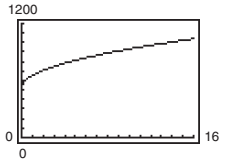
(e)



(f)



79. (a) Estiramiento vertical de 128.0 y desplazamiento vertical de 527 unidades hacia arriba



(b) 32; cada año, el número total de millas recorridas por furgonetas, camionetas de carga y vehículos SUV aumenta en un promedio de 32 000 millones de millas.

(c) $f(t) = 527 + 128\sqrt{t + 10}$; la gráfica está desplazada 10 unidades a la izquierda.

(d) 1127 mil millones de millas; las respuestas variarán. Respuesta de muestra: sí, porque el número de millas recorridas ha estado aumentando constantemente.

81. Falso. La gráfica de $y = f(-x)$ es una reflexión de la gráfica de $f(x)$ en el eje y.

83. Verdadero. $|-x| = |x|$

85. (a) $g(t) = \frac{3}{4}f(t)$ (b) $g(t) = f(t) + 10\,000$

(c) $g(t) = f(t - 2)$

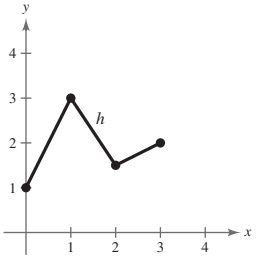
87. $(-2, 0), (-1, 1), (0, 2)$

89. No. $g(x) = -x^4 - 2$. Sí. $h(x) = -(x - 3)^4$.

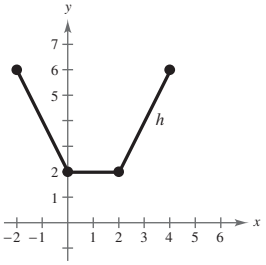
Sección 1.8 *(página 88)*

1. suma; resta; multiplicación; división **3.** $g(x)$

5.



7.



9. (a) $2x$ (b) 4 (c) $x^2 - 4$

(d) $\dfrac{x + 2}{x - 2}$; todos los números reales x excepto $x = 2$

11. (a) $x^2 + 4x - 5$ (b) $x^2 - 4x + 5$ (c) $4x^3 - 5x^2$

(d) $\dfrac{x^2}{4x - 5}$; todos los números reales x excepto $x = \dfrac{5}{4}$

13. (a) $x^2 + 6 + \sqrt{1 - x}$ (b) $x^2 + 6 - \sqrt{1 - x}$

(c) $(x^2 + 6)\sqrt{1 - x}$

(d) $\dfrac{(x^2 + 6)\sqrt{1 - x}}{1 - x}$; todos los números reales x tales que $x < 1$

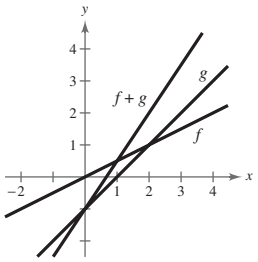
15. (a) $\dfrac{x+1}{x^2}$ (b) $\dfrac{x-1}{x^2}$ (c) $\dfrac{1}{x^3}$

(d) x; todos los números reales x excepto $x = 0$

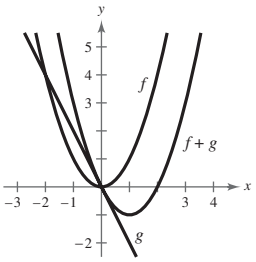
17. 3 **19.** 5 **21.** $9t^2 - 3t + 5$ **23.** 74

25. 26 **27.** $\frac{3}{5}$

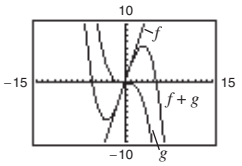
29.



31.

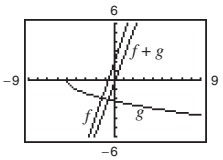


33.



$f(x), g(x)$

35.



$f(x), f(x)$

37. (a) $(x-1)^2$ (b) $x^2 - 1$ (c) $x - 2$

39. (a) x (b) x (c) $x^9 + 3x^6 + 3x^3 + 2$

41. (a) $\sqrt{x^2+4}$ (b) $x + 4$

Dominios de f y $g \circ f$: todos los números reales x tales que $x \geq -4$

Dominios de g y $f \circ g$: todos los números reales x

43. (a) $x + 1$ (b) $\sqrt{x^2+1}$

Dominios de f y $g \circ f$: todos los números reales x

Dominios de g y $f \circ g$: todos los números reales x tales que $x \geq 0$

45. (a) $|x+6|$ (b) $|x| + 6$

Dominios de f, g, $f \circ g$, y $g \circ f$: todos los números reales x

47. (a) $\dfrac{1}{x+3}$ (b) $\dfrac{1}{x} + 3$

Dominios de f y $g \circ f$: todos los números reales x excepto $x = 0$

Dominio de g: todos los números reales x

Dominio de $f \circ g$: todos los números reales x excepto $x = -3$

49. (a) 3 (b) 0 **51.** (a) 0 (b) 4

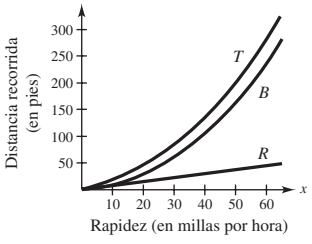
53. $f(x) = x^2$, $g(x) = 2x + 1$

55. $f(x) = \sqrt[3]{x}$, $g(x) = x^2 - 4$

57. $f(x) = \dfrac{1}{x}$, $g(x) = x + 2$ **59.** $f(x) = \dfrac{x+3}{4+x}$, $g(x) = -x^2$

61. (a) $T = \frac{3}{4}x + \frac{1}{15}x^2$

(b)



(c) La función de frenado $B(x)$. Cuando x aumenta, $B(x)$ aumenta con mayor rapidez que $R(x)$.

63. (a) $c(t) = \dfrac{b(t) - d(t)}{p(t)} \times 100$

(b) $c(5)$ es el porcentaje de cambio en la población debido a nacimientos y muertes en el año 2005.

65. (a) $(N + M)(t) = 0.227t^3 - 4.11t^2 + 14.6t + 544$, que representa el número total de personal de la Armada y la Infantería de Marina combinados.

$(N + M)(0) = 544$

$(N + M)(6) \approx 533$

$(N + M)(12) \approx 520$

(b) $(N - M)(t) = 0.157t^3 - 3.65t^2 + 11.2t + 200$, que representa la diferencia entre el número del personal de la Armada y el número de personal de Infantería de Marina.

$(N - M)(0) = 200$

$(N - M)(6) \approx 170$

$(N - M)(12) \approx 80$

67. $(B - D)(t) = -0.197t^3 + 10.17t^2 - 128.0t + 2043$, que representa el cambio en la población de Estados Unidos.

69. (a) Por cada tiempo t corresponde una y sólo una temperatura T.

(b) 60°, 72°

(c) Todos los cambios de temperatura ocurren 1 hora después.

(d) La temperatura disminuye en 1 grado.

(e) $T(t) = \begin{cases} 60, & 0 \leq t \leq 6 \\ 12t - 12, & 6 < t < 7 \\ 72, & 7 \leq t \leq 20 \\ -12t + 312, & 20 < t < 21 \\ 60, & 21 \leq t \leq 24 \end{cases}$

71. $(A \circ r)(t) = 0.36\pi t^2$; $(A \circ r)(t)$ representa el área del círculo en el tiempo t.

73. (a) $N(T(t)) = 30(3t^2 + 2t + 20)$; esto representa el número de bacterias en el alimento como función del tiempo.

(b) Alrededor de 653 bacterias (c) 2.846 h

75. $g(f(x))$ representa 3% de una cantidad de más de \$500 000.

77. Falso. $(f \circ g)(x) = 6x + 1$ y $(g \circ f)(x) = 6x + 6$

79. (a) $O(M(Y)) = 2\left(6 + \frac{1}{2}Y\right) = 12 + Y$

(b) El niño de en medio tiene 8 años de edad; el niño más joven tiene 4 años de edad.

81. Demostración

83. (a) Demostración

(b) $\begin{aligned} &\tfrac{1}{2}[f(x) + f(-x)] + \tfrac{1}{2}[f(x) - f(-x)] \\ &= \tfrac{1}{2}[f(x) + f(-x) + f(x) - f(-x)] \\ &= \tfrac{1}{2}[2f(x)] \\ &= f(x) \end{aligned}$

(c) $f(x) = (x^2 + 1) + (-2x)$

$k(x) = \dfrac{-1}{(x+1)(x-1)} + \dfrac{x}{(x+1)(x-1)}$

Sección 1.9 *(página 98)*

1. Inversa **3.** rango; dominio **5.** Biunívoca

7. $f^{-1}(x) = \frac{1}{6}x$ **9.** $f^{-1}(x) = x - 9$ **11.** $f^{-1}(x) = \dfrac{x-1}{3}$

13. $f^{-1}(x) = x^3$ **15.** c **16.** b **17.** a **18.** d

19. $f(g(x)) = f\left(-\dfrac{2x+6}{7}\right) = -\dfrac{7}{2}\left(-\dfrac{2x+6}{7}\right) - 3 = x$

$g(f(x)) = g\left(-\dfrac{7}{2}x - 3\right) = -\dfrac{2\left(-\frac{7}{2}x - 3\right) + 6}{7} = x$

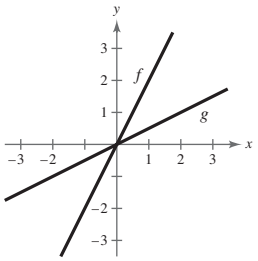
21. $f(g(x)) = f\left(\sqrt[3]{x-5}\right) = \left(\sqrt[3]{x-5}\right)^3 + 5 = x$

$g(f(x)) = g(x^3+5) = \sqrt[3]{(x^3+5)-5} = x$

23. (a) $f(g(x)) = f\left(\frac{x}{2}\right) = 2\left(\frac{x}{2}\right) = x$

$g(f(x)) = g(2x) = \frac{(2x)}{2} = x$

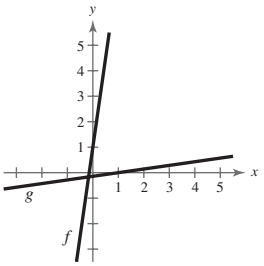
(b)



25. (a) $f(g(x)) = f\left(\frac{x-1}{7}\right) = 7\left(\frac{x-1}{7}\right) + 1 = x$

$g(f(x)) = g(7x+1) = \frac{(7x+1)-1}{7} = x$

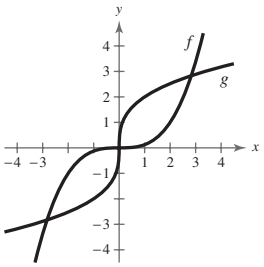
(b)



27. (a) $f(g(x)) = f\left(\sqrt[3]{8x}\right) = \frac{\left(\sqrt[3]{8x}\right)^3}{8} = x$

$g(f(x)) = g\left(\frac{x^3}{8}\right) = \sqrt[3]{8\left(\frac{x^3}{8}\right)} = x$

(b)



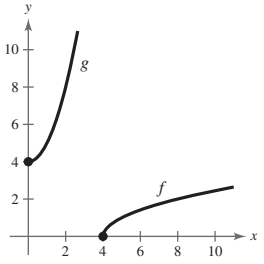
29. (a) $f(g(x)) = f(x^2+4),\ x \geq 0$

$= \sqrt{(x^2+4)-4} = x$

$g(f(x)) = g\left(\sqrt{x-4}\right)$

$= \left(\sqrt{x-4}\right)^2 + 4 = x$

(b)



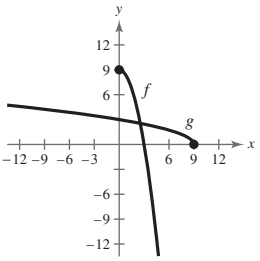
31. (a) $f(g(x)) = f\left(\sqrt{9-x}\right),\ x \leq 9$

$= 9 - \left(\sqrt{9-x}\right)^2 = x$

$g(f(x)) = g(9-x^2),\ x \geq 0$

$= \sqrt{9-(9-x^2)} = x$

(b)



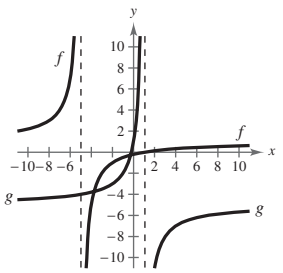
33. (a) $f(g(x)) = f\left(-\frac{5x+1}{x-1}\right) = \frac{-\left(\frac{5x+1}{x-1}\right) - 1}{-\left(\frac{5x+1}{x-1}\right) + 5}$

$= \frac{-5x-1-x+1}{-5x-1+5x-5} = x$

$g(f(x)) = g\left(\frac{x-1}{x+5}\right) = \frac{-5\left(\frac{x-1}{x+5}\right) - 1}{\frac{x-1}{x+5} - 1}$

$= \frac{-5x+5-x-5}{x-1-x-5} = x$

(b)



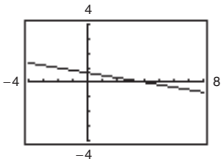
35. No

37.

x	-2	0	2	4	6	8
$f^{-1}(x)$	-2	-1	0	1	2	3

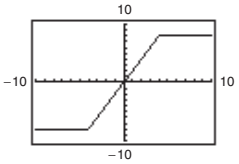
39. Sí **41.** No

43.



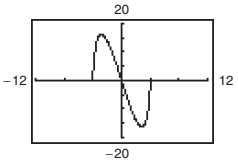
La función tiene una inversa.

45.



La función no tiene una inversa.

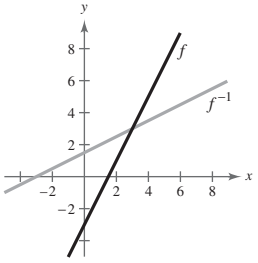
47.



La función no tiene una inversa.

49. (a) $f^{-1}(x) = \dfrac{x + 3}{2}$

(b)

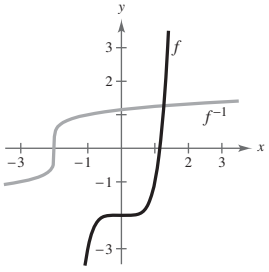


(c) La gráfica de f^{-1} es el reflejo de la gráfica de f en la recta $y = x$.

(d) Los dominios y rangos de f y f^{-1} son todos los números reales.

51. (a) $f^{-1}(x) = \sqrt[5]{x + 2}$

(b)

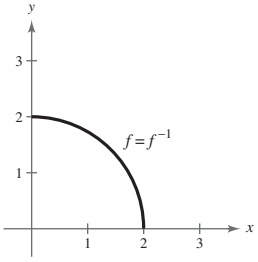


(c) La gráfica de f^{-1} es el reflejo de la gráfica de f en la recta $y = x$.

(d) Los dominios y rangos de f y f^{-1} son todos los números reales.

53. (a) $f^{-1}(x) = \sqrt{4 - x^2},\ 0 \le x \le 2$

(b)

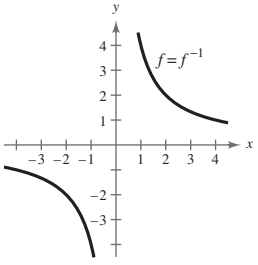


(c) La gráfica de f^{-1} es la misma gráfica de f.

(d) Los dominios y rangos de f y f^{-1} son todos los números reales x tales que $0 \le x \le 2$.

55. (a) $f^{-1}(x) = \dfrac{4}{x}$

(b)

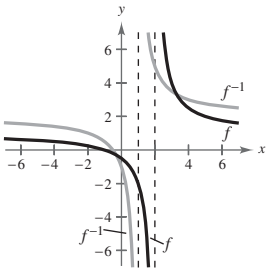


(c) La gráfica de f^{-1} es la misma gráfica de f.

(d) Los dominios y rangos de f y f^{-1} son todos los números reales x excepto que $x = 0$.

57. (a) $f^{-1}(x) = \dfrac{2x + 1}{x - 1}$

(b)

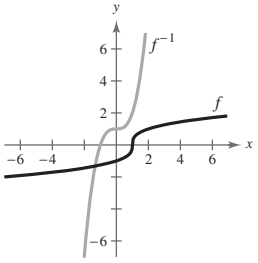


(c) La gráfica de f^{-1} es el reflejo de la gráfica de f en la recta $y = x$.

(d) El dominio de f y el rango de f^{-1} son todos los números reales x excepto $x = 2$. El dominio de f^{-1} y el rango de f son todos los números reales excepto $x = 1$.

59. (a) $f^{-1}(x) = x^3 + 1$

(b)

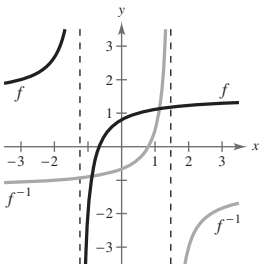


(c) La gráfica de f^{-1} es el reflejo de la gráfica de f en la recta $y = x$.

(d) Los dominios y rangos de f y f^{-1} son todos los números reales.

61. (a) $f^{-1}(x) = \dfrac{5x - 4}{6 - 4x}$

(b)



(c) La gráfica de f^{-1} es el reflejo de la gráfica de f en la recta $y = x$.

(d) El dominio de f y el rango de f^{-1} son todos los números reales x excepto $x = -\frac{5}{4}$. El dominio de f^{-1} y el rango de f son todos los números reales $x = \frac{3}{2}$.

63. No hay inversa **65.** $g^{-1}(x) = 8x$ **67.** No hay inversa

69. $f^{-1}(x) = \sqrt{x} - 3$ **71.** No hay inversa **73.** No hay inversa

75. $f^{-1}(x) = \dfrac{x^2 - 3}{2}, \quad x \ge 0$

77. $f^{-1}(x) = \sqrt{x} + 2$

El dominio de f y el rango de f^{-1} son todos los números reales x tales que $x \ge 2$. El dominio de f^{-1} y el rango de f son todos los números reales $x \ge 0$.

79. $f^{-1}(x) = x - 2$

El dominio de f y el rango de f^{-1} son todos los números reales x tales que $x \ge -2$. El dominio de f^{-1} y el rango de f son todos los números reales $x \ge 0$.

81. $f^{-1}(x) = \sqrt{x} - 6$

El dominio de f y el rango de f^{-1} son todos los números reales x tales que $x \geq -6$. El dominio de f^{-1} y el rango de f son todos los números reales $x \geq 0$.

83. $f^{-1}(x) = \dfrac{\sqrt{-2(x-5)}}{2}$

El dominio de f y el rango de f^{-1} son todos los números reales x tales que $x \geq 0$. El dominio de f^{-1} y el rango de f son todos ellos números reales $x \leq 5$.

85. $f^{-1}(x) = x + 3$

El dominio de f y el rango de f^{-1} son todos los números reales x tales que $x \geq 4$. El dominio de f^{-1} y el rango de f son todos los números reales $x \geq 1$.

87. 32 **89.** 600 **91.** $2\sqrt[3]{x+3}$

93. $\dfrac{x+1}{2}$ **95.** $\dfrac{x+1}{2}$

97. (a) Sí; cada medida de calzado europea corresponde a exactamente una medida de calzado en Estados Unidos.

(b) 45 (c) 10 (d) 41 (e) 13

99. (a) Sí

(b) S^{-1} representa el tiempo en años para un nivel de ventas determinado.

(c) $S^{-1}(8430) = 6$

(d) No, porque entonces las ventas para 2007 y 2009 serían las mismas, de modo que la función ya no sería biunívoca.

101. (a) $y = \dfrac{x - 10}{0.75}$

x = sueldo por hora; y = número de unidades producidas

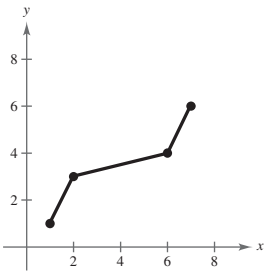
(b) 19 unidades

103. Falso. $f(x) = x^2$ no tiene inversa. **105.** Demostración

107.

x	1	3	4	6
y	1	2	6	7

x	1	2	6	7
$f^{-1}(x)$	1	3	4	6

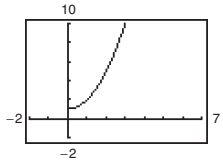


109. Esta situación podría estar representada por una función biunívoca si el corredor no se detiene a descansar. La función inversa representaría el tiempo en horas para un número determinado de millas completadas.

111. Esta función no podría estar representada por una función biunívoca porque oscila.

113. $k = \frac{1}{4}$

115.



Hay una función inversa $f^{-1}(x) = \sqrt{x-1}$ porque el dominio de f es igual al rango de f^{-1} y el rango de f es igual al dominio de f^{-1}.

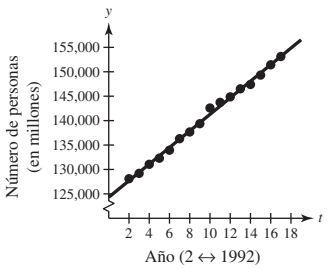
Sección 1.10 *(página 108)*

1. variación; regresión **3.** regresión de mínimos cuadrados

5. directamente proporcional **7.** directamente proporcional

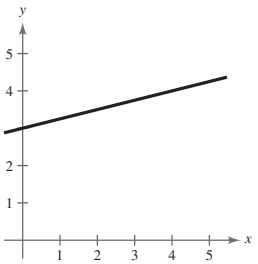
9. combinado

11.



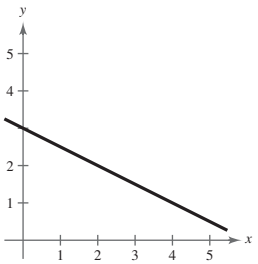
El modelo es buen ajuste para los datos reales.

13.



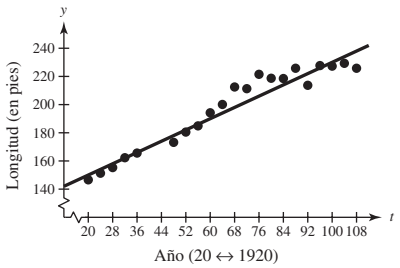
$y = \frac{1}{4}x + 3$

15.



$y = -\frac{1}{2}x + 3$

17. (a) y (b)



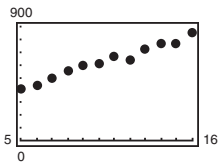
$y \approx t + 130$

(c) $y = 1.01t + 130.82$ (d) Los modelos son semejantes.

(e) Inciso (b): 242 ft; Inciso (c): 243.94 ft

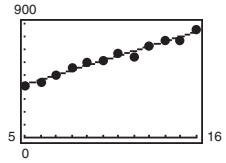
(f) Las respuestas variarán.

19. (a)



(b) $S = 38.3t + 224$

CAPÍTULO 1

(c) 

El modelo es un buen ajuste.

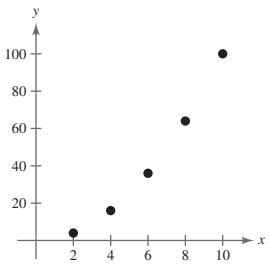
(d) 2007: \$875.1 millones; 2009: \$951.7 millones

(e) Cada año, las ventas anuales brutas de boletos para teatro en Broadway en la ciudad de Nueva York aumentan en \$38.3 millones.

21. Inversamente

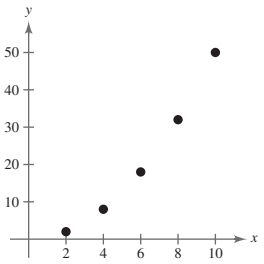
23.

x	2	4	6	8	10
$y = kx^2$	4	16	36	64	100



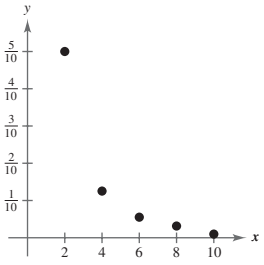
25.

x	2	4	6	8	10
$y = kx^2$	2	8	18	32	50



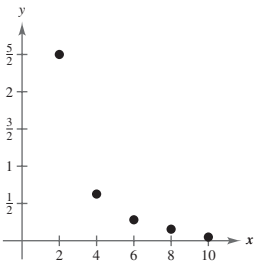
27.

x	2	4	6	8	10
$y = k/x^2$	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{8}$	$\frac{1}{18}$	$\frac{1}{32}$	$\frac{1}{50}$



29.

x	2	4	6	8	10
$y = k/x^2$	$\frac{5}{2}$	$\frac{5}{8}$	$\frac{5}{18}$	$\frac{5}{32}$	$\frac{1}{10}$



31. $y = \dfrac{5}{x}$ **33.** $y = -\dfrac{7}{10}x$ **35.** $y = \dfrac{12}{5}x$

37. $y = 205x$ **39.** $I = 0.035P$

41. Modelo: $y = \frac{33}{13}x$; 25.4 cm, 50.8 cm

43. $y = 0.0368x$; \$8280

45. (a) 0.05 m (b) $176\frac{2}{3}$ N **47.** 39.47 lb

49. $A = kr^2$ **51.** $y = \dfrac{k}{x^2}$ **53.** $F = \dfrac{kg}{r^2}$ **55.** $P = \dfrac{k}{V}$

57. $F = \dfrac{km_1m_2}{r^2}$

59. El área de un triángulo es conjuntamente proporcional a su base y altura.

61. El área de un triángulo equilátero varía directamente con el cuadrado de uno de sus lados.

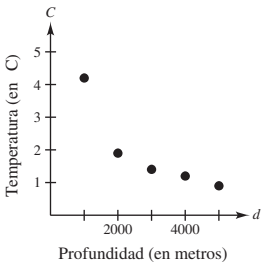
63. El volumen de una esfera varía directamente con el cubo de su radio.

65. La rapidez media es directamente proporcional a la distancia e inversamente proporcional al tiempo.

67. $A = \pi r^2$ **69.** $y = \dfrac{28}{x}$ **71.** $F = 14rs^3$

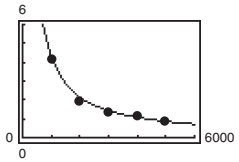
73. $z = \dfrac{2x^2}{3y}$ **75.** Unas 0.61 millas/h **77.** 506 ft

79. 1470 J **81.** La velocidad aumenta en una tercera parte.

83. (a) 

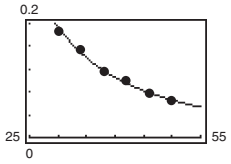
(b) Sí. $k_1 = 4200$, $k_2 = 3800$, $k_3 = 4200$, $k_4 = 4800$, $k_5 = 4500$

(c) $C = \dfrac{4300}{d}$

(d) 

(e) Unos 1433 m

85. (a)



(b) 0.2857 $\mu W/\text{cm}^2$

87. Falso. E es conjuntamente proporcional a la masa de un cuerpo y al cuadrado de su velocidad.

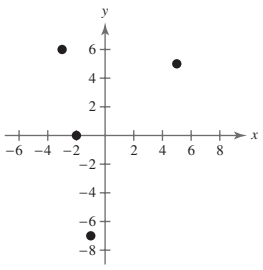
89. (a) Buena aproximación (b) Mala aproximación
(c) Mala aproximación (d) Buena aproximación

91. Cuando aumenta una variable, la otra también aumenta.

93. (a) y cambiará en un factor de un cuarto.
(b) y cambiará en un factor de cuatro.

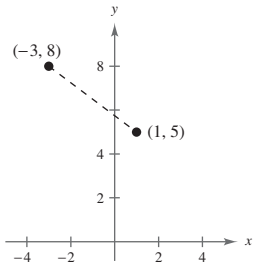
Ejercicios de repaso *(página 116)*

1.



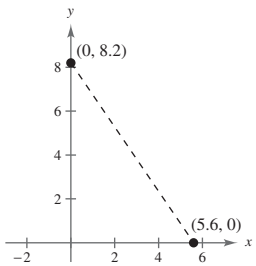
3. Cuarto cuadrante

5. (a)



(b) 5
(c) $\left(-1, \frac{13}{2}\right)$

7. (a)



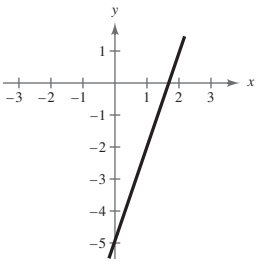
(b) $\sqrt{98.6}$
(c) (2.8, 4.1)

9. (0, 0), (2, 0), (0, −5), (2, −5)

11. $6 275 miles de millones

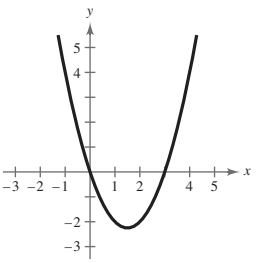
13.

x	−2	−1	0	1	2
y	−11	−8	−5	−2	1

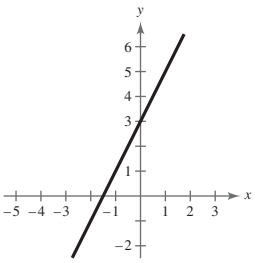


15.

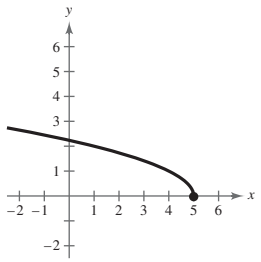
x	−1	0	1	2	3	4
y	4	0	−2	−2	0	4



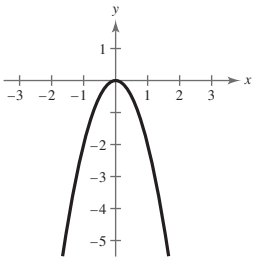
17.



19.



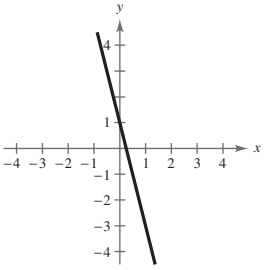
21.



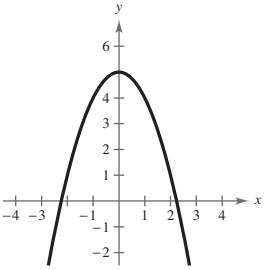
23. intersección con el eje x: $\left(-\frac{7}{2}, 0\right)$
intersección con el eje y: (0, 7)

25. intersección con el eje x: (1, 0), (5, 0)
intersección con el eje y: (0, 5)

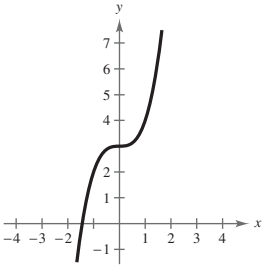
27. Intersecciones con el eje x: $\left(\frac{1}{4}, 0\right)$
Intersecciones con el eje y: $(0, 1)$
No hay simetría



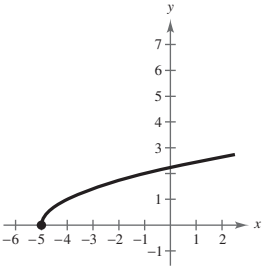
29. Intersecciones con el eje x: $\left(\pm\sqrt{5}, 0\right)$
Intersecciones con el eje y: $(0, 5)$
Hay simetría con el eje y



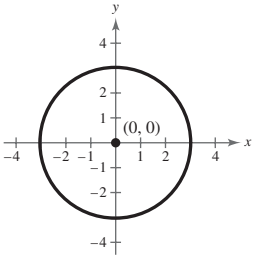
31. Intersecciones con el eje x: $\left(\sqrt[3]{-3}, 0\right)$
Intersecciones con el eje y: $(0, 3)$
No hay simetría



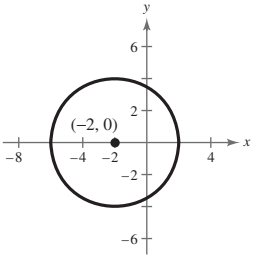
33. Intersecciones con el eje x: $(-5, 0)$
Intersecciones con el eje y: $\left(0, \sqrt{5}\right)$
No hay simetría



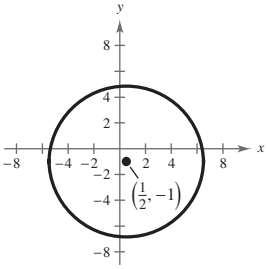
35. Centro: $(0, 0)$
Radio: 3



37. Centro: $(-2, 0)$
Radio: 4

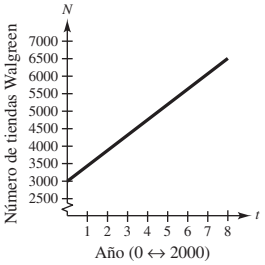


39. Centro: $\left(\frac{1}{2}, -1\right)$
Radio: 6



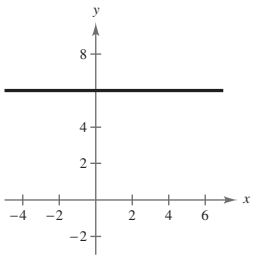
41. $(x - 2)^2 + (y + 3)^2 = 13$

43. (a)

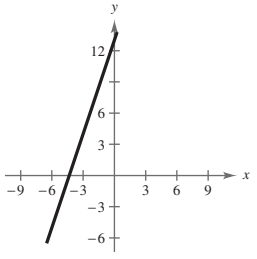


(b) 2008

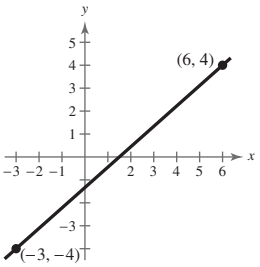
45. Pendiente: 0
Intersección con el eje y: 6



47. Pendiente: 3
Intersección con el eje y: 13

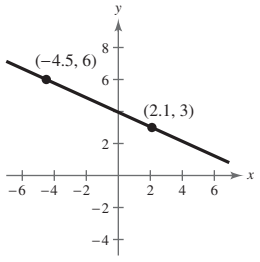


49.



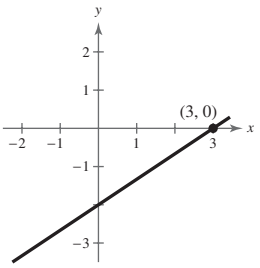
$m = \frac{8}{9}$

51.

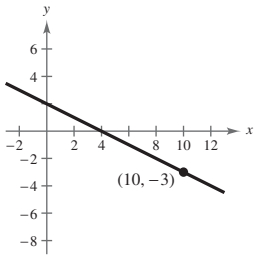


$m = -\frac{5}{11}$

53. $y = \frac{2}{3}x - 2$



55. $y = -\frac{1}{2}x + 2$



57. $x = 0$ **59.** $y = \frac{2}{7}x + \frac{2}{7}$

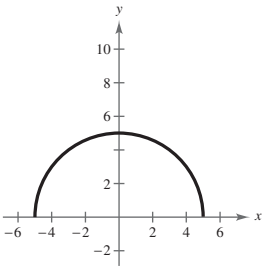
61. (a) $y = \frac{5}{4}x - \frac{23}{4}$ (b) $y = -\frac{4}{5}x + \frac{2}{5}$

63. $V = -850t + 21\,000,\ 10 \le t \le 15$

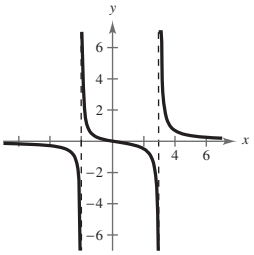
65. No **67.** Sí

69. (a) 5 (b) 17 (c) $t^4 + 1$ (d) $t^2 + 2t + 2$

71. Todos los números reales x tales que $-5 \le x \le 5$



73. Todos los números reales x excepto $x = 3, -2$

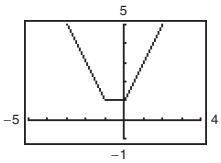


75. (a) 16 ft/sec (b) 1.5 sec (c) -16 ft/sec

77. $4x + 2h + 3, \quad h \neq 0$ **79.** Función

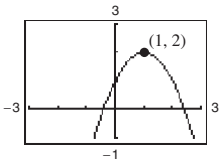
81. No es función **83.** $\frac{7}{3}, 3$ **85.** $-\frac{3}{8}$

87.

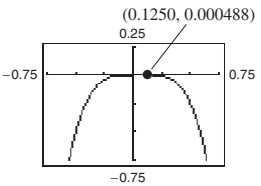


Creciente en $(0, \infty)$
Decreciente en $(-\infty, -1)$
Constante en $(-1, 0)$

89.

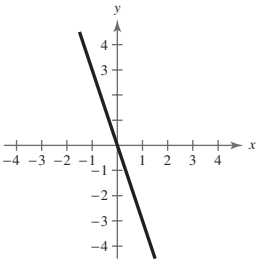


91.

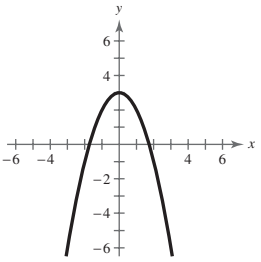


93. 4 **95.** $\dfrac{1 - \sqrt{2}}{2}$ **97.** Ninguna **99.** Impar

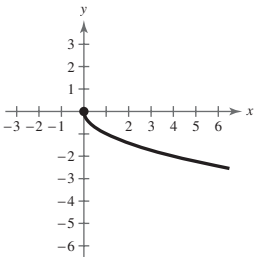
101. $f(x) = -3x$



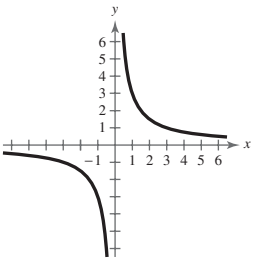
103.



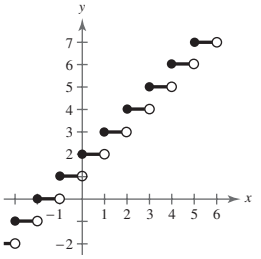
105.



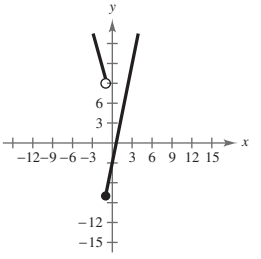
107.



109.



111.

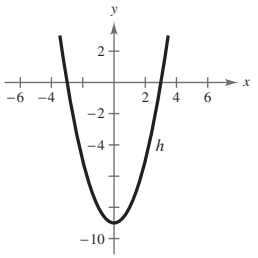


113. $y = x^3$

115. (a) $f(x) = x^2$

(b) Desplazamiento vertical de nueve unidades hacia abajo

(c)

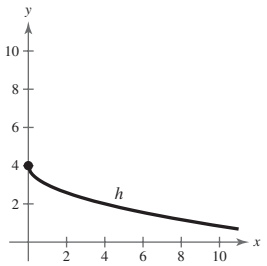


(d) $h(x) = f(x) - 9$

117. (a) $f(x) = \sqrt{x}$

(b) Reflexión en el eje x y desplazamiento de cuatro unidades hacia arriba

(c)

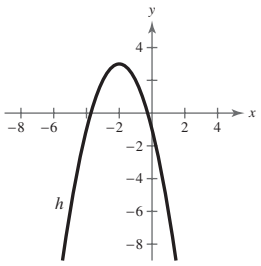


(d) $h(x) = -f(x) + 4$

119. (a) $f(x) = x^2$

(b) Reflexión en el eje x, desplazamiento horizontal de dos unidades a la izquierda, y desplazamiento vertical de tres unidades hacia arriba

(c)

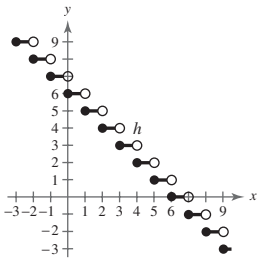


(d) $h(x) = -f(x + 2) + 3$

121. (a) $f(x) = [\![x]\!]$

(b) Reflexión en el eje x y desplazamiento vertical de seis unidades hacia arriba

(c)

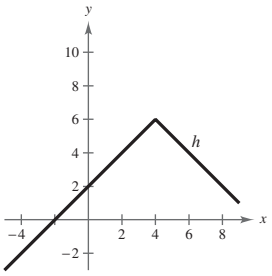


(d) $h(x) = -f(x) + 6$

123. (a) $f(x) = |x|$

(b) Reflexiones en el eje x y el eje y, desplazamiento horizontal de cuatro unidades a la derecha, y desplazamiento de seis unidades hacia arriba

(c)

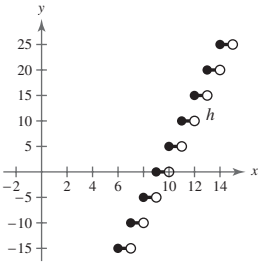


(d) $h(x) = -f(-x + 4) + 6$

125. (a) $f(x) = [\![x]\!]$

(b) Desplazamiento horizontal de nueve unidades a la derecha y estiramiento vertical

(c)

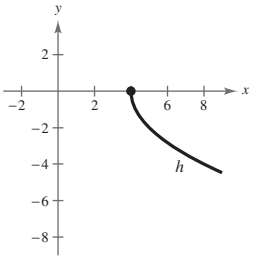


(d) $h(x) = 5f(x - 9)$

127. (a) $f(x) = \sqrt{x}$

(b) Reflexión en el eje x, estiramiento vertical y desplazamiento horizontal de cuatro unidades a la derecha

(c)



(d) $h(x) = -2f(x - 4)$

129. (a) $x^2 + 2x + 2$ (b) $x^2 - 2x + 4$

(c) $2x^3 - x^2 + 6x - 3$

(d) $\dfrac{x^2 + 3}{2x - 1}$; todos los números reales x excepto $x = \dfrac{1}{2}$

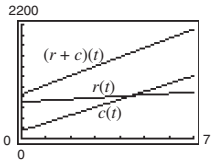
131. (a) $x - \frac{8}{3}$ (b) $x - 8$

Dominios de $f, g, f \circ g$, y $g \circ f$: todos los números reales

133. $f(x) = x^3$, $g(x) = 1 - 2x$

135. (a) $(r + c)(t) = 178.8t + 856$; esto representa el promedio de gastos anuales para servicios de telefonía residencial y celular.

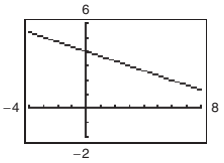
(b)



(c) $(r + c)(13) = 3180.4$

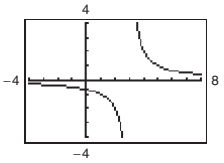
137. $f^{-1}(x) = \frac{1}{3}(x - 8)$ **139.** La función tiene una inversa.

141.



La función tiene una inversa.

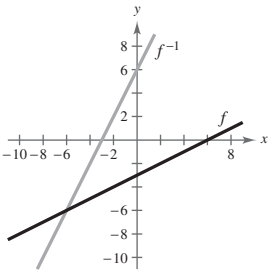
143.



La función tiene una inversa.

145. (a) $f^{-1}(x) = 2x + 6$

(b)

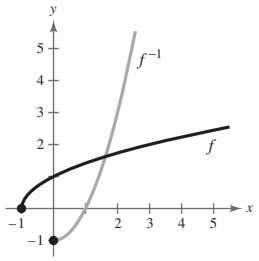


(c) La gráfica de f^{-1} es la reflexión de la gráfica de f en la recta $y = x$.

(d) Tanto f como f^{-1} tienen dominios y rangos que son todos los números reales.

147. (a) $f^{-1}(x) = x^2 - 1,\ x \geq 0$

(b)

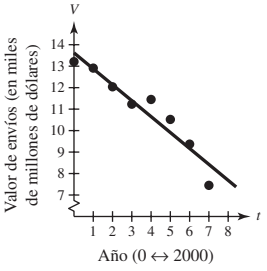


(c) La gráfica de f^{-1} es la reflexión de la gráfica de f en la recta $y = x$.

(d) f tiene un dominio de $[-1, \infty)$ y un rango de $[0, \infty)$; f^{-1} tiene un dominio de $[0, \infty)$ y un rango de $[-1, \infty)$.

149. $x > 4$; $f^{-1}(x) = \sqrt{\dfrac{x}{2}} + 4, x \neq 0$

151. (a)

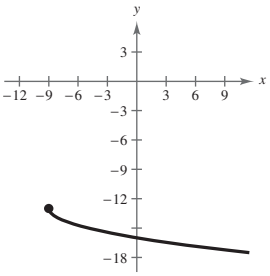


(b) El modelo es un buen ajuste para los datos reales.

153. Modelo: $k = \frac{8}{5}m$; 3.2 km, 16 km

155. Un factor de 4 **157.** Unas 2 h, 26 minutos

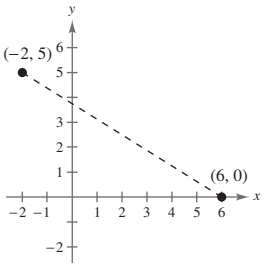
159. Falso. La gráfica está reflejada en el eje x, desplazada 9 unidades a la izquierda y luego desplazada 13 unidades hacia abajo.



161. Se usa la prueba de la recta vertical para determinar si la gráfica de y es una función de x. Se usa la prueba de la recta horizontal para determinar si una función tiene inversa.

Examen del capítulo *(página 121)*

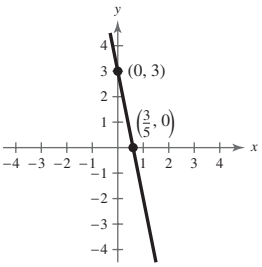
1.



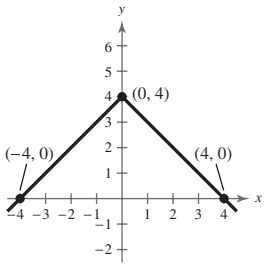
Punto medio: $\left(2, \frac{5}{2}\right)$; distancia: $\sqrt{89}$

2. Unos 11.937 cm

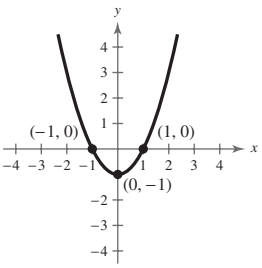
3. No hay simetría



4. Simetría con el eje y



5. Simetría con el eje y



6. $(x - 1)^2 + (y - 3)^2 = 16$

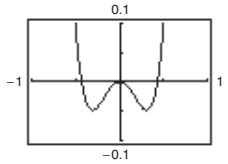
7. $y = -2x + 1$ **8.** $y = -1.7x + 5.9$

9. (a) $5x + 2y - 8 = 0$ (b) $-2x + 5y - 20 = 0$

10. (a) $-\frac{1}{8}$ (b) $-\frac{1}{28}$ (c) $\frac{\sqrt{x}}{x^2 - 18x}$ **11.** $x \leq 3$

12. (a) $0, \pm 0.4314$

(b)

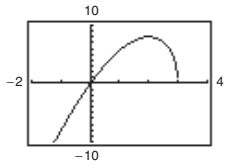


(c) Creciente en $(-0.31, 0), (0.31, \infty)$
Decreciente en $(-\infty, -0.31), (0, 0.31)$

(d) Par

13. (a) 0, 3

(b)

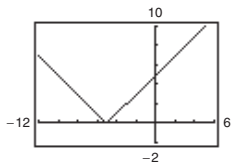


(c) Creciente en $(-\infty, 2)$
Decreciente en $(2, 3)$

(d) Ninguna

14. (a) -5

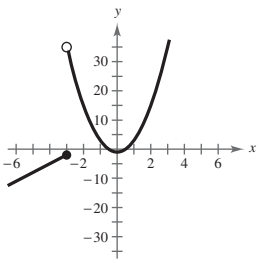
(b)



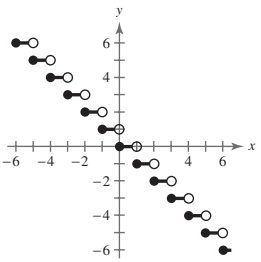
(c) Creciente en $(-5, \infty)$
Decreciente en $(-\infty, -5)$

(d) Ninguna

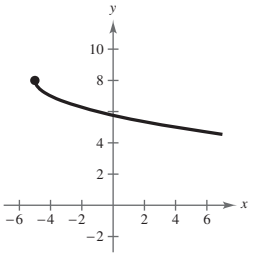
15.



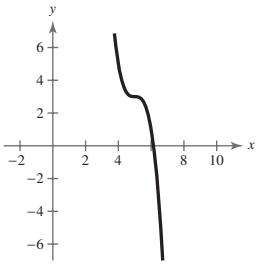
16. Reflexión en el eje x de $y = [\![x]\!]$



17. Reflexión en el eje x, desplazamiento horizontal y desplazamiento vertical de $y = \sqrt{x}$



18. Reflexión en el eje x, estiramiento vertical, desplazamiento horizontal y desplazamiento vertical de $y = x^3$



19. (a) $2x^2 - 4x - 2$ (b) $4x^2 + 4x - 12$
(c) $-3x^4 - 12x^3 + 22x^2 + 28x - 35$
(d) $\dfrac{3x^2 - 7}{-x^2 - 4x + 5}, \quad x \neq -5, 1$
(e) $3x^4 + 24x^3 + 18x^2 - 120x + 68$
(f) $-9x^4 + 30x^2 - 16$

20. (a) $\dfrac{1 + 2x^{3/2}}{x}, \quad x > 0$ (b) $\dfrac{1 - 2x^{3/2}}{x}, \quad x > 0$
(c) $\dfrac{2\sqrt{x}}{x}, \quad x > 0$ (d) $\dfrac{1}{2x^{3/2}}, \quad x > 0$
(e) $\dfrac{\sqrt{x}}{2x}, \quad x > 0$ (f) $\dfrac{2\sqrt{x}}{x}, \quad x > 0$

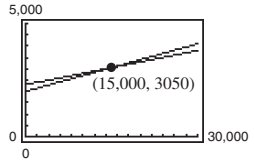
21. $f^{-1}(x) = \sqrt[3]{x - 8}$ **22.** No hay inversa

23. $f^{-1}(x) = \left(\frac{1}{3}x\right)^{2/3}, \ x \geq 0$ **24.** $v = 6\sqrt{s}$

25. $A = \dfrac{25}{6}xy$ **26.** $b = \dfrac{48}{a}$

Resolución de problemas *(página 123)*

1. (a) $W_1 = 2000 + 0.07S$ (b) $W_2 = 2300 + 0.05S$
(c)

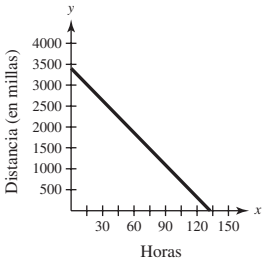


Ambos trabajos pagan el mismo salario mensual si las ventas son iguales a \$15 000.
(d) El trabajo 1 pagaría \$3400 y el trabajo 2 pagaría \$3300.

3. (a) La función será par.
(b) La función será impar.
(c) La función no será par ni impar.

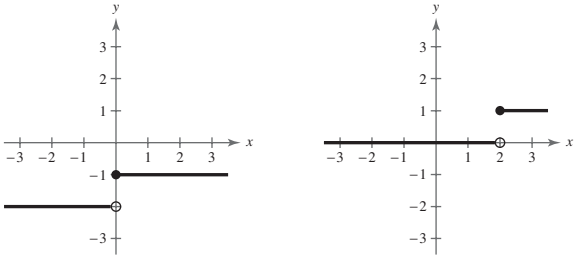
5. $f(x) = a_{2n}x^{2n} + a_{2n-2}x^{2n-2} + \cdots + a_2x^2 + a_0$
$f(-x) = a_{2n}(-x)^{2n} + a_{2n-2}(-x)^{2n-2} + \cdots + a_2(-x)^2 + a_0$
$= f(x)$

7. (a) $81\frac{2}{3}$ h (b) $25\frac{5}{7}$ mi/h
(c) $y = -\frac{180}{7}x + 3400$
Dominio: $0 \leq x \leq \frac{1190}{9}$
Rango: $0 \leq y \leq 3400$
(d)

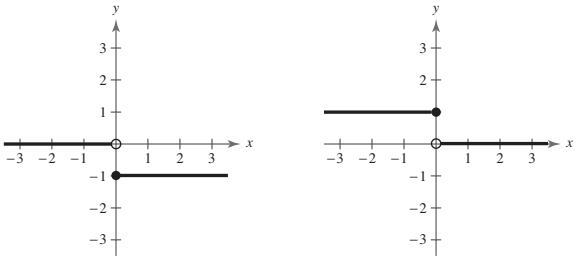


9. (a) $(f \circ g)(x) = 4x + 24$ (b) $(f \circ g)^{-1}(x) = \frac{1}{4}x - 6$
(c) $f^{-1}(x) = \frac{1}{4}x$; $g^{-1}(x) = x - 6$
(d) $(g^{-1} \circ f^{-1})(x) = \frac{1}{4}x - 6$; son iguales.
(e) $(f \circ g)(x) = 8x^3 + 1$; $(f \circ g)^{-1}(x) = \frac{1}{2}\sqrt[3]{x - 1}$;
$f^{-1}(x) = \sqrt[3]{x - 1}$; $g^{-1}(x) = \frac{1}{2}x$;
$(g^{-1} \circ f^{-1})(x) = \frac{1}{2}\sqrt[3]{x - 1}$
(f) Las respuestas variarán.
(g) $(f \circ g)^{-1}(x) = (g^{-1} \circ f^{-1})(x)$

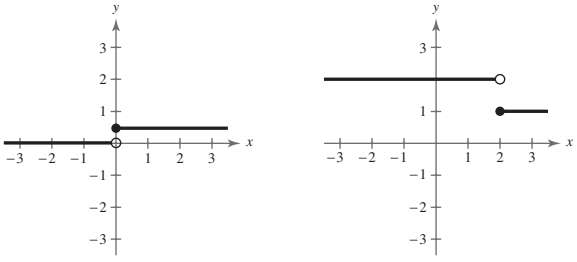
11. (a) (b)



(c) (d)



(e) (f)



13. Demostración

15. (a)

x	-4	-2	0	4
$f(f^{-1}(x))$	-4	-2	0	4

(b)

x	-3	-2	0	1
$(f + f^{-1})(x)$	5	1	-3	-5

(c)

x	-3	-2	0	1
$(f \cdot f^{-1})(x)$	4	0	2	6

(d)

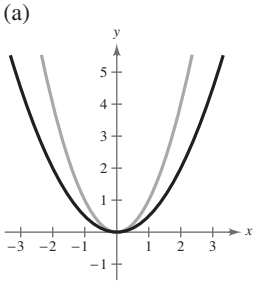
x	-4	-3	0	4
$\lvert f^{-1}(x)\rvert$	2	1	1	3

Capítulo 2

Sección 2.1 *(página 132)*

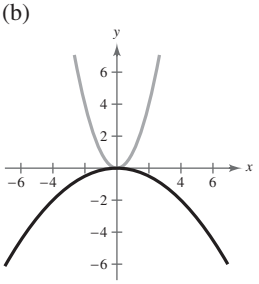
1. Polinomial **3.** Cuadrática; parábola
5. Positivo, mínimo
7. e **8.** c **9.** b **10.** a **11.** f **12.** d

13. (a)



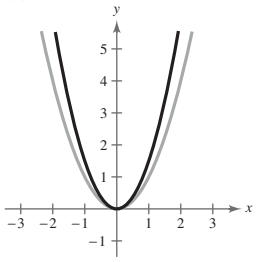
Contracción vertical

(b)



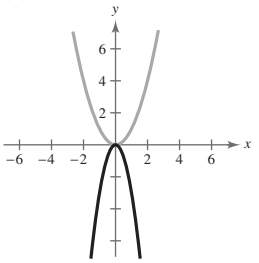
Contracción vertical y reflexión en el eje x

(c)



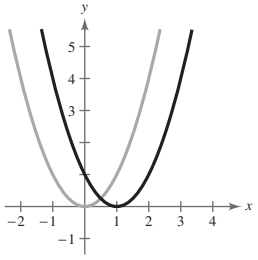
Estiramiento vertical

(d)



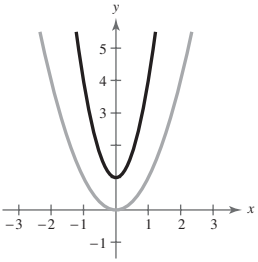
Estiramiento vertical y reflexión en el eje x

15. (a)



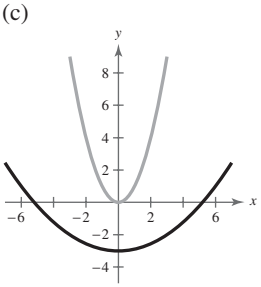
Desplazamiento horizontal de una unidad a la derecha

(b)



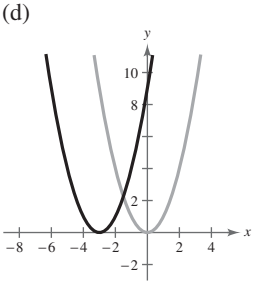
Contracción horizontal y desplazamiento vertical una unidad hacia arriba

(c)



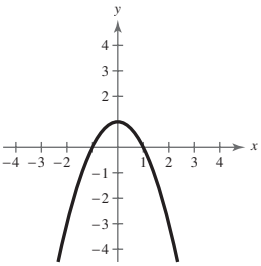
Estiramiento horizontal y desplazamiento vertical tres unidades hacia abajo

(d)



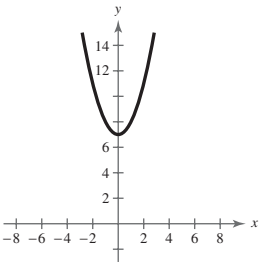
Desplazamiento horizontal tres unidades a la izquierda

17.



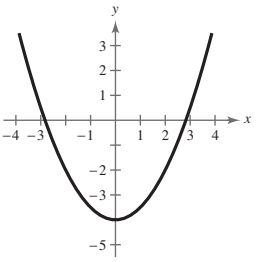
Vértice: $(0, 1)$
Eje de simetría: eje y
Intersecciones con el eje x: $(-1, 0)$ $(1, 0)$

19.



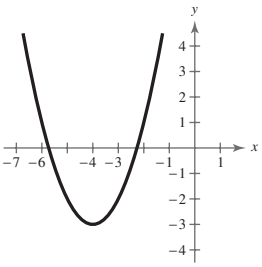
Vértice: $(0, 7)$
Eje de simetría: eje y
No hay intersecciones con el eje x

21.



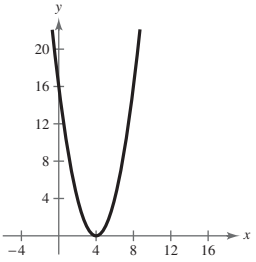
Vértice: $(0, -4)$
Eje de simetría: eje y
Intersecciones con el eje x: $\left(\pm 2\sqrt{2}, 0\right)$

23.



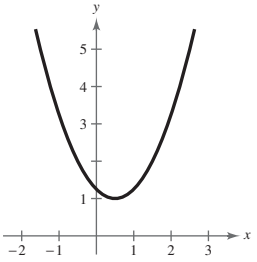
Vértice: $(-4, -3)$
Eje de simetría: $x = -4$
intersecciones con el eje x: $\left(-4 \pm \sqrt{3}, 0\right)$

25.



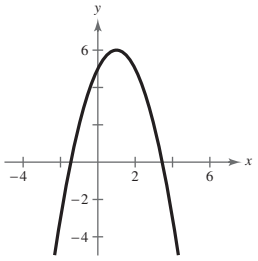
Vértice: $(4, 0)$
Eje de simetría: $x = 4$
Intersecciones con el eje x: $(4, 0)$

27.



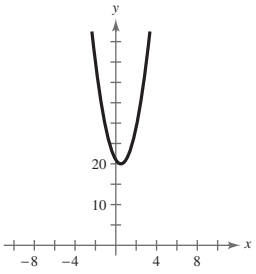
Vértice: $\left(\frac{1}{2}, 1\right)$
Eje de simetría: $x = \frac{1}{2}$
No hay intersecciones con el eje x

29.



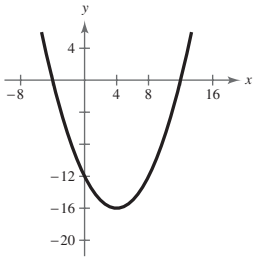
Vértice: $(1, 6)$
Eje de simetría: $x = 1$
Intersecciones con el eje x: $\left(1 \pm \sqrt{6}, 0\right)$

31.



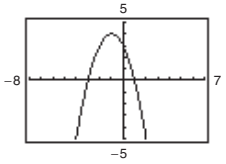
Vértice: $\left(\frac{1}{2}, 20\right)$
Eje de simetría: $x = \frac{1}{2}$
No hay intersecciones con el eje x

33.



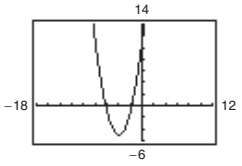
Vértice: $(4, -16)$
Eje de simetría: $x = 4$
Intersecciones con el eje x: $(-4, 0), (12, 0)$

35.



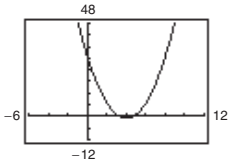
Vértice: $(-1, 4)$
Eje de simetría: $x = -1$
Intersecciones con el eje x: $(1, 0), (-3, 0)$

37.



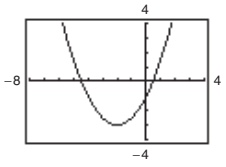
Vértice: $(-4, -5)$
Eje de simetría: $x = -4$
Intersecciones con el eje x: $\left(-4 \pm \sqrt{5}, 0\right)$

39.



Vértice: $(4, -1)$
Eje de simetría: $x = 4$
Intersecciones con el eje x: $\left(4 \pm \frac{1}{2}\sqrt{2}, 0\right)$

41.



Vértice: $(-2, -3)$
Eje de simetría: $x = -2$
Intersecciones con el eje x: $\left(-2 \pm \sqrt{6}, 0\right)$

43. $y = -(x + 1)^2 + 4$

45. $y = -2(x + 2)^2 + 2$

47. $f(x) = (x + 2)^2 + 5$

49. $f(x) = 4(x - 1)^2 - 2$

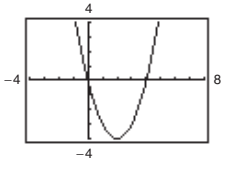
51. $f(x) = \frac{3}{4}(x - 5)^2 + 12$

53. $f(x) = -\frac{24}{49}\left(x + \frac{1}{4}\right)^2 + \frac{3}{2}$

55. $f(x) = -\frac{16}{3}\left(x + \frac{5}{2}\right)^2$

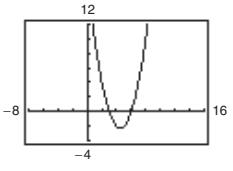
57. $(5, 0), (-1, 0)$

59.



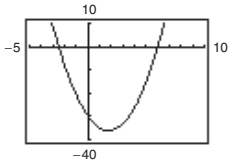
$(0, 0), (4, 0)$

61.



$(3, 0), (6, 0)$

63.



$\left(-\frac{5}{2}, 0\right), (6, 0)$

65. $f(x) = x^2 - 2x - 3$
$g(x) = -x^2 + 2x + 3$

67. $f(x) = x^2 - 10x$
$g(x) = -x^2 + 10x$

69. $f(x) = 2x^2 + 7x + 3$
$g(x) = -2x^2 - 7x - 3$

71. 55, 55 **73.** 12, 6 **75.** 16 ft **77.** 20 accesorios

79. (a) \$14 000 000; \$14 375 000; \$13 500 000
(b) \$24; \$14 400 000
Las respuestas variarán.

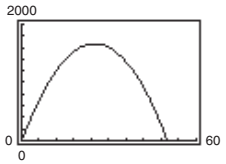
81. (a) $A = \dfrac{8x(50 - x)}{3}$

(b)

x	5	10	15	20	25	30
a	600	$1066\frac{2}{3}$	1400	1600	$1666\frac{2}{3}$	1600

$x = 25$ ft, $y = 33\frac{1}{3}$ ft

(c)

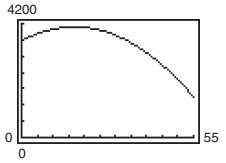


$x = 25$ ft, $y = 33\frac{1}{3}$ ft

(d) $A = -\frac{8}{3}(x - 25)^2 + \frac{5000}{3}$ (e) Son idénticos.

83. (a) $R = -100x^2 + 3500x, \quad 15 \le x \le 20$
(b) \$17.50; \$30 625

85. (a)



(b) 4075 cigarrillos; sí, la advertencia tuvo efecto porque el consumo máximo ocurrió en 1966.
(c) 7366 cigarrillos por año; 20 cigarrillos por día

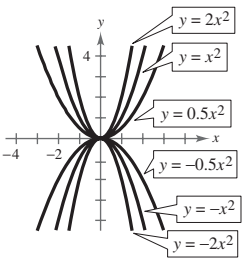
87. Verdadera. La ecuación no tiene soluciones reales, de modo que la gráfica no tiene intersecciones con el eje x.

89. Verdadera. La gráfica de una función cuadrática con coeficiente inicial negativo será una parábola que se abre hacia abajo.

91. $b = \pm 20$ **93.** $b = \pm 8$

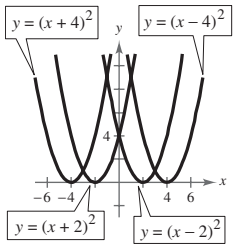
95. $f(x) = a\left(x + \dfrac{b}{2a}\right)^2 + \dfrac{4ac - b^2}{4a}$

97. (a)



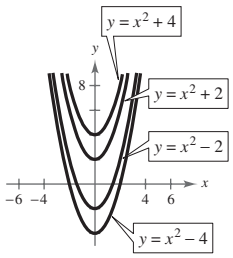
Cuando $|a|$ aumenta, la parábola se hace más angosta. Para $a > 0$, la parábola se abre hacia arriba. Para $a < 0$, la parábola se abre hacia abajo.

(b)



Para $h < 0$, el vértice estará sobre el eje x negativo. Para $h > 0$, el vértice estará sobre el eje x positivo. Cuando $|h|$ aumenta, la parábola se aleja del origen.

(c)



Cuando $|k|$ aumenta, el vértice se mueve hacia arriba (para $k > 0$) o hacia abajo (para $k < 0$), alejándose del origen.

99. Sí. Una gráfica de una ecuación cuadrática cuyo vértice está sobre el eje x tiene sólo una intersección con el eje x.

Sección 2.2 *(página 145)*

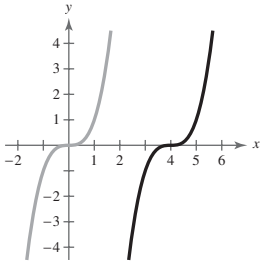
1. Continua **3.** x^n

5. (a) solución; (b) $(x - a)$; (c) intersección con el eje x

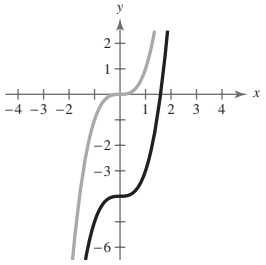
7. normal **9.** c **10.** g **11.** h **12.** f

13. a **14.** e **15.** d **16.** b

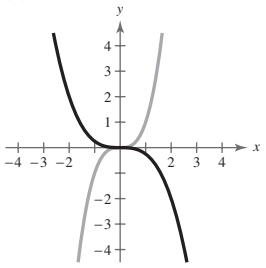
17. (a)



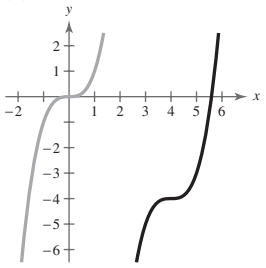
(b)



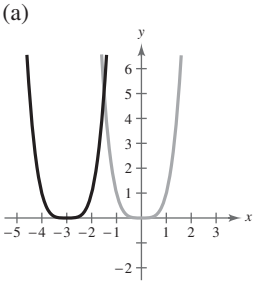
(c)



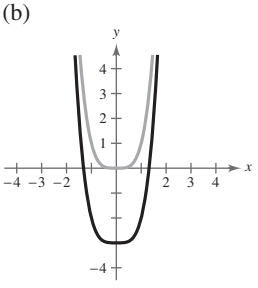
(d)



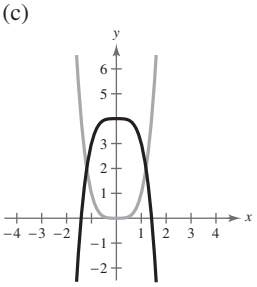
19. (a)



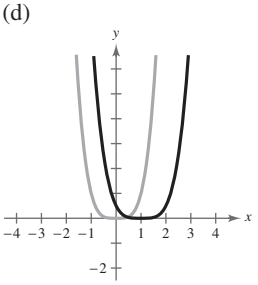
(b)



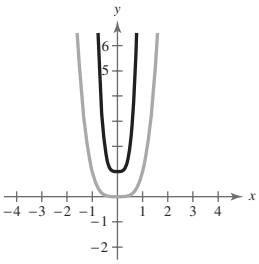
(c)



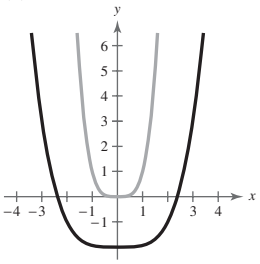
(d)



(e)



(f)



21. Baja a la izquierda, sube a la derecha

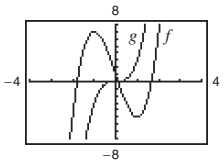
23. Baja a la izquierda, baja a la derecha

25. Sube a la izquierda, baja a la derecha

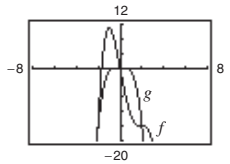
27. Sube a la izquierda, baja a la derecha

29. Baja a la izquierda, baja a la derecha

31.



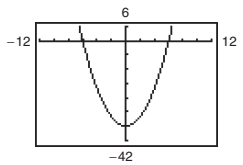
33.



35. (a) ± 6

(b) Multiplicidad impar; número de puntos de inflexión: 1

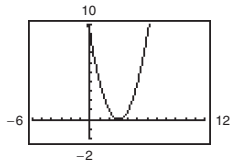
(c)



37. (a) 3

(b) Multiplicidad impar; número de puntos de inflexión: 1

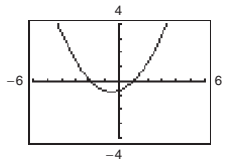
(c)



39. (a) $-2, 1$

(b) Multiplicidad impar; número de puntos de inflexión: 1

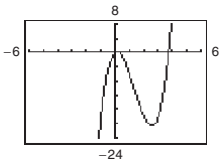
(c)



41. (a) $0, 2 \pm \sqrt{3}$

(b) Multiplicidad impar; número de puntos de inflexión: 2

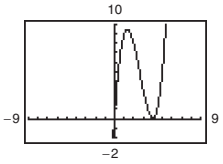
(c)



43. (a) 0, 4

(b) 0, multiplicidad impar; 4, multiplicidad par; número de puntos de inflexión: 2

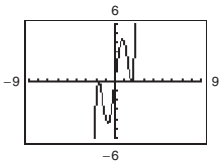
(c)



45. (a) $0, \pm\sqrt{3}$

(b) 0, multiplicidad impar; $\pm\sqrt{3}$, multiplicidad par; número de puntos de inflexión: 4

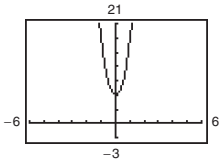
(c)



47. (a) No hay ceros reales

(b) Número de puntos de inflexión: 1

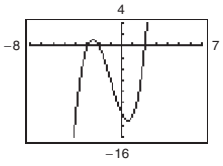
(c)



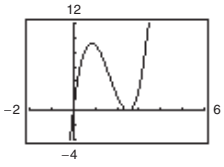
49. (a) $\pm 2, -3$

(b) Multiplicidad impar; número de puntos de inflexión: 2

(c)



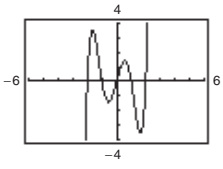
51. (a)



(b) Intersecciones con el eje x: $(0, 0), \left(\frac{5}{2}, 0\right)$ (c) $x = 0, \frac{5}{2}$

(d) Las respuestas del inciso (c) se relacionan con las intersecciones con el eje x.

53. (a)



(b) Intersecciones con el eje x: $(0, 0), (\pm 1, 0), (\pm 2, 0)$

(c) $x = 0, 1, -1, 2, -2$

(d) Las respuestas del inciso (c) se relacionan con las intersecciones con el eje x.

55. $f(x) = x^2 - 8x$ **57.** $f(x) = x^2 + 4x - 12$

59. $f(x) = x^3 + 9x^2 + 20x$

61. $f(x) = x^4 - 4x^3 - 9x^2 + 36x$ **63.** $f(x) = x^2 - 2x - 2$

65. $f(x) = x^2 + 6x + 9$ **67.** $f(x) = x^3 + 4x^2 - 5x$

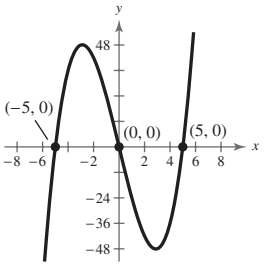
69. $f(x) = x^3 - 3x$ **71.** $f(x) = x^4 + x^3 - 15x^2 + 23x - 10$

73. $f(x) = x^5 + 16x^4 + 96x^3 + 256x^2 + 256x$

75. (a) Baja a la izquierda, sube a la derecha

(b) $0, 5, -5$ (c) Las respuestas variarán.

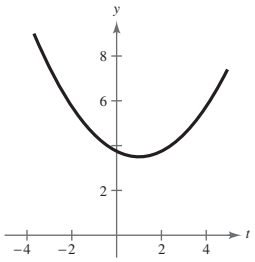
(d)



77. (a) Sube a la izquierda, sube a la derecha

(b) No hay ceros (c) Las respuestas variarán.

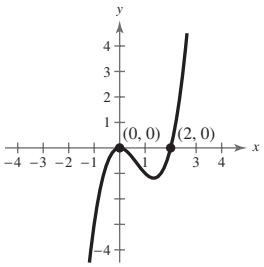
(d)



79. (a) Baja a la izquierda, sube a la derecha

(b) 0, 2 (c) Las respuestas variarán.

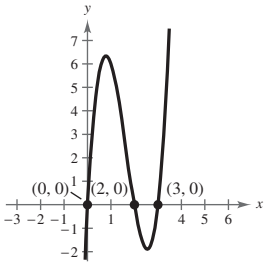
(d)



81. (a) Baja a la izquierda, sube a la derecha

(b) 0, 2, 3 (c) Las respuestas variarán.

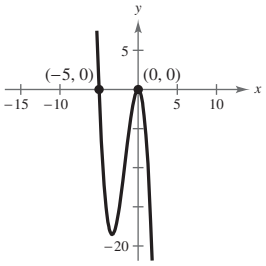
(d)



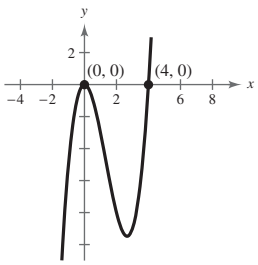
83. (a) Sube a la izquierda, sube a la derecha

(b) $-5, 0$ (c) Las respuestas variarán.

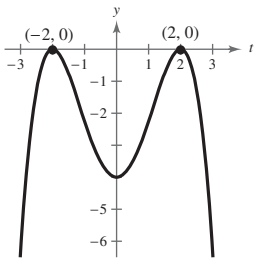
(d)



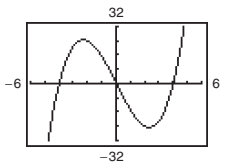
85. (a) Baja a la izquierda, sube a la derecha
(b) 0, 4 (c) Las respuestas variarán.
(d)



87. (a) Baja a la izquierda, sube a la derecha
(b) ± 2 (c) Las respuestas variarán.
(d)

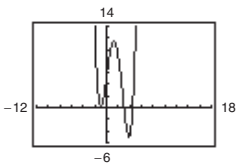


89.



Ceros: $0, \pm 4$,
multiplicidad impar

91.

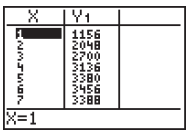


Ceros: -1,
multiplicidad par;
$3, \frac{9}{2}$, multiplicidad impar

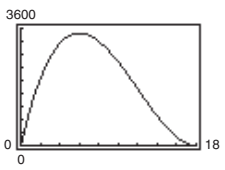
93. $[-1, 0], [1, 2], [2, 3]$; unos $-0.879, 1.347, 2.532$

95. $[-2, -1], [0, 1]$; unos $-1.585, 0.779$

97. (a) $V(x) = x(36 - 2x)^2$ (b) Dominio: $0 < x < 18$
(c)

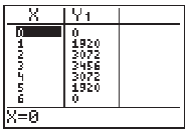


6 in. × 24 in. × 24 in.
(d)

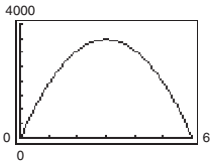


$x = 6$; Los resultados son los mismos.

99. (a) $A = -2x^2 + 12x$ (b) $V = -384x^2 + 2304x$
(c) 0 in. $< x <$ 6 in.
(d)

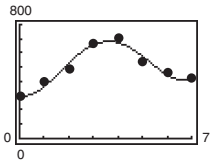


Cuando $x = 3$, el volumen es máximo en $V = 3456$; las dimensiones de la canal son 3 in. × 6 in. × 3 in.
(e)



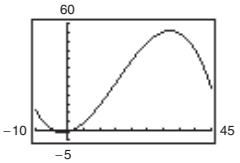
El valor máximo es el mismo.
(f) No. Las respuestas variarán.

101. (a)



(b) El modelo se ajusta bien a los datos.
(c) Mínimos relativos: (0.21, 300.54), (6.62, 410.74)
Máximos relativos: (3.62, 681.72)
(d) Creciente: (0.21, 3.62), (6.62, 7)
Decreciente: (0, 0.21), (3.62, 6.62)
(e) Las respuestas variarán.

103. (a)

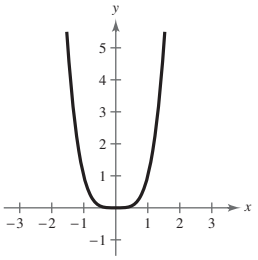


(b) $t \approx 15$
(c) Vértice: (15.22, 2.54)
(d) Los resultados serán aproximadamente iguales.

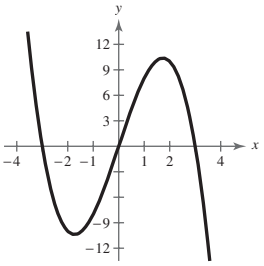
105. Falso. Un polinomio de quinto grado puede tener como máximo cuatro puntos de inflexión.

107. Verdadero. El grado de la función es impar y su coeficiente inicial es negativo, de modo que la gráfica sube a la izquierda y baja a la derecha.

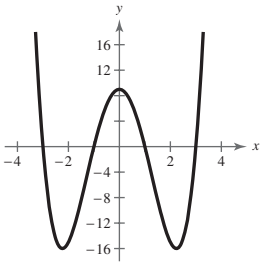
109.



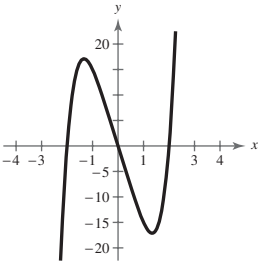
(a) Desplazamiento vertical de dos unidades hacia arriba; par
(b) Desplazamiento horizontal de dos unidades a la izquierda; ninguno
(c) Reflexión en el eje y; par
(d) Reflexión en el eje x; par
(e) Estiramiento horizontal; par
(f) Contracción vertical; par
(g) $g(x) = x^3, x \geq 0$; ninguno
(h) $g(x) = x^{16}$; par

111. (a) 

Ceros: 3
Mínimo relativo: 1
Máximo relativo: 1
El número de ceros es el mismo que el grado, y el número de extremos es uno menos que el grado.

(b) 

Ceros: 4
Mínimos relativos: 2
Máximo relativo: 1
El número de ceros es el mismo que el grado, y el número de extremos es uno menos que el grado.

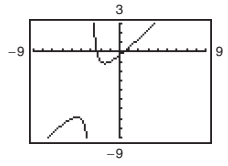
(c) 

Ceros: 3
Mínimo relativo: 1
Máximo relativo: 1
El número de ceros y el número de extremos son ambos menos que el grado.

Sección 2.3 *(página 156)*

1. $f(x)$: dividendo; $d(x)$: divisor; $q(x)$: cociente; $r(x)$: residuo

3. impropio **5.** Factor **7.** Las respuestas variarán.

9. (a) y (b) 

(c) Las respuestas variarán.

11. $2x + 4, \quad x \neq -3$ **13.** $x^2 - 3x + 1, \quad x \neq -\frac{5}{4}$

15. $x^3 + 3x^2 - 1, \quad x \neq -2$ **17.** $x^2 + 3x + 9, \quad x \neq 3$

19. $7 - \dfrac{11}{x+2}$ **21.** $x - \dfrac{x+9}{x^2+1}$ **23.** $2x - 8 + \dfrac{x-1}{x^2+1}$

25. $x + 3 + \dfrac{6x^2 - 8x + 3}{(x-1)^3}$ **27.** $3x^2 - 2x + 5, \quad x \neq 5$

29. $6x^2 + 25x + 74 + \dfrac{248}{x-3}$ **31.** $4x^2 - 9, \quad x \neq -2$

33. $-x^2 + 10x - 25, \quad x \neq -10$

35. $5x^2 + 14x + 56 + \dfrac{232}{x-4}$

37. $10x^3 + 10x^2 + 60x + 360 + \dfrac{1360}{x-6}$

39. $x^2 - 8x + 64, \quad x \neq -8$

41. $-3x^3 - 6x^2 - 12x - 24 - \dfrac{48}{x-2}$

43. $-x^3 - 6x^2 - 36x - 36 - \dfrac{216}{x-6}$

45. $4x^2 + 14x - 30, \quad x \neq -\frac{1}{2}$

47. $f(x) = (x-4)(x^2+3x-2) + 3, \quad f(4) = 3$

49. $f(x) = \left(x + \frac{2}{3}\right)(15x^3 - 6x + 4) + \frac{34}{3}, \quad f\left(-\frac{2}{3}\right) = \frac{34}{3}$

51. $f(x) = \left(x - \sqrt{2}\right)\left[x^2 + \left(3 + \sqrt{2}\right)x + 3\sqrt{2}\right] - 8,$
$f\left(\sqrt{2}\right) = -8$

53. $f(x) = \left(x - 1 + \sqrt{3}\right)\left[-4x^2 + \left(2 + 4\sqrt{3}\right)x + \left(2 + 2\sqrt{3}\right)\right],$
$f\left(1 - \sqrt{3}\right) = 0$

55. (a) -2 (b) 1 (c) $-\frac{1}{4}$ (d) 5

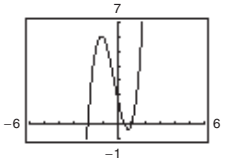
57. (a) -35 (b) -22 (c) -10 (d) -211

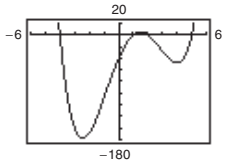
59. $(x-2)(x+3)(x-1)$; soluciones: $2, -3, 1$

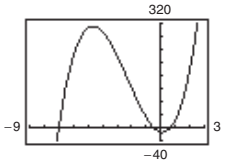
61. $(2x-1)(x-5)(x-2)$; soluciones: $\frac{1}{2}, 5, 2$

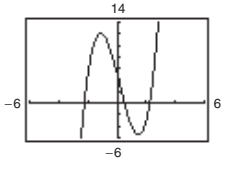
63. $\left(x + \sqrt{3}\right)\left(x - \sqrt{3}\right)(x+2)$; soluciones: $-\sqrt{3}, \sqrt{3}, -2$

65. $(x-1)\left(x - 1 - \sqrt{3}\right)\left(x - 1 + \sqrt{3}\right)$;
soluciones: $1, \ 1 + \sqrt{3}, \ 1 - \sqrt{3}$

67. (a) Las respuestas variarán. (b) $2x - 1$
(c) $f(x) = (2x-1)(x+2)(x-1)$
(d) $\frac{1}{2}, -2, 1$ (e) 

69. (a) Las respuestas variarán. (b) $(x-1), (x-2)$
(c) $f(x) = (x-1)(x-2)(x-5)(x+4)$
(d) $1, 2, 5, -4$ (e) 

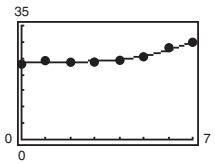
71. (a) Las respuestas variarán. (b) $x + 7$
(c) $f(x) = (x+7)(2x+1)(3x-2)$
(d) $-7, -\frac{1}{2}, \frac{2}{3}$ (e) 

73. (a) Las respuestas variarán. (b) $x - \sqrt{5}$
(c) $f(x) = \left(x - \sqrt{5}\right)\left(x + \sqrt{5}\right)(2x - 1)$
(d) $\pm\sqrt{5}, \frac{1}{2}$ (e) 

75. (a) Los ceros son 2 y alrededor de ± 2.236.
(b) $x = 2$ (c) $f(x) = (x-2)\left(x - \sqrt{5}\right)\left(x + \sqrt{5}\right)$

77. (a) Los ceros son -2, alrededor de 0.268 y alrededor de 3.732.
(b) $t = -2$
(c) $h(t) = (t+2)\left[t - \left(2 + \sqrt{3}\right)\right]\left[t - \left(2 - \sqrt{3}\right)\right]$

79. (a) Los ceros son 0, 3, 4 y alrededor de ± 1.414.
(b) $x = 0$
(c) $h(x) = x(x-4)(x-3)\left(x+\sqrt{2}\right)\left(x-\sqrt{2}\right)$
81. $2x^2 - x - 1, \quad x \neq \frac{3}{2}$ **83.** $x^2 + 3x, \quad x \neq -2, -1$
85. (a) y (b)



$A = 0.0349t^3 - 0.168t^2 + 0.42t + 23.4$

(c)

t	0	1	2	3
$A(t)$	23.4	23.7	23.8	24.1

t	4	5	6	7
$A(t)$	24.6	25.7	27.4	30.1

(d) \$45 700 millones; no, porque el modelo se aproximará rápidamente al infinito.

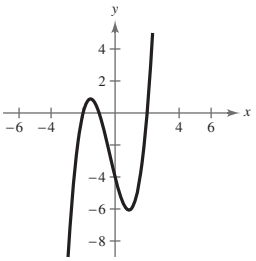
87. Falso. $-\frac{4}{7}$ es un cero de f.
89. Verdadero. El grado del numerador es mayor que el del denominador.
91. $x^{2n} + 6x^n + 9, \quad x^n \neq -3$ **93.** El residuo es 0.
95. $c = -210$ **97.** $k = 7$
99. (a) $x + 1, \quad x \neq 1$ (b) $x^2 + x + 1, \quad x \neq 1$
(c) $x^3 + x^2 + x + 1, \quad x \neq 1$
En general,, $\dfrac{x^n - 1}{x - 1} = x^{n-1} + x^{n-2} + \cdots + x + 1, \quad x \neq 1$

Sección 2.4 *(página 164)*

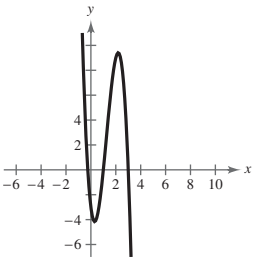
1. (a) iii (b) i (c) ii **3.** cuadrado principal
5. $a = -12, \ b = 7$ **7.** $a = 6, \ b = 5$ **9.** $8 + 5i$
11. $2 - 3\sqrt{3}\,i$ **13.** $4\sqrt{5}\,i$ **15.** 14 **17.** $-1 - 10i$
19. $0.3i$ **21.** $10 - 3i$ **23.** 1 **25.** $3 - 3\sqrt{2}\,i$
27. $-14 + 20i$ **29.** $\frac{1}{6} + \frac{7}{6}i$ **31.** $5 + i$ **33.** $108 + 12i$
35. 24 **37.** $-13 + 84i$ **39.** -10 **41.** $9 - 2i, \ 85$
43. $-1 + \sqrt{5}\,i, \ 6$ **45.** $-2\sqrt{5}i, \ 20$ **47.** $\sqrt{6}, \ 6$
49. $-3i$ **51.** $\frac{8}{41} + \frac{10}{41}i$ **53.** $\frac{12}{13} + \frac{5}{13}i$ **55.** $-4 - 9i$
57. $-\frac{120}{1681} - \frac{27}{1681}i$ **59.** $-\frac{1}{2} - \frac{5}{2}i$ **61.** $\frac{62}{949} + \frac{297}{949}i$
63. $-2\sqrt{3}$ **65.** -15
67. $\left(21 + 5\sqrt{2}\right) + \left(7\sqrt{5} - 3\sqrt{10}\right)i$ **69.** $1 \pm i$
71. $-2 \pm \frac{1}{2}i$ **73.** $-\frac{5}{2}, -\frac{3}{2}$ **75.** $2 \pm \sqrt{2}i$
77. $\dfrac{5}{7} \pm \dfrac{5\sqrt{15}}{7}$ **79.** $-1 + 6i$ **81.** $-14i$
83. $-432\sqrt{2}i$ **85.** i **87.** 81
89. (a) $z_1 = 9 + 16i, z_2 = 20 - 10i$
(b) $z = \dfrac{11\,240}{877} + \dfrac{4630}{877}i$
91. (a) 16 (b) 16 (c) 16 (d) 16
93. Falso. Si el número complejo es real, el número iguala a su conjugado.
95. Falso.
$i^{44} + i^{150} - i^{74} - i^{109} + i^{61} = 1 - 1 + 1 - i + i = 1$
97. $i, -1, -i, 1, i, -1, -i, 1$; el patrón repite los primeros cuatro resultados. Divida el exponente entre 4.
Si el residuo es 1, el resultado es i.
Si el residuo es 2, el resultado es -1.
Si el residuo es 3, el resultado es $-i$.
Si el residuo es 0, el resultado es 1.
99. $\sqrt{-6}\sqrt{-6} = \sqrt{6}\,i\sqrt{6}\,i = 6i^2 = -6$ **101.** Demostración

Sección 2.5 *(página 176)*

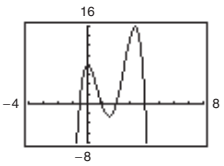
1. Teorema fundamental del álgebra **3.** Cero racional
5. Lineal; cuadrático; cuadrático
7. Regla de los signos de Descartes
9. 0, 6 **11.** $2, -4$ **13.** $-6, \pm i$ **15.** $\pm 1, \pm 2$
17. $\pm 1, \pm 3, \pm 5, \pm 9, \pm 15, \pm 45, \pm\frac{1}{2}, \pm\frac{3}{2}, \pm\frac{5}{2}, \pm\frac{9}{2}, \pm\frac{15}{2}, \pm\frac{45}{2}$
19. 1, 2, 3 **21.** $1, -1, 4$ **23.** $-6, -1$ **25.** $\frac{1}{2}, -1$
27. $-2, 3, \pm\frac{2}{3}$ **29.** $-2, 1$ **31.** $-4, \frac{1}{2}, 1, 1$
33. (a) $\pm 1, \pm 2, \pm 4$
(b)



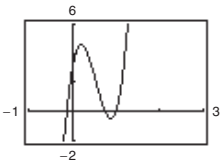
(c) $-2, -1, 2$
35. (a) $\pm 1, \pm 3, \pm\frac{1}{2}, \pm\frac{3}{2}, \pm\frac{1}{4}, \pm\frac{3}{4}$
(b)



(c) $-\frac{1}{4}, 1, 3$
37. (a) $\pm 1, \pm 2, \pm 4, \pm 8, \pm\frac{1}{2}$
(b)



(c) $-\frac{1}{2}, 1, 2, 4$
39. (a) $\pm 1, \pm 3, \pm\frac{1}{2}, \pm\frac{3}{2}, \pm\frac{1}{4}, \pm\frac{3}{4}, \pm\frac{1}{8}, \pm\frac{3}{8}, \pm\frac{1}{16}, \pm\frac{3}{16}, \pm\frac{1}{32}, \pm\frac{3}{32}$
(b)



(c) $1, \frac{3}{4}, -\frac{1}{8}$
41. (a) ± 1, alrededor de ± 1.414 (b) $\pm 1, \pm\sqrt{2}$
(c) $f(x) = (x+1)(x-1)\left(x+\sqrt{2}\right)\left(x-\sqrt{2}\right)$
43. (a) 0, 3, 4, alrededor de ± 1.414 (b) $0, 3, 4, \pm\sqrt{2}$
(c) $h(x) = x(x-3)(x-4)\left(x+\sqrt{2}\right)\left(x-\sqrt{2}\right)$
45. $x^3 - x^2 + 25x - 25$ **47.** $x^3 - 12x^2 + 46x - 52$
49. $3x^4 - 17x^3 + 25x^2 + 23x - 22$

51. (a) $(x^2 + 9)(x^2 - 3)$ (b) $(x^2 + 9)\left(x + \sqrt{3}\right)\left(x - \sqrt{3}\right)$
(c) $(x + 3i)(x - 3i)\left(x + \sqrt{3}\right)\left(x - \sqrt{3}\right)$

53. (a) $(x^2 - 2x - 2)(x^2 - 2x + 3)$
(b) $\left(x - 1 + \sqrt{3}\right)\left(x - 1 - \sqrt{3}\right)(x^2 - 2x + 3)$
(c) $\left(x - 1 + \sqrt{3}\right)\left(x - 1 - \sqrt{3}\right)\left(x - 1 + \sqrt{2}i\right)$
$\left(x - 1 - \sqrt{2}i\right)$

55. $\pm 2i, 1$ **57.** $\pm 5i, -\frac{1}{2}, 1$ **59.** $-3 \pm i, \frac{1}{4}$

61. $2, -3 \pm \sqrt{2}i, 1$ **63.** $\pm 6i;\ (x + 6i)(x - 6i)$

65. $1 \pm 4i;\ (x - 1 - 4i)(x - 1 + 4i)$

67. $\pm 2, \pm 2i;\ (x - 2)(x + 2)(x - 2i)(x + 2i)$

69. $1 \pm i;\ (z - 1 + i)(z - 1 - i)$

71. $-1, 2 \pm i;\ (x + 1)(x - 2 + i)(x - 2 - i)$

73. $-2, 1 \pm \sqrt{2}i;\ (x + 2)\left(x - 1 + \sqrt{2}i\right)\left(x - 1 - \sqrt{2}i\right)$

75. $-\frac{1}{5}, 1 \pm \sqrt{5}i;\ (5x + 1)\left(x - 1 + \sqrt{5}i\right)\left(x - 1 - \sqrt{5}i\right)$

77. $2, \pm 2i;\ (x - 2)^2(x + 2i)(x - 2i)$

79. $\pm i, \pm 3i;\ (x + i)(x - i)(x + 3i)(x - 3i)$

81. $-10, -7 \pm 5i$ **83.** $-\frac{3}{4}, 1 \pm \frac{1}{2}i$ **85.** $-2, -\frac{1}{2}, \pm i$

87. Un cero positivo **89.** Un cero negativo

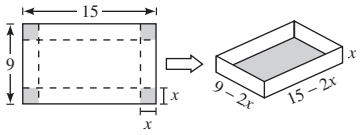
91. Un cero positivo, un cero negativo

93. Uno o tres ceros positivos **95–97.** Las respuestas variarán.

99. $1, -\frac{1}{2}$ **101.** $-\frac{3}{4}$ **103.** $\pm 2, \pm\frac{3}{2}$ **105.** $\pm 1, \frac{1}{4}$

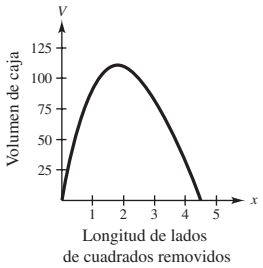
107. d **108.** a **109.** b **110.** c

111. (a)



(b) $V(x) = x(9 - 2x)(15 - 2x)$
Dominio: $0 < x < \frac{9}{2}$

(c)



1.82 cm × 5.36 cm × 11.36 cm

(d) $\frac{1}{2}, \frac{7}{2}$, 8; 8 no está en el dominio de V.

113. $x \approx 38.4$, o \$384 000

115. (a) $V(x) = x^3 + 9x^2 + 26x + 24 = 120$
(b) 4 ft × 5 ft × 6 ft

117. $x \approx 40$, o 4000 unidades

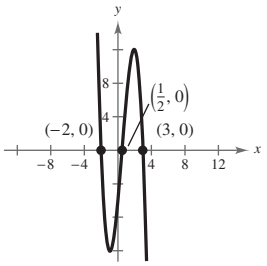
119. No. Hacer $p = 9\,000\,000$ y resolver la ecuación resultante da raíces imaginarias.

121. Falso. Los más ceros complejos que puede tener es dos, y el teorema de factorización lineal garantiza que hay tres factores lineales, de modo que un cero debe ser real.

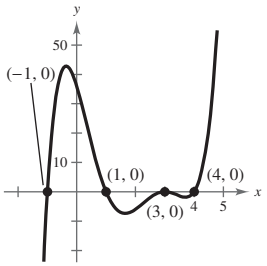
123. r_1, r_2, r_3 **125.** $5 + r_1, 5 + r_2, 5 + r_3$

127. Los ceros no pueden ser determinados.

129. Las respuestas variarán. Hay un número infinito de funciones para f. Ecuación y gráfica de muestra:
$f(x) = -2x^3 + 3x^2 + 11x - 6$

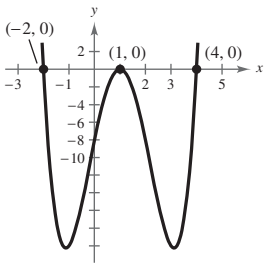


131. Las respuestas variarán. Gráfica de muestra:



133. $f(x) = x^4 + 5x^2 + 4$ **135.** $f(x) = x^3 - 3x^2 + 4x - 2$

137. (a) $-2, 1, 4$
(b) La gráfica toca el eje x en $x = 1$.
(c) El mínimo grado posible de la función es 4, porque hay al menos cuatro ceros reales (1 se repite) y una función puede tener como máximo el número de ceros reales igual al grado de la función. El grado no puede ser impar por la definición de multiplicidad.
(d) Positivo. De la información de la tabla puede concluirse que la gráfica finalmente subirá a la izquierda y subirá a la derecha.
(e) $f(x) = x^4 - 4x^3 - 3x^2 + 14x - 8$
(f)



139. (a) No es correcto porque f tiene (0, 0) como intersección.
(b) No es correcto porque la función debe tener como mínimo un polinomio de cuarto grado.
(c) Función correcta
(d) No es correcto porque k tiene $(-1, 0)$ como intersección.

Sección 2.6 *(página 190)*

1. funciones racionales **3.** asíntota horizontal

5. (a)

x	$f(x)$
0.5	-2
0.9	-10
0.99	-100
0.999	-1000

x	$f(x)$
1.5	2
1.1	10
1.01	100
1.001	1000

x	$f(x)$
5	0.25
10	$0.\overline{1}$
100	$0.\overline{01}$
1000	$0.\overline{001}$

(b) Asíntota vertical: $x = 1$
Asíntota horizontal: $y = 0$
(c) Dominio: todos los números reales x excepto $x = 1$

7. (a)

x	$f(x)$
0.5	-1
0.9	-12.79
0.99	-147.8
0.999	-1498

x	$f(x)$
1.5	5.4
1.1	17.29
1.01	152.3
1.001	1502

x	$f(x)$
5	3.125
10	$3.\overline{03}$
100	$3.\overline{0003}$
1000	3

(b) Asíntotas verticales: $x = \pm 1$
Asíntota horizontal: $y = 3$
(c) Dominio: todos los números reales x excepto $x = \pm 1$

9. Dominio: todos los números reales x excepto $x = 0$
Asíntota vertical: $x = 0$
Asíntota horizontal: $y = 0$

11. Dominio: todos los números reales x excepto $x = 5$
Asíntota vertical: $x = 5$
Asíntota horizontal: $y = -1$

13. Dominio: todos los números reales x excepto $x = \pm 1$
Asíntota vertical: $x = \pm 1$

15. Dominio: todos los números reales x
Asíntota horizontal: $y = 3$

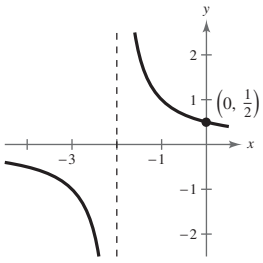
17. d **18.** a **19.** c **20.** b **21.** 3 **23.** 9

25. Dominio: todos los números reales x excepto $x = \pm 4$;
Asíntota vertical: $x = -4$; asíntota horizontal: $y = 0$

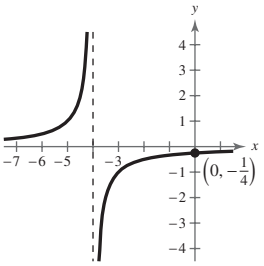
27. Dominio: todos los números reales x excepto $x = -1, 5$;
Asíntota vertical: $x = -1$; asíntota horizontal: $y = 1$

29. Dominio: todos los números reales x excepto $x = -1, \frac{1}{2}$;
Asíntota vertical: $x = \frac{1}{2}$; Asíntota horizontal: $y = \frac{1}{2}$

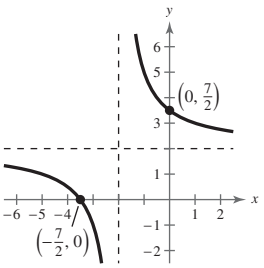
31. (a) Dominio: todos los números reales x excepto $x = -2$
(b) Intersección con el eje y: $\left(0, \frac{1}{2}\right)$
(c) Asíntota vertical: $x = -2$
Asíntota horizontal: $y = 0$
(d)



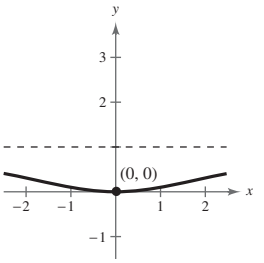
33. (a) Dominio: todos los números reales x excepto $x = -4$
(b) Intersección con el eje y: $\left(0, -\frac{1}{4}\right)$
(c) Asíntota vertical: $x = -4$
Asíntota horizontal: $y = 0$
(d)



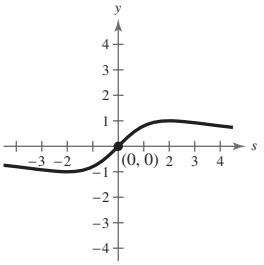
35. (a) Dominio: todos los números reales x excepto $x = -2$
(b) Intersección con el eje x: $\left(-\frac{7}{2}, 0\right)$
Intersección con el eje y: $\left(0, \frac{7}{2}\right)$
(c) Asíntota vertical: $x = -2$
Asíntota horizontal: $y = 2$
(d)



37. (a) Dominio: todos los números reales x
(b) Intersección con el eje: $(0, 0)$
(c) Asíntota horizontal: $y = 1$
(d)

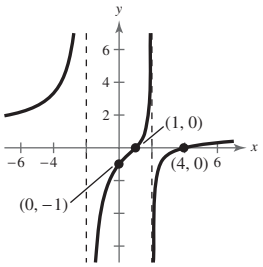


39. (a) Dominio: todos los números reales s
(b) Intersección: $(0, 0)$ (c) Asíntota horizontal: $y = 0$
(d)



41. (a) Dominio: todos los números reales x excepto $x = \pm 2$
(b) Intersección con el eje x: $(1, 0)$ y $(4, 0)$
Intersección con el eje y: $(0, -1)$
(c) Asíntota vertical: $x = \pm 2$
Asíntota horizontal: $y = 1$

(d)

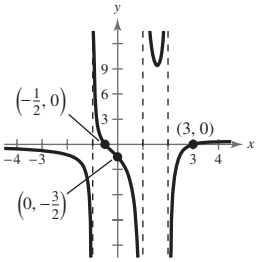


43. (a) Dominio: todos los números reales x excepto $x = \pm 1, 2$

(b) Intersecciones con el eje x: $(3, 0), \left(-\frac{1}{2}, 0\right)$
Intersección con el eje y: $\left(0, -\frac{3}{2}\right)$

(c) Asíntota vertical: $x = 2, x = \pm 1$
Asíntota horizontal: $y = 0$

(d)

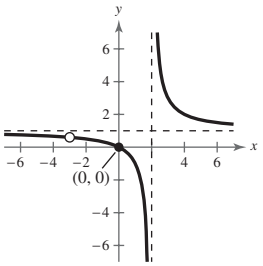


45. (a) Dominio: todos los números reales x excepto $x = 2, -3$

(b) Intersección con el eje: $(0, 0)$

(c) Asíntota vertical: $x = 2$
Asíntota horizontal: $y = 1$

(d)

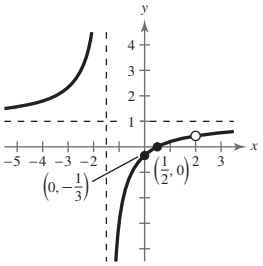


47. (a) Dominio: todos los números reales x excepto $x = -\frac{3}{2}, 2$

(b) Intersección con el eje x: $\left(\frac{1}{2}, 0\right)$
Intersección con el eje y: $\left(0, -\frac{1}{3}\right)$

(c) Asíntota vertical: $x = -\frac{3}{2}$
Asíntota horizontal: $y = 1$

(d)

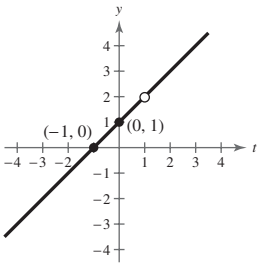


49. (a) Dominio: todos los números reales t excepto $t = 1$

(b) Intersección con el eje t: $(-1, 0)$
Intersección con el eje y: $(0, 1)$

(c) Asíntota vertical: ninguna
Asíntota horizontal: ninguna

(d)



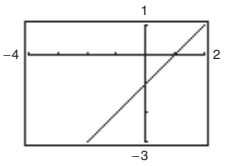
51. (a) Dominio de f: todos los números reales x excepto $x = -1$
Dominio de g: todos los números reales x

(b) $x - 1$; asíntotas verticales: ninguna

(c)

x	-3	-2	-1.5	-1	-0.5	0	1
$f(x)$	-4	-3	-2.5	no definida	-1.5	-1	0
$g(x)$	-4	-3	-2.5	-2	-1.5	-1	0

(d)



(e) Como hay sólo un número finito de píxeles, la calculadora de gráficas puede no tratar de evaluar la función donde no existe.

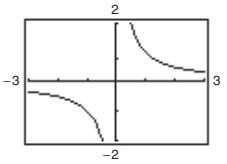
53. (a) Dominio de f: todos los números reales x excepto $x = 0, 2$
Dominio de g: todos los números reales x excepto $x = 0$

(b) $\frac{1}{x}$; asíntota vertical: $x = 0$

(c)

x	-0.5	0	0.5	1	1.5	2	3
$f(x)$	-2	No definida	2	1	$\frac{2}{3}$	No definida	$\frac{1}{3}$
$g(x)$	-2	No definida	2	1	$\frac{2}{3}$	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{3}$

(d)



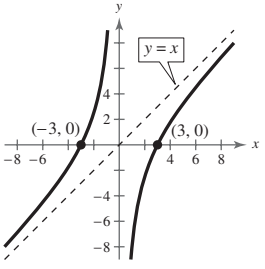
(e) Como hay sólo un número finito de píxeles, la calculadora de gráficas puede no tratar de evaluar la función donde no existe.

55. (a) Dominio: todos los números reales x excepto $x = 0$

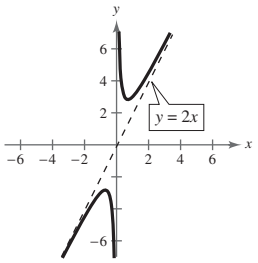
(b) Intersecciones con el eje x: $(-3, 0), (3, 0)$

(c) Asíntota vertical: $x = 0$
Asíntota diagonal: $y = x$

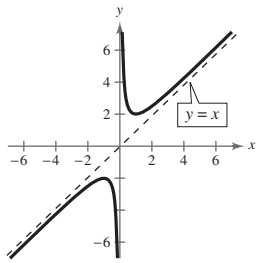
(d)



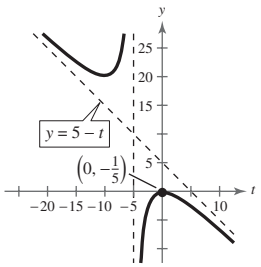
57. (a) Dominio: todos los números reales x excepto $x = 0$
(b) No hay intersecciones con los ejes
(c) Asíntota vertical: $x = 0$
Asíntota diagonal: $y = 2x$
(d)



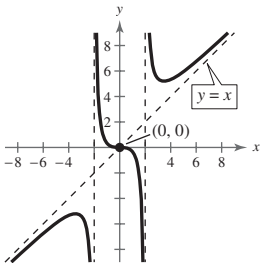
59. (a) Dominio: todos los números reales x excepto $x = 0$
(b) No hay intersecciones con los ejes
(c) Asíntota vertical: $x = 0$
Asíntota diagonal: $y = x$
(d)



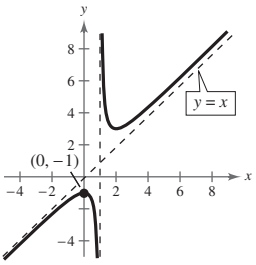
61. (a) Dominio: todos los números reales t excepto $t = -5$
(b) Intersección con el eje y: $\left(0, -\frac{1}{5}\right)$
(c) Asíntota vertical: $t = -5$
Asíntota diagonal: $y = -t + 5$
(d)



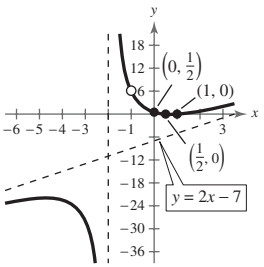
63. (a) Dominio: todos los números reales x excepto $x = \pm 2$
(b) Intersección: $(0, 0)$
(c) Asíntota vertical: $x = \pm 2$
Asíntota diagonal: $y = x$
(d)



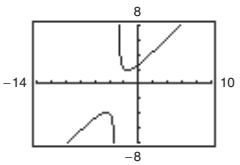
65. (a) Dominio: todos los números reales x excepto $x = 1$
(b) Intersección con el eje y: $(0, -1)$
(c) Asíntota vertical: $x = 1$
Asíntota diagonal: $y = x$
(d)



67. (a) Dominio: todos los números reales x excepto $x = -1, -2$
(b) Intersección con el eje y: $\left(0, \frac{1}{2}\right)$
Intersecciones con el eje x: $\left(\frac{1}{2}, 0\right)$, $(1, 0)$
(c) Asíntota vertical: $x = -2$
Asíntota diagonal: $y = 2x - 7$
(d)

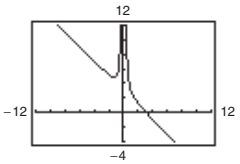


69.



Dominio: todos los números reales x excepto $x = -3$
Asíntota vertical: $x = -3$
Asíntota diagonal: $y = x + 2$
$y = x + 2$

71.

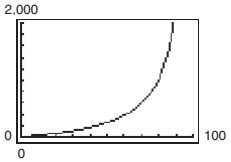


Dominio: todos los números reales x excepto $x = 0$
Asíntota vertical: $x = 0$
Asíntota diagonal: $y = -x + 3$
$y = -x + 3$

73. (a) $(-1, 0)$ (b) -1

75. (a) $(1, 0), (-1, 0)$ (b) ± 1

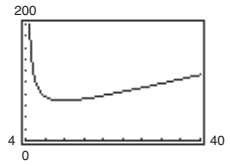
77. (a)



(b) \$28.33 millones; \$170 millones; \$765 millones
(c) No. La función no está definida en $p = 100$.

79. (a) 333 venados, 500 venados, 800 venados
(b) 1500 venados

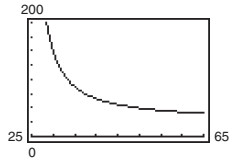
81. (a) $A = \dfrac{2x(x + 11)}{x - 4}$ (b) $(4, \infty)$

(c) 

11.75 in. × 5.87 in.

83. (a) Las respuestas variarán.

(b) Asíntota vertical: $x = 25$
Asíntota horizontal: $y = 25$

(c) 

(d)

x	30	35	40	45	50	55	60
y	150	87.5	66.7	56.3	50	45.8	42.9

(e) Respuesta de muestra: no. Podría esperarse que el promedio de velocidad para el viaje redondo fuera el promedio de las velocidades para las dos partes del viaje.

(f) No. A 20 millas por hora se llevaría más tiempo en una dirección de lo que se requiere para el viaje redondo a un promedio de velocidad de 50 millas por hora.

85. Falso. Los polinomios no tienen asíntotas verticales.

87. Falso. Si el grado del numerador es mayor que el del denominador, no existe asíntota horizontal. No obstante, existe una asíntota diagonal sólo si el grado del numerador es uno mayor que el grado del denominador.

89. c

Sección 2.7 *(página 201)*

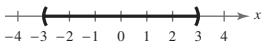
1. Positivo; negativo **3.** Ceros; valores no definidos

5. (a) No (b) Sí (c) Sí (d) No

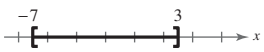
7. (a) Sí (b) No (c) No (d) Sí

9. $-\frac{2}{3}$, 1 **11.** 4, 5

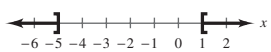
13. $(-3, 3)$



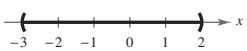
15. $[-7, 3]$



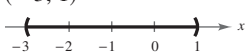
17. $(-\infty, -5] \cup [1, \infty)$



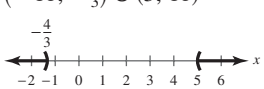
19. $(-3, 2)$



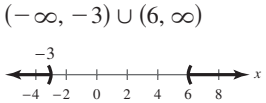
21. $(-3, 1)$



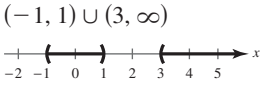
23. $\left(-\infty, -\frac{4}{3}\right) \cup (5, \infty)$



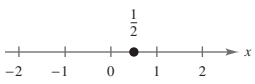
25. $(-\infty, -3) \cup (6, \infty)$



27. $(-1, 1) \cup (3, \infty)$

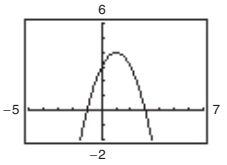


29. $x = \frac{1}{2}$



31. $(-\infty, 0) \cup \left(0, \frac{3}{2}\right)$ **33.** $[-2, 0] \cup [2, \infty)$ **35.** $[-2, \infty)$

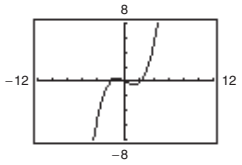
37.



(a) $x \leq -1,\ x \geq 3$

(b) $0 \leq x \leq 2$

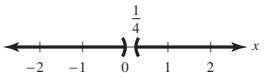
39.



(a) $-2 \leq x \leq 0,\ 2 \leq x < \infty$

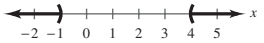
(b) $x \leq 4$

41. $(-\infty, 0) \cup \left(\frac{1}{4}, \infty\right)$



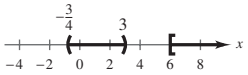
43. $(-\infty, \frac{5}{3}] \cup (5, \infty)$

45. $(-\infty, -1) \cup (4, \infty)$

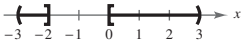


47. $(-5, 3) \cup (11, \infty)$

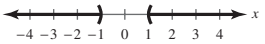
49. $\left(-\frac{3}{4}, 3\right) \cup [6, \infty)$



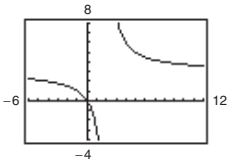
51. $(-3, -2] \cup [0, 3)$



53. $(-\infty, -1) \cup (1, \infty)$



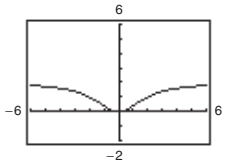
55.



(a) $0 \leq x < 2$

(b) $2 < x \leq 4$

57.



(a) $|x| \geq 2$

(b) $-\infty < x < \infty$

59. $[-2, 2]$ **61.** $(-\infty, 4] \cup [5, \infty)$

63. $(-5, 0] \cup (7, \infty)$ **65.** $(-3.51, 3.51)$

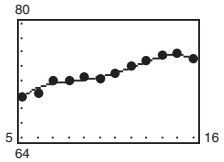
67. $(-0.13, 25.13)$ **69.** $(2.26, 2.39)$

71. (a) $t = 10$ s (b) $4 \text{ s} < t < 6 \text{ s}$

73. $13.8 \text{ m} \leq L \leq 36.2 \text{ m}$

75. $40\,000 \leq x \leq 50\,000$; $\$50.00 \leq p \leq \$55.00$

77. (a) y (c)



El modelo se ajusta bien a los datos.

(b) $N = -0.00412t^4 + 0.1705t^3 - 2.538t^2 + 16.55t + 31.5$

(d) 2003 a 2006

(e) No; el modelo decrece abruptamente después de 2006

79. $R_1 \geq 2$ ohms

81. Verdadero. Los intervalos de prueba son $(-\infty, -3)$, $(-3, 1)$, $(1, 4)$ y $(4, \infty)$.

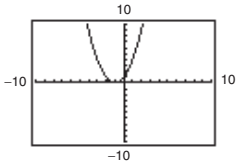
83. (a) $(-\infty, -4] \cup [4, \infty)$

(b) Si $a > 0$ y $c > 0$, $b \leq -2\sqrt{ac}$ o $b \geq 2\sqrt{ac}$.

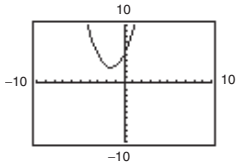
85. (a) $\left(-\infty, -2\sqrt{30}\right] \cup \left[2\sqrt{30}, \infty\right)$

(b) Si $a > 0$ y $c > 0$, $b \leq -2\sqrt{ac}$ o $b \geq 2\sqrt{ac}$.

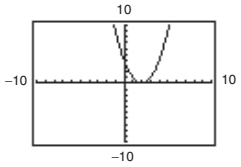
87.



Para el inicio (b), los valores de y que son menores o iguales a 0 se presentan sólo en $x = -1$.



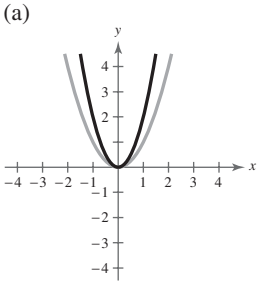
Para el inicio (c), no hay valores de y que sean menores que 0.



Para el inicio (d), los valores de y que son mayores que 0 se presentan para todos los valores de x excepto 2.

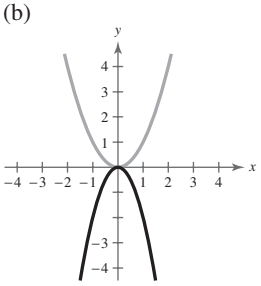
Ejercicios de repaso *(página 206)*

1. (a)



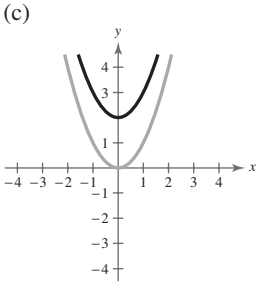
Estiramiento vertical

(b)



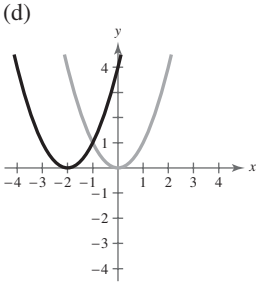
Estiramiento vertical y reflexión en el eje x

(c)



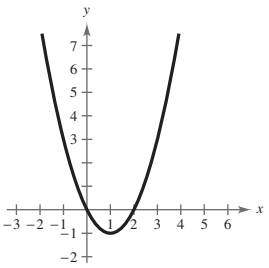
Desplazamiento vertical dos unidades hacia arriba

(d)



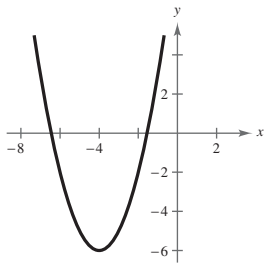
Desplazamiento horizontal dos unidades a la izquierda

3. $g(x) = (x - 1)^2 - 1$



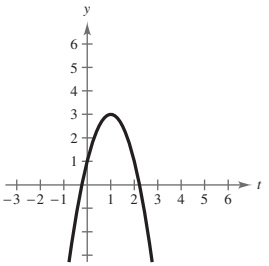
Vértice: $(1, -1)$
Eje de simetría: $x = 1$
Intersecciones con el eje x: $(0, 0), (2, 0)$

5. $f(x) = (x + 4)^2 - 6$



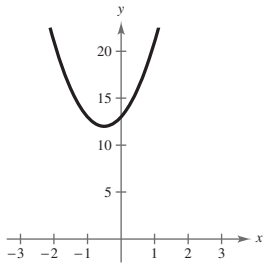
Vértice: $(-4, -6)$
Eje de simetría: $x = -4$
Intersección con el eje x: $\left(-4 \pm \sqrt{6}, 0\right)$

7. $f(t) = -2(t - 1)^2 + 3$



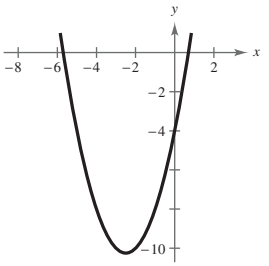
Vértice: $(1, 3)$
Eje de simetría: $t = 1$
Intersección con el eje t: $\left(1 \pm \frac{\sqrt{6}}{2}, 0\right)$

9. $h(x) = 4\left(x + \frac{1}{2}\right)^2 + 12$



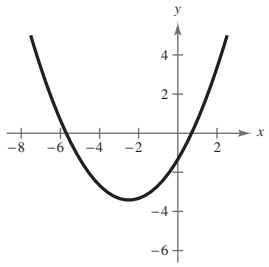
Vértice: $\left(-\frac{1}{2}, 12\right)$
Eje de simetría: $x = -\frac{1}{2}$
No hay intersecciones con el eje x

11. $h(x) = \left(x + \frac{5}{2}\right)^2 - \frac{41}{4}$



Vértice: $\left(-\frac{5}{2}, -\frac{41}{4}\right)$
Eje de simetría: $x = -\frac{5}{2}$
Intersección con el eje x: $\left(\frac{\pm\sqrt{41} - 5}{2}, 0\right)$

13. $f(x) = \frac{1}{3}\left(x + \frac{5}{2}\right)^2 - \frac{41}{12}$



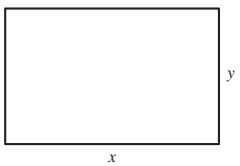
Vértice: $\left(-\frac{5}{2}, -\frac{41}{12}\right)$
Eje de simetría: $x = -\frac{5}{2}$
Intersección con el eje x: $\left(\frac{\pm\sqrt{41} - 5}{2}, 0\right)$

15. $f(x) = -\frac{1}{2}(x - 4)^2 + 1$

17. $f(x) = (x - 1)^2 - 4$

19. $y = -\frac{11}{36}\left(x + \frac{3}{2}\right)^2$

21. (a)

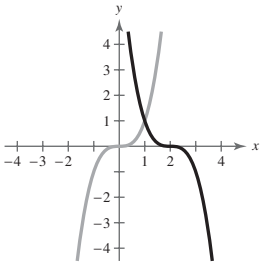


(b) $y = 500 - x$
$A(x) = 500x - x^2$

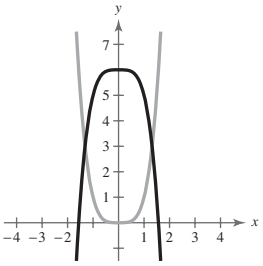
(c) $x = 250,\ y = 250$

23. 1091 unidades

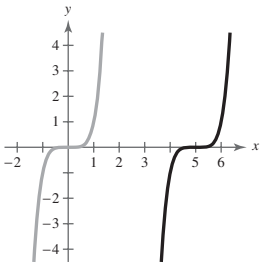
25.



27.



29.



31. Baja a la izquierda, baja a la derecha

33. Sube a la izquierda, sube a la derecha

35. $-8, \frac{4}{3}$, multiplicidad impar; puntos de inflexión: 1

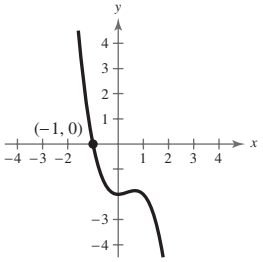
37. $0, \pm\sqrt{3}$, multiplicidad impar; puntos de inflexión: 2

39. 0, multiplicidad par; $\frac{2}{3}$, multiplicidad impar; puntos de inflexión: 2

41. (a) Sube a la izquierda, baja a la derecha (b) -1

(c) Las respuestas variarán.

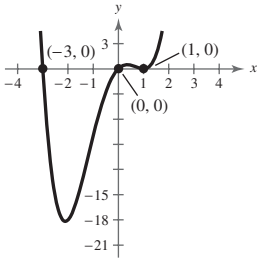
(d)



43. (a) Sube a la izquierda, sube a la derecha (b) $-3, 0, 1$

(c) Las respuestas variarán.

(d)



45. (a) $[-1, 0]$ (b) Alrededor de -0.900

47. (a) $[-1, 0], [1, 2]$

(b) Alrededor de -0.200, alrededor de 1.772

49. $6x + 3 + \dfrac{17}{5x - 3}$ **51.** $5x + 4, \quad x \neq \dfrac{5}{2} \pm \dfrac{\sqrt{29}}{2}$

53. $x^2 - 3x + 2 - \dfrac{1}{x^2 + 2}$

55. $6x^3 + 8x^2 - 11x - 4 - \dfrac{8}{x - 2}$

57. $2x^2 - 9x - 6, \quad x \neq 8$

59. (a) Sí (b) Sí (c) Sí (d) No

61. (a) -421 (b) -9

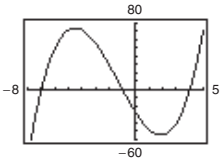
63. (a) Las respuestas variarán.

(b) $(x + 7), (x + 1)$

(c) $f(x) = (x + 7)(x + 1)(x - 4)$

(d) $-7, -1, 4$

(e)

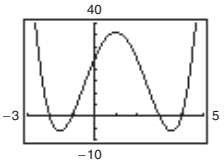


65. (a) Las respuestas variarán. (b) $(x + 1), (x - 4)$

(c) $f(x) = (x + 1)(x - 4)(x + 2)(x - 3)$

(d) $-2, -1, 3, 4$

(e)



67. $8 + 10i$ **69.** $-1 + 3i$ **71.** $3 + 7i$

73. $63 + 77i$ **75.** $-4 - 46i$ **77.** $39 - 80i$

79. $\dfrac{23}{17} + \dfrac{10}{17}i$ **81.** $\dfrac{21}{13} - \dfrac{1}{13}i$ **83.** $\pm\dfrac{\sqrt{10}}{5}i$ **85.** $1 \pm 3i$

87. 0, 3 **89.** 2, 9 **91.** $-4, 6, \pm 2i$

93. $\pm 1, \pm 3, \pm 5, \pm 15, \pm\frac{1}{2}, \pm\frac{3}{2}, \pm\frac{5}{2}, \pm\frac{15}{2}, \pm\frac{1}{4}, \pm\frac{3}{4}, \pm\frac{5}{4}, \pm\frac{15}{4}$

95. $-6, -2, 5$ **97.** 1, 8 **99.** $-4, 3$

101. $f(x) = 3x^4 - 14x^3 + 17x^2 - 42x + 24$

103. $4, \pm i$ **105.** $-3, \frac{1}{2}, 2 \pm i$

107. $0, 1, -5; f(x) = x(x - 1)(x + 5)$

109. $-4, 2 \pm 3i; g(x) = (x + 4)^2(x - 2 - 3i)(x - 2 + 3i)$

111. Dos o no hay ceros positivos, un cero negativo

113. Las respuestas variarán.

115. Dominio: todos los números reales x excepto $x = -10$

117. Dominio: todos los números reales x excepto $x = 6, 4$

119. Asíntota vertical: $x = -3$

Asíntota horizontal: $y = 0$

121. Asíntota vertical: $x = 6$

Asíntota horizontal: $y = 0$

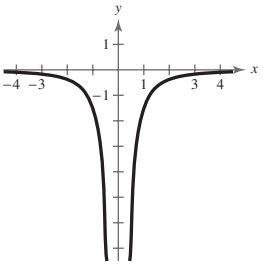
123. (a) Dominio: todos los números reales x excepto $x = 0$

(b) No hay intersecciones

(c) Asíntota vertical: $x = 0$

Asíntota horizontal: $y = 0$

(d)



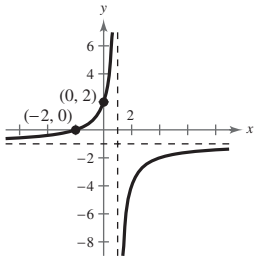
125. (a) Dominio: todos los números reales x excepto $x = 1$

(b) Intersección con el eje x: $(-2, 0)$

Intersección con el eje y: $(0, 2)$

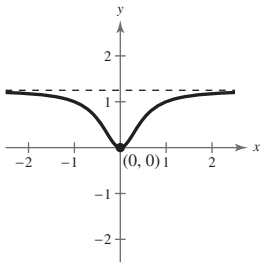
(c) Asíntota vertical: $x = 1$
Asíntota horizontal: $y = -1$

(d)



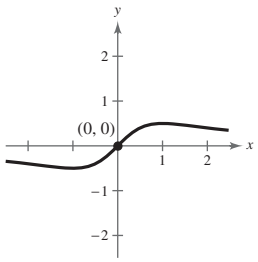
127. (a) Dominio: todos los números reales x
(b) Intersección con el eje: $(0, 0)$
(c) Asíntota horizontal: $y = \frac{5}{4}$

(d)



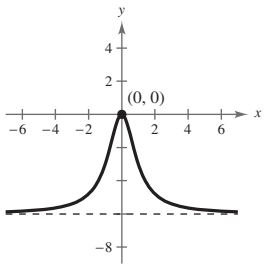
129. (a) Dominio: todos los números reales x
(b) Intersección: $(0, 0)$
(c) Asíntota horizontal: $y = 0$

(d)



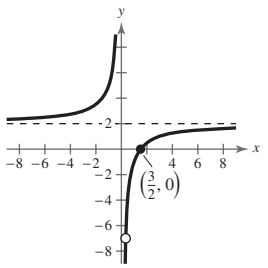
131. (a) Dominio: todos los números reales x
(b) Intersección: $(0, 0)$
(c) Asíntota horizontal: $y = -6$

(d)



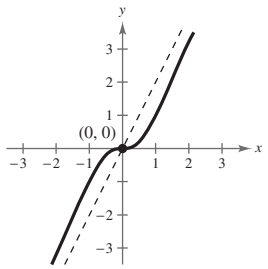
133. (a) Dominio: todos los números reales x excepto $x = 0, \frac{1}{3}$
(b) Intersección con el eje x: $\left(\frac{3}{2}, 0\right)$
(c) Asíntota vertical: $x = 0$
Asíntota horizontal: $y = 2$

(d)



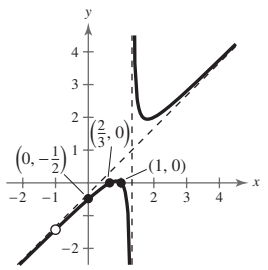
135. (a) Dominio: todos los números reales x
(b) Intersección: $(0, 0)$ (c) Asíntota diagonal: $y = 2x$

(d)



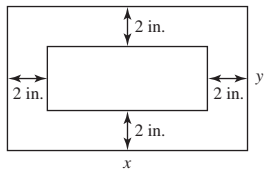
137. (a) Dominio: todos los números reales x excepto $x = \frac{4}{3}, -1$
(b) Intersección con el eje y: $\left(0, -\frac{1}{2}\right)$
Intersecciones con el eje x: $\left(\frac{2}{3}, 0\right), (1, 0)$
(c) Asíntota vertical: $x = \frac{4}{3}$
Asíntota diagonal: $y = x - \frac{1}{3}$

(d)



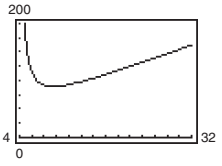
139. $\overline{C} = 0.5 = \$0.50$

141. (a)



(b) $A = \dfrac{2x(2x + 7)}{x - 4}$ (c) $4 < x < \infty$

(d)



9.48 in. × 9.48 in.

143. $\left(-\frac{2}{3}, \frac{1}{4}\right)$ **145.** $[-4, 0] \cup [4, \infty)$
147. $[-5, -1) \cup (1, \infty)$ **149.** $(-\infty, 0) \cup [4, 5]$
151. 4.9%
153. Falso. Un polinomio de cuarto grado puede tener como máximo cuatro ceros, y los ceros complejos se presentan en pares conjugados.

155. Encuentre el vértice de la función cuadrática y escriba la función en forma normal. Si el coeficiente inicial es positivo, el vértice es mínimo; si es negativo, el vértice es máximo.

157. Una asíntota de una gráfica es una recta a la que la gráfica se acerca arbitrariamente cuando x aumenta o disminuye sin límite.

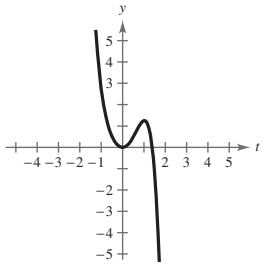
Examen del capítulo *(página 210)*

1. (a) Reflexión en el eje x seguida por un desplazamiento vertical de dos unidades hacia arriba
(b) Desplazamiento horizontal de $\frac{3}{2}$ unidades a la derecha

2. $y = (x - 3)^2 - 6$

3. (a) 50 ft
(b) 5. Sí, cambiar el término constante resulta en una traslación vertical de la gráfica y, por tanto, cambia la altura máxima.

4. Sube a la izquierda, baja a la derecha



5. $3x + \dfrac{x - 1}{x^2 + 1}$ **6.** $2x^3 + 4x^2 + 3x + 6 + \dfrac{9}{x - 2}$

7. $(2x - 5)\left(x + \sqrt{3}\right)\left(x - \sqrt{3}\right)$;
Ceros: $\frac{5}{2}, \pm\sqrt{3}$

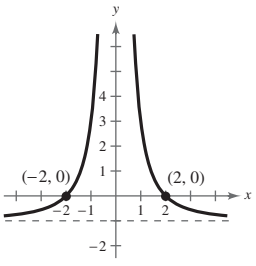
8. (a) $-3 + 5i$ (b) 7 **9.** $2 - i$

10. $f(x) = x^4 - 7x^3 + 17x^2 - 15x$

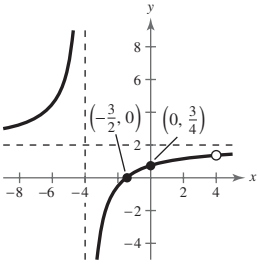
11. $f(x) = 4x^2 - 16x + 16$

12. $-5, -\frac{2}{3}, 1$ **13.** $-2, 4, -1 \pm \sqrt{2}i$

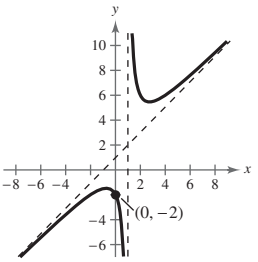
14. Intersecciones con el eje x: $(-2, 0), (2, 0)$
Asíntota vertical: $x = 0$
Asíntota horizontal: $y = -1$



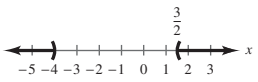
15. Intersección con el eje x: $\left(-\frac{3}{2}, 0\right)$
Intersección con el eje y: $\left(0, \frac{3}{4}\right)$
Asíntota vertical: $x = -4$
Asíntota horizontal: $y = 2$



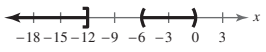
16. Intersección con el eje y: $(0, -2)$
Asíntota vertical: $x = 1$
Asíntota horizontal: $y = x + 1$



17. $x < -4$ o $x > \frac{3}{2}$



18. $x \leq -12$ o $-6 < x < 0$



Resolución de problemas *(página 213)*

1. Las respuestas variarán. **3.** 2 in. × 2 in. × 5 in.

5. (a) y (b) $y = -x^2 + 5x - 4$

7. (a) $f(x) = (x - 2)x^2 + 5 = x^3 - 2x^2 + 5$
(b) $f(x) = -(x + 3)x^2 + 1 = -x^3 - 3x^2 + 1$

9. $(a + bi)(a - bi) = a^2 + abi - abi - b^2i^2$
$= a^2 + b^2$

11. (a) Cuando $|a|$ aumenta, la gráfica se estira verticalmente. Para $a < 0$, la gráfica se refleja en el eje x.
(b) Cuando $|b|$ aumenta, la asíntota vertical se traslada. Para $b > 0$, la gráfica se traslada a la derecha. Para $b < 0$, la gráfica se refleja en el eje x y se traslada a la izquierda.

Capítulo 3

Sección 3.1 *(página 224)*

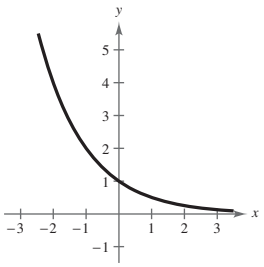
1. Algebraica **3.** Biunívoca **5.** $A = P\left(1 + \dfrac{r}{n}\right)^{nt}$

7. 0.863 **9.** 0.006 **11.** 1767.767

13. d **14.** c **15.** a **16.** b

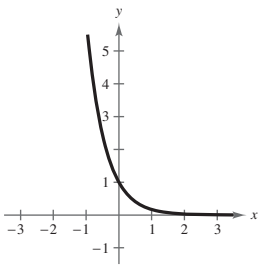
17.

x	-2	-1	0	1	2
$f(x)$	4	2	1	0.5	0.25



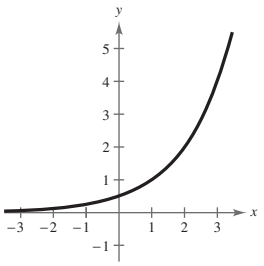
19.

x	-2	-1	0	1	2
$f(x)$	36	6	1	0.167	0.028



21.

x	-2	-1	0	1	2
$f(x)$	0.125	0.25	0.5	1	2

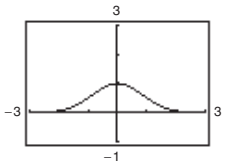


23. Desplace la gráfica de f una unidad hacia arriba.

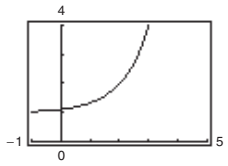
25. Refleje la gráfica de f en el eje x y desplace tres unidades hacia arriba.

27. Refleje la gráfica de f en el origen.

29.



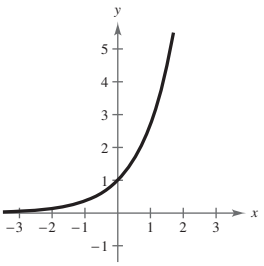
31.



33. 0.472 **35.** 3.857×10^{-22} **37.** 7166.647

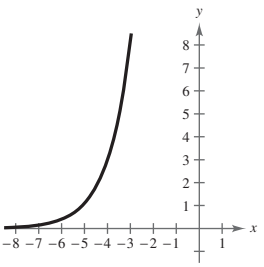
39.

x	-2	-1	0	1	2
$f(x)$	0.135	0.368	1	2.718	7.389



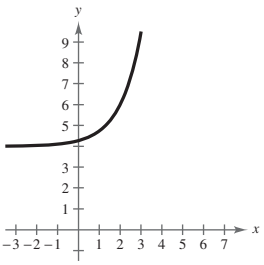
41.

x	-8	-7	-6	-5	-4
$f(x)$	0.055	0.149	0.406	1.104	3

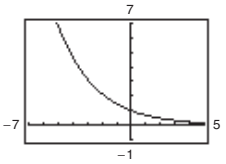


43.

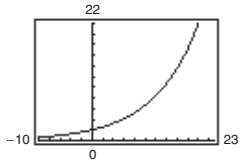
x	-2	-1	0	1	2
$f(x)$	4.037	4.100	4.271	4.736	6



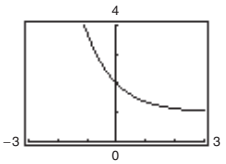
45.



47.



49.



51. $x = 2$ **53.** $x = -5$ **55.** $x = \frac{1}{3}$ **57.** $x = 3, -1$

59.

n	1	2	4	12
A	\$1828.49	\$1830.29	\$1831.19	\$1831.80

n	365	Continua
A	\$1832.09	\$1832.10

61.

n	1	2	4	12
A	\$5477.81	\$5520.10	\$5541.79	\$5556.46

n	365	Continua
A	\$5563.61	\$5563.85

63.

t	10	20	30
A	\$17 901.90	\$26 706.49	\$39 841.40

t	40	50
A	\$59 436.39	\$88 668.67

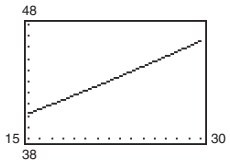
65.

t	10	20	30
A	\$22 986.49	\$44 031.56	\$84 344.25

t	40	50
A	\$161 564.86	\$309 484.08

67. \$104 710.29 **69.** \$35.45

71. (a)



(b)

t	15	16	17	18	19	20
P (en millones)	40.19	40.59	40.99	41.39	41.80	42.21

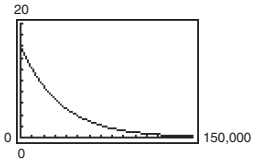
t	21	22	23	24	25	26
P (en millones)	42.62	43.04	43.47	43.90	44.33	44.77

t	27	28	29	30
P (en millones)	45.21	45.65	46.10	46.56

(c) 2038

73. (a) 16 g (b) 1.85 g

(c)

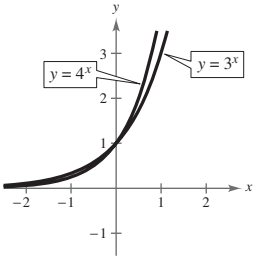


75. (a) $V(t) = 30\,500\left(\frac{7}{8}\right)^t$ (b) \$17 878.54

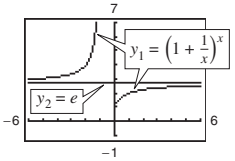
77. Verdadera. Cuando $x \to -\infty, f(x) \to -2$ pero nunca llega a -2.

79. $f(x) = h(x)$ **81.** $f(x) = g(x) = h(x)$

83. (a) $x < 0$ (b) $x > 0$

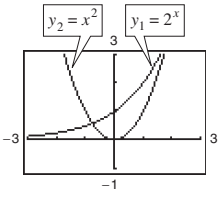


85.

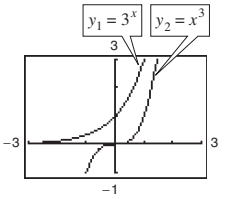


Cuando aumenta el valor x, y_1 se aproxima al valor de e.

87. (a)



(b)



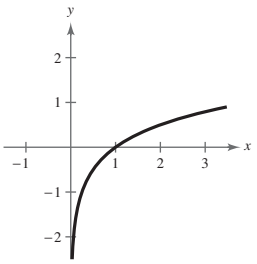
En ambas pantallas, la constante elevada a una potencia variable aumenta más rápidamente que la variable elevada a una potencia constante.

89. (a) A = \$5466.09 (b) A = \$5466.35
(c) A = \$5466.36 (d) A = \$5466.38
No. Las respuestas variarán.

Sección 3.2 *(página 234)*

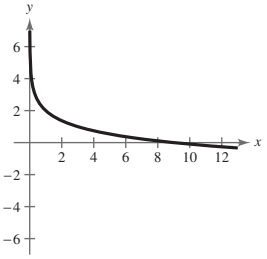
1. logarítmica **3.** natural; e **5.** $x = y$ **7.** $4^2 = 16$
9. $9^{-2} = \frac{1}{81}$ **11.** $32^{2/5} = 4$ **13.** $64^{1/2} = 8$
15. $\log_5 125 = 3$ **17.** $\log_{81} 3 = \frac{1}{4}$ **19.** $\log_6 \frac{1}{36} = -2$
21. $\log_{24} 1 = 0$ **23.** 6 **25.** 0 **27.** 2
29. -0.058 **31.** 1.097 **33.** 7 **35.** 1

37.

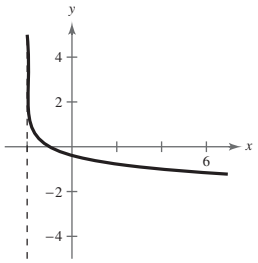


Dominio: $(0, \infty)$
Intersección con el eje x: $(1, 0)$
Asíntota vertical: $x = 0$

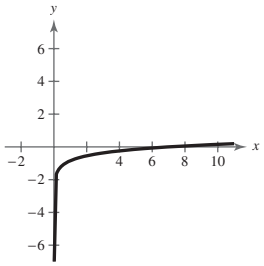
39.



Dominio: $(0, \infty)$
Intersección con el eje x: $(9, 0)$
Asíntota vertical: $x = 0$

41. 

Dominio: $(-2, \infty)$
Intersección con el eje x: $(-1, 0)$
Asíntota vertical: $x = -2$

43. 

Dominio: $(0, \infty)$
Intersección con el eje x: $(7, 0)$
Asíntota vertical: $x = 0$

45. c **46.** f **47.** d **48.** e **49.** b **50.** a

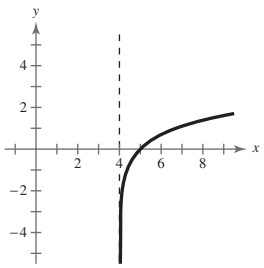
51. $e^{-0.693\ldots} = \frac{1}{2}$ **53.** $e^{1.945\ldots} = 7$ **55.** $e^{5.521\ldots} = 250$

57. $e^0 = 1$ **59.** $\ln 54.598\ldots = 4$

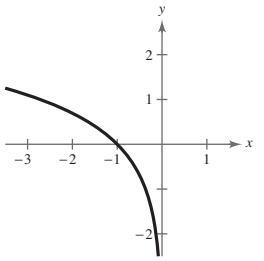
61. $\ln 1.6487\ldots = \frac{1}{2}$ **63.** $\ln 0.406\ldots = -0.9$

65. $\ln 4 = x$ **67.** 2.913 **69.** -23.966

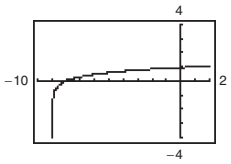
71. 5 **73.** $-\frac{5}{6}$

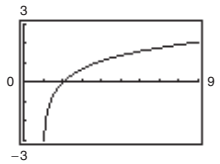
75. 

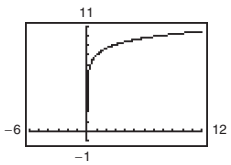
Dominio: $(4, \infty)$
Intersección con el eje x: $(5, 0)$
Asíntota vertical: $x = 4$

77. 

Dominio: $(-\infty, 0)$
Intersección con el eje x: $(-1, 0)$
Asíntota vertical: $x = 0$

79. 

81. 

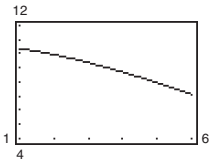
83. 

85. $x = 5$ **87.** $x = 7$ **89.** $x = 8$ **91.** $x = -5, 5$

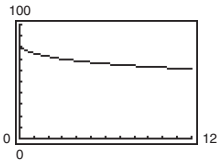
93. (a) 30 años; 10 años (b) \$323 179; \$199 109
(c) \$173 179; \$49 109
(d) $x = 750$; el pago mensual debe ser mayor a \$750.

95. (a)

t	1	2	3	4	5	6
C	10.36	9.94	9.37	8.70	7.96	7.15

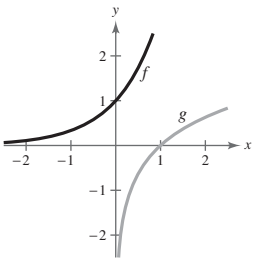
(b) 

(c) No, el modelo empieza a decrecer rápidamente, produciendo por último valores negativos.

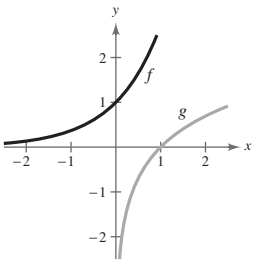
97. (a) 

(b) 80 (c) 68.1 (d) 62.3

99. Falso. Reflejar $g(x)$ alrededor de la recta $y = x$ determinará la gráfica de $f(x)$.

101. 

Las funciones f y g son inversas.

103. 

Las funciones f y g son inversas.

105.

x	-2	-1	0	1	2
$f(x) = 10^x$	$\frac{1}{100}$	$\frac{1}{10}$	1	10	100

x	$\frac{1}{100}$	$\frac{1}{10}$	1	10	100
$f(x) = \log x$	-2	-1	0	1	2

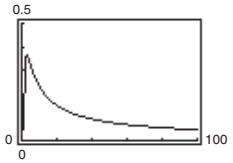
El dominio de $f(x) = 10^x$ es igual al rango de $f(x) = \log x$ y viceversa. $f(x) = 10^x$ y $f(x) = \log x$ son inversas entre sí.

107. (a)

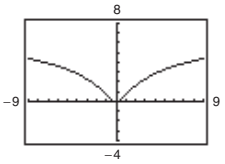
x	1	5	10	10^2
$f(x)$	0	0.322	0.230	0.046

x	10^4	10^6
$f(x)$	0.00092	0.0000138

(b) 0

(c) 

109. Las respuestas variarán.

111. (a) 

(b) Creciente: $(0, \infty)$
Decreciente: $(-\infty, 0)$

(c) Mínimo relativo: $(0, 0)$

Sección 3.3 *(página 241)*

1. cambio de base **3.** $\dfrac{1}{\log_b a}$ **4.** c **5.** a **6.** b

7. (a) $\dfrac{\log 16}{\log 5}$ (b) $\dfrac{\ln 16}{\ln 5}$ **9.** (a) $\dfrac{\log x}{\log \frac{1}{5}}$ (b) $\dfrac{\ln x}{\ln \frac{1}{5}}$

11. (a) $\dfrac{\log \frac{3}{10}}{\log x}$ (b) $\dfrac{\ln \frac{3}{10}}{\ln x}$ **13.** (a) $\dfrac{\log x}{\log 2.6}$ (b) $\dfrac{\ln x}{\ln 2.6}$

15. 1.771 **17.** −2.000 **19.** −1.048 **21.** 2.633

23. $\frac{3}{2}$ **25.** $-3 - \log_5 2$ **27.** $6 + \ln 5$ **29.** 2

31. $\frac{3}{4}$ **33.** 4 **35.** −2 no está en el dominio de $\log_2 x$.

37. 4.5 **39.** $-\frac{1}{2}$ **41.** 7 **43.** 2 **45.** $\ln 4 + \ln x$

47. $4 \log_8 x$ **49.** $1 - \log_5 x$ **51.** $\frac{1}{2} \ln z$

53. $\ln x + \ln y + 2 \ln z$ **55.** $\ln z + 2 \ln(z - 1)$

57. $\frac{1}{2} \log_2(a - 1) - 2 \log_2 3$ **59.** $\frac{1}{3} \ln x - \frac{1}{3} \ln y$

61. $2 \ln x + \frac{1}{2} \ln y - \frac{1}{2} \ln z$

63. $2 \log_5 x - 2 \log_5 y - 3 \log_5 z$

65. $\dfrac{3}{4} \ln x + \dfrac{1}{4} \ln(x^2 + 3)$ **67.** $\ln 2x$ **69.** $\log_4 \dfrac{z}{y}$

71. $\log_2 x^2 y^4$ **73.** $\log_3 \sqrt[4]{5x}$ **75.** $\log \dfrac{x}{(x + 1)^2}$

77. $\log \dfrac{xz^3}{y^2}$ **79.** $\ln \dfrac{x}{(x + 1)(x - 1)}$

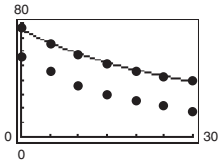
81. $\ln \sqrt[3]{\dfrac{x(x + 3)^2}{x^2 - 1}}$ **83.** $\log_8 \dfrac{\sqrt[3]{y(y + 4)^2}}{y - 1}$

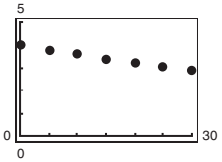
85. $\log_2 \frac{32}{4} = \log_2 32 - \log_2 4$; propiedad 2

87. $\beta = 10(\log I + 12)$; 60 dB **89.** 70 dB

91. $\ln y = \frac{1}{4} \ln x$ **93.** $\ln y = -\frac{1}{4} \ln x + \ln \frac{5}{2}$

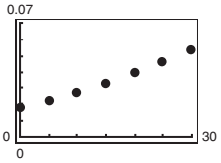
95. $y = 256.24 - 20.8 \ln x$

97. (a) y (b) 

(c) 

$T = 21 + e^{-0.037t + 3.997}$

Los resultados son semejantes.

(d) 

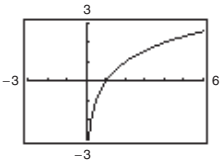
$$T = 21 + \frac{1}{0.001t + 0.016}$$

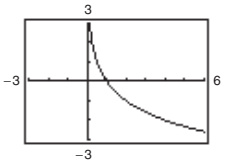
(e) Las respuestas variarán.

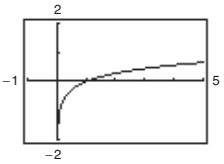
99. Demostración

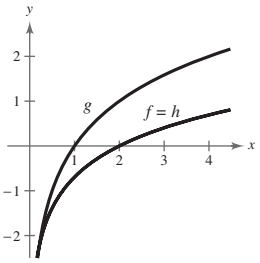
101. Falso; $\ln 1 = 0$ **103.** Falso; $\ln(x - 2) \neq \ln x - \ln 2$

105. Falso; $u = v^2$

107. $f(x) = \dfrac{\log x}{\log 2} = \dfrac{\ln x}{\ln 2}$ 

109. $f(x) = \dfrac{\log x}{\log \frac{1}{2}} = \dfrac{\ln x}{\ln \frac{1}{2}}$ 

111. $f(x) = \dfrac{\log x}{\log 11.8} = \dfrac{\ln x}{\ln 11.8}$ 

113. $f(x) = h(x)$; propiedad 2 

115.

$\ln 1 = 0$	$\ln 9 \approx 2.1972$
$\ln 2 \approx 0.6931$	$\ln 10 \approx 2.3025$
$\ln 3 \approx 1.0986$	$\ln 12 \approx 2.4848$
$\ln 4 \approx 1.3862$	$\ln 15 \approx 2.7080$
$\ln 5 \approx 1.6094$	$\ln 16 \approx 2.7724$
$\ln 6 \approx 1.7917$	$\ln 18 \approx 2.8903$
$\ln 8 \approx 2.0793$	$\ln 20 \approx 2.9956$

Sección 3.4 *(página 251)*

1. Resolver

3. (a) Biunívoca (b) Logarítmica; logarítmica
(c) Exponencial; exponencial

5. (a) Sí (b) No

7. (a) No (b) Sí (c) Sí, aproximado

9. (a) Sí, aproximado (b) No (c) Sí

11. (a) No (b) Sí (c) Sí, aproximado

13. 2 **15.** −5 **17.** 2 **19.** $\ln 2 \approx 0.693$

21. $e^{-1} \approx 0.368$ **23.** 64 **25.** (3, 8) **27.** (9, 2)

29. 2, −1 **31.** Unos 1.618, alrededor de −0.618

33. $\dfrac{\ln 5}{\ln 3} \approx 1.465$ **35.** $\ln 5 \approx 1.609$ **37.** $\ln 28 \approx 3.332$

39. $\dfrac{\ln 80}{2 \ln 3} \approx 1.994$ **41.** 2 **43.** 4

45. $3 - \dfrac{\ln 565}{\ln 2} \approx -6.142$ **47.** $\dfrac{1}{3}\log\left(\dfrac{3}{2}\right) \approx 0.059$

49. $1 + \dfrac{\ln 7}{\ln 5} \approx 2.209$ **51.** $\dfrac{\ln 12}{3} \approx 0.828$

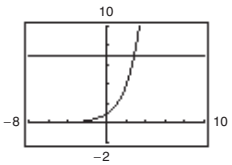
53. $-\ln\dfrac{3}{5} \approx 0.511$ **55.** 0 **57.** $\dfrac{\ln \frac{8}{3}}{3 \ln 2} + \dfrac{1}{3} \approx 0.805$

59. $\ln 5 \approx 1.609$ **61.** $\ln 4 \approx 1.386$

63. $2 \ln 75 \approx 8.635$ **65.** $\frac{1}{2} \ln 1498 \approx 3.656$

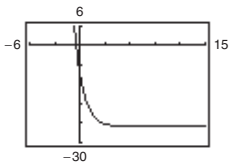
67. $\dfrac{\ln 4}{365 \ln\left(1 + \frac{0.065}{365}\right)} \approx 21.330$ **69.** $\dfrac{\ln 2}{12 \ln\left(1 + \frac{0.10}{12}\right)} \approx 6.960$

71.



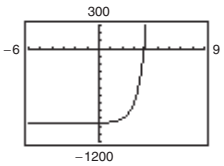
2.807

73.



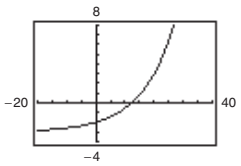
−0.427

75.



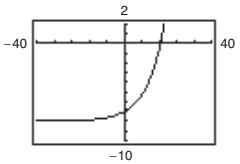
3.847

77.



12.207

79.



16.636

81. $e^{-3} \approx 0.050$ **83.** $e^{7} \approx 1096.633$ **85.** $\dfrac{e^{2.4}}{2} \approx 5.512$

87. 1 000 000 **89.** $\dfrac{e^{10/3}}{5} \approx 5.606$

91. $e^2 - 2 \approx 5.389$ **93.** $e^{-2/3} \approx 0.513$

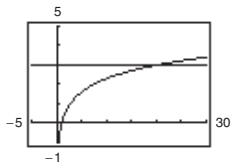
95. $\dfrac{e^{19/2}}{3} \approx 4453.242$ **97.** $2(3^{11/6}) \approx 14.988$

99. No hay solución **101.** $1 + \sqrt{1 + e} \approx 2.928$

103. No hay solución **105.** 7 **107.** $\dfrac{-1 + \sqrt{17}}{2} \approx 1.562$

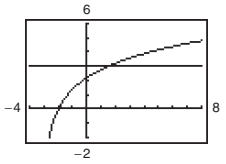
109. 2 **111.** $\dfrac{725 + 125\sqrt{33}}{8} \approx 180.384$

113.



20.086

115.



1.482

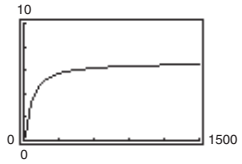
117. (a) 13.86 años (b) 21.97 años

119. (a) 27.73 años (b) 43.94 años

121. −1, 0 **123.** 1 **125.** $e^{-1/2} \approx 0.607$

127. $e^{-1} \approx 0.368$ **129.** (a) 210 monedas (b) 588 monedas

131. (a)



(b) $V = 6.7$; la producción se aproximará a 6.7 millones de pies cúbicos por acre.

(c) 29.3 años

133. 2003

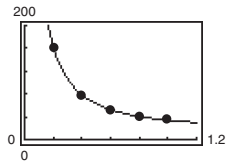
135. (a) $y = 100$ y $y = 0$; el rango baja entre 0% y 100%.

(b) Hombres: 69.71 pulgadas Mujeres: 64.51 pulgadas

137. (a)

x	0.2	0.4	0.6	0.8	1.0
y	162.6	78.5	52.5	40.5	33.9

(b)



El modelo parece ajustarse bien a los datos.

(c) 1.2 m

(d) No. De acuerdo con el modelo, cuando el número de las g es menor a 23, x está entre 2.276 metros y 4.404 metros, lo que no es realista en casi todos los vehículos.

139. $\log_b uv = \log_b u + \log_b v$

Verdadero por la propiedad 1 de la sección 3.3.

141. $\log_b(u - v) = \log_b u - \log_b v$

Falso

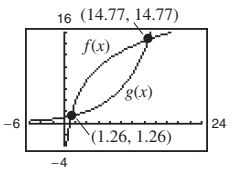
$1.95 \approx \log(100 - 10) \neq \log 100 - \log 10 = 1$

143. Sí; vea ejercicio 103.

145. Sí. Tiempo para duplicar: $t = \dfrac{\ln 2}{r}$;

Tiempo para cuadruplicar: $t = \dfrac{\ln 4}{r} = 2\left(\dfrac{\ln 2}{r}\right)$

147. (a)



(b) $a = e^{1/e}$

(c) $1 < a < e^{1/e}$

Section 3.5 *(página 262)*

1. $y = ae^{bx}$; $y = ae^{-bx}$ **3.** Normalmente distribuida

5. $y = \dfrac{a}{1 + be^{-rx}}$ **7.** c **8.** e **9.** b

10. a **11.** d **12.** f

13. (a) $P = \dfrac{A}{e^{rt}}$ (b) $t = \dfrac{\ln\left(\dfrac{A}{P}\right)}{r}$

	Inversión inicial	*Porcentaje de tasa anual*	*Tiempo para duplicarse*	*Cantidad después de 10 años*
15.	\$1000	3.5%	19.8 años	\$1419.07
17.	\$750	8.9438%	7.75 años	\$1834.37
19.	\$500	11.0%	6.3 años	\$1505.00
21.	\$6376.28	4.5%	15.4 años	\$10 000.00

23. \$303,580.52

25. (a) 7.27 años (b) 6.96 años (c) 6.93 años (d) 6.93 años

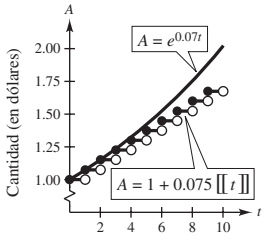
27.

r	2%	4%	6%	8%	10%	12%
t	54.93	27.47	18.31	13.73	10.99	9.16

29.

r	2%	4%	6%	8%	10%	12%
t	55.48	28.01	18.85	14.27	11.53	9.69

31.



Capitalización continua

	Vida media (años)	*Cantidad inicial*	*Cantidad después de 1000 años*
33.	1599	10 g	6.48 g
35.	24 100	2.1 g	2.04 g
37.	5715	2.26 g	2 g

39. $y = e^{0.7675x}$ **41.** $y = 5e^{-0.4024x}$

43. (a)

Año	1970	1980	1990	2000	2007
Población	73.7	103.74	143.56	196.35	243.24

(b) 2014

(c) No; la población no continuará creciendo a esa razón.

45. $k = 0.2988$; unos 5 309.734 hits

47. (a) $k = 0.02603$; la población es creciente porque $k > 0$.

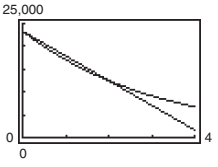
(b) 449 910; 512 447 (c) 2014

49. Unas 800 bacterias

51. (a) Unos 12 180 años de antigüedad (b) Unos 4797 años

53. (a) $V = -5400t + 23\,300$ (b) $V = 23\,300e^{-0.311t}$

(c)



El modelo exponencial se deprecia más rápido.

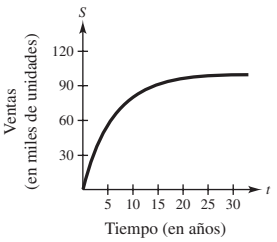
(d)

t	1 año	3 años
$V = -5400t + 23\,300$	17 900	7100
$V = 23\,300e^{-0.311t}$	17 072	9166

(e) Las respuestas variarán.

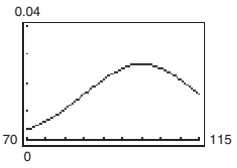
55. (a) $S(t) = 100(1 - e^{-0.1625t})$

(b)



(c) 55 625

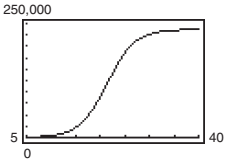
57. (a)



(b) 100

59. (a) 715; 90 880; 199 043

(b)



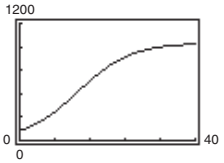
(c) 2014

(d) $235\,000 = \dfrac{237\,101}{1 + 1950e^{-0.355t}}$

$t \approx 34.63$

61. (a) 203 animales (b) 13 mes

(c)



Asíntotas horizontales: $p = 0, p = 1000$. El tamaño de la población se aproxima a 1000 cuando aumenta el tiempo.

63. (a) $10^{8.5} \approx 316\,227\,766$ (b) $10^{5.4} \approx 251{,}189$

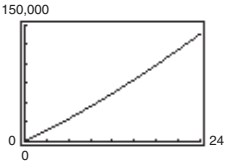
(c) $10^{6.1} \approx 1\,258\,925$

65. (a) 20 dB (b) 70 dB (c) 40 dB (d) 120 dB

67. 95% **69.** 4.64 **71.** 1.58×10^{-6} moles/L

73. $10^{5.1}$ **75.** 3:00 A.M.

77. (a)



(b) $t \approx 21$ años; sí

79. Falso. El dominio puede ser el conjunto de los números reales para una función logística de crecimiento.

81. Falso. La gráfica de $f(x)$ es la de $g(x)$ desplazada hacia arriba cinco unidades.

83. Las respuestas variarán.

Ejercicios de repaso *(página 270)*

1. 0.164 **3.** 0.337 **5.** 1456.529

7. Desplace la gráfica de f dos unidades hacia abajo.

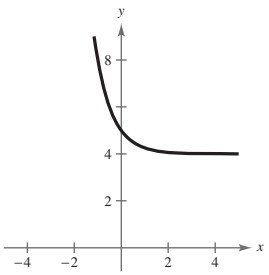
9. Refleje f en el eje y y desplace dos unidades a la derecha.

11. Refleje f en el eje y y desplace una unidad hacia arriba.

13. Refleje f en el eje x y desplace dos unidades a la izquierda.

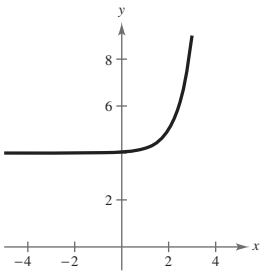
15.

x	-1	0	1	2	3
$f(x)$	8	5	4.25	4.063	4.016



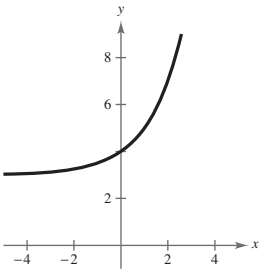
17.

x	-1	0	1	2	3
$f(x)$	4.008	4.04	4.2	5	9



19.

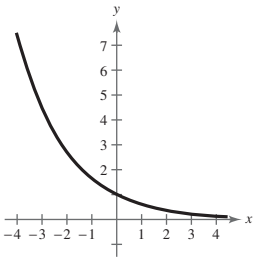
x	-2	-1	0	1	2
$f(x)$	3.25	3.5	4	5	7



21. $x = 1$ **23.** $x = 4$ **25.** 2980.958 **27.** 0.183

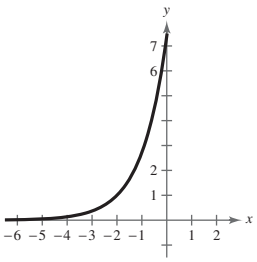
29.

x	-2	-1	0	1	2
$h(x)$	2.72	1.65	1	0.61	0.37



31.

x	-3	-2	-1	0	1
$f(x)$	0.37	1	2.72	7.39	20.09



33.

n	1	2	4	12
A	\$6719.58	\$6734.28	\$6741.74	\$6746.77

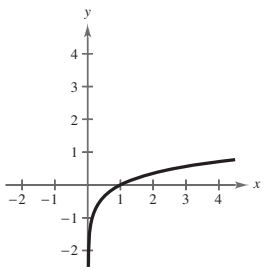
n	365	Continua
A	\$6749.21	\$6749.29

35. (a) 0.154 (b) 0.487 (c) 0.811

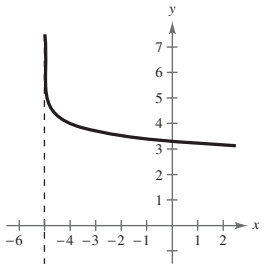
37. $\log_3 27 = 3$ **39.** $\ln 2.2255 \ldots = 0.8$

41. 3 **43.** -2 **45.** $x = 7$ **47.** $x = -5$

49. Dominio: $(0, \infty)$
Intersección con el eje x: $(1, 0)$
Asíntota vertical: $x = 0$

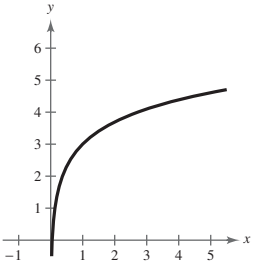


51. Dominio: $(-5, \infty)$
Intersección con el eje x: $(9995, 0)$
Asíntota vertical: $x = -5$

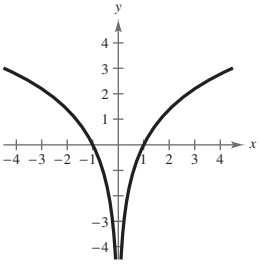


53. (a) 3.118 (b) -0.020

55. Dominio: $(0, \infty)$
Intersección con el eje x: $(e^{-3}, 0)$
Asíntota vertical: $x = 0$



57. Dominio: $(-\infty, 0), (0, \infty)$
intersección con el eje x: $(\pm 1, 0)$
Asíntota vertical: $x = 0$



59. 53.4 in. **61.** 2.585 **63.** -2.322

65. $\log 2 + 2 \log 3 \approx 1.255$ **67.** $2 \ln 2 + \ln 5 \approx 2.996$

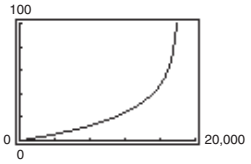
69. $1 + 2 \log_5 x$ **71.** $2 - \frac{1}{2} \log_3 x$

73. $2 \ln x + 2 \ln y + \ln z$ **75.** $\log_2 5x$ **77.** $\ln \dfrac{x}{\sqrt[4]{y}}$

79. $\log_3 \dfrac{\sqrt{x}}{(y + 8)^2}$

81. (a) $0 \le h < 18\,000$

(b)



Asíntota vertical: $h = 18\,000$

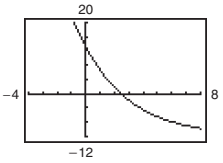
(c) El avión está ascendiendo con menor rapidez, de modo que el tiempo necesario aumenta.

(d) 5.46 min

83. 3 **85.** $\ln 3 \approx 1.099$ **87.** $e^4 \approx 54.598$

89. $x = 1, 3$ **91.** $\dfrac{\ln 32}{\ln 2} = 5$

93.

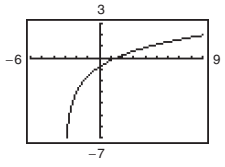


2.447

95. $\frac{1}{3}e^{8.2} \approx 1213.650$ **97.** $3e^2 \approx 22.167$

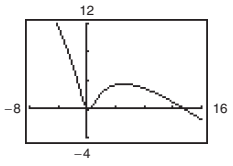
99. $e^8 \approx 2980.958$ **101.** No hay solución **103.** 0.900

105.



1.482

107.

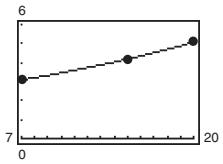


0, 0.416, 13.627

109. 31.4 Años **111.** e **112.** b **113.** f **114.** d

115. a **116.** c **117.** $y = 2e^{0.1014x}$

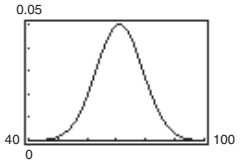
119. (a)



El modelo se ajusta bien a los datos.

(b) 2022; las respuestas variarán.

121. (a)



(b) 71

123. (a) $10^{-6}\ \text{W/m}^2$ (b) $10\sqrt{10}\ \text{W/m}^2$
(c) $1.259 \times 10^{-12}\ \text{W/m}^2$

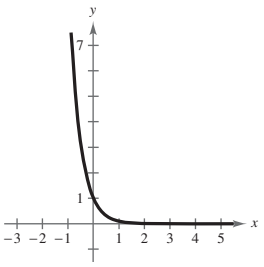
125. Verdadero por las propiedades inversas

Examen del capítulo *(página 273)*

1. 2.366 **2.** 687.291 **3.** 0.497 **4.** 22.198

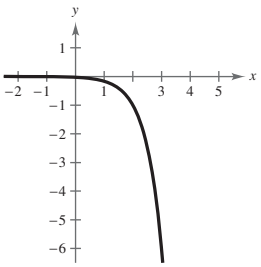
5.

x	-1	$-\frac{1}{2}$	0	$\frac{1}{2}$	1
$f(x)$	10	3.162	1	0.316	0.1



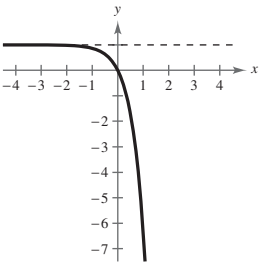
6.

x	-1	0	1	2	3
$f(x)$	-0.005	-0.028	-0.167	-1	-6



7.

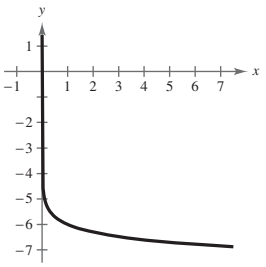
x	-1	$-\frac{1}{2}$	0	$\frac{1}{2}$	1
$f(x)$	0.865	0.632	0	-1.718	-6.389



8. (a) -0.89 (b) 9.2

9.

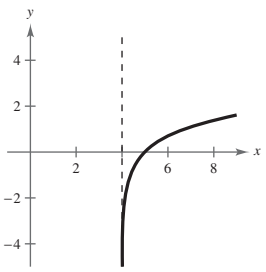
x	$\frac{1}{2}$	1	$\frac{3}{2}$	2	4
$f(x)$	-5.699	-6	-6.176	-6.301	-6.602



Asíntota vertical: $x = 0$

10.

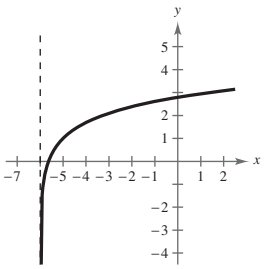
x	5	7	9	11	13
$f(x)$	0	1.099	1.609	1.946	2.197



Asíntota vertical: $x = 4$

11.

x	-5	-3	-1	0	1
$f(x)$	1	2.099	2.609	2.792	2.946



Asíntota vertical: $x = -6$

12. 1.945 **13.** -0.167 **14.** -11.047

15. $\log_2 3 + 4 \log_2 |a|$ **16.** $\ln 5 + \frac{1}{2}\ln x - \ln 6$

17. $3\log(x - 1) - 2\log y - \log z$ **18.** $\log_3 13y$

19. $\ln \dfrac{x^4}{y^4}$ **20.** $\ln\left(\dfrac{x^3y^2}{x + 3}\right)$ **21.** $x = -2$

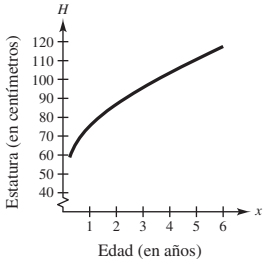
22. $x = \dfrac{\ln 44}{-5} \approx -0.757$ **23.** $\dfrac{\ln 197}{4} \approx 1.321$

24. $e^{1/2} \approx 1.649$ **25.** $e^{-11/4} \approx 0.0639$ **26.** 20

27. $y = 2745e^{0.1570t}$ **28.** 55%

29. (a)

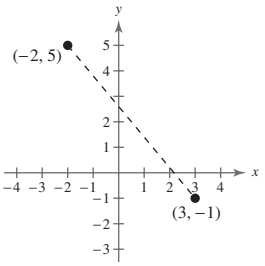
x	$\frac{1}{4}$	1	2	4	5	6
H	58.720	75.332	86.828	103.43	110.59	117.38



(b) 103 cm; 103.43 cm

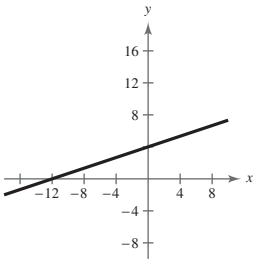
Examen acumulativo para los capítulos 1–3 *(página 274)*

1.

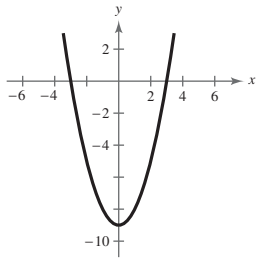


Punto medio: $\left(\frac{1}{2}, 2\right)$; distancia: $\sqrt{61}$

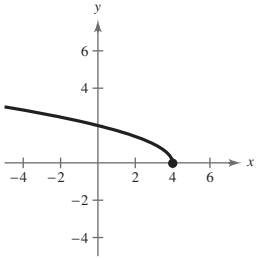
2.



3.



4.



5. $y = 2x + 2$

6. Para algunos valores de x corresponden dos valores de y.

7. (a) $\dfrac{3}{2}$ (b) La división entre 0 no está definida. (c) $\dfrac{s + 2}{s}$

8. (a) Contracción vertical en $\frac{1}{2}$
(b) Desplazamiento vertical dos unidades hacia arriba
(c) Desplazamiento horizontal dos unidades a la izquierda

9. (a) $5x - 2$ (b) $-3x - 4$ (c) $4x^2 - 11x - 3$
(d) $\dfrac{x - 3}{4x + 1}$; Dominio: todos los números reales x excepto $x = -\dfrac{1}{4}$

10. (a) $\sqrt{x-1}+x^2+1$ (b) $\sqrt{x-1}-x^2-1$
(c) $x^2\sqrt{x-1}+\sqrt{x-1}$
(d) $\dfrac{\sqrt{x-1}}{x^2+1}$; dominio todos los números reales x tales que $x \geq 1$

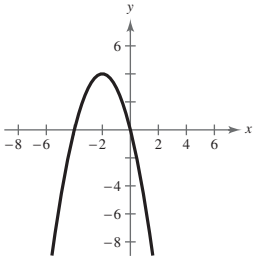
11. (a) $2x+12$ (b) $\sqrt{2x^2+6}$
Dominio de $f \circ g$: todos los números reales x tales que $x \geq -6$
Dominio de $g \circ f$: todos los números reales

12. (a) $|x|-2$ (b) $|x-2|$
Dominio de $f \circ g$ y $g \circ f$: todos los números reales

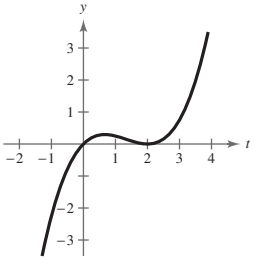
13. Sí; $h^{-1}(x) = -\frac{1}{5}(x-3)$ **14.** 2438.65 kW

15. $y = -\frac{3}{4}(x+8)^2+5$

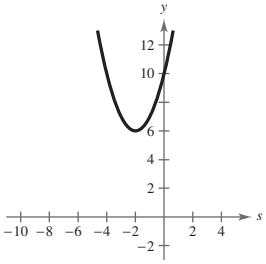
16.



17.



18.



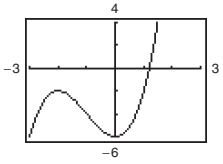
19. $-2, \pm 2i$; $(x+2)(x+2i)(x-2i)$

20. $-7, 0, 3$; $x(x)(x-3)(x+7)$

21. $4, -\frac{1}{2}, 1 \pm 3i$; $(x-4)(2x+1)(x-1+3i)(x-1-3i)$

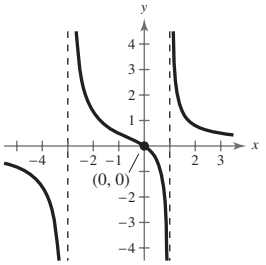
22. $3x-2-\dfrac{3x-2}{2x^2+1}$ **23.** $3x^3+6x^2+14x+23+\dfrac{49}{x-2}$

24.

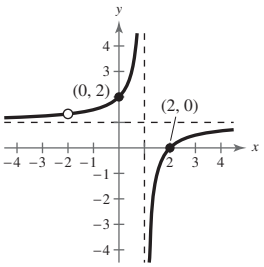


Intervalo: $[1, 2]$; 1.20

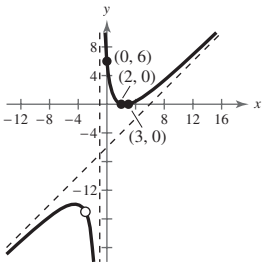
25. Intersección: $(0, 0)$
Asíntotas verticales: $x = -3, x = 1$
Asíntota horizontal: $y = 0$



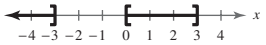
26. Intersección con el eje y: $(0, 2)$
Intersección con el eje x: $(2, 0)$
Asíntota vertical: $x = 1$
Asíntota horizontal: $y = 1$



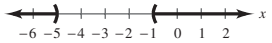
27. Intersección con el eje y: $(0, 6)$
Intersecciones con el eje x: $(2, 0), (3, 0)$
Asíntota vertical: $x = -1$
Asíntota diagonal: $y = x - 6$



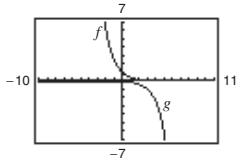
28. $x \leq -3$ o $0 \leq x \leq 3$



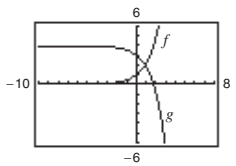
29. Todos los números reales x tales que $x < -5$ o $x > -1$



30. Refleje f en los ejes x y y y desplace tres unidades a la derecha.



31. Refleje f en el eje x y desplace tres unidades hacia arriba.



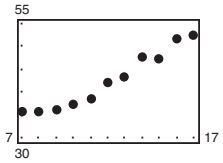
32. 1.991 **33.** -0.067 **34.** 1.717 **35.** 0.281

36. $\ln(x+4)+\ln(x-4)-4\ln x,\ x > 4$

37. $\ln\dfrac{x^2}{\sqrt{x+5}},\ x > 0$ **38.** $x = \dfrac{\ln 12}{2} \approx 1.242$

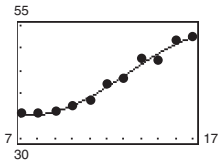
39. $\ln 6 \approx 1.792$ o $\ln 7 \approx 1.946$ **40.** $e^6 - 2 \approx 401.429$

41. (a)



(b) $S = -0.0297t^3 + 1.175t^2 - 12.96t + 79.0$

(c)



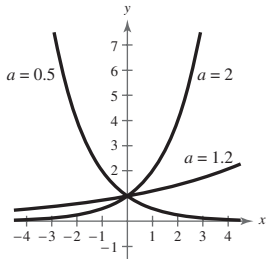
El modelo es un buen ajuste para los datos.

(d) \$25 300 millones; las respuestas variarán. Respuesta de muestra: no, esto no es razonable porque el modelo decrece abruptamente después de 2009.

42. 6.3 h

Resolución de problemas *(página 277)*

1.



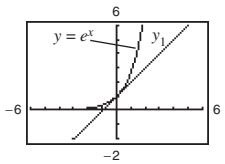
$y = 0.5^x$ y $y = 1.2^x$

$0 < a \leq e^{1/e}$

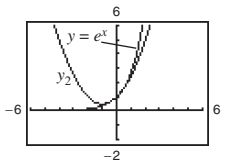
3. Cuando $x \to \infty$, la gráfica de e^x aumenta con más rapidez que la gráfica de x^n.

5. Las respuestas variarán.

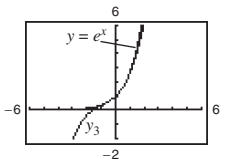
7. (a)



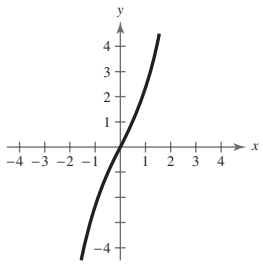
(b)



(c)



9.



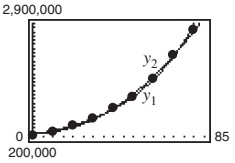
$$f^{-1}(x) = \ln\left(\frac{x + \sqrt{x^2 + 4}}{2}\right)$$

11. c **13.** $t = \dfrac{\ln c_1 - \ln c_2}{\left(\dfrac{1}{k_2} - \dfrac{1}{k_1}\right)\ln\dfrac{1}{2}}$

15. (a) $y_1 = 252\,606(1.0310)^t$

(b) $y_2 = 400.88t^2 - 1464.6t + 291\,782$

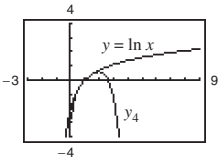
(c)



(d) El modelo exponencial es un mejor ajuste. No, porque el modelo se está aproximando rápidamente al infinito.

17. 1, e^2

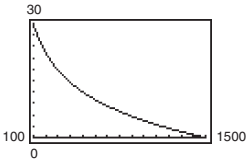
19. $y_4 = (x - 1) - \frac{1}{2}(x - 1)^2 + \frac{1}{3}(x - 1)^3 - \frac{1}{4}(x - 1)^4$



El patrón implica que

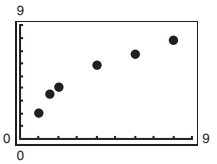
$\ln x = (x - 1) - \frac{1}{2}(x - 1)^2 + \frac{1}{3}(x - 1)^3 - \cdots$.

21.



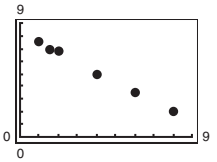
17.7 ft^3/min

23. (a)



(b)–(e) Las respuestas variarán.

25. (a)



(b)–(e) Las respuestas variarán.

Capítulo 4

Sección 4.1 *(página 288)*

1. Trigonometría **3.** Coterminal **5.** Agudo; obtuso

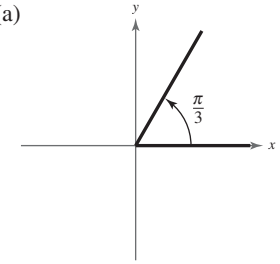
7. Grado **9.** Lineal, angular **11.** 1 rad **13.** 5.5 rad

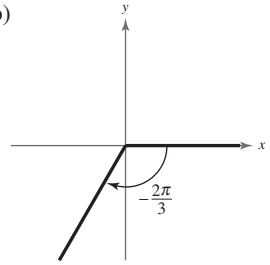
15. -3 rad

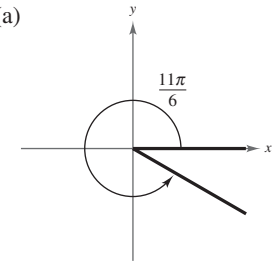
17. (a) Primer cuadrante (b) Tercer cuadrante

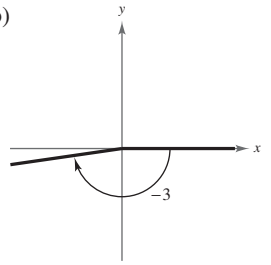
19. (a) Cuarto cuadrante (b) Cuarto cuadrante

21. (a) Tercer cuadrante (b) Segundo cuadrante

23. (a) 

(b) 

25. (a) 

(b) 

27. Respuestas de muestra: (a) $\frac{13\pi}{6}, -\frac{11\pi}{6}$ (b) $\frac{17\pi}{6}, -\frac{7\pi}{6}$

29. Respuestas de muestra: (a) $\frac{8\pi}{3}, -\frac{4\pi}{3}$ (b) $\frac{25\pi}{12}, -\frac{23\pi}{12}$

31. (a) Complemento: $\frac{\pi}{6}$; suplemento: $\frac{2\pi}{3}$

(b) Complemento: $\frac{\pi}{4}$; suplemento: $\frac{3\pi}{4}$

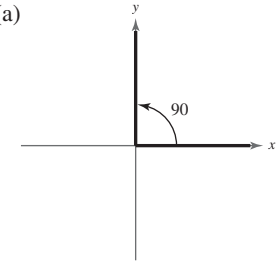
33. (a) Complemento: $\frac{\pi}{2} - 1 \approx 0.57$;
suplemento: $\pi - 1 \approx 2.14$

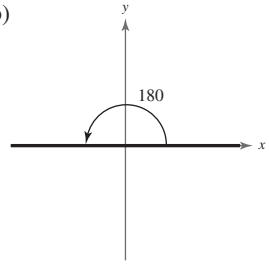
(b) Complemento: ninguno; suplemento: $\pi - 2 \approx 1.14$

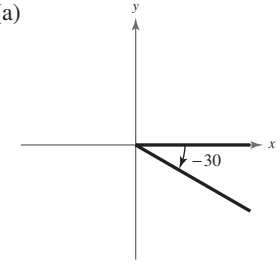
35. 210° **37.** −60° **39.** 165°

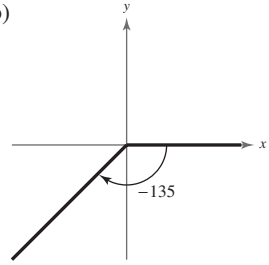
41. (a) Segundo cuadrante (b) Cuarto cuadrante

43. (a) Tercer cuadrante (b) Primer cuadrante

45. (a) 

(b) 

47. (a) 

(b) 

49. Respuestas de muestra: (a) 405°, −315° (b) 324°, −396°

51. Respuestas de muestra: (a) 600°, −120° (b) 180°, −540°

53. (a) Complemento: 72°; suplemento: 162°

(b) Complemento: 5°; suplemento: 95°

55. (a) Complemento: ninguno; suplemento: 30°

(b) Complemento: 11°; suplemento: 101°

57. (a) $\frac{\pi}{6}$ (b) $\frac{\pi}{4}$ **59.** (a) $-\frac{\pi}{9}$ (b) $-\frac{\pi}{3}$

61. (a) 270° (b) 210° **63.** (a) 225° (b) −420°

65. 0.785 **67.** −3.776 **69.** 9.285 **71.** −0.014

73. 25.714° **75.** 337.500° **77.** −756.000°

79. −114.592° **81.** (a) 54.75° (b) −128.5°

83. (a) 85.308° (b) 330.007°

85. (a) 240° 36′ (b) −145° 48′

87. (a) 2° 30′ (b) −3° 34′ 48″ **89.** 10π in. $\approx$ 31.42 in.

91. 2.5π m $\approx$ 7.85 m **93.** $\frac{9}{2}$ rad **95.** $\frac{21}{50}$ rad **97.** $\frac{1}{2}$ rad

99. 4 rad **101.** 6π in.$^2 \approx$ 18.85 in.^{2} **103.** 12.27 ft^2

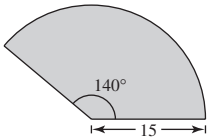
105. 591.3 mi **107.** 0.071 rad $\approx$ 4.04° **109.** $\frac{5}{12}$ rad

111. (a) $10\,000\pi$ rad/min $\approx$ 31 415.93 rad/min

(b) 9490.23 ft/min

113. (a) $[400\pi, 1000\pi]$ rad/min (b) $[2400\pi, 6000\pi]$ cm/min

115. (a) 910.37 revoluciones/min (b) 5720 rad/min

117. 

$A = 87.5\pi$ m$^2 \approx$ 274.89 m^2

119. (a) $\frac{14\pi}{3}$ ft/sec $\approx$ 10 mi/h (b) $d = \frac{7\pi}{7920}n$

(c) $d = \frac{7\pi}{7920}t$ (d) Las funciones son lineales ambas.

121. Falso. Una medida de 4π radianes corresponde a dos revoluciones completas desde el lado inicial al terminal de un ángulo.

123. Falso. El lado terminal del ángulo se encuentra sobre el eje x.

125. Radián. 1 rad $\approx$ 57.3°

127. Demostración

Sección 4.2 *(página 297)*

1. Circunferencia unitaria **3.** Periodo

5. $\operatorname{sen} t = \frac{5}{13}$ $\csc t = \frac{13}{5}$
$\cos t = \frac{12}{13}$ $\sec t = \frac{13}{12}$
$\tan t = \frac{5}{12}$ $\cot t = \frac{12}{5}$

7. $\operatorname{sen} t = -\frac{3}{5}$ $\csc t = -\frac{5}{3}$
$\cos t = -\frac{4}{5}$ $\sec t = -\frac{5}{4}$
$\tan t = \frac{3}{4}$ $\cot t = \frac{4}{3}$

9. (0, 1) **11.** $\left(\frac{\sqrt{2}}{2}, \frac{\sqrt{2}}{2}\right)$ **13.** $\left(-\frac{\sqrt{3}}{2}, \frac{1}{2}\right)$

15. $\left(-\frac{1}{2}, -\frac{\sqrt{3}}{2}\right)$

17. $\operatorname{sen}\frac{\pi}{4} = \frac{\sqrt{2}}{2}$
$\cos\frac{\pi}{4} = \frac{\sqrt{2}}{2}$
$\tan\frac{\pi}{4} = 1$

19. $\operatorname{sen}\left(-\frac{\pi}{6}\right) = -\frac{1}{2}$
$\cos\left(-\frac{\pi}{6}\right) = \frac{\sqrt{3}}{2}$
$\tan\left(-\frac{\pi}{6}\right) = -\frac{\sqrt{3}}{3}$

21. $\operatorname{sen}\left(-\frac{7\pi}{4}\right) = \frac{\sqrt{2}}{2}$
$\cos\left(-\frac{7\pi}{4}\right) = \frac{\sqrt{2}}{2}$
$\tan\left(-\frac{7\pi}{4}\right) = 1$

23. $\operatorname{sen}\frac{11\pi}{6} = -\frac{1}{2}$
$\cos\frac{11\pi}{6} = \frac{\sqrt{3}}{2}$
$\tan\frac{11\pi}{6} = -\frac{\sqrt{3}}{3}$

25. $\operatorname{sen}\left(-\frac{3\pi}{2}\right) = 1$
$\cos\left(-\frac{3\pi}{2}\right) = 0$
$\tan\left(-\frac{3\pi}{2}\right)$ no está definido.

27. $\operatorname{sen}\frac{2\pi}{3} = \frac{\sqrt{3}}{2}$ $\quad \csc\frac{2\pi}{3} = \frac{2\sqrt{3}}{3}$
$\cos\frac{2\pi}{3} = -\frac{1}{2}$ $\quad \sec\frac{2\pi}{3} = -2$
$\tan\frac{2\pi}{3} = -\sqrt{3}$ $\quad \cot\frac{2\pi}{3} = -\frac{\sqrt{3}}{3}$

29. $\operatorname{sen}\frac{4\pi}{3} = -\frac{\sqrt{3}}{2}$ $\quad \csc\frac{4\pi}{3} = -\frac{2\sqrt{3}}{3}$
$\cos\frac{4\pi}{3} = -\frac{1}{2}$ $\quad \sec\frac{4\pi}{3} = -2$
$\tan\frac{4\pi}{3} = \sqrt{3}$ $\quad \cot\frac{4\pi}{3} = \frac{\sqrt{3}}{3}$

31. $\operatorname{sen}\frac{3\pi}{4} = \frac{\sqrt{2}}{2}$ $\quad \csc\frac{3\pi}{4} = \sqrt{2}$
$\cos\frac{3\pi}{4} = -\frac{\sqrt{2}}{2}$ $\quad \sec\frac{3\pi}{4} = -\sqrt{2}$
$\tan\frac{3\pi}{4} = -1$ $\quad \cot\frac{3\pi}{4} = -1$

33. $\operatorname{sen}\left(-\frac{\pi}{2}\right) = -1$ $\quad \csc\left(-\frac{\pi}{2}\right) = -1$
$\cos\left(-\frac{\pi}{2}\right) = 0$ $\quad \sec\left(-\frac{\pi}{2}\right)$ no está definido.
$\tan\left(-\frac{\pi}{2}\right)$ no está definido. $\quad \cot\left(-\frac{\pi}{2}\right) = 0$

35. $\operatorname{sen} 4\pi = \operatorname{sen} 0 = 0$ **37.** $\cos\frac{7\pi}{3} = \cos\frac{\pi}{3} = \frac{1}{2}$

39. $\cos\frac{17\pi}{4} = \cos\frac{\pi}{4} = \frac{\sqrt{2}}{2}$

41. $\operatorname{sen}\left(-\frac{8\pi}{3}\right) = \operatorname{sen}\frac{4\pi}{3} = -\frac{\sqrt{3}}{2}$

43. (a) $-\frac{1}{2}$ (b) -2 **45.** (a) $-\frac{1}{5}$ (b) -5

47. (a) $\frac{4}{5}$ (b) $-\frac{4}{5}$ **49.** 0.7071 **51.** 1.0000

53. -0.1288 **55.** 1.3940 **57.** -1.4486

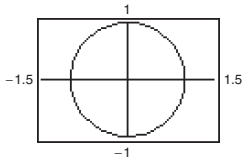
59. (a) 0.25 ft (b) 0.02 ft (c) -0.25 ft

61. Falso. $\operatorname{sen}(-t) = -\operatorname{sen}(t)$ significa que la función es impar, no que el seno de un ángulo negativo sea un número negativo.

63. Falso. El número real 0 corresponde al punto $(1, 0)$.

65. (a) simetría con eje y (b) $\operatorname{sen} t_1 = \operatorname{sen}(\pi - t_1)$
(c) $\cos(\pi - t_1) = -\cos t_1$

67. Las respuestas variarán. **69.** Es una función impar.

71. (a) 

Circunferencia de radio 1 con centro en (0, 0)

(b) Los valores de t representan el ángulo central en radianes. Los valores x y y representan el lugar del plano de coordenadas.

(c) $-1 \le x \le 1, -1 \le y \le 1$

Sección 4.3 *(página 306)*

1. (a) v (b) iv (c) vi (d) iii (e) i (f) ii

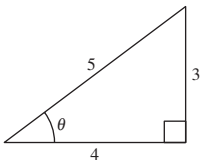
3. Complementario

5. $\operatorname{sen}\theta = \frac{3}{5}$ $\quad \csc\theta = \frac{5}{3}$
$\cos\theta = \frac{4}{5}$ $\quad \sec\theta = \frac{5}{4}$
$\tan\theta = \frac{3}{4}$ $\quad \cot\theta = \frac{4}{3}$

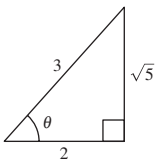
7. $\operatorname{sen}\theta = \frac{9}{41}$ $\quad \csc\theta = \frac{41}{9}$
$\cos\theta = \frac{40}{41}$ $\quad \sec\theta = \frac{41}{40}$
$\tan\theta = \frac{9}{40}$ $\quad \cot\theta = \frac{40}{9}$

9. $\operatorname{sen}\theta = \frac{8}{17}$ $\quad \csc\theta = \frac{17}{8}$
$\cos\theta = \frac{15}{17}$ $\quad \sec\theta = \frac{17}{15}$
$\tan\theta = \frac{8}{15}$ $\quad \cot\theta = \frac{15}{8}$
Los triángulos son semejantes y los lados correspondientes son proporcionales.

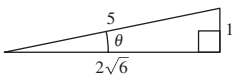
11. $\operatorname{sen}\theta = \frac{1}{3}$ $\quad \csc\theta = 3$
$\cos\theta = \frac{2\sqrt{2}}{3}$ $\quad \sec\theta = \frac{3\sqrt{2}}{4}$
$\tan\theta = \frac{\sqrt{2}}{4}$ $\quad \cot\theta = 2\sqrt{2}$
Los triángulos son semejantes y los lados correspondientes son proporcionales.

13. 

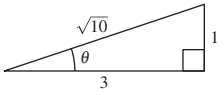
$\operatorname{sen}\theta = \frac{3}{5}$ $\quad \csc\theta = \frac{5}{3}$
$\cos\theta = \frac{4}{5}$ $\quad \sec\theta = \frac{5}{4}$
$\cot\theta = \frac{4}{3}$

15. 

$\operatorname{sen}\theta = \frac{\sqrt{5}}{3}$ $\quad \csc\theta = \frac{3\sqrt{5}}{5}$
$\cos\theta = \frac{2}{3}$
$\tan\theta = \frac{\sqrt{5}}{2}$ $\quad \cot\theta = \frac{2\sqrt{5}}{5}$

17. 

$\csc\theta = 5$
$\cos\theta = \frac{2\sqrt{6}}{5}$ $\quad \sec\theta = \frac{5\sqrt{6}}{12}$
$\tan\theta = \frac{\sqrt{6}}{12}$ $\quad \cot\theta = 2\sqrt{6}$

19. 

$\operatorname{sen}\theta = \frac{\sqrt{10}}{10}$ $\quad \csc\theta = \sqrt{10}$
$\cos\theta = \frac{3\sqrt{10}}{10}$ $\quad \sec\theta = \frac{\sqrt{10}}{3}$
$\tan\theta = \frac{1}{3}$

21. $\frac{\pi}{6}; \frac{1}{2}$ **23.** $45°; \sqrt{2}$ **25.** $60°; \frac{\pi}{3}$ **27.** $30°; 2$

CAPÍTULO 4

29. 45°; $\frac{\pi}{4}$ **31.** (a) $\frac{1}{2}$ (b) $\frac{\sqrt{3}}{2}$ (c) $\sqrt{3}$ (d) $\frac{\sqrt{3}}{3}$

33. (a) $\frac{2\sqrt{2}}{3}$ (b) $2\sqrt{2}$ (c) 3 (d) 3

35. (a) $\frac{1}{5}$ (b) $\sqrt{26}$ (c) $\frac{1}{5}$ (d) $\frac{5\sqrt{26}}{26}$

37–45. Las respuestas variarán. **47.** (a) 0.1736 (b) 0.1736

49. (a) 0.2815 (b) 3.5523 **51.** (a) 0.9964 (b) 1.0036

53. (a) 5.0273 (b) 0.1989 **55.** (a) 1.8527 (b) 0.9817

57. (a) $30° = \frac{\pi}{6}$ (b) $30° = \frac{\pi}{6}$

59. (a) $60° = \frac{\pi}{3}$ (b) $45° = \frac{\pi}{4}$

61. (a) $60° = \frac{\pi}{3}$ (b) $45° = \frac{\pi}{4}$

63. $9\sqrt{3}$ **65.** $\frac{32\sqrt{3}}{3}$

67. 443.2 m; 323.3 m **69.** $30° = \pi/6$

71. (a) 219.9 ft (b) 160.9 ft

73. $(x_1, y_1) = \left(28\sqrt{3}, 28\right)$
$(x_2, y_2) = \left(28, 28\sqrt{3}\right)$

75. $\operatorname{sen} 20° \approx 0.34$, $\cos 20° \approx 0.94$, $\tan 20° \approx 0.36$, $\csc 20° \approx 2.92$, $\sec 20° \approx 1.06$, $\cot 20° \approx 2.75$

77. Verdadero, $\csc x = \frac{1}{\operatorname{sen} x}$. **79.** Falso, $\frac{\sqrt{2}}{2} + \frac{\sqrt{2}}{2} \neq 1$.

81. Falso, $1.7321 \neq 0.0349$.

83. (a)

θ	0.1	0.2	0.3	0.4	0.5
$\operatorname{sen}\theta$	0.0998	0.1987	0.2955	0.3894	0.4794

(b) θ (c) Cuando $\theta \to 0$, $\operatorname{sen}\theta \to 0$ y $\frac{\theta}{\operatorname{sen}\theta} \to 1$.

85. Los lados correspondientes de triángulos semejantes son proporcionales.

87. Sí, $\tan\theta$ es igual a op/ady. Se puede hallar el valor de la hipotenusa por el teorema de Pitágoras, y a continuación se puede hallar $\sec\theta$, que es igual a hip/ady.

Sección 4.4 *(página 316)*

1. $\frac{y}{r}$ **3.** $\frac{y}{x}$ **5.** $\cos\theta$ **7.** Cero; definido

9. (a) $\operatorname{sen}\theta = \frac{3}{5}$ $\csc\theta = \frac{5}{3}$
$\cos\theta = \frac{4}{5}$ $\sec\theta = \frac{5}{4}$
$\tan\theta = \frac{3}{4}$ $\cot\theta = \frac{4}{3}$
(b) $\operatorname{sen}\theta = \frac{15}{17}$ $\csc\theta = \frac{17}{15}$
$\cos\theta = -\frac{8}{17}$ $\sec\theta = -\frac{17}{8}$
$\tan\theta = -\frac{15}{8}$ $\cot\theta = -\frac{8}{15}$

11. (a) $\operatorname{sen}\theta = -\frac{1}{2}$ $\csc\theta = -2$
$\cos\theta = -\frac{\sqrt{3}}{2}$ $\sec\theta = -\frac{2\sqrt{3}}{3}$
$\tan\theta = \frac{\sqrt{3}}{3}$ $\cot\theta = \sqrt{3}$
(b) $\operatorname{sen}\theta = -\frac{\sqrt{17}}{17}$ $\csc\theta = -\sqrt{17}$
$\cos\theta = \frac{4\sqrt{17}}{17}$ $\sec\theta = \frac{\sqrt{17}}{4}$
$\tan\theta = -\frac{1}{4}$ $\cot\theta = -4$

13. $\operatorname{sen}\theta = \frac{12}{13}$ $\csc\theta = \frac{13}{12}$
$\cos\theta = \frac{5}{13}$ $\sec\theta = \frac{13}{5}$
$\tan\theta = \frac{12}{5}$ $\cot\theta = \frac{5}{12}$

15. $\operatorname{sen}\theta = -\frac{2\sqrt{29}}{29}$ $\csc\theta = -\frac{\sqrt{29}}{2}$
$\cos\theta = -\frac{5\sqrt{29}}{29}$ $\sec\theta = -\frac{\sqrt{29}}{5}$
$\tan\theta = \frac{2}{5}$ $\cot\theta = \frac{5}{2}$

17. $\operatorname{sen}\theta = \frac{4}{5}$ $\csc\theta = \frac{5}{4}$
$\cos\theta = -\frac{3}{5}$ $\sec\theta = -\frac{5}{3}$
$\tan\theta = -\frac{4}{3}$ $\cot\theta = -\frac{3}{4}$

19. Primer cuadrante **21.** Segundo cuadrante

23. $\operatorname{sen}\theta = \frac{15}{17}$ $\csc\theta = \frac{17}{15}$
$\cos\theta = -\frac{8}{17}$ $\sec\theta = -\frac{17}{8}$
$\tan\theta = -\frac{15}{8}$ $\cot\theta = -\frac{8}{15}$

25. $\operatorname{sen}\theta = \frac{3}{5}$ $\csc\theta = \frac{5}{3}$
$\cos\theta = -\frac{4}{5}$ $\sec\theta = -\frac{5}{4}$
$\tan\theta = -\frac{3}{4}$ $\cot\theta = -\frac{4}{3}$

27. $\operatorname{sen}\theta = -\frac{\sqrt{10}}{10}$ $\csc\theta = -\sqrt{10}$
$\cos\theta = \frac{3\sqrt{10}}{10}$ $\sec\theta = \frac{\sqrt{10}}{3}$
$\tan\theta = -\frac{1}{3}$ $\cot\theta = -3$

29. $\operatorname{sen}\theta = -\frac{\sqrt{3}}{2}$ $\csc\theta = -\frac{2\sqrt{3}}{3}$
$\cos\theta = -\frac{1}{2}$ $\sec\theta = -2$
$\tan\theta = \sqrt{3}$ $\cot\theta = \frac{\sqrt{3}}{3}$

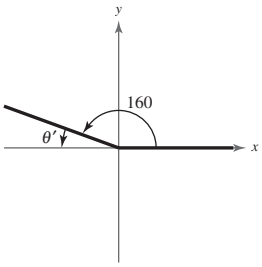
31. $\operatorname{sen}\theta = 0$ $\csc\theta$ no está definido.
$\cos\theta = -1$ $\sec\theta = -1$
$\tan\theta = 0$ $\cot\theta$ no está definido.

33. $\operatorname{sen}\theta = \frac{\sqrt{2}}{2}$ $\csc\theta = \sqrt{2}$
$\cos\theta = -\frac{\sqrt{2}}{2}$ $\sec\theta = -\sqrt{2}$
$\tan\theta = -1$ $\cot\theta = -1$

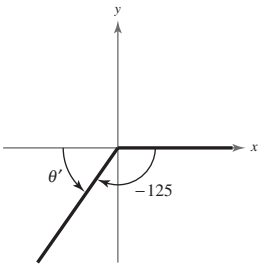
35. $\operatorname{sen}\theta = -\frac{2\sqrt{5}}{5}$ $\csc\theta = -\frac{\sqrt{5}}{2}$
$\cos\theta = -\frac{\sqrt{5}}{5}$ $\sec\theta = -\sqrt{5}$
$\tan\theta = 2$ $\cot\theta = \frac{1}{2}$

37. 0 **39.** No definido **41.** 1 **43.** No definido

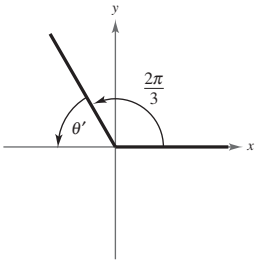
45. $\theta' = 20°$



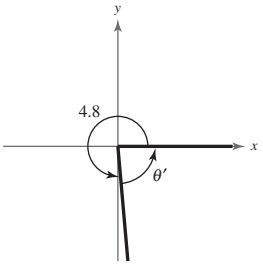
47. $\theta' = 55°$



49. $\theta' = \dfrac{\pi}{3}$



51. $\theta' = 2\pi - 4.8$



53. $\operatorname{sen} 225° = -\dfrac{\sqrt{2}}{2}$

$\cos 225° = -\dfrac{\sqrt{2}}{2}$

$\tan 225° = 1$

55. $\operatorname{sen} 750° = \dfrac{1}{2}$

$\cos 750° = \dfrac{\sqrt{3}}{2}$

$\tan 750° = \dfrac{\sqrt{3}}{3}$

57. $\operatorname{sen}(-150°) = -\dfrac{1}{2}$

$\cos(-150°) = -\dfrac{\sqrt{3}}{2}$

$\tan(-150°) = \dfrac{\sqrt{3}}{3}$

59. $\operatorname{sen}\dfrac{2\pi}{3} = \dfrac{\sqrt{3}}{2}$

$\cos\dfrac{2\pi}{3} = -\dfrac{1}{2}$

$\tan\dfrac{2\pi}{3} = -\sqrt{3}$

61. $\operatorname{sen}\dfrac{5\pi}{4} = -\dfrac{\sqrt{2}}{2}$

$\cos\dfrac{5\pi}{4} = -\dfrac{\sqrt{2}}{2}$

$\tan\dfrac{5\pi}{4} = 1$

63. $\operatorname{sen}\left(-\dfrac{\pi}{6}\right) = -\dfrac{1}{2}$

$\cos\left(-\dfrac{\pi}{6}\right) = \dfrac{\sqrt{3}}{2}$

$\tan\left(-\dfrac{\pi}{6}\right) = -\dfrac{\sqrt{3}}{3}$

65. $\operatorname{sen}\dfrac{9\pi}{4} = \dfrac{\sqrt{2}}{2}$

$\cos\dfrac{9\pi}{4} = \dfrac{\sqrt{2}}{2}$

$\tan\dfrac{9\pi}{4} = 1$

67. $\operatorname{sen}\left(-\dfrac{3\pi}{2}\right) = 1$

$\cos\left(-\dfrac{3\pi}{2}\right) = 0$

$\tan\left(-\dfrac{3\pi}{2}\right)$ no está definida.

69. $\dfrac{4}{5}$ **71.** $-\dfrac{\sqrt{13}}{2}$ **73.** $\dfrac{8}{5}$

75. 0.1736 **77.** −0.3420 **79.** −1.4826 **81.** 3.2361

83. 4.6373 **85.** 0.3640 **87.** −0.6052 **89.** −0.4142

91. (a) $30° = \dfrac{\pi}{6}$, $150° = \dfrac{5\pi}{6}$ (b) $210° = \dfrac{7\pi}{6}$, $330° = \dfrac{11\pi}{6}$

93. (a) $60° = \dfrac{\pi}{3}$, $120° = \dfrac{2\pi}{3}$ (b) $135° = \dfrac{3\pi}{4}$, $315° = \dfrac{7\pi}{4}$

95. (a) $45° = \dfrac{\pi}{4}$, $225° = \dfrac{5\pi}{4}$ (b) $150° = \dfrac{5\pi}{6}$, $330° = \dfrac{11\pi}{6}$

97. (a) 12 mi (b) 6 mi (c) 6.9 mi

99. (a) $N = 22.099 \operatorname{sen}(0.522t - 2.219) + 55.008$

$F = 36.641 \operatorname{sen}(0.502t - 1.831) + 25.610$

(b) Febrero: $N = 34.6°$, $F = -1.4°$

Marzo: $N = 41.6°$, $F = 13.9°$

Mayo: $N = 63.4°$, $F = 48.6°$

Junio: $N = 72.5°$, $F = 59.5°$

Agosto: $N = 75.5°$, $F = 55.6°$

Septiembre: $N = 68.6°$, $F = 41.7°$

Noviembre: $N = 46.8°$, $F = 6.5°$

(c) Las respuestas variarán.

101. (a) 2 cm (b) 0.11 cm (c) −1.2 cm

103. Falso. En cada uno de los cuatro cuadrantes, los signos de la función secante y la función seno serán iguales, porque estas funciones son recíprocas entre sí.

105. Cuando θ aumenta de 0° a 90°, x disminuye de 12 cm a 0 cm y y aumenta de 0 a 12 cm. Por tanto, $\operatorname{sen}\theta = y/12$ aumenta de 0 a 1 y $\cos\theta = x/12$ disminuye de 1 a 0. Así,$\tan\theta = y/x$ aumenta sin límite. Cuando $\theta = 90°$, la tangente no está definida.

107. (a) $\operatorname{sen} t = y$ (b) $r = 1$ porque es una circunferencia unitaria.

$\cos t = x$

(c) $\operatorname{sen}\theta = y$ (d) $\operatorname{sen} t = \operatorname{sen}\theta$ y $\cos t = \cos\theta$.

$\cos\theta = x$

Sección 4.5 *(página 326)*

1. Ciclo **3.** Desplazamiento de fase

5. Periodo: $\dfrac{2\pi}{5}$; amplitud: 2

7. Periodo: 4π; amplitud $\frac{3}{4}$

9. Periodo: 6; amplitud: $\frac{1}{2}$

11. Periodo: 2π; amplitud: 4

13. Periodo: $\dfrac{\pi}{5}$; amplitud: 3

15. Periodo: $\dfrac{5\pi}{2}$; amplitud: $\dfrac{5}{3}$

17. Periodo: 1; amplitud: $\frac{1}{4}$

19. g es un desplazamiento de f π unidades a la derecha.

21. g es una reflexión de f en el eje x.

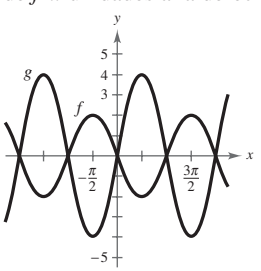
23. El periodo de f es el doble del periodo de g.

25. g es un desplazamiento de f de tres unidades hacia arriba.

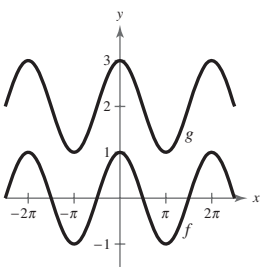
27. La gráfica de g tiene el doble de amplitud de la gráfica de f

29. La gráfica de g es un desplazamiento horizontal de la gráfica de f π unidades a la derecha.

31.

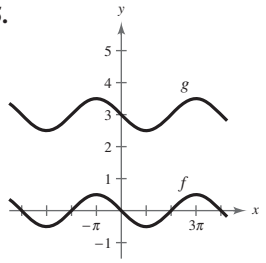


33.

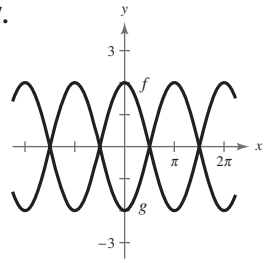


CAPÍTULO 4

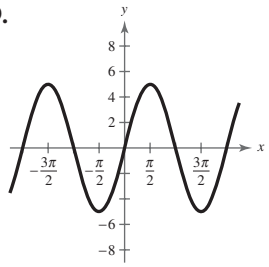
35.



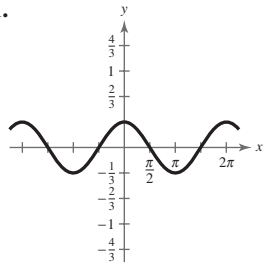
37.



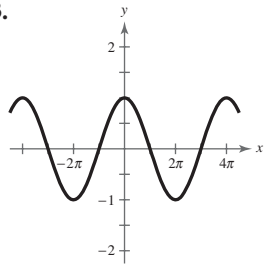
39.



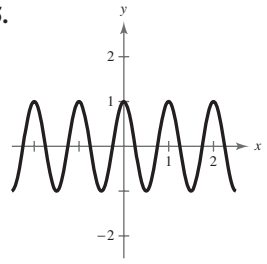
41.



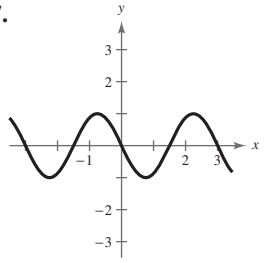
43.



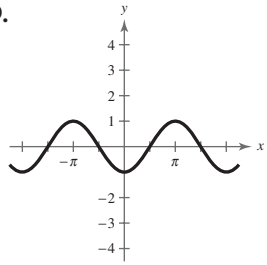
45.



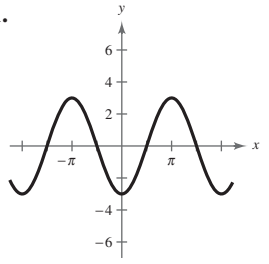
47.



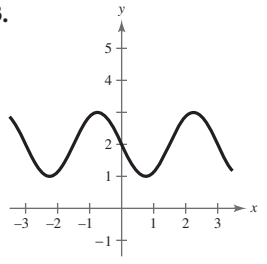
49.



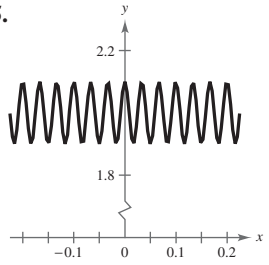
51.



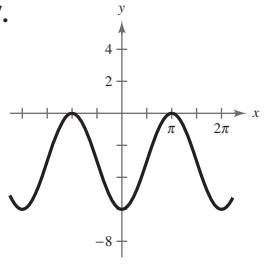
53.



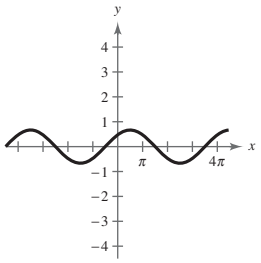
55.



57.

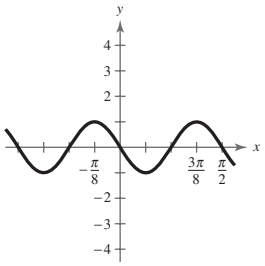


59.



61. (a) $g(x)$ se obtiene pon una contracción horizontal de cuatro, y un ciclo de $g(x)$ corresponde al intervalo $[\pi/4, 3\pi/4]$.

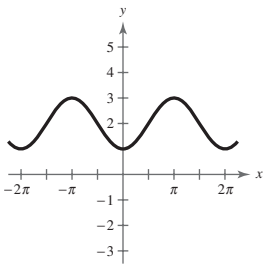
(b)



(c) $g(x) = f(4x - \pi)$

63. (a) Un ciclo de $g(x)$ ccorresponde al intervalo $[\pi, 3\pi]$, y $g(x)$ se obtiene al desplazar $f(x)$ hacia arriba dos unidades.

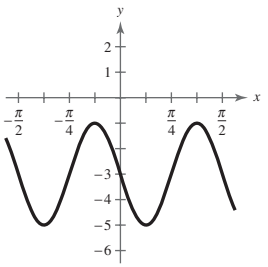
(b)



(c) $g(x) = f(x - \pi) + 2$

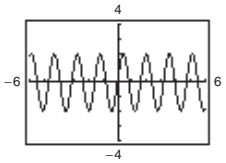
65. (a) Un ciclo de $g(x)$ es $[\pi/4, 3\pi/4]$. $g(x)$ también se desplaza hacia abajo tres unidades y tiene una amplitud de dos.

(b)

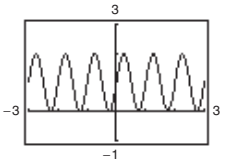


(c) $g(x) = 2f(4x - \pi) - 3$

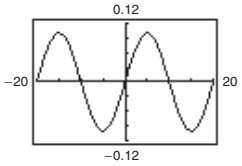
67.



69.



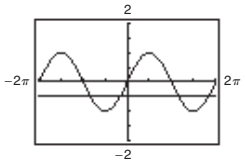
71.



73. $a = 2, d = 1$ **75.** $a = -4, d = 4$

77. $a = -3, b = 2, c = 0$ **79.** $a = 2, b = 1, c = -\frac{\pi}{4}$

81.

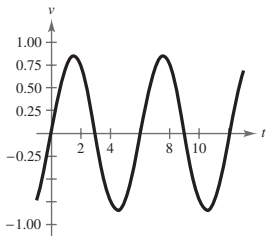


$x = -\frac{\pi}{6}, -\frac{5\pi}{6}, \frac{7\pi}{6}, \frac{11\pi}{6}$

83. $y = 1 + 2\,\text{sen}(2x - \pi)$ **85.** $y = \cos(2x + 2\pi) - \frac{3}{2}$

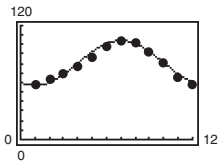
87. (a) 6 sec (b) 10 ciclos/min

(c)



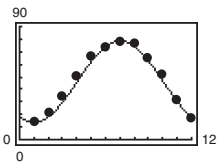
89. (a) $I(t) = 46.2 + 32.4\cos\left(\frac{\pi t}{6} - 3.67\right)$

(b)



El modelo se ajusta bien a los datos.

(c)



El modelo se ajusta bien a los datos.

(d) Las Vegas: 80.6°; International Falls: 46.2°
El término constante da el promedio anual de temperatura.

(e) 12; sí; un periodo completo es un año.

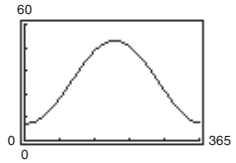
(f) International Falls; amplitud; a mayor amplitud, mayor es la variabilidad en temperatura.

91. (a) $\frac{1}{440}$ sec (b) 440 ciclos/s

93. (a) 365; sí, porque hay 365 días en un año.

(b) 30.3 gal; el término constante

(c)

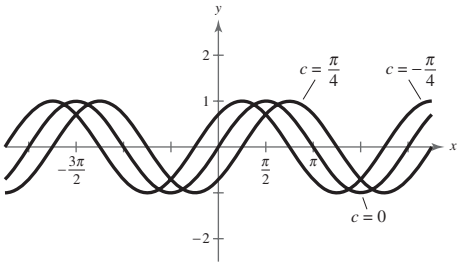


$124 < t < 252$

95. Falso. La gráfica de $f(x) = \text{sen}(x + 2\pi)$ traslada la gráfica de $f(x) = \text{sen}\,x$ exactamente un periodo a la izquierda para que las dos gráficas se vean idénticas.

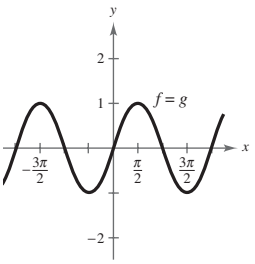
97. Verdadero. Porque $\cos x = \text{sen}\left(x + \frac{\pi}{2}\right)$, $y = -\cos x$ es una reflexión en el eje x de $y = \text{sen}\left(x + \frac{\pi}{2}\right)$.

99.



El valor de c es una traslación horizontal de la gráfica.

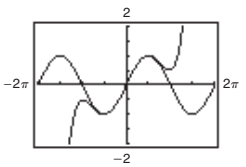
101.



Conjetura:

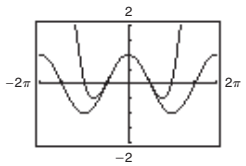
$\text{sen}\,x = \cos\left(x - \frac{\pi}{2}\right)$

103. (a)



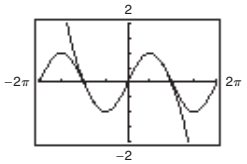
Las gráficas parecen coincidir de $-\frac{\pi}{2}$ a $\frac{\pi}{2}$.

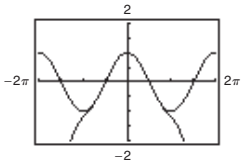
(b)



Las gráficas parecen coincidir de $-\frac{\pi}{2}$ a $\frac{\pi}{2}$.

(c) $-\frac{x^7}{7!}, -\frac{x^6}{6!}$





El intervalo de precisión aumentó.

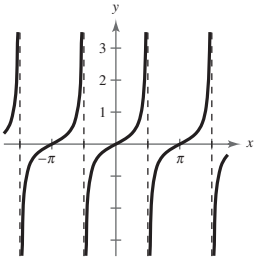
Sección 4.6 *(página 337)*

1. Impar; origen **3.** Recíproca **5.** π

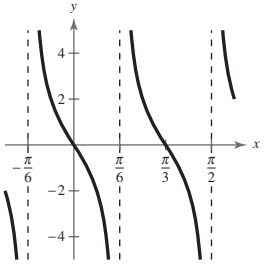
7. $(-\infty, -1] \cup [1, \infty)$ **9.** e, π **10.** c, 2π

11. a, 1 **12.** d, 2π **13.** f, 4 **14.** b, 4

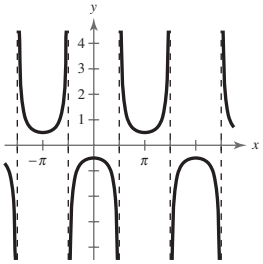
15.



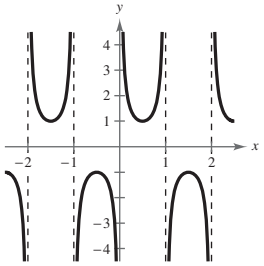
17.



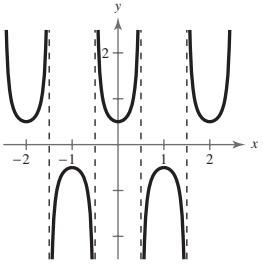
19.



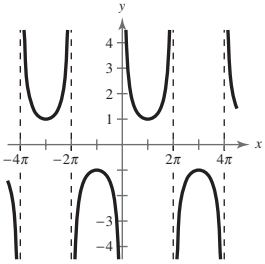
21.



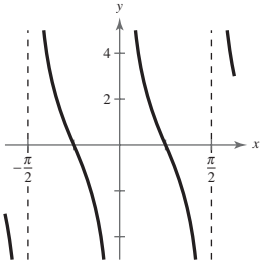
23.



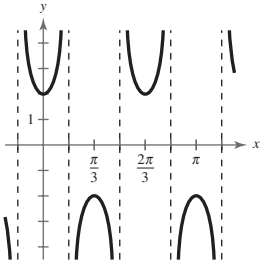
25.



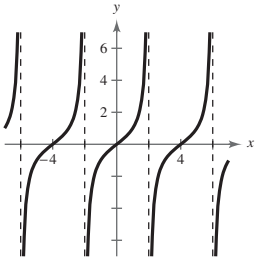
27.



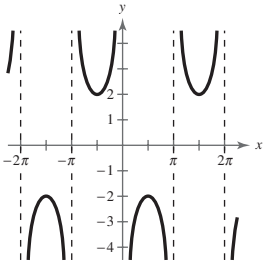
29.



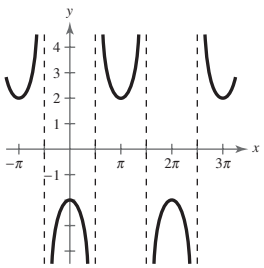
31.



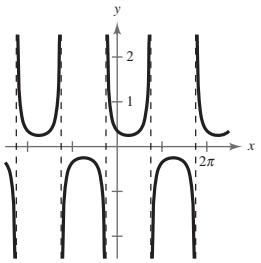
33.



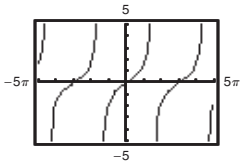
35.



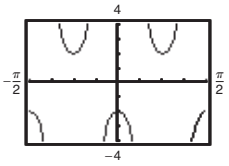
37.



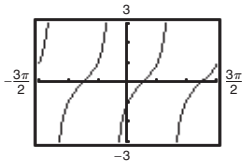
39.



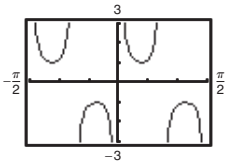
41.



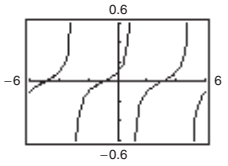
43.



45.



47.

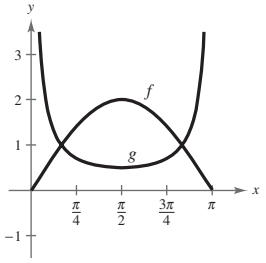


49. $-\frac{7\pi}{4}, -\frac{3\pi}{4}, \frac{\pi}{4}, \frac{5\pi}{4}$ **51.** $-\frac{4\pi}{3}, -\frac{\pi}{3}, \frac{2\pi}{3}, \frac{5\pi}{3}$

53. $-\frac{4\pi}{3}, -\frac{2\pi}{3}, \frac{2\pi}{3}, \frac{4\pi}{3}$ **55.** $-\frac{7\pi}{4}, -\frac{5\pi}{4}, \frac{\pi}{4}, \frac{3\pi}{4}$

57. Par **59.** Impar **61.** Impar **63.** Par

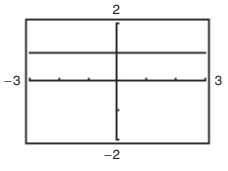
65. (a)



(b) $\frac{\pi}{6} < x < \frac{5\pi}{6}$

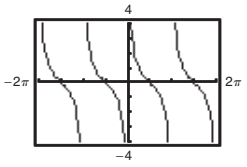
(c) f se aproxima a 0 y g se aproxima a $+\infty$ porque la cosecante es la recíproca del seno.

67.



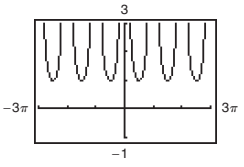
Las expresiones son equivalentes excepto cuando sen $x = 0$, y_1 no está definida.

69.



Las expresiones son equivalentes.

71.



Las expresiones son equivalentes.

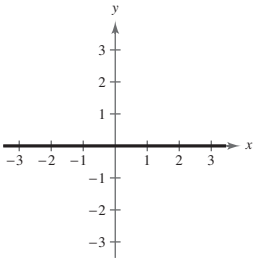
73. d, $f \to 0$ cuando $x \to 0$.

74. a, $f \to 0$ cuando $x \to 0$.

75. b, $g \to 0$ cuando $x \to 0$.

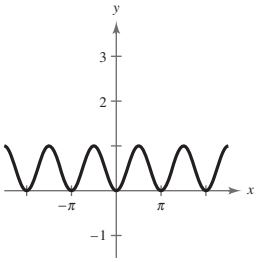
76. c, $g \to 0$ cuando $x \to 0$.

77.



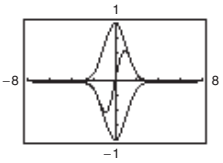
Las funciones son iguales.

79.



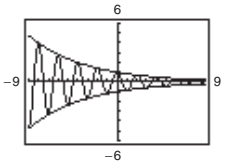
Las funciones son iguales.

81.



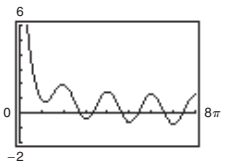
Cuando $x \to \infty$, $g(x) \to 0$.

83.



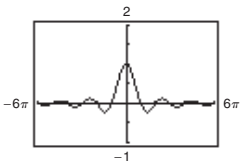
Cuando $x \to \infty$, $f(x) \to 0$.

85.



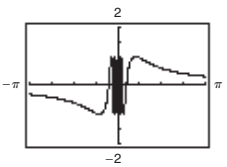
Cuando $x \to 0$, $y \to \infty$.

87.



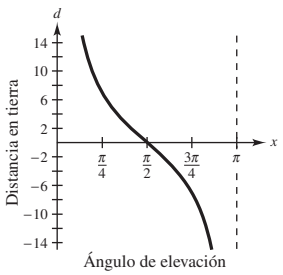
Cuando $x \to 0$, $g(x) \to 1$.

89.



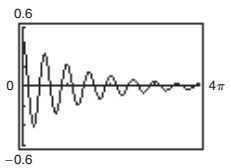
Cuando $x \to 0$, $f(x)$ oscila entre 1 y -1.

91. $d = 7 \cot x$



93. (a) Periodo de $H(t)$: 12 meses
Periodo de $L(t)$: 12 meses
(b) Verano; invierno
(c) Alrededor de 0.5 meses

95. (a)



(b) y se aproxima a 0 cuanto t aumenta.

97. Verdadero. $y = \sec x$ es igual a $y = 1/\cos x$, y si el recíproco de $y = \operatorname{sen} x$ se traslada $\pi/2$ unidades a la izquierda, entonces

$$\frac{1}{\operatorname{sen}\left(x + \frac{\pi}{2}\right)} = \frac{1}{\cos x} = \sec x.$$

99. (a) Cuando $x \to \frac{\pi^+}{2}$, $f(x) \to -\infty$.

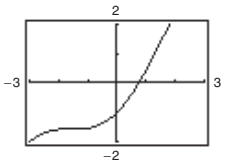
(b) Cuando $x \to \frac{\pi^-}{2}$, $f(x) \to \infty$.

(c) Cuando $x \to -\frac{\pi^+}{2}$, $f(x) \to -\infty$.

(d) Cuando $x \to -\frac{\pi^-}{2}$, $f(x) \to \infty$.

101. (a) Cuando $x \to 0^+$, $f(x) \to \infty$.
(b) Cuando $x \to 0^-$, $f(x) \to -\infty$.
(c) Cuando $x \to \pi^+$, $f(x) \to \infty$.
(d) Cuando $x \to \pi^-$, $f(x) \to -\infty$.

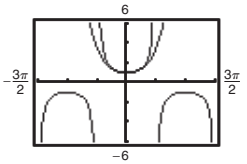
103. (a)



0.7391

(b) 1, 0.5403, 0.8576, 0.6543, 0.7935, 0.7014, 0.7640, 0.7221, 0.7504, 0.7314, . . . ; 0.7391

105.



Las gráficas parecen coincidir en el intervalo $-1.1 \le x \le 1.1$.

Sección 4.7 *(página 347)*

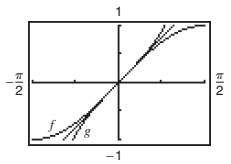
1. $y = \operatorname{sen}^{-1} x; -1 \le x \le 1$

3. $y = \tan^{-1} x; \ -\infty < x < \infty; -\frac{\pi}{2} < y < \frac{\pi}{2}$

5. $\frac{\pi}{6}$ **7.** $\frac{\pi}{3}$ **9.** $\frac{\pi}{6}$ **11.** $\frac{5\pi}{6}$ **13.** $-\frac{\pi}{3}$

15. $\frac{2\pi}{3}$ **17.** $-\frac{\pi}{3}$ **19.** 0

21.



23. 1.19 **25.** -0.85 **27.** -1.25 **29.** 0.32

31. 1.99 **33.** 0.74 **35.** 1.07 **37.** 1.36

39. -1.52 **41.** $-\frac{\pi}{3}, -\frac{\sqrt{3}}{3}, 1$ **43.** $\theta = \arctan \frac{x}{4}$

45. $\theta = \operatorname{arcsen} \frac{x+2}{5}$ **47.** $\theta = \arccos \frac{x+3}{2x}$

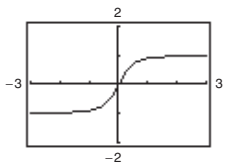
49. 0.3 **51.** -0.1 **53.** 0 **55.** $\frac{3}{5}$ **57.** $\frac{\sqrt{5}}{5}$

59. $\frac{12}{13}$ **61.** $\frac{\sqrt{34}}{5}$ **63.** $\frac{\sqrt{5}}{3}$ **65.** 2 **67.** $\frac{1}{x}$

69. $\sqrt{1-4x^2}$ **71.** $\sqrt{1-x^2}$ **73.** $\frac{\sqrt{9-x^2}}{x}$

75. $\frac{\sqrt{x^2+2}}{x}$

77.

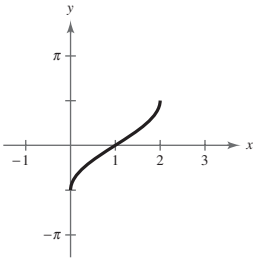


Asíntotas: $y = \pm 1$

79. $\dfrac{9}{\sqrt{x^2 + 81}},\ x > 0;\ \dfrac{-9}{\sqrt{x^2 + 81}},\ x < 0$

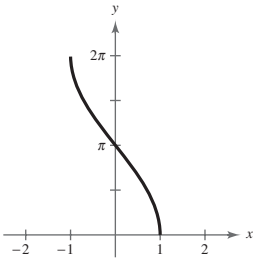
81. $\dfrac{|x - 1|}{\sqrt{x^2 - 2x + 10}}$

83.

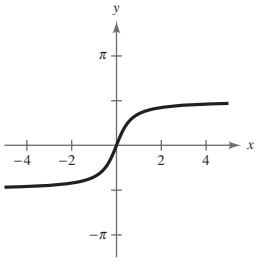


La gráfica de g es un desplazamiento horizontal de una unidad a la derecha de f.

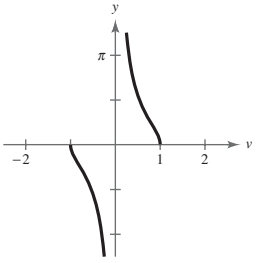
85.



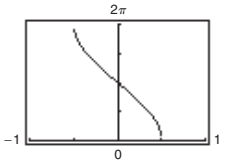
87.



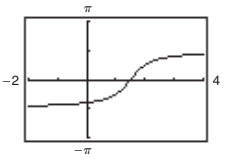
89.



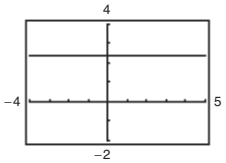
91.



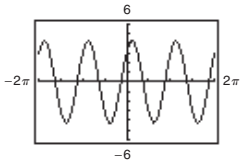
93.



95.



97. $3\sqrt{2}\,\text{sen}\left(2t + \dfrac{\pi}{4}\right)$

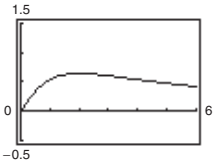


La gráfica implica que la identidad es verdadera.

99. $\dfrac{\pi}{2}$ **101.** $\dfrac{\pi}{2}$ **103.** π

105. (a) $\theta = \text{arcsen}\,\dfrac{5}{s}$ (b) 0.13, 0.25

107. (a)



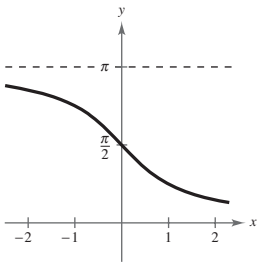
(b) 2 ft (c) $\beta = 0$; cuando x aumenta, β se aproxima a 0.

109. (a) $\theta \approx 26.0°$ (b) 24.4 ft

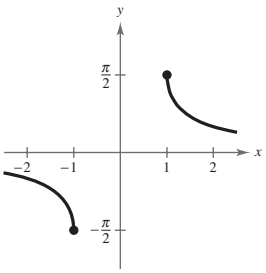
111. (a) $\theta = \arctan\dfrac{x}{20}$ (b) 14.0°, 31.0°

113. Falso. $\dfrac{5\pi}{4}$ no está en el rango del arctan.

115. Dominio: $(-\infty, \infty)$
Rango: $(0, \pi)$



117. Dominio: $(-\infty, -1] \cup [1, \infty)$
Rango: $[-\pi/2, 0) \cup (0, \pi/2]$

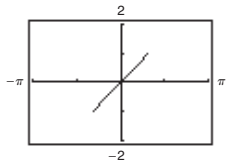


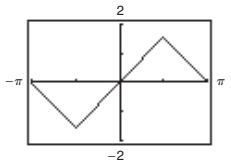
119. $\dfrac{\pi}{4}$ **121.** $\dfrac{3\pi}{4}$ **123.** $\dfrac{\pi}{6}$ **125.** $\dfrac{\pi}{3}$ **127.** 1.17

129. 0.19 **131.** 0.54 **133.** -0.12

135. (a) $\dfrac{\pi}{4}$ (b) $\dfrac{\pi}{2}$ (c) 1.25 (d) 2.03

137. (a) $f \circ f^{-1}$ $f^{-1} \circ f$





(b) Los dominios y rangos de las funciones están restringidos. Las gráficas de $f \circ f^{-1}$ y $f^{-1} \circ f$ difieren debido a los dominios y rangos de f y de f^{-1}.

Sección 4.8 *(página 357)*

1. Rumbo **3.** Periodo

5. $a \approx 1.73$, $c \approx 3.46$, $B = 60°$

7. $a \approx 8.26$, $c \approx 25.38$, $A = 19°$

9. $c = 5$, $A \approx 36.87°$, $B \approx 53.13°$

11. $a \approx 49.48$ **13.** $a \approx 91.34$
$A \approx 72.08°$ $b \approx 420.70$
$B \approx 17.92°$ $B = 77°45'$

15. 3.00 **17.** 2.50 **19.** 214.45 ft **21.** 19.7 ft

23. 19.9 ft **25.** 11.8 km **27.** 56.3° **29.** 2.06°

31. (a) $\sqrt{h^2 + 34h + 10\,289}$ (b) $\theta = \arccos\left(\dfrac{100}{l}\right)$
(c) 53.02 ft

33. (a) $l = 250$ ft, $A \approx 36.87°$, $B \approx 53.13°$
(b) 4.87 sec

35. 554 millas al Norte; 709 millas al Este

37. (a) 104.95 millas náuticas al Sur; 58.18 millas náuticas al Oeste
(b) S 36.7° O; distancia = 130.9 millas náuticas

39. N 56.31° O **41.** (a) N 58° E (b) 68.82 m

43. 78.7° **45.** 35.3° **47.** 29.4 in. **49.** $y = \sqrt{3}r$

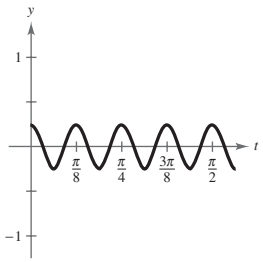
51. $a \approx 12.2$, $b \approx 7$ **53.** $d = 4\,\text{sen}(\pi t)$

55. $d = 3\cos\left(\dfrac{4\pi t}{3}\right)$

57. (a) 9 (b) $\frac{3}{5}$ (c) 9 (d) $\frac{5}{12}$

59. (a) $\frac{1}{4}$ (b) 3 (c) 0 (d) $\frac{1}{6}$ **61.** $\omega = 528\pi$

63. (a)



(b) $\dfrac{\pi}{8}$ (c) $\dfrac{\pi}{32}$

65. (a)

θ	L_1	L_2	$L_1 + L_2$
0.1	$\dfrac{2}{\text{sen } 0.1}$	$\dfrac{3}{\cos 0.1}$	23.0
0.2	$\dfrac{2}{\text{sen } 0.2}$	$\dfrac{3}{\cos 0.2}$	13.1
0.3	$\dfrac{2}{\text{sen } 0.3}$	$\dfrac{3}{\cos 0.3}$	9.9
0.4	$\dfrac{2}{\text{sen } 0.4}$	$\dfrac{3}{\cos 0.4}$	8.4

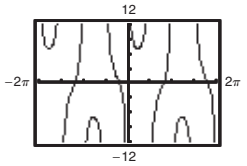
(b)

θ	L_1	L_2	$L_1 + L_2$
0.5	$\dfrac{2}{\text{sen } 0.5}$	$\dfrac{3}{\cos 0.5}$	7.6
0.6	$\dfrac{2}{\text{sen } 0.6}$	$\dfrac{3}{\cos 0.6}$	7.2
0.7	$\dfrac{2}{\text{sen } 0.7}$	$\dfrac{3}{\cos 0.7}$	7.0
0.8	$\dfrac{2}{\text{sen } 0.8}$	$\dfrac{3}{\cos 0.8}$	7.1

7.0 m

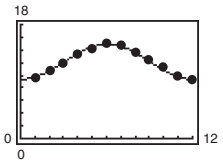
(c) $L = L_1 + L_2 = \dfrac{2}{\text{sen } \theta} + \dfrac{3}{\cos \theta}$

(d)



7.0 m; Las respuestas son las mismas.

67. (a)

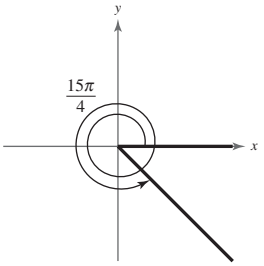


(b) 12; sí, hay 12 meses en un año.
(c) 2.77; el máximo cambio en el número de horas de luz diurna

69. Falso. La situación no crea un triángulo rectángulo porque la torre no es vertical.

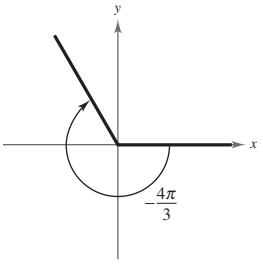
Ejercicios de repaso *(página 364)*

1. (a)



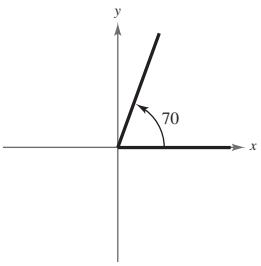
(b) Cuarto cuadrante
(c) $\dfrac{23\pi}{4}, -\dfrac{\pi}{4}$

3. (a)



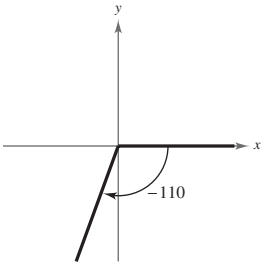
(b) Segundo cuadrante
(c) $\dfrac{2\pi}{3}, -\dfrac{10\pi}{3}$

5. (a)



(b) Primer cuadrante
(c) 430°, −290°

7. (a)



(b) Tercer cuadrante
(c) 250°, −470°

9. 7.854 **11.** −0.589 **13.** 54.000° **15.** −200.535°

17. 198° 24′ **19.** 0° 39′ **21.** 48.17 in.

23. Área ≈ 339.29 in.^{2} **25.** $\left(-\dfrac{1}{2}, \dfrac{\sqrt{3}}{2}\right)$

27. $\left(-\dfrac{\sqrt{3}}{2}, -\dfrac{1}{2}\right)$

29. $\operatorname{sen}\frac{7\pi}{6} = -\frac{1}{2}$ $\quad \csc\frac{7\pi}{6} = -2$

$\cos\frac{7\pi}{6} = -\frac{\sqrt{3}}{2}$ $\quad \sec\frac{7\pi}{6} = -\frac{2\sqrt{3}}{3}$

$\tan\frac{7\pi}{6} = \frac{\sqrt{3}}{3}$ $\quad \cot\frac{7\pi}{6} = \sqrt{3}$

31. $\operatorname{sen}\left(-\frac{2\pi}{3}\right) = -\frac{\sqrt{3}}{2}$ $\quad \csc\left(-\frac{2\pi}{3}\right) = -\frac{2\sqrt{3}}{3}$

$\cos\left(-\frac{2\pi}{3}\right) = -\frac{1}{2}$ $\quad \sec\left(-\frac{2\pi}{3}\right) = -2$

$\tan\left(-\frac{2\pi}{3}\right) = \sqrt{3}$ $\quad \cot\left(-\frac{2\pi}{3}\right) = \frac{\sqrt{3}}{3}$

33. $\operatorname{sen}\frac{11\pi}{4} = \operatorname{sen}\frac{3\pi}{4} = \frac{\sqrt{2}}{2}$

35. $\operatorname{sen}\left(-\frac{17\pi}{6}\right) = \operatorname{sen}\frac{7\pi}{6} = -\frac{1}{2}$

37. -75.3130 **39.** 3.2361

41. $\operatorname{sen}\theta = \frac{4\sqrt{41}}{41}$ $\quad \csc\theta = \frac{\sqrt{41}}{4}$

$\cos\theta = \frac{5\sqrt{41}}{41}$ $\quad \sec\theta = \frac{\sqrt{41}}{5}$

$\tan\theta = \frac{4}{5}$ $\quad \cot\theta = \frac{5}{4}$

43. (a) 3 (b) $\frac{2\sqrt{2}}{3}$ (c) $\frac{3\sqrt{2}}{4}$ (d) $\frac{\sqrt{2}}{4}$

45. (a) $\frac{1}{4}$ (b) $\frac{\sqrt{15}}{4}$ (c) $\frac{4\sqrt{15}}{15}$ (d) $\frac{\sqrt{15}}{15}$

47. 0.6494 **49.** 0.5621 **51.** 3.6722

53. 0.6104 **55.** 71.3 m

57. $\operatorname{sen}\theta = \frac{4}{5}$ $\quad \csc\theta = \frac{5}{4}$

$\cos\theta = \frac{3}{5}$ $\quad \sec\theta = \frac{5}{3}$

$\tan\theta = \frac{4}{3}$ $\quad \cot\theta = \frac{3}{4}$

59. $\operatorname{sen}\theta = \frac{15\sqrt{241}}{241}$ $\quad \csc\theta = \frac{\sqrt{241}}{15}$

$\cos\theta = \frac{4\sqrt{241}}{241}$ $\quad \sec\theta = \frac{\sqrt{241}}{4}$

$\tan\theta = \frac{15}{4}$ $\quad \cot\theta = \frac{4}{15}$

61. $\operatorname{sen}\theta = \frac{9\sqrt{82}}{82}$ $\quad \csc\theta = \frac{\sqrt{82}}{9}$

$\cos\theta = \frac{-\sqrt{82}}{82}$ $\quad \sec\theta = -\sqrt{82}$

$\tan\theta = -9$ $\quad \cot\theta = -\frac{1}{9}$

63. $\operatorname{sen}\theta = \frac{4\sqrt{17}}{17}$ $\quad \csc\theta = \frac{\sqrt{17}}{4}$

$\cos\theta = \frac{\sqrt{17}}{17}$ $\quad \sec\theta = \sqrt{17}$

$\tan\theta = 4$ $\quad \cot\theta = \frac{1}{4}$

65. $\operatorname{sen}\theta = -\frac{\sqrt{11}}{6}$ $\quad \csc\theta = -\frac{6\sqrt{11}}{11}$

$\cos\theta = \frac{5}{6}$ $\quad \cot\theta = -\frac{5\sqrt{11}}{11}$

$\tan\theta = -\frac{\sqrt{11}}{5}$

67. $\cos\theta = -\frac{\sqrt{55}}{8}$ $\quad \sec\theta = -\frac{8\sqrt{55}}{55}$

$\tan\theta = -\frac{3\sqrt{55}}{55}$ $\quad \cot\theta = -\frac{\sqrt{55}}{3}$

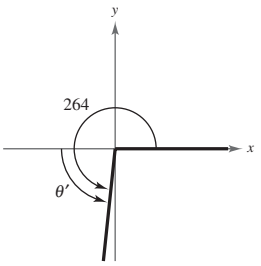
$\csc\theta = \frac{8}{3}$

69. $\operatorname{sen}\theta = \frac{\sqrt{21}}{5}$ $\quad \sec\theta = -\frac{5}{2}$

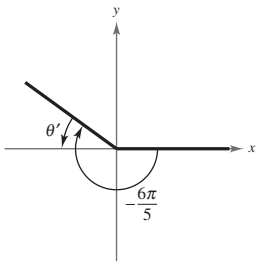
$\tan\theta = -\frac{\sqrt{21}}{2}$ $\quad \cot\theta = -\frac{2\sqrt{21}}{21}$

$\csc\theta = \frac{5\sqrt{21}}{21}$

71. $\theta' = 84°$



73. $\theta' = \frac{\pi}{5}$



75. $\operatorname{sen}\frac{\pi}{3} = \frac{\sqrt{3}}{2}$; $\cos\frac{\pi}{3} = \frac{1}{2}$; $\tan\frac{\pi}{3} = \sqrt{3}$

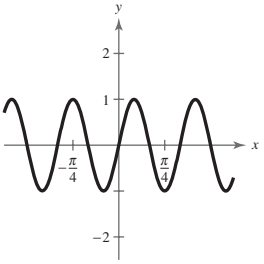
77. $\operatorname{sen}\left(-\frac{7\pi}{3}\right) = -\frac{\sqrt{3}}{2}$; $\cos\left(-\frac{7\pi}{3}\right) = \frac{1}{2}$;

$\tan\left(-\frac{7\pi}{3}\right) = -\sqrt{3}$

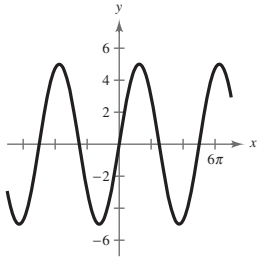
79. $\operatorname{sen} 495° = \frac{\sqrt{2}}{2}$; $\cos 495° = -\frac{\sqrt{2}}{2}$; $\tan 495° = -1$

81. -0.7568 **83.** 0.9511

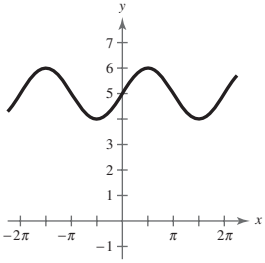
85.



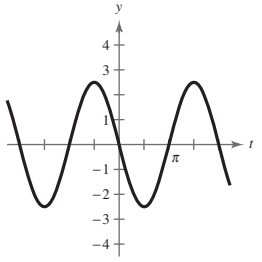
87.



89.

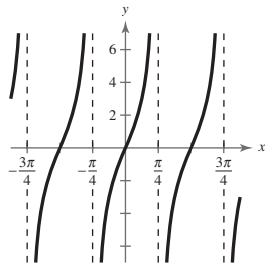


91.

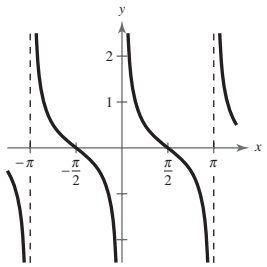


93. (a) $y = 2 \operatorname{sen} 528\pi x$ (b) 264 ciclos/s

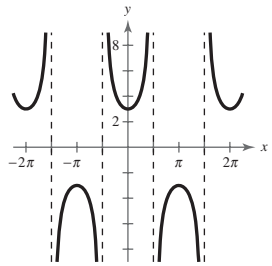
95.



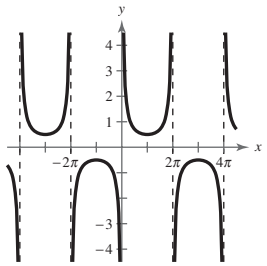
97.



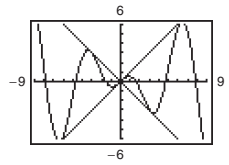
99.



101.



103.

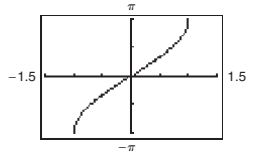


Cuando $x \to +\infty, f(x)$ oscila.

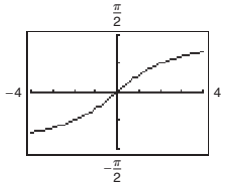
105. $-\frac{\pi}{6}$ **107.** 0.41 **109.** -0.46 **111.** $\frac{3\pi}{4}$

113. π **115.** 1.24 **117.** -0.98

119.



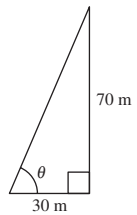
121.



123. $\frac{4}{5}$ **125.** $\frac{13}{5}$ **127.** $\frac{10}{7}$ **129.** $\frac{\sqrt{4-x^2}}{x}$

131. $\frac{\pi}{6}$ **133.** $\frac{3\pi}{4}$ **135.** 0.09 **137.** 1.98

139.



$\theta \approx 66.8°$

141. 1221 mi, 85.6°

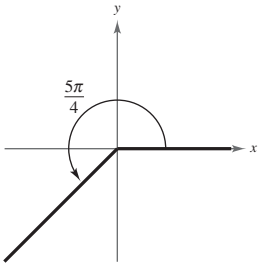
143. Falso. Por cada θ corresponde exactamente un valor de y.

145. La función no está definida porque $\sec \theta = 1/\cos \theta$.

147. Los rangos de las otras cuatro funciones trigonométricas son $(-\infty, \infty)$ o $(-\infty, -1] \cup [1, \infty)$.

Examen del capítulo *(página 367)*

1. (a)



(b) $\frac{13\pi}{4}, -\frac{3\pi}{4}$

(c) 225°

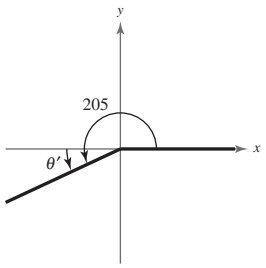
2. 3500 rad/min **3.** Alrededor de 709.04 ft^2

4. $\operatorname{sen} \theta = \frac{3\sqrt{10}}{10}$, $\cos \theta = -\frac{\sqrt{10}}{10}$, $\tan \theta = -3$, $\csc \theta = \frac{\sqrt{10}}{3}$, $\sec \theta = -\sqrt{10}$, $\cot \theta = -\frac{1}{3}$

5. Para $0 \le \theta < \frac{\pi}{2}$: $\operatorname{sen} \theta = \frac{3\sqrt{13}}{13}$, $\cos \theta = \frac{2\sqrt{13}}{13}$, $\csc \theta = \frac{\sqrt{13}}{3}$, $\sec \theta = \frac{\sqrt{13}}{2}$, $\cot \theta = \frac{2}{3}$

Para $\pi \le \theta < \frac{3\pi}{2}$: $\operatorname{sen} \theta = -\frac{3\sqrt{13}}{13}$, $\cos \theta = -\frac{2\sqrt{13}}{13}$, $\csc \theta = -\frac{\sqrt{13}}{3}$, $\sec \theta = -\frac{\sqrt{13}}{2}$, $\cot \theta = \frac{2}{3}$

6. $\theta' = 25°$

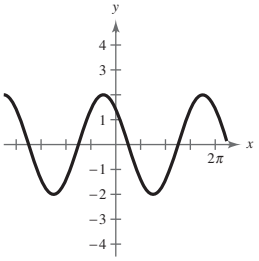


7. Tercer cuadrante **8.** 150°, 210° **9.** 1.33, 1.81

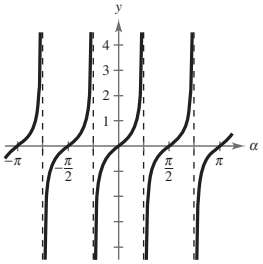
10. $\operatorname{sen} \theta = -\frac{4}{5}$, $\tan \theta = -\frac{4}{3}$, $\csc \theta = -\frac{5}{4}$, $\sec \theta = \frac{5}{3}$, $\cot \theta = -\frac{3}{4}$

11. $\operatorname{sen} \theta = \frac{21}{29}$, $\cos \theta = -\frac{20}{29}$, $\tan \theta = -\frac{21}{20}$, $\csc \theta = \frac{29}{21}$, $\cot \theta = -\frac{20}{21}$

12.

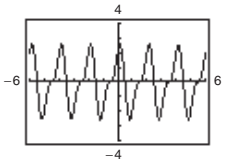


13.



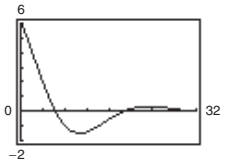
CAPÍTULO 4

14.



Periodo: 2

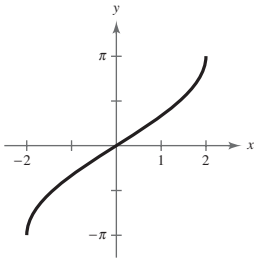
15.



No periódica

16. $a = -2, b = \frac{1}{2}, c = -\frac{\pi}{4}$ **17.** $\frac{\sqrt{55}}{3}$

18.



19. 309.3°

20. $d = -6 \cos \pi t$

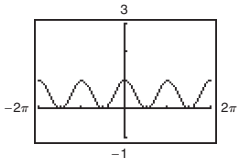
Resolución de problemas *(página 369)*

1. (a) $\frac{11\pi}{2}$ rad o 990° (b) Aproximadamente 816.42 pies

3. (a) 4767 ft (b) 3705 ft

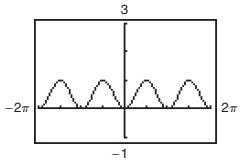
(c) $w = 2183$ ft, $\tan 63° = \frac{w + 3705}{3000}$

5. (a)



Par

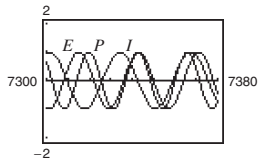
(b)



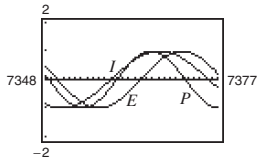
Par

7. $h = 51 - 50 \operatorname{sen}\left(8\pi t + \frac{\pi}{2}\right)$

9. (a)



(b)



(c) $P(7369) = 0.631$
$E(7369) = 0.901$
$I(7369) = 0.945$

Las tres bajan más pronto en el mes, luego alcanzan su máximo hacia mitad del mes y bajan de nuevo hacia la parte final del mes.

11. (a) 3.35, 7.35 (b) -0.65

(c) Sí. Hay una diferencia de nueve periodos entre los valores.

13. (a) 40.5° (b) $x \approx 1.71$ ft; $y \approx 3.46$ ft

(c) Aproximadamente 1.75 pies

(d) Al acercarse a la piedra, d debe hacerse más y más pequeña. Los ángulos θ_1 y θ_2 disminuirán junto con la distancia y, de modo que d disminuirá.

Capítulo 5

Sección 5.1 *(página 377)*

1. $\tan u$ **3.** $\cot u$ **5.** $\cot^2 u$ **7.** $\cos u$ **9.** $\cos u$

11.
$\operatorname{sen} x = \frac{1}{2}$
$\cos x = \frac{\sqrt{3}}{2}$
$\tan x = \frac{\sqrt{3}}{3}$
$\csc x = 2$
$\sec x = \frac{2\sqrt{3}}{3}$
$\cot x = \sqrt{3}$

13.
$\operatorname{sen} \theta = -\frac{\sqrt{2}}{2}$
$\cos \theta = \frac{\sqrt{2}}{2}$
$\tan \theta = -1$
$\csc \theta = -\sqrt{2}$
$\sec \theta = \sqrt{2}$
$\cot \theta = -1$

15.
$\operatorname{sen} x = -\frac{8}{17}$
$\cos x = -\frac{15}{17}$
$\tan x = \frac{8}{15}$
$\csc x = -\frac{17}{8}$
$\sec x = -\frac{17}{15}$
$\cot x = \frac{15}{8}$

17.
$\operatorname{sen} \phi = -\frac{\sqrt{5}}{3}$
$\cos \phi = \frac{2}{3}$
$\tan \phi = -\frac{\sqrt{5}}{2}$
$\csc \phi = -\frac{3\sqrt{5}}{5}$
$\sec \phi = \frac{3}{2}$
$\cot \phi = -\frac{2\sqrt{5}}{5}$

19.
$\operatorname{sen} x = \frac{1}{3}$
$\cos x = -\frac{2\sqrt{2}}{3}$
$\tan x = -\frac{\sqrt{2}}{4}$
$\csc x = 3$
$\sec x = -\frac{3\sqrt{2}}{4}$
$\cot x = -2\sqrt{2}$

21.
$\operatorname{sen} \theta = -\frac{2\sqrt{5}}{5}$
$\cos \theta = -\frac{\sqrt{5}}{5}$
$\tan \theta = 2$
$\csc \theta = -\frac{\sqrt{5}}{2}$
$\sec \theta = -\sqrt{5}$
$\cot \theta = \frac{1}{2}$

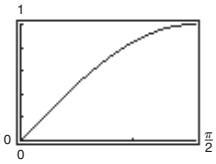
23. $\operatorname{sen} \theta = -1$ $\csc \theta = -1$
$\cos \theta = 0$ $\sec \theta$ no está definido.
$\tan \theta$ no está definido. $\cot \theta = 0$

25. d **26.** a **27.** b **28.** f **29.** e **30.** c
31. b **32.** c **33.** f **34.** a **35.** e **36.** d
37. $\csc \theta$ **39.** $-\operatorname{sen} x$ **41.** $\cos^2 \phi$ **43.** $\cos x$
45. $\operatorname{sen}^2 x$ **47.** $\cos \theta$ **49.** 1 **51.** $\tan x$
53. $1 + \operatorname{sen} y$ **55.** $\sec \beta$ **57.** $\cos u + \operatorname{sen} u$ **59.** $\operatorname{sen}^2 x$
61. $\operatorname{sen}^2 x \tan^2 x$ **63.** $\sec x + 1$ **65.** $\sec^4 x$
67. $\operatorname{sen}^2 x - \cos^2 x$ **69.** $\cot^2 x(\csc x - 1)$
71. $1 + 2 \operatorname{sen} x \cos x$ **73.** $4 \cot^2 x$ **75.** $2 \csc^2 x$
77. $2 \sec x$ **79.** $\sec x$ **81.** $1 + \cos y$
83. $3(\sec x + \tan x)$

85.

x	0.2	0.4	0.6	0.8	1.0
y_1	0.1987	0.3894	0.5646	0.7174	0.8415
y_2	0.1987	0.3894	0.5646	0.7174	0.8415

x	1.2	1.4
y_1	0.9320	0.9854
y_2	0.9320	0.9854

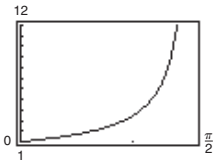


$y_1 = y_2$

87.

x	0.2	0.4	0.6	0.8	1.0
y_1	1.2230	1.5085	1.8958	2.4650	3.4082
y_2	1.2230	1.5085	1.8958	2.4650	3.4082

x	1.2	1.4
y_1	5.3319	11.6814
y_2	5.3319	11.6814



$y_1 = y_2$

89. $\csc x$ **91.** $\tan x$ **93.** $3 \operatorname{sen} \theta$ **95.** $4 \cos \theta$

97. $3 \tan \theta$ **99.** $5 \sec \theta$ **101.** $3 \sec \theta$ **103.** $\sqrt{2} \cos \theta$

105. $3 \cos \theta = 3$; $\operatorname{sen} \theta = 0$; $\cos \theta = 1$

107. $4 \operatorname{sen} \theta = 2\sqrt{2}$; $\operatorname{sen} \theta = \dfrac{\sqrt{2}}{2}$; $\cos \theta = \dfrac{\sqrt{2}}{2}$

109. $0 \le \theta \le \pi$ **111.** $0 \le \theta < \dfrac{\pi}{2}, \dfrac{3\pi}{2} < \theta < 2\pi$

113. $\ln|\cot x|$ **115.** $\ln|\cos x|$ **117.** $\ln|\csc t \sec t|$

119. (a) $\csc^2 132° - \cot^2 132° \approx 1.8107 - 0.8107 = 1$

(b) $\csc^2 \dfrac{2\pi}{7} - \cot^2 \dfrac{2\pi}{7} \approx 1.6360 - 0.6360 = 1$

121. (a) $\cos(90° - 80°) = \operatorname{sen} 80° \approx 0.9848$

(b) $\cos\left(\dfrac{\pi}{2} - 0.8\right) = \operatorname{sen} 0.8 \approx 0.7174$

123. $\mu = \tan \theta$ **125.** Las respuestas variarán.

127. Verdadero. Por ejemplo, $\operatorname{sen}(-x) = -\operatorname{sen} x$.

129. 1, 1 **131.** ∞, 0

133. No es identidad porque $\cos \theta = \pm\sqrt{1 - \operatorname{sen}^2 \theta}$

135. No es identidad porque $\dfrac{\operatorname{sen} k\theta}{\cos k\theta} = \tan k\theta$

137. Una identidad porque $\theta \cdot \dfrac{1}{\operatorname{sen} \theta} = 1$

139. $a \cos \theta$ **141.** $a \tan \theta$

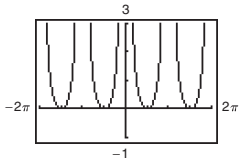
Sección 5.2 *(página 385)*

1. Identidad **3.** $\tan u$ **5.** $\cos^2 u$ **7.** $-\csc u$

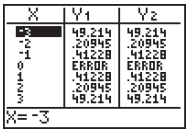
9–49. Las respuestas variarán.

51. En el primer renglón, $\cot(x)$ es sustituida por $\cot(-x)$, lo que es incorrecto; $\cot(-x) = -\cot(x)$.

53. (a)



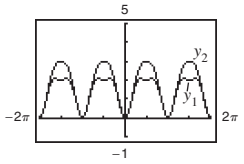
(b)



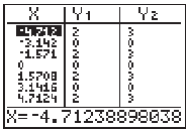
Identidad

(c) Las respuestas variarán.

55. (a)



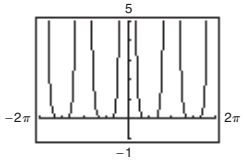
(b)



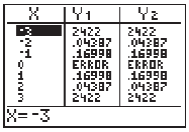
No es identidad

(c) Las respuestas variarán.

57. (a)



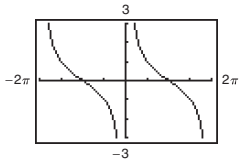
(b)



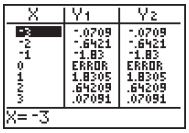
Identidad

(c) Las respuestas variarán.

59. (a)



(b)



Identidad

(c) Las respuestas variarán.

61–63. Las respuestas variarán. **65.** 1 **67.** 2

69. Las respuestas variarán.

71. Verdadero. Se pueden usar muchas técnicas diferentes para verificar identidades.

73. La ecuación no es una identidad porque $\operatorname{sen} \theta = \pm\sqrt{1 - \cos^2 \theta}$.

Posible respuesta: $\dfrac{7\pi}{4}$

75. La ecuación no es una identidad porque $1 - \cos^2 \theta = \operatorname{sen}^2 \theta$.

Posible respuesta:

77. La ecuación no es una identidad porque $1 + \tan^2 \theta = \sec^2 \theta$.

Posible respuesta: $\dfrac{\pi}{6}$

Sección 5.3 *(página 394)*

1. Aislar **3.** Cuadráticas **5–9.** Las respuestas variarán.

11. $\dfrac{2\pi}{3} + 2n\pi, \dfrac{4\pi}{3} + 2n\pi$ **13.** $\dfrac{\pi}{3} + 2n\pi, \dfrac{2\pi}{3} + 2n\pi$

15. $\dfrac{\pi}{6} + n\pi, \dfrac{5\pi}{6} + n\pi$ **17.** $n\pi, \dfrac{3\pi}{2} + 2n\pi$

19. $\dfrac{\pi}{3} + n\pi, \dfrac{2\pi}{3} + n\pi$ **21.** $\dfrac{\pi}{8} + \dfrac{n\pi}{2}, \dfrac{3\pi}{8} + \dfrac{n\pi}{2}$

23. $\dfrac{n\pi}{3}, \dfrac{\pi}{4} + n\pi$ **25.** $0, \dfrac{\pi}{2}, \pi, \dfrac{3\pi}{2}$

27. $0, \pi, \dfrac{\pi}{6}, \dfrac{5\pi}{6}, \dfrac{7\pi}{6}, \dfrac{11\pi}{6}$ **29.** $\dfrac{\pi}{3}, \dfrac{5\pi}{3}, \pi$

31. No hay solución **33.** $\pi, \dfrac{\pi}{3}, \dfrac{5\pi}{3}$

35. $\dfrac{\pi}{6}, \dfrac{5\pi}{6}, \dfrac{7\pi}{6}, \dfrac{11\pi}{6}$ **37.** $\dfrac{\pi}{2}$ **39.** $\dfrac{\pi}{6} + n\pi, \dfrac{5\pi}{6} + n\pi$

41. $\frac{\pi}{12} + \frac{n\pi}{3}$ **43.** $\frac{\pi}{2} + 4n\pi, \frac{7\pi}{2} + 4n\pi$ **45.** $3 + 4n$

47. $-2 + 6n, 2 + 6n$ **49.** 2.678, 5.820

51. 1.047, 5.236 **53.** 0.860, 3.426

55. 0, 2.678, 3.142, 5.820 **57.** 0.983, 1.768, 4.124, 4.910

59. 0.3398, 0.8481, 2.2935, 2.8018

61. 1.9357, 2.7767, 5.0773, 5.9183

63. $\arctan(-4) + \pi, \arctan(-4) + 2\pi, \arctan 3, \arctan 3 + \pi$

65. $\frac{\pi}{4}, \frac{5\pi}{4}, \arctan 5, \arctan 5 + \pi$ **67.** $\frac{\pi}{3}, \frac{5\pi}{3}$

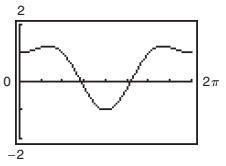
69. $\arctan\left(\frac{1}{3}\right), \arctan\left(\frac{1}{3}\right) + \pi, \arctan\left(-\frac{1}{3}\right) + \pi, \arctan\left(-\frac{1}{3}\right) + 2\pi$

71. $\arccos\left(\frac{1}{4}\right), 2\pi - \arccos\left(\frac{1}{4}\right)$

73. $\frac{\pi}{2}, \operatorname{arcsen}\left(-\frac{1}{4}\right) + 2\pi, \operatorname{arcsen}\left(\frac{1}{4}\right) + \pi$

75. $-1.154, 0.534$ **77.** 1.110

79. (a)



(b) $\frac{\pi}{3} \approx 1.0472$

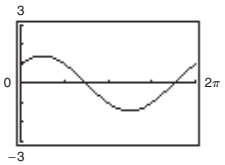
$\frac{5\pi}{3} \approx 5.2360$

0

$\pi \approx 3.1416$

Máximo: (1.0472, 1.25)
Máximo: (5.2360, 1.25)
Mínimo: (0, 1)
Mínimo: (3.1416, −1)

81. (a)

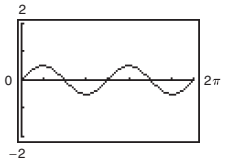


(b) $\frac{\pi}{4} \approx 0.7854$

$\frac{5\pi}{4} \approx 3.9270$

Máximo: (0.7854, 1.4142)
Mínimo: (3.9270, −1.4142)

83. (a)



(b) $\frac{\pi}{4} \approx 0.7854$

$\frac{5\pi}{4} \approx 3.9270$

$\frac{3\pi}{4} \approx 2.3562$

$\frac{7\pi}{4} \approx 5.4978$

Máximo: (0.7854, 0.5)
Máximo: (3.9270, 0.5)
Mínimo: (2.3562, −0.5)
Mínimo: (5.4978, −0.5)

85. 1

87. (a) Todos los números reales x excepto $x = 0$

(b) Simetría con eje y; asíntota horizontal: $y = 1$

(c) Oscila (d) Número infinito de soluciones; $\frac{2}{2n\pi + \pi}$

(e) Sí, 0.6366

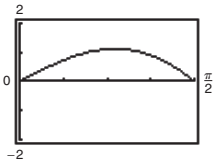
89. 0.04 sec, 0.43 sec, 0.83 sec

91. Febrero, marzo y abril **93.** 36.9°, 53.1°

95. (a) $t = 8$ sec y $t = 24$ sec

(b) 5 veces: $t = 16, 48, 80, 112, 144$ sec

97. (a)



(b) $0.6 < x < 1.1$

$A \approx 1.12$

99. Verdadero. La primera ecuación tiene un periodo menor que la segunda, de modo que tendrá más soluciones en el intervalo $[0, 2\pi)$.

101. La ecuación se convertiría en $\cos^2 x = 2$; éste no es el método correcto que se debe usar al resolver ecuaciones.

103. Las respuestas variarán.

Sección 5.4 *(página 402)*

1. $\operatorname{sen} u \cos v - \cos u \operatorname{sen} v$ **3.** $\frac{\tan u + \tan v}{1 - \tan u \tan v}$

5. $\cos u \cos v + \operatorname{sen} u \operatorname{sen} v$

7. (a) $\frac{\sqrt{2} - \sqrt{6}}{4}$ (b) $\frac{\sqrt{2} + 1}{2}$

9. (a) $\frac{1}{2}$ (b) $\frac{-\sqrt{3} - 1}{2}$

11. (a) $\frac{\sqrt{6} + \sqrt{2}}{4}$ (b) $\frac{\sqrt{2} - \sqrt{3}}{2}$

13. $\operatorname{sen}\frac{11\pi}{12} = \frac{\sqrt{2}}{4}\left(\sqrt{3} - 1\right)$

$\cos\frac{11\pi}{12} = -\frac{\sqrt{2}}{4}\left(\sqrt{3} + 1\right)$

$\tan\frac{11\pi}{12} = -2 + \sqrt{3}$

15. $\operatorname{sen}\frac{17\pi}{12} = -\frac{\sqrt{2}}{4}\left(\sqrt{3} + 1\right)$

$\cos\frac{17\pi}{12} = \frac{\sqrt{2}}{4}\left(1 - \sqrt{3}\right)$

$\tan\frac{17\pi}{12} = 2 + \sqrt{3}$

17. $\operatorname{sen} 105° = \frac{\sqrt{2}}{4}\left(\sqrt{3} + 1\right)$

$\cos 105° = \frac{\sqrt{2}}{4}\left(1 - \sqrt{3}\right)$

$\tan 105° = -2 - \sqrt{3}$

19. $\operatorname{sen} 195° = \frac{\sqrt{2}}{4}\left(1 - \sqrt{3}\right)$

$\cos 195° = -\frac{\sqrt{2}}{4}\left(\sqrt{3} + 1\right)$

$\tan 195° = 2 - \sqrt{3}$

21. $\operatorname{sen}\frac{13\pi}{12} = \frac{\sqrt{2}}{4}\left(1 - \sqrt{3}\right)$

$\cos\frac{13\pi}{12} = -\frac{\sqrt{2}}{4}\left(1 + \sqrt{3}\right)$

$\tan\frac{13\pi}{12} = 2 - \sqrt{3}$

23. $\operatorname{sen}\left(-\frac{13\pi}{12}\right) = \frac{\sqrt{2}}{4}\left(\sqrt{3} - 1\right)$

$\cos\left(-\frac{13\pi}{12}\right) = -\frac{\sqrt{2}}{4}\left(\sqrt{3} + 1\right)$

$\tan\left(-\frac{13\pi}{12}\right) = -2 + \sqrt{3}$

25. $\operatorname{sen} 285° = -\frac{\sqrt{2}}{4}\left(\sqrt{3} + 1\right)$

$\cos 285° = \frac{\sqrt{2}}{4}\left(\sqrt{3} - 1\right)$

$\tan 285° = -\left(2 + \sqrt{3}\right)$

27. $\operatorname{sen}(-165°) = -\frac{\sqrt{2}}{4}\left(\sqrt{3} - 1\right)$

$\cos(-165°) = -\frac{\sqrt{2}}{4}\left(1 + \sqrt{3}\right)$

$\tan(-165°) = 2 - \sqrt{3}$

29. sen 1.8 **31.** sen 75° **33.** tan 15° **35.** tan $3x$

37. $\frac{\sqrt{3}}{2}$ **39.** $\frac{\sqrt{3}}{2}$ **41.** $-\sqrt{3}$ **43.** $-\frac{63}{65}$ **45.** $\frac{16}{65}$

47. $-\frac{63}{16}$ **49.** $\frac{65}{56}$ **51.** $\frac{3}{5}$ **53.** $-\frac{44}{117}$ **55.** $-\frac{125}{44}$

57. 1 **59.** 0 **61–69.** Pruebas **71.** $-\operatorname{sen} x$

73. $-\cos\theta$ **75.** $\frac{\pi}{6}, \frac{5\pi}{6}$ **77.** $\frac{2\pi}{3}, \frac{4\pi}{3}$ **79.** $\frac{\pi}{3}, \frac{5\pi}{3}$

81. $\frac{5\pi}{4}, \frac{7\pi}{4}$ **83.** $0, \frac{\pi}{2}, \frac{3\pi}{2}$ **85.** $\frac{\pi}{4}, \frac{7\pi}{4}$ **87.** $\frac{\pi}{2}, \pi, \frac{3\pi}{2}$

89. (a) $y = \frac{5}{12}\operatorname{sen}(2t + 0.6435)$ (b) $\frac{5}{12}$ ft (c) $\frac{1}{\pi}$ ciclo/s

91. Verdadero. $\operatorname{sen}(u \pm v) = \operatorname{sen} u \cos v \pm \cos u \operatorname{sen} v$

93. Falso. $\tan\left(x - \frac{\pi}{4}\right) = \frac{\tan x - 1}{1 + \tan x}$

95–97. Las respuestas variarán.

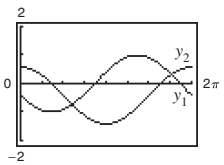
99. (a) $\sqrt{2}\operatorname{sen}\left(\theta + \frac{\pi}{4}\right)$ (b) $\sqrt{2}\cos\left(\theta - \frac{\pi}{4}\right)$

101. (a) $13\operatorname{sen}(3\theta + 0.3948)$ (b) $13\cos(3\theta - 1.1760)$

103. $\sqrt{2}\operatorname{sen}\theta + \sqrt{2}\cos\theta$ **105.** Las respuestas variarán.

107. 15°

109.



No, $y_1 \neq y_2$ porque sus gráficas son diferentes.

111. (a) y (b) Pruebas

Sección 5.5 *(página 413)*

1. $2\operatorname{sen} u \cos u$

3. $\cos^2 u - \operatorname{sen}^2 u = 2\cos^2 u - 1 = 1 - 2\operatorname{sen}^2 u$

5. $\pm\sqrt{\frac{1 - \cos u}{2}}$ **7.** $\frac{1}{2}[\cos(u - v) + \cos(u + v)]$

9. $2\operatorname{sen}\left(\frac{u + v}{2}\right)\cos\left(\frac{u - v}{2}\right)$ **11.** $\frac{15}{17}$ **13.** $\frac{8}{15}$

15. $\frac{17}{8}$ **17.** $\frac{240}{289}$ **19.** $0, \frac{\pi}{3}, \pi, \frac{5\pi}{3}$

21. $\frac{\pi}{12}, \frac{5\pi}{12}, \frac{13\pi}{12}, \frac{17\pi}{12}$ **23.** $0, \frac{2\pi}{3}, \frac{4\pi}{3}$ **25.** $0, \frac{\pi}{2}, \pi, \frac{3\pi}{2}$

27. $\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{6}, \frac{5\pi}{6}, \frac{7\pi}{6}, \frac{3\pi}{2}, \frac{11\pi}{6}$ **29.** $3\operatorname{sen} 2x$ **31.** $3\cos 2x$

33. $4\cos 2x$ **35.** $\cos 2x$

37. $\operatorname{sen} 2u = -\frac{24}{25}, \cos 2u = \frac{7}{25}, \tan 2u = -\frac{24}{7}$

39. $\operatorname{sen} 2u = \frac{15}{17}, \cos 2u = \frac{8}{17}, \tan 2u = \frac{15}{8}$

41. $\operatorname{sen} 2u = -\frac{\sqrt{3}}{2}, \cos 2u = -\frac{1}{2}, \tan 2u = \sqrt{3}$

43. $\frac{1}{8}(3 + 4\cos 2x + \cos 4x)$ **45.** $\frac{1}{8}(3 + 4\cos 4x + \cos 8x)$

47. $\frac{(3 - 4\cos 4x + \cos 8x)}{(3 + 4\cos 4x + \cos 8x)}$ **49.** $\frac{1}{8}(1 - \cos 8x)$

51. $\frac{1}{16}(1 - \cos 2x - \cos 4x + \cos 2x\cos 4x)$

53. $\frac{4\sqrt{17}}{17}$ **55.** $\frac{1}{4}$ **57.** $\sqrt{17}$

59. $\operatorname{sen} 75° = \frac{1}{2}\sqrt{2 + \sqrt{3}}$

$\cos 75° = \frac{1}{2}\sqrt{2 - \sqrt{3}}$

$\tan 75° = 2 + \sqrt{3}$

61. $\operatorname{sen} 112°30' = \frac{1}{2}\sqrt{2 + \sqrt{2}}$

$\cos 112°30' = -\frac{1}{2}\sqrt{2 - \sqrt{2}}$

$\tan 112°30' = -1 - \sqrt{2}$

63. $\operatorname{sen}\frac{\pi}{8} = \frac{1}{2}\sqrt{2 - \sqrt{2}}$

$\cos\frac{\pi}{8} = \frac{1}{2}\sqrt{2 + \sqrt{2}}$

$\tan\frac{\pi}{8} = \sqrt{2} - 1$

65. $\operatorname{sen}\frac{3\pi}{8} = \frac{1}{2}\sqrt{2 + \sqrt{2}}$

$\cos\frac{3\pi}{8} = \frac{1}{2}\sqrt{2 - \sqrt{2}}$

$\tan\frac{3\pi}{8} = \sqrt{2} + 1$

67. (a) Primer cuadrante

(b) $\operatorname{sen}\frac{u}{2} = \frac{3}{5}, \cos\frac{u}{2} = \frac{4}{5}, \tan\frac{u}{2} = \frac{3}{4}$

69. (a) Segundo cuadrante

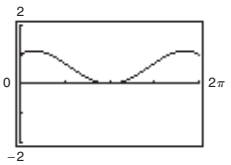
(b) $\operatorname{sen}\frac{u}{2} = \frac{\sqrt{26}}{26}, \cos\frac{u}{2} = -\frac{5\sqrt{26}}{26}, \tan\frac{u}{2} = -\frac{1}{5}$

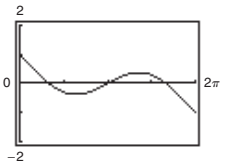
71. (a) Segundo cuadrante

(b) $\operatorname{sen}\frac{u}{2} = \frac{3\sqrt{10}}{10}, \cos\frac{u}{2} = -\frac{\sqrt{10}}{10}, \tan\frac{u}{2} = -3$

73. $|\operatorname{sen} 3x|$ **75.** $-|\tan 4x|$

77. π **79.** $\frac{\pi}{3}, \pi, \frac{5\pi}{3}$





81. $\frac{1}{2}\left(\operatorname{sen}\frac{\pi}{2} + \operatorname{sen}\frac{\pi}{6}\right)$ **83.** $5(\cos 60° + \cos 90°)$

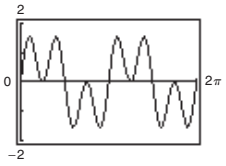
85. $\frac{1}{2}(\cos 2\theta - \cos 8\theta)$ **87.** $\frac{7}{2}(\operatorname{sen}(-2\beta) - \operatorname{sen}(-8\beta))$

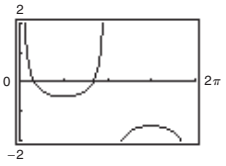
89. $\frac{1}{2}(\cos 2y - \cos 2x)$ **91.** $2\operatorname{sen} 2\theta\cos\theta$

93. $2\cos 4x\cos 2x$ **95.** $2\cos\alpha\operatorname{sen}\beta$

97. $-2\operatorname{sen}\theta\operatorname{sen}\frac{\pi}{2} = -2\operatorname{sen}\theta$ **99.** $\frac{\sqrt{6}}{2}$ **101.** $-\sqrt{2}$

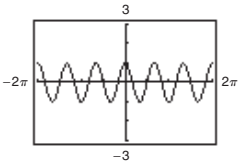
103. $0, \frac{\pi}{4}, \frac{\pi}{2}, \frac{3\pi}{4}, \pi, \frac{5\pi}{4}, \frac{3\pi}{2}, \frac{7\pi}{4}$ **105.** $\frac{\pi}{6}, \frac{5\pi}{6}$



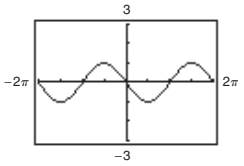


107. $\frac{120}{169}$ **109.** $\frac{3\sqrt{10}}{10}$ **111–123.** Las respuestas variarán.

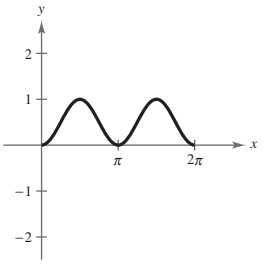
125.



127.



129.



131. $2x\sqrt{1-x^2}$ **133.** $1 - 2x^2$ **135.** 23.85°

137. (a) π (b) 0.4482 (c) 760 mi/h; 3420 mi/h

(d) $\theta = 2\,\text{sen}^{-1}\left(\frac{1}{M}\right)$

139. Falso. Para $u < 0$,

$$\begin{aligned}\text{sen } 2u &= -\text{sen}(-2u)\\ &= -2\,\text{sen}(-u)\cos(-u)\\ &= -2(-\text{sen } u)\cos u\\ &= 2\,\text{sen } u \cos u.\end{aligned}$$

Ejercicios de repaso *(página 418)*

1. $\tan x$ **3.** $\cos x$ **5.** $|\csc x|$

7. $\tan x = \frac{5}{12}$, $\csc x = \frac{13}{5}$, $\sec x = \frac{13}{12}$, $\cot x = \frac{12}{5}$

9. $\cos x = \frac{\sqrt{2}}{2}$, $\tan x = -1$, $\csc x = -\sqrt{2}$, $\sec x = \sqrt{2}$, $\cot x = -1$

11. $\text{sen}^2 x$ **13.** 1 **15.** $\cot\theta$ **17.** $\csc\theta$ **19.** $\cot^2 x$

21. $\sec x + 2\,\text{sen } x$ **23.** $-2\tan^2\theta$ **25.** $5\cos\theta$

27–35. Las respuestas variarán.

37. $\frac{\pi}{3} + 2n\pi, \frac{2\pi}{3} + 2n\pi$ **39.** $\frac{\pi}{6} + n\pi$

41. $\frac{\pi}{3} + n\pi, \frac{2\pi}{3} + n\pi$ **43.** $0, \frac{2\pi}{3}, \frac{4\pi}{3}$ **45.** $0, \frac{\pi}{2}, \pi$

47. $\frac{\pi}{8}, \frac{3\pi}{8}, \frac{9\pi}{8}, \frac{11\pi}{8}$ **49.** $\frac{\pi}{2}$

51. $0, \frac{\pi}{8}, \frac{3\pi}{8}, \frac{5\pi}{8}, \frac{7\pi}{8}, \frac{9\pi}{8}, \frac{11\pi}{8}, \frac{13\pi}{8}, \frac{15\pi}{8}$

53. $0, \pi$

55. $\arctan(-3) + \pi, \arctan(-3) + 2\pi, \arctan 2, \arctan 2 + \pi$

57. $\text{sen } 285° = -\frac{\sqrt{2}}{4}\left(\sqrt{3}+1\right)$

$\cos 285° = \frac{\sqrt{2}}{4}\left(\sqrt{3}-1\right)$

$\tan 285° = -2 - \sqrt{3}$

59. $\text{sen}\frac{25\pi}{12} = \frac{\sqrt{2}}{4}\left(\sqrt{3}-1\right)$

$\cos\frac{25\pi}{12} = \frac{\sqrt{2}}{4}\left(\sqrt{3}+1\right)$

$\tan\frac{25\pi}{12} = 2 - \sqrt{3}$

61. $\text{sen } 15°$ **63.** $\tan 35°$ **65.** $-\frac{24}{25}$ **67.** -1

69. $-\frac{7}{25}$ **71–75.** Las respuestas variarán.

77. $\frac{\pi}{4}, \frac{7\pi}{4}$ **79.** $\frac{\pi}{6}, \frac{11\pi}{6}$

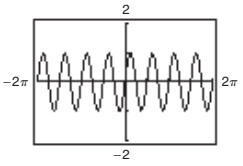
81. $\text{sen } 2u = \frac{24}{25}$

$\cos 2u = -\frac{7}{25}$

$\tan 2u = -\frac{24}{7}$

83. $\text{sen } 2u = -\frac{4\sqrt{2}}{9}, \cos 2u = -\frac{7}{9}, \tan 2u = \frac{4\sqrt{2}}{7}$

85.



87. $\frac{1-\cos 4x}{1+\cos 4x}$ **89.** $\frac{3 - 4\cos 2x + \cos 4x}{4(1+\cos 2x)}$

91. $\text{sen}(-75°) = -\frac{1}{2}\sqrt{2+\sqrt{3}}$

$\cos(-75°) = \frac{1}{2}\sqrt{2-\sqrt{3}}$

$\tan(-75°) = -2 - \sqrt{3}$

93. $\text{sen}\frac{19\pi}{12} = -\frac{1}{2}\sqrt{2+\sqrt{3}}$

$\cos\frac{19\pi}{12} = \frac{1}{2}\sqrt{2-\sqrt{3}}$

$\tan\frac{19\pi}{12} = -2 - \sqrt{3}$

95. (a) Primer cuadrante

(b) $\text{sen}\frac{u}{2} = \frac{\sqrt{2}}{10}, \cos\frac{u}{2} = \frac{7\sqrt{2}}{10}, \tan\frac{u}{2} = \frac{1}{7}$

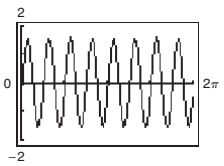
97. (a) Primer cuadrante

(b) $\text{sen}\frac{u}{2} = \frac{3\sqrt{14}}{14}, \cos\frac{u}{2} = \frac{\sqrt{70}}{14}, \tan\frac{u}{2} = \frac{3\sqrt{5}}{5}$

99. $-|\cos 5x|$ **101.** $\frac{1}{2}\left(\text{sen}\frac{\pi}{3} - \text{sen } 0\right) = \frac{1}{2}\text{sen}\frac{\pi}{3}$

103. $\frac{1}{2}[\text{sen } 10\theta - \text{sen}(-2\theta)]$ **105.** $2\cos 6\theta\,\text{sen}(-2\theta)$

107. $-2\,\text{sen } x\,\text{sen}\frac{\pi}{6}$ **109.** $\theta = 15°$ o $\frac{\pi}{12}$

111. 

113. $\frac{1}{2}\sqrt{10}$ ft

115. Falso. Si $(\pi/2) < \theta < \pi$, entonces $\cos(\theta/2) > 0$. El signo de $\cos(\theta/2)$ depende del cuadrante en el que se encuentre $\theta/2$.

117. Verdadero.
$$\begin{aligned} 4\,\text{sen}(-x)\cos(-x) &= 4(-\text{sen}\,x)\cos x \\ &= -4\,\text{sen}\,x\cos x \\ &= -2(2\,\text{sen}\,x\cos x) \\ &= -2\,\text{sen}\,2x \end{aligned}$$

119. Identidades recíprocas:

$$\text{sen}\,\theta = \frac{1}{\csc\theta},\ \cos\theta = \frac{1}{\sec\theta},\ \tan\theta = \frac{1}{\cot\theta},$$

$$\csc\theta = \frac{1}{\text{sen}\,\theta},\ \sec\theta = \frac{1}{\cos\theta},\ \cot\theta = \frac{1}{\tan\theta}$$

Identidades cociente: $\tan\theta = \dfrac{\text{sen}\,\theta}{\cos\theta}$, $\cot\theta = \dfrac{\cos\theta}{\text{sen}\,\theta}$

Identidades pitagóricas: $\text{sen}^2\,\theta + \cos^2\theta = 1$, $1 + \tan^2\theta = \sec^2\theta$, $1 + \cot^2\theta = \csc^2\theta$

121. $-1 \le \text{sen}\,x \le 1$ para toda x **123.** $y_1 = y_2 + 1$

125. $-1.8431,\ 2.1758,\ 3.9903,\ 8.8935,\ 9.8820$

Examen del capítulo *(página 421)*

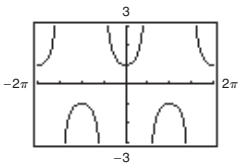
1. $\text{sen}\,\theta = -\dfrac{6\sqrt{61}}{61}$ $\quad \csc\theta = -\dfrac{\sqrt{61}}{6}$

$\cos\theta = -\dfrac{5\sqrt{61}}{61}$ $\quad \sec\theta = -\dfrac{\sqrt{61}}{5}$

$\tan\theta = \dfrac{6}{5}$ $\quad \cot\theta = \dfrac{5}{6}$

2. 1 **3.** 1 **4.** $\csc\theta\sec\theta$

5. $\theta = 0, \dfrac{\pi}{2} < \theta \le \pi, \dfrac{3\pi}{2} < \theta < 2\pi$

6. 

$y_1 = y_2$

7–12. Las respuestas variarán. **13.** $\frac{1}{8}(3 - 4\cos x + \cos 2x)$

14. $\tan 2\theta$ **15.** $2(\text{sen}\,5\theta + \text{sen}\,\theta)$

16. $-2\,\text{sen}\,2\theta\,\text{sen}\,\theta$ **17.** $0, \dfrac{3\pi}{4}, \pi, \dfrac{7\pi}{4}$

18. $\dfrac{\pi}{6}, \dfrac{\pi}{2}, \dfrac{5\pi}{6}, \dfrac{3\pi}{2}$ **19.** $\dfrac{\pi}{6}, \dfrac{5\pi}{6}, \dfrac{7\pi}{6}, \dfrac{11\pi}{6}$

20. $\dfrac{\pi}{6}, \dfrac{5\pi}{6}, \dfrac{3\pi}{2}$ **21.** $-2.596,\ 0,\ 2.596$ **22.** $\dfrac{\sqrt{2} - \sqrt{6}}{4}$

23. $\text{sen}\,2u = -\frac{20}{29}$, $\cos 2u = -\frac{21}{29}$, $\tan 2u = \frac{20}{21}$

24. Día 123 al día 223

25. $t =$ 0.26 min
0.58 min
0.89 min
1.20 min
1.52 min
1.83 min

Resolución de problemas *(página 425)*

1. (a) $\cos\theta = \pm\sqrt{1 - \text{sen}^2\,\theta}$

$$\tan\theta = \pm\frac{\text{sen}\,\theta}{\sqrt{1 - \text{sen}^2\,\theta}}$$

$$\cot\theta = \pm\frac{\sqrt{1 - \text{sen}^2\,\theta}}{\text{sen}\,\theta}$$

$$\sec\theta = \pm\frac{1}{\sqrt{1 - \text{sen}^2\,\theta}}$$

$$\csc\theta = \frac{1}{\text{sen}\,\theta}$$

(b) $\text{sen}\,\theta = \pm\sqrt{1 - \cos^2\theta}$

$$\tan\theta = \pm\frac{\sqrt{1 - \cos^2\theta}}{\cos\theta}$$

$$\csc\theta = \pm\frac{1}{\sqrt{1 - \cos^2\theta}}$$

$$\sec\theta = \frac{1}{\cos\theta}$$

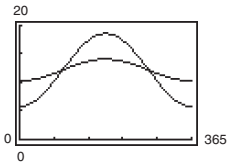
$$\cot\theta = \pm\frac{\cos\theta}{\sqrt{1 - \cos^2\theta}}$$

3. Las respuestas variarán. **5.** $u + v = w$

7. $\text{sen}\,\dfrac{\theta}{2} = \sqrt{\dfrac{1 - \cos\theta}{2}}$

$\cos\dfrac{\theta}{2} = \sqrt{\dfrac{1 + \cos\theta}{2}}$

$\tan\dfrac{\theta}{2} = \dfrac{\text{sen}\,\theta}{1 + \cos\theta}$

9. (a) 

(b) $t \approx 91$ (1 de abril), $t \approx 274$ (1 de octubre)

(c) Seward; las amplitudes: 6.4 a 1.9

(d) 365.2 veces/día

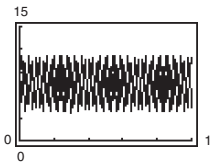
11. (a) $\dfrac{\pi}{6} \le x \le \dfrac{5\pi}{6}$ (b) $\dfrac{2\pi}{3} \le x \le \dfrac{4\pi}{3}$

(c) $\dfrac{\pi}{2} < x < \pi, \dfrac{3\pi}{2} < x < 2\pi$

(d) $0 \le x \le \dfrac{\pi}{4}, \dfrac{5\pi}{4} \le x \le 2\pi$

13. (a)
$$\begin{aligned} &\text{sen}(u + v + w) \\ &\quad = \text{sen}\,u\cos v\cos w - \text{sen}\,u\,\text{sen}\,v\,\text{sen}\,w \\ &\qquad + \cos u\,\text{sen}\,v\cos w + \cos u\cos v\,\text{sen}\,w \end{aligned}$$

(b)
$$\begin{aligned} &\tan(u + v + w) \\ &\quad = \frac{\tan u + \tan v + \tan w - \tan u\tan v\tan w}{1 - \tan u\tan v - \tan u\tan w - \tan v\tan w} \end{aligned}$$

15. (a) 

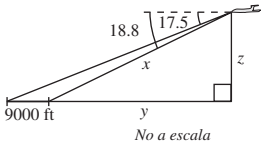
(b) 233.3 veces/s

CAPÍTULO 5

Capítulo 6

Sección 6.1 *(página 434)*

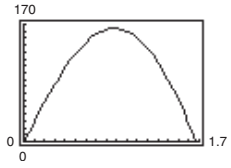
1. Oblicuo **3.** Ángulos; lado
5. $A = 30°, a \approx 14.14, c \approx 27.32$
7. $C = 120°, b \approx 4.75, c \approx 7.17$
9. $B = 60.9°, b \approx 19.32, c \approx 6.36$
11. $B = 42°4', a \approx 22.05, b \approx 14.88$
13. $C = 80°,\ a \approx 5.82,\ b \approx 9.20$
15. $C = 83°, a \approx 0.62, b \approx 0.51$
17. $B \approx 21.55°, C \approx 122.45°, c \approx 11.49$
19. $A \approx 10°11', C \approx 154°19', c \approx 11.03$
21. $B \approx 9.43°,\ C = 25.57°,\ c \approx 10.53$
23. $B \approx 18°13', C \approx 51°32', c \approx 40.06$
25. $B \approx 48.74°, C \approx 21.26°, c \approx 48.23$
27. No hay solución
29. Dos soluciones:
$B \approx 72.21°, C \approx 49.79°, c \approx 10.27$
$B \approx 107.79°, C \approx 14.21°, c \approx 3.30$
31. No hay solución **33.** $B = 45°,\ C = 90°,\ c \approx 1.41$
35. (a) $b \le 5,\ b = \dfrac{5}{\text{sen } 36°}$ (b) $5 < b < \dfrac{5}{\text{sen } 36°}$
(c) $b > \dfrac{5}{\text{sen } 36°}$
37. (a) $b \le 10.8, b = \dfrac{10.8}{\text{sen } 10°}$ (b) $10.8 < b < \dfrac{10.8}{\text{sen } 10°}$
(c) $b > \dfrac{10.8}{\text{sen } 10°}$
39. 10.4 **41.** 1675.2 **43.** 3204.5 **45.** 24.1 m
47. 16.1° **49.** 77 m
51. (a)



No a escala

(b) 22.6 mi
(c) 21.4 mi
(d) 7.3 mi

53. 3.2 mi **55.** 5.86 mi
57. Verdadero. Si un ángulo de un triángulo es obtuso (mayor que 90°), entonces los otros dos ángulos deben ser agudos y, por tanto, menores a 90°. El triángulo es oblicuo.
59. Falso. Si se conocen sólo tres ángulos, el triángulo no puede resolverse.
61. (a) $A = 20\left(15 \text{ sen } \dfrac{3\theta}{2} - 4 \text{ sen } \dfrac{\theta}{2} - 6 \text{ sen } \theta\right)$
(b)



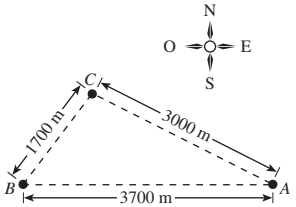
(c) Dominio: $0 \le \theta \le 1.6690$
El dominio aumentaría en longitud y el área tendría mayor valor máximo.

Sección 6.2 *(página 441)*

1. Cosenos **3.** $b^2 = a^2 + c^2 - 2ac \cos B$
5. $A \approx 38.62°, B \approx 48.51°, C \approx 92.87°$
7. $B \approx 23.79°, C \approx 126.21°, a \approx 18.59$
9. $A \approx 30.11°,\ B \approx 43.16°,\ C \approx 106.73°$
11. $A \approx 92.94°, B \approx 43.53°, C \approx 43.53°$
13. $B \approx 27.46°, C \approx 32.54°,\ a \approx 11.27$
15. $A \approx 141°45', C \approx 27°40', b \approx 11.87$
17. $A = 27°10',\ C = 27°10',\ b \approx 65.84$
19. $A \approx 33.80°, B \approx 103.20°, c \approx 0.54$

	a	b	c	d	θ	ϕ
21.	5	8	12.07	5.69	45°	135°
23.	10	14	20	13.86	68.2°	111.8°
25.	15	16.96	25	20	77.2°	102.8°

27. Ley de los cosenos; $A \approx 102.44°,\ C \approx 37.56°,\ b \approx 5.26$
29. Ley de los senos: no hay solución
31. Ley de los senos; $C = 103°,\ a \approx 0.82,\ b \approx 0.71$
33. 43.52 **35.** 10.4 **37.** 52.11 **39.** 0.18
41. N 37.1° E, S 63.1° E



43. 373.3 m **45.** 72.3° **47.** 43.3 mi
49. (a) N 58.4° O (b) S 81.5° O **51.** 63.7 ft
53. 24.2 mi **55.** $\overline{PQ} \approx 9.4, \overline{QS} = 5, \overline{RS} \approx 12.8$
57.

d (pulgadas)	9	10	12	13	14
θ (grados)	60.9°	69.5°	88.0°	98.2°	109.6°
s (pulgadas)	20.88	20.28	18.99	18.28	17.48

d (pulgadas)	15	16
θ (grados)	122.9°	139.8°
s (pulgadas)	16.55	15.37

59. 46 837.5 ft^2 **61.** \$83 336.37
63. Falso. Para que s sea el promedio de las longitudes de los tres lados del triángulo, s sería igual a $(a + b + c)/3$.
65. No. Las tres longitudes no forman un triángulo.
67. (a) y (b) Demostraciones **69.** 405.2 ft
71. Uno de dos; como A es obtuso, hay sólo una solución para B o C.
73. Se puede usar la ley de cosenos para resolver el caso de solución única de LLA. No hay método que pueda resolver el caso sin solución de LLA.
75. Prueba

Sección 6.3 *(página 454)*

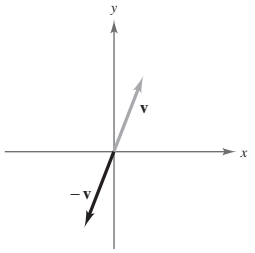
1. Segmento de recta dirigido **3.** Magnitud
5. Magnitud; dirección **7.** Vector unitario **9.** Resultante
11. $\|\mathbf{u}\| = \|\mathbf{v}\| = \sqrt{17}$, pendiente$_{\mathbf{u}}$ = pendiente$_{\mathbf{v}} = \frac{1}{4}$
u y **v** tienen la misma magnitud y dirección, por tanto, son iguales.

13. $\mathbf{v} = \langle 1, 3\rangle$, $\|\mathbf{v}\| = \sqrt{10}$ **15.** $\mathbf{v} = \langle 4, 6\rangle$; $\|\mathbf{v}\| = 2\sqrt{13}$

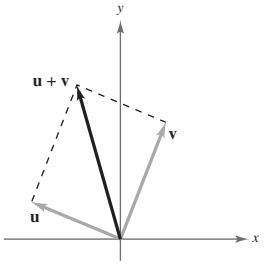
17. $\mathbf{v} = \langle 0, 5\rangle$; $\|\mathbf{v}\| = 5$ **19.** $\mathbf{v} = \langle 8, 6\rangle$; $\|\mathbf{v}\| = 10$

21. $\mathbf{v} = \langle -9, -12\rangle$; $\|\mathbf{v}\| = 15$ **23.** $\mathbf{v} = \langle 16, 7\rangle$; $\|\mathbf{v}\| = \sqrt{305}$

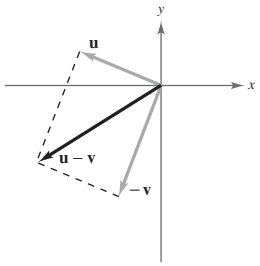
25.



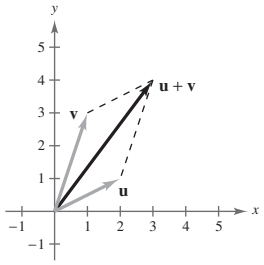
27.



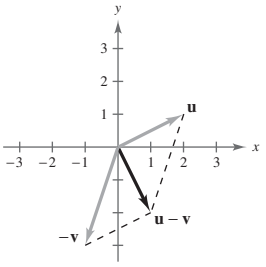
29.



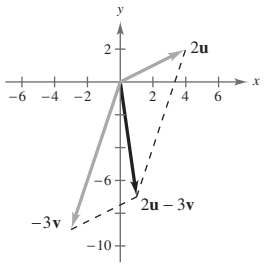
31. (a) $\langle 3, 4\rangle$



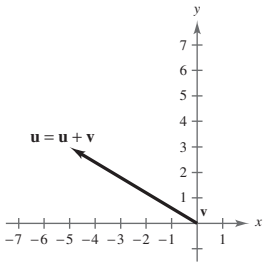
(b) $\langle 1, -2\rangle$



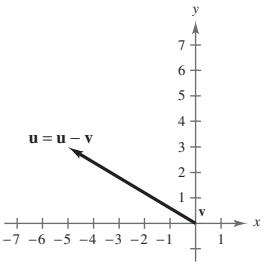
(c) $\langle 1, -7\rangle$



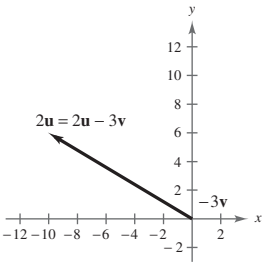
33. (a) $\langle -5, 3\rangle$



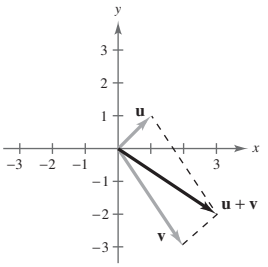
(b) $\langle -5, 3\rangle$



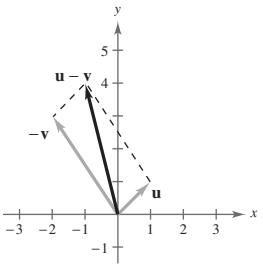
(c) $\langle -10, 6\rangle$



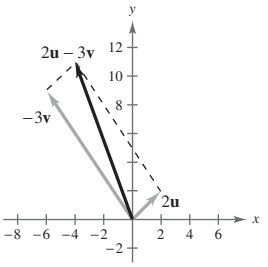
35. (a) $3\mathbf{i} - 2\mathbf{j}$



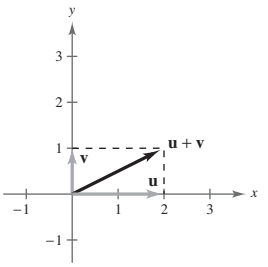
(b) $-\mathbf{i} + 4\mathbf{j}$



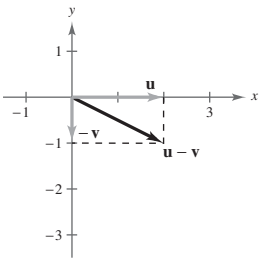
(c) $-4\mathbf{i} + 11\mathbf{j}$



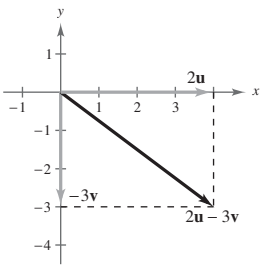
37. (a) $2\mathbf{i} + \mathbf{j}$



(b) $2\mathbf{i} - \mathbf{j}$



(c) $4\mathbf{i} - 3\mathbf{j}$

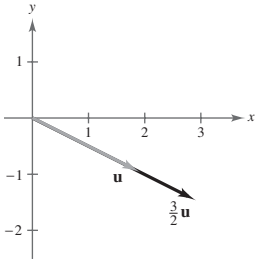


39. $\langle 1, 0\rangle$ **41.** $\left\langle -\frac{\sqrt{2}}{2}, \frac{\sqrt{2}}{2}\right\rangle$ **43.** $\frac{\sqrt{2}}{2}\mathbf{i} + \frac{\sqrt{2}}{2}\mathbf{j}$

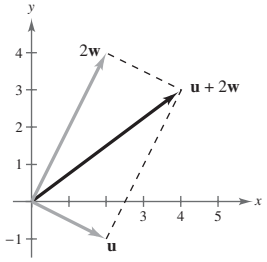
45. $\mathbf{j}$ **47.** $\frac{\sqrt{5}}{5}\mathbf{i} - \frac{2\sqrt{5}}{5}\mathbf{j}$ **49.** $\mathbf{v} = \langle -6, 8\rangle$

51. $\mathbf{v} = \left\langle \frac{18\sqrt{29}}{29}, \frac{45\sqrt{29}}{29} \right\rangle$ **53.** $5\mathbf{i} - 3\mathbf{j}$ **55.** $6\mathbf{i} - 3\mathbf{j}$

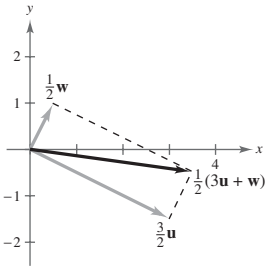
57. $\mathbf{v} = \left\langle 3, -\frac{3}{2} \right\rangle$



59. $\mathbf{v} = \langle 4, 3 \rangle$

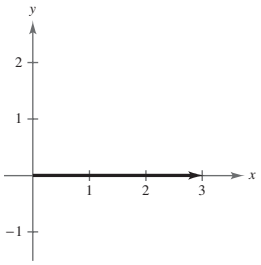


61. $\mathbf{v} = \left\langle \frac{7}{2}, -\frac{1}{2} \right\rangle$

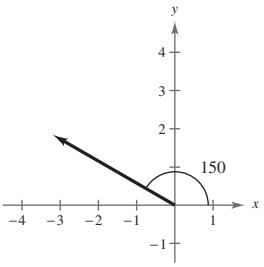


63. $\|\mathbf{v}\| = 6\sqrt{2}$; $\theta = 315°$ **65.** $\|\mathbf{v}\| = 3$; $\theta = 60°$

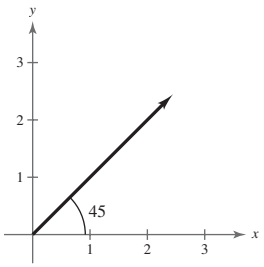
67. $\mathbf{v} = \langle 3, 0 \rangle$



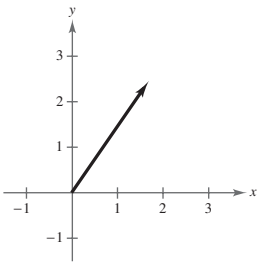
69. $\mathbf{v} = \left\langle -\frac{7\sqrt{3}}{4}, \frac{7}{4} \right\rangle$



71. $\mathbf{v} = \langle \sqrt{6}, \sqrt{6} \rangle$



73. $\mathbf{v} = \left\langle \frac{9}{5}, \frac{12}{5} \right\rangle$



75. $\langle 5, 5 \rangle$ **77.** $\left\langle 10\sqrt{2} - 50, 10\sqrt{2} \right\rangle$

79. 90° **81.** 62.7°

83. Vertical ≈ 125.4 ft/s, horizontal ≈ 1193.4 ft/s

85. 12.8°; 398.32 N **87.** 71.3°; 228.5 lb **89.** 17.5 lb

91. $T_{AC} \approx 1758.8$ lb; $T_{BC} \approx 1305.4$ lb

93. 3154.4 lb **95.** 20.8 lb **97.** 19.5°

99. 1928.4 ft-lb **101.** N 21.4° E; 138.7 km/h

103. Verdadero. Las magnitudes son iguales y las direcciones, opuestas.

105. Verdadero. $\mathbf{a} - \mathbf{b} = \mathbf{c}$ y $\mathbf{u} = -\mathbf{b}$

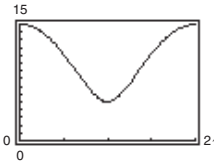
107. Verdadero. $\mathbf{a} = -\mathbf{d}$, $\mathbf{w} = -\mathbf{d}$

109. Falso. $\mathbf{u} - \mathbf{v} = -(\mathbf{b} + \mathbf{t})$

111. Prueba

113. (a) $5\sqrt{5 + 4\cos\theta}$

(b)



(c) Rango: $[5, 15]$
El máximo es 15 cuando $\theta = 0$.
El mínimo es 5 cuando $\theta = \pi$.
(d) Las magnitudes de $\mathbf{F}_1$ y $\mathbf{F}_2$ no son iguales.

115. $\langle 1, 3 \rangle$ o $\langle -1, -3 \rangle$ **117.** Las respuestas variarán.

119. (a) Vector. La velocidad tiene magnitud y dirección.
(b) Escalar. El precio tiene sólo magnitud.
(c) Escalar. La temperatura tiene sólo magnitud.
(d) Vector. El peso tiene magnitud y dirección.

Sección 6.4 *(página 465)*

1. Producto punto **3.** $\frac{\mathbf{u} \cdot \mathbf{v}}{\|\mathbf{u}\| \|\mathbf{v}\|}$ **5.** $\left(\frac{\mathbf{u} \cdot \mathbf{v}}{\|\mathbf{v}\|^2} \right)\mathbf{v}$

7. −19 **9.** −11 **11.** 6 **13.** −12 **15.** 18; escalar

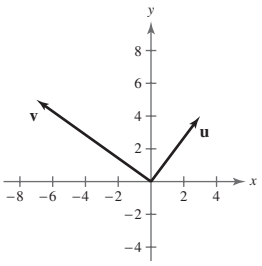
17. $\langle 24, -12 \rangle$; vector **19.** $\langle -126, -126 \rangle$; vector

21. $\sqrt{10} - 1$; escalar **23.** −12; escalar

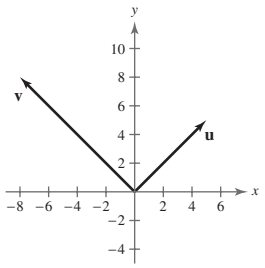
25. 17 **27.** $5\sqrt{41}$ **29.** 6 **31.** 90° **33.** 143.13°

35. 60.26° **37.** 90° **39.** $\frac{5\pi}{12}$

41.



43.



Unos 91.33° 90°

45. 26.57°, 63.43°, 90° **47.** 41.63°, 53.13°, 85.24°

49. −20 **51.** −229.1 **53.** Paralelo **55.** Ninguno

57. Ortogonal **59.** $\frac{1}{37}\langle 84, 14 \rangle$, $\frac{1}{37}\langle -10, 60 \rangle$

61. $\frac{45}{229}\langle 2, 15 \rangle$, $\frac{6}{229}\langle -15, 2 \rangle$ **63.** $\langle 3, 2 \rangle$ **65.** $\langle 0, 0 \rangle$

67. $\langle -5, 3 \rangle$, $\langle 5, -3 \rangle$ **69.** $\frac{2}{3}\mathbf{i} + \frac{1}{2}\mathbf{j}$, $-\frac{2}{3}\mathbf{i} - \frac{1}{2}\mathbf{j}$ **71.** 32

73. (a) \$892 901.50
Este valor da el ingreso total que puede ganarse al vender todos los teléfonos celulares.
(b) $1.05\mathbf{v}$

75. (a) Fuerza = 30 000 sen d
(b)

d	0°	1°	2°	3°	4°	5°
Fuerza	0	523.6	1047.0	1570.1	2092.7	2614.7

d	6°	7°	8°	9°	10°
Fuerza	3135.9	3656.1	4175.2	4693.0	5209.4

(c) 29 885.8 lb

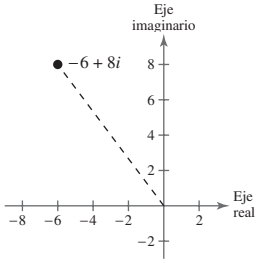
77. 735 N-m **79.** 779.4 ft-lb **81.** 21 650.64 ft-lb

83. Las respuestas variarán. **85.** Las respuestas variarán.
87. Falso. El trabajo está representado por un escalar.
89. Prueba
91. (a) **u** y **v** son paralelos. (b) **u** ay **v** son ortogonales
93. Demostración

Sección 6.5 *(página 476)*

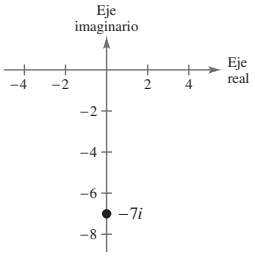
1. Valor absoluto **3.** De DeMoivre

5.



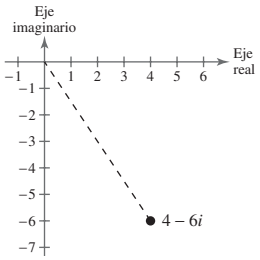
10

7.



7

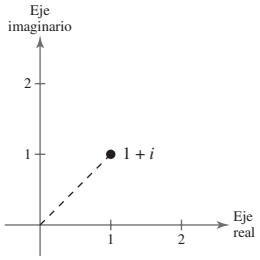
9.



$2\sqrt{13}$

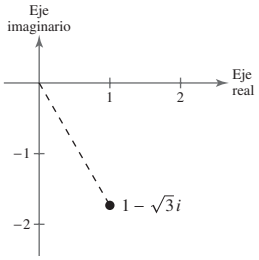
11. $3\left(\cos\dfrac{\pi}{2} + i\,\text{sen}\,\dfrac{\pi}{2}\right)$ **13.** $3\sqrt{2}\left(\cos\dfrac{5\pi}{4} + i\,\text{sen}\,\dfrac{5\pi}{4}\right)$

15.



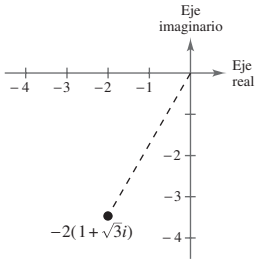
$\sqrt{2}\left(\cos\dfrac{\pi}{4} + i\,\text{sen}\,\dfrac{\pi}{4}\right)$

17.



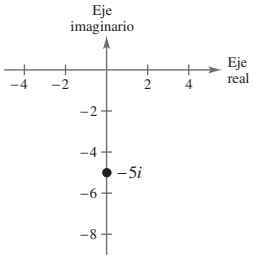
$2\left(\cos\dfrac{5\pi}{3} + i\,\text{sen}\,\dfrac{5\pi}{3}\right)$

19.



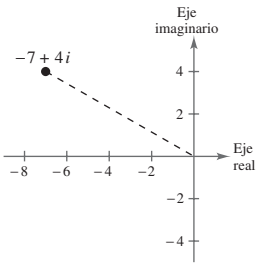
$4\left(\cos\dfrac{4\pi}{3} + i\,\text{sen}\,\dfrac{4\pi}{3}\right)$

21.



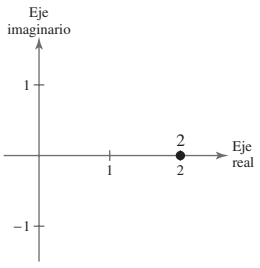
$5\left(\cos\dfrac{3\pi}{2} + i\,\text{sen}\,\dfrac{3\pi}{2}\right)$

23.



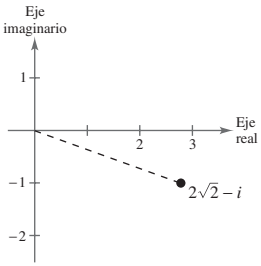
$\sqrt{65}(\cos 2.62 + i\,\text{sen}\,2.62)$

25.



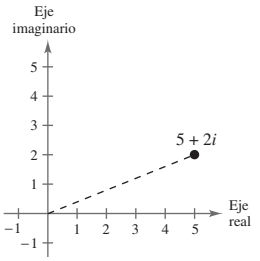
$2(\cos 0 + i\,\text{sen}\,0)$

27.



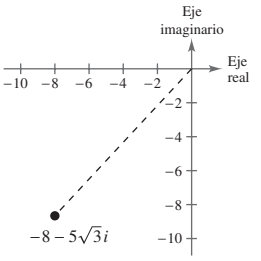
$3(\cos 5.94 + i\,\text{sen}\,5.94)$

29.



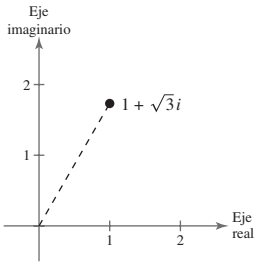
$\sqrt{29}(\cos 0.38 + i\,\text{sen}\,0.38)$

31.



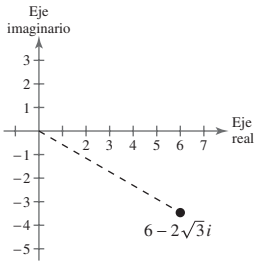
$\sqrt{139}(\cos 3.97 + i\,\text{sen}\,3.97)$

33.



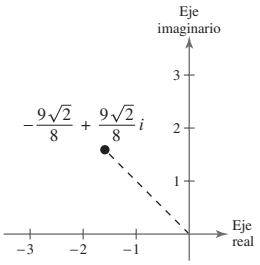
$1 + \sqrt{3}i$

35.



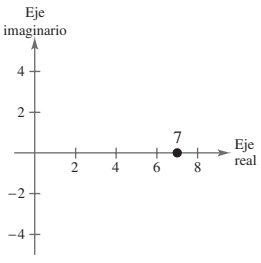
$6 - 2\sqrt{3}i$

37.



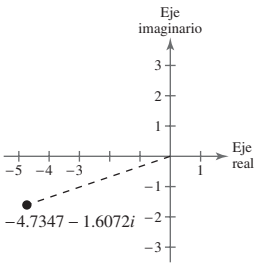
$-\dfrac{9\sqrt{2}}{8} + \dfrac{9\sqrt{2}}{8}i$

39.



7

41.



$-4.7347 - 1.6072i$

43. $4.6985 + 1.7101i$ **45.** $-1.8126 + 0.8452i$

47. $12\left(\cos\dfrac{\pi}{3} + i\,\text{sen}\,\dfrac{\pi}{3}\right)$ **49.** $\frac{10}{9}(\cos 150° + i\,\text{sen}\,150°)$

51. $\cos 50^\circ + i \operatorname{sen} 50^\circ$ **53.** $\frac{1}{3}(\cos 30^\circ + i \operatorname{sen} 30^\circ)$

55. $\cos\frac{2\pi}{3} + i \operatorname{sen}\frac{2\pi}{3}$ **57.** $6(\cos 330^\circ + i \operatorname{sen} 330^\circ)$

59. (a) $\left[2\sqrt{2}\left(\cos\frac{\pi}{4} + i \operatorname{sen}\frac{\pi}{4}\right)\right]\left[\sqrt{2}\left(\cos\frac{7\pi}{4} + i \operatorname{sen}\frac{7\pi}{4}\right)\right]$

(b) $4(\cos 0 + i \operatorname{sen} 0) = 4$ (c) 4

61. (a) $\left[2\left(\cos\frac{3\pi}{2} + i \operatorname{sen}\frac{3\pi}{2}\right)\right]\left[\sqrt{2}\left(\cos\frac{\pi}{4} + i \operatorname{sen}\frac{\pi}{4}\right)\right]$

(b) $2\sqrt{2}\left(\cos\frac{7\pi}{4} + i \operatorname{sen}\frac{7\pi}{4}\right) = 2 - 2i$

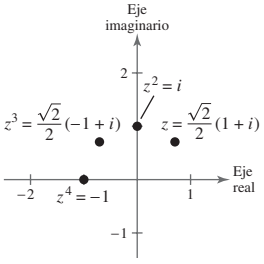
(c) $-2i - 2i^2 = -2i + 2 = 2 - 2i$

63. (a) $[5(\cos 0.93 + i \operatorname{sen} 0.93)] \div \left[2\left(\cos\frac{5\pi}{3} + i \operatorname{sen}\frac{5\pi}{3}\right)\right]$

(b) $\frac{5}{2}(\cos 1.97 + i \operatorname{sen} 1.97) \approx -0.982 + 2.299i$

(c) Unos $-0.982 + 2.299i$

65.



El valor absoluto de cada uno es 1, y las potencias consecutivas de z están cada una a 45° entre sí.

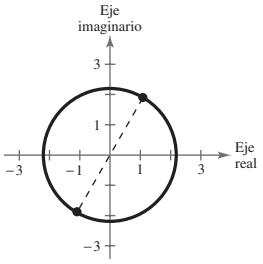
67. $-4 - 4i$ **69.** $8i$ **71.** $1024 - 1024\sqrt{3}i$

73. $\frac{125}{2} + \frac{125\sqrt{3}}{2}i$ **75.** -1 **77.** $608.0 + 144.7i$

79. $-597 - 122i$ **81.** $\frac{81}{2} + \frac{81\sqrt{3}}{2}i$

83. (a) $\sqrt{5}(\cos 60^\circ + i \operatorname{sen} 60^\circ)$
$\sqrt{5}(\cos 240^\circ + i \operatorname{sen} 240^\circ)$

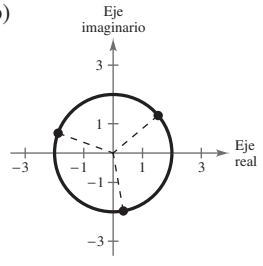
(b)



(c) $\frac{\sqrt{5}}{2} + \frac{\sqrt{15}}{2}i,\ -\frac{\sqrt{5}}{2} - \frac{\sqrt{15}}{2}i$

85. (a) $2\left(\cos\frac{2\pi}{9} + i \operatorname{sen}\frac{2\pi}{9}\right)$
$2\left(\cos\frac{8\pi}{9} + i \operatorname{sen}\frac{8\pi}{9}\right)$
$2\left(\cos\frac{14\pi}{9} + i \operatorname{sen}\frac{14\pi}{9}\right)$

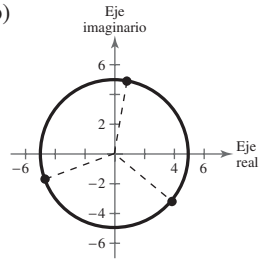
(b)



(c) $1.5321 + 1.2856i$,
$-1.8794 + 0.6840i$,
$0.3473 - 1.9696i$

87. (a) $5\left(\cos\frac{4\pi}{9} + i \operatorname{sen}\frac{4\pi}{9}\right)$
$5\left(\cos\frac{10\pi}{9} + i \operatorname{sen}\frac{10\pi}{9}\right)$
$5\left(\cos\frac{16\pi}{9} + i \operatorname{sen}\frac{16\pi}{9}\right)$

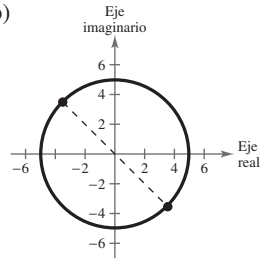
(b)



(c) $0.8682 + 4.9240i$,
$-4.6985 - 1.7101i$,
$3.8302 - 3.2140i$

89. (a) $5\left(\cos\frac{3\pi}{4} + i \operatorname{sen}\frac{3\pi}{4}\right)$
$5\left(\cos\frac{7\pi}{4} + i \operatorname{sen}\frac{7\pi}{4}\right)$

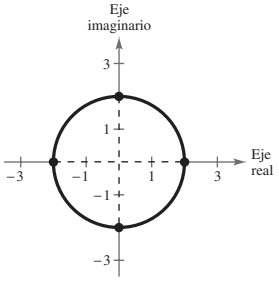
(b)



(c) $-\frac{5\sqrt{2}}{2} + \frac{5\sqrt{2}}{2}i$
$\frac{5\sqrt{2}}{2} - \frac{5\sqrt{2}}{2}i$

91. (a) $2(\cos 0 + i \operatorname{sen} 0)$
$2\left(\cos\frac{\pi}{2} + i \operatorname{sen}\frac{\pi}{2}\right)$
$2(\cos \pi + i \operatorname{sen} \pi)$
$2\left(\cos\frac{3\pi}{2} + i \operatorname{sen}\frac{3\pi}{2}\right)$

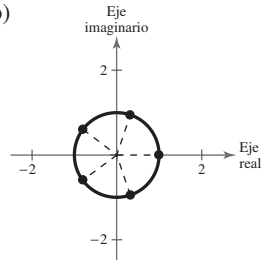
(b)



(c) $2, 2i, -2, -2i$

93. (a) $\cos 0 + i \operatorname{sen} 0$
$\cos\frac{2\pi}{5} + i \operatorname{sen}\frac{2\pi}{5}$
$\cos\frac{4\pi}{5} + i \operatorname{sen}\frac{4\pi}{5}$
$\cos\frac{6\pi}{5} + i \operatorname{sen}\frac{6\pi}{5}$
$\cos\frac{8\pi}{5} + i \operatorname{sen}\frac{8\pi}{5}$

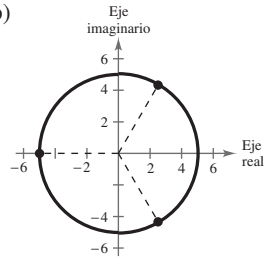
(b)



(c) $1, 0.3090 + 0.9511i$,
$-0.8090 + 0.5878i, -0.8090 - 0.5878i$,
$0.3090 - 0.9511i$

95. (a) $5\left(\cos\frac{\pi}{3} + i \operatorname{sen}\frac{\pi}{3}\right)$
$5(\cos \pi + i \operatorname{sen} \pi)$
$5\left(\cos\frac{5\pi}{3} + i \operatorname{sen}\frac{5\pi}{3}\right)$

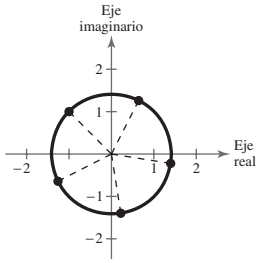
(b)



(c) $\frac{5}{2} + \frac{5\sqrt{3}}{2}i, -5,$
$\frac{5}{2} - \frac{5\sqrt{3}}{2}i$

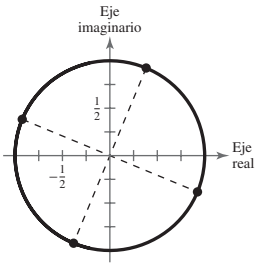
97. (a) $\sqrt{2}\left(\cos\frac{7\pi}{20} + i\,\text{sen}\frac{7\pi}{20}\right)$
$\sqrt{2}\left(\cos\frac{3\pi}{4} + i\,\text{sen}\frac{3\pi}{4}\right)$
$\sqrt{2}\left(\cos\frac{23\pi}{20} + i\,\text{sen}\frac{23\pi}{20}\right)$
$\sqrt{2}\left(\cos\frac{31\pi}{20} + i\,\text{sen}\frac{31\pi}{20}\right)$
$\sqrt{2}\left(\cos\frac{39\pi}{20} + i\,\text{sen}\frac{39\pi}{20}\right)$

(b)

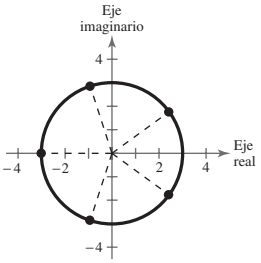


(c) $0.6420 + 1.2601i$,
$-1 + i$,
$-1.2601 - 0.6420i$,
$0.2212 - 1.3968i$,
$1.3968 - 0.2212i$

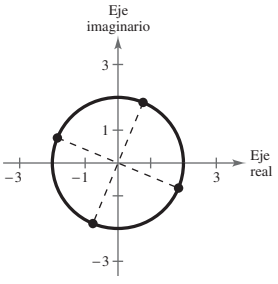
99. $\cos\frac{3\pi}{8} + i\,\text{sen}\frac{3\pi}{8}$
$\cos\frac{7\pi}{8} + i\,\text{sen}\frac{7\pi}{8}$
$\cos\frac{11\pi}{8} + i\,\text{sen}\frac{11\pi}{8}$
$\cos\frac{15\pi}{8} + i\,\text{sen}\frac{15\pi}{8}$



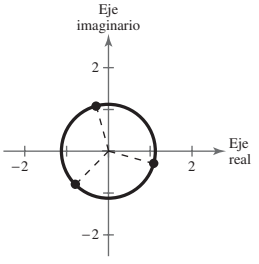
101. $3\left(\cos\frac{\pi}{5} + i\,\text{sen}\frac{\pi}{5}\right)$
$3\left(\cos\frac{3\pi}{5} + i\,\text{sen}\frac{3\pi}{5}\right)$
$3(\cos\pi + i\,\text{sen}\,\pi)$
$3\left(\cos\frac{7\pi}{5} + i\,\text{sen}\frac{7\pi}{5}\right)$
$3\left(\cos\frac{9\pi}{5} + i\,\text{sen}\frac{9\pi}{5}\right)$



103. $2\left(\cos\frac{3\pi}{8} + i\,\text{sen}\frac{3\pi}{8}\right)$
$2\left(\cos\frac{7\pi}{8} + i\,\text{sen}\frac{7\pi}{8}\right)$
$2\left(\cos\frac{11\pi}{8} + i\,\text{sen}\frac{11\pi}{8}\right)$
$2\left(\cos\frac{15\pi}{8} + i\,\text{sen}\frac{15\pi}{8}\right)$



105. $\sqrt[6]{2}\left(\cos\frac{7\pi}{12} + i\,\text{sen}\frac{7\pi}{12}\right)$
$\sqrt[6]{2}\left(\cos\frac{5\pi}{4} + i\,\text{sen}\frac{5\pi}{4}\right)$
$\sqrt[6]{2}\left(\cos\frac{23\pi}{12} + i\,\text{sen}\frac{23\pi}{12}\right)$



107. Falso. Están igualmente espaciados alrededor del círculo con centro en el origen con radio $\sqrt[n]{r}$.

109. Las respuestas variarán.

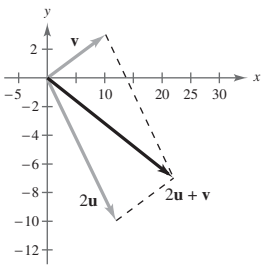
111. (a) r^2 (b) $\cos 2\theta + i\,\text{sen}\,2\theta$

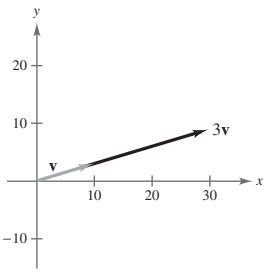
113. Las respuestas variarán.

115. La ecuación dada se puede escribir como
$x^4 = -16 = 16(\cos\pi + i\,\text{sen}\,\pi)$
lo cual significa que se puede resolver la ecuación si se encuentran las cuatro raíces de -16. Cada una de estas raíces tiene la forma
$\sqrt[4]{16}\left(\cos\frac{\pi + 2\pi k}{4} + i\,\text{sen}\frac{\pi + 2\pi k}{4}\right)$.

Ejercicios de repaso *(página 480)*

1. $C = 72°$, $b \approx 12.21$, $c \approx 12.36$
3. $A = 26°$, $a \approx 24.89$, $c \approx 56.23$
5. $C = 66°$, $a \approx 2.53$, $b \approx 9.11$
7. $B = 108°$, $a \approx 11.76$, $c \approx 21.49$
9. $A \approx 20.41°$, $C \approx 9.59°$, $a \approx 20.92$
11. $B \approx 39.48°$, $C \approx 65.52°$, $c \approx 48.24$
13. 19.06 **15.** 47.23 **17.** 31.1 m **19.** 31.01 ft
21. $A \approx 27.81°$, $B \approx 54.75°$, $C \approx 97.44°$
23. $A \approx 16.99°$, $B \approx 26.00°$, $C \approx 137.01°$
25. $A \approx 29.92°$, $B \approx 86.18°$, $C \approx 63.90°$
27. $A = 36°$, $C = 36°$, $b \approx 17.80$
29. $A \approx 45.76°$, $B \approx 91.24°$, $c \approx 21.42$
31. Ley de los senos; $A \approx 77.52°$, $B \approx 38.48°$, $a \approx 14.12$
33. Ley de los cosenos; $A \approx 28.62°$, $B \approx 33.56°$, $C \approx 117.82°$
35. Unos 4.3 ft, unos 12.6 ft
37. 615.1 m **39.** 7.64 **41.** 8.36
43. $\|\mathbf{u}\| = \|\mathbf{v}\| = \sqrt{61}$, $\text{pendiente}_{\mathbf{u}} = \text{pendiente}_{\mathbf{v}} = \frac{5}{6}$
45. $\langle 7, -5\rangle$ **47.** $\langle 7, -7\rangle$ **49.** $\langle -4, 4\sqrt{3}\rangle$
51. (a) $\langle -4, 3\rangle$ (b) $\langle 2, -9\rangle$
(c) $\langle -4, -12\rangle$ (d) $\langle -14, 3\rangle$
53. (a) $\langle -1, 6\rangle$ (b) $\langle -9, -2\rangle$
(c) $\langle -20, 8\rangle$ (d) $\langle -13, 22\rangle$
55. (a) $7\mathbf{i} + 2\mathbf{j}$ (b) $-3\mathbf{i} - 4\mathbf{j}$ (c) $8\mathbf{i} - 4\mathbf{j}$ (d) $25\mathbf{i} + 4\mathbf{j}$
57. (a) $3\mathbf{i} + 6\mathbf{j}$ (b) $5\mathbf{i} - 6\mathbf{j}$ (c) $16\mathbf{i}$ (d) $17\mathbf{i} + 18\mathbf{j}$
59. $\langle 22, -7\rangle$ **61.** $\langle 30, 9\rangle$





63. $-\mathbf{i} + 5\mathbf{j}$ **65.** $6\mathbf{i} + 4\mathbf{j}$
67. $10\sqrt{2}(\cos 135°\mathbf{i} + \text{sen}\,135°\mathbf{j})$
69. $\|\mathbf{v}\| = 7$; $\theta = 60°$ **71.** $\|\mathbf{v}\| = \sqrt{41}$; $\theta = 38.7°$
73. $\|\mathbf{v}\| = 3\sqrt{2}$; $\theta = 225°$
75. La fuerza resultante es 133.92 libras y 5.6° de la fuerza de 85 libras
77. 422.30 mi/h; 130.4° **79.** 45 **81.** -2

83. 40; escalar **85.** $4 - 2\sqrt{5}$; escalar

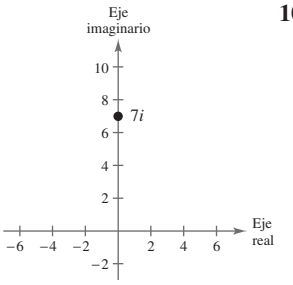
87. $\langle 72, -36\rangle$; vector **89.** 38; escalar **91.** $\dfrac{11\pi}{12}$

93. 160.5° **95.** Ortogonal **97.** Ninguno

99. $-\frac{13}{17}\langle 4, 1\rangle, \frac{16}{17}\langle -1, 4\rangle$ **101.** $\frac{5}{2}\langle -1, 1\rangle, \frac{9}{2}\langle 1, 1\rangle$ **103.** 48

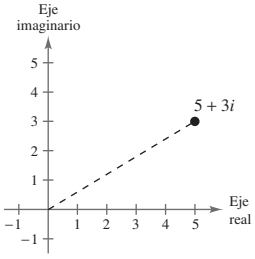
105. 72 000 ft-lb

107.



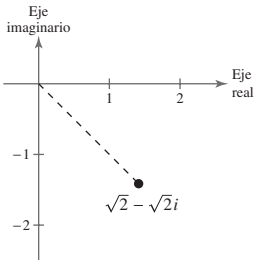
7

109.



$\sqrt{34}$

111.



2

113. $4\left(\cos\dfrac{\pi}{2} + i \operatorname{sen}\dfrac{\pi}{2}\right)$ **115.** $5\sqrt{2}\left(\cos\dfrac{7\pi}{4} + i \operatorname{sen}\dfrac{7\pi}{4}\right)$

117. $13(\cos 4.32 + i \operatorname{sen} 4.32)$

119. (a) $z_1 = 4\left(\cos\dfrac{11\pi}{6} + i \operatorname{sen}\dfrac{11\pi}{6}\right)$

$z_2 = 10\left(\cos\dfrac{3\pi}{2} + i \operatorname{sen}\dfrac{3\pi}{2}\right)$

(b) $z_1 z_2 = 40\left(\cos\dfrac{10\pi}{3} + i \operatorname{sen}\dfrac{10\pi}{3}\right)$

$\dfrac{z_1}{z_2} = \dfrac{2}{5}\left(\cos\dfrac{\pi}{3} + i \operatorname{sen}\dfrac{\pi}{3}\right)$

121. $\dfrac{625}{2} + \dfrac{625\sqrt{3}}{2}i$ **123.** $2035 - 828i$

125. (a) $3\left(\cos\dfrac{\pi}{4} + i \operatorname{sen}\dfrac{\pi}{4}\right)$

$3\left(\cos\dfrac{7\pi}{12} + i \operatorname{sen}\dfrac{7\pi}{12}\right)$

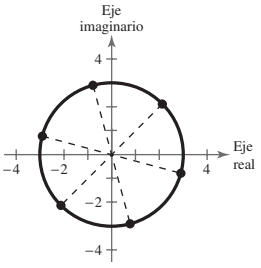
$3\left(\cos\dfrac{11\pi}{12} + i \operatorname{sen}\dfrac{11\pi}{12}\right)$

$3\left(\cos\dfrac{5\pi}{4} + i \operatorname{sen}\dfrac{5\pi}{4}\right)$

$3\left(\cos\dfrac{19\pi}{12} + i \operatorname{sen}\dfrac{19\pi}{12}\right)$

$3\left(\cos\dfrac{23\pi}{12} + i \operatorname{sen}\dfrac{23\pi}{12}\right)$

(b)



(c) $\dfrac{3\sqrt{2}}{2} + \dfrac{3\sqrt{2}}{2}i, -0.776 + 2.898i,$

$-2.898 + 0.776i, -\dfrac{3\sqrt{2}}{2} - \dfrac{3\sqrt{2}}{2}i,$

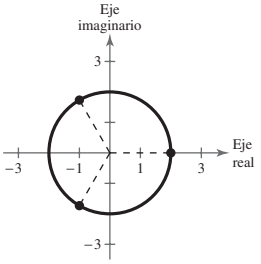
$0.776 - 2.898i, 2.898 - 0.776i$

127. (a) $2(\cos 0 + i \operatorname{sen} 0)$

$2\left(\cos\dfrac{2\pi}{3} + i \operatorname{sen}\dfrac{2\pi}{3}\right)$

$2\left(\cos\dfrac{4\pi}{3} + i \operatorname{sen}\dfrac{4\pi}{3}\right)$

(b)



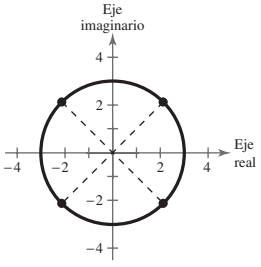
(c) $2, -1 + \sqrt{3}i, -1 - \sqrt{3}i$

129. $3\left(\cos\dfrac{\pi}{4} + i \operatorname{sen}\dfrac{\pi}{4}\right) = \dfrac{3\sqrt{2}}{2} + \dfrac{3\sqrt{2}}{2}i$

$3\left(\cos\dfrac{3\pi}{4} + i \operatorname{sen}\dfrac{3\pi}{4}\right) = -\dfrac{3\sqrt{2}}{2} + \dfrac{3\sqrt{2}}{2}i$

$3\left(\cos\dfrac{5\pi}{4} + i \operatorname{sen}\dfrac{5\pi}{4}\right) = -\dfrac{3\sqrt{2}}{2} - \dfrac{3\sqrt{2}}{2}i$

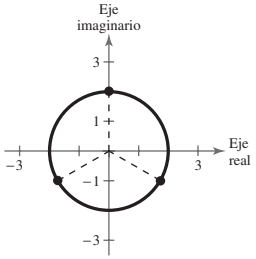
$3\left(\cos\dfrac{7\pi}{4} + i \operatorname{sen}\dfrac{7\pi}{4}\right) = \dfrac{3\sqrt{2}}{2} - \dfrac{3\sqrt{2}}{2}i$



131. $2\left(\cos\frac{\pi}{2} + i\,\text{sen}\,\frac{\pi}{2}\right) = 2i$

$2\left(\cos\frac{7\pi}{6} + i\,\text{sen}\,\frac{7\pi}{6}\right) = -\sqrt{3} - i$

$2\left(\cos\frac{11\pi}{6} + i\,\text{sen}\,\frac{11\pi}{6}\right) = \sqrt{3} - i$



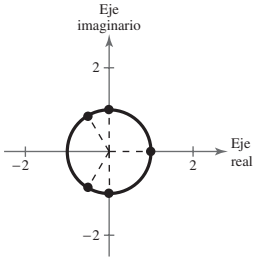
133. $\cos 0 + i\,\text{sen}\,0 = 1$

$\cos\frac{\pi}{2} + i\,\text{sen}\,\frac{\pi}{2} = i$

$\cos\frac{2\pi}{3} + i\,\text{sen}\,\frac{2\pi}{3} = -\frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2}i$

$\cos\frac{4\pi}{3} + i\,\text{sen}\,\frac{4\pi}{3} = -\frac{1}{2} - \frac{\sqrt{3}}{2}i$

$\cos\frac{3\pi}{2} + i\,\text{sen}\,\frac{3\pi}{2} = -i$



135. Verdadero. Sen 90° está definido en la ley de senos.

137. Verdadero. Por definición, $\mathbf{u} = \frac{\mathbf{v}}{\|\mathbf{v}\|}$, por lo que $\mathbf{v} = \|\mathbf{v}\|\mathbf{u}$.

139. Falso. Las soluciones $x^2 - 8i = 0$ son $x = 2 + 2i$ y $x = -2 - 2i$.

141. $a^2 = b^2 + c^2 - 2bc\cos A$, $b^2 = a^2 + c^2 - 2ac\cos B$, $c^2 = a^2 + b^2 - 2ab\cos C$

143. **A** y **C**

145. Si $k > 0$, la dirección es la misma y la magnitud es k veces mayor.
Si $k < 0$, resultado es un vector en la dirección opuesta y la magnitud es $|k|$ veces mayor.

147. (a) $4(\cos 60° + i\,\text{sen}\,60°)$
$4(\cos 180° + i\,\text{sen}\,180°)$
$4(\cos 300° + i\,\text{sen}\,300°)$
(b) -64

149. $z_1z_2 = -4$; $\frac{z_1}{z_2} = \cos(2\theta - \pi) + i\,\text{sen}(2\theta - \pi)$
$= -\cos 2\theta - i\,\text{sen}\,2\theta$

Examen del capítulo *(página 484)*

1. $C = 88°$, $b \approx 27.81$, $c \approx 29.98$

2. $A = 42°$, $b \approx 21.91$, $c \approx 10.95$

3. Dos soluciones:
$B \approx 29.12°$, $C \approx 126.88°$, $c \approx 22.03$
$B \approx 150.88°$, $C \approx 5.12°$, $c \approx 2.46$

4. No hay solución

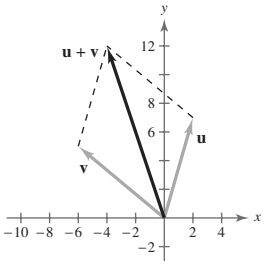
5. $A \approx 39.96°$, $C \approx 40.04°$, $c \approx 15.02$

6. $A \approx 21.90°$, $B \approx 37.10°$, $c \approx 78.15$ **7.** 2052.5 m^2

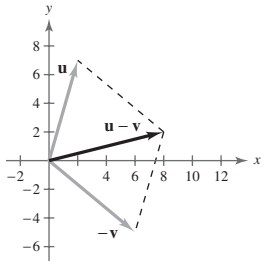
8. 606.3 mi; 29.1° **9.** $\langle 14, -23\rangle$

10. $\left\langle \frac{18\sqrt{34}}{17}, -\frac{30\sqrt{34}}{17} \right\rangle$

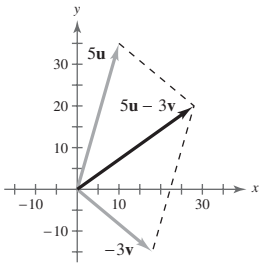
11. $\langle -4, 12\rangle$



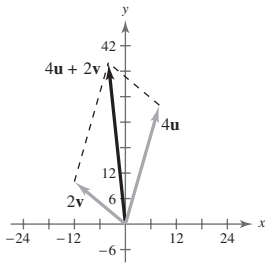
12. $\langle 8, 2\rangle$



13. $\langle 28, 20\rangle$



14. $\langle -4, 38\rangle$



15. $\left\langle \frac{24}{25}, -\frac{7}{25} \right\rangle$ **16.** 14.9°; 250.15 lb **17.** 135° **18.** Sí

19. $\frac{37}{26}\langle 5, 1\rangle$; $\frac{29}{26}\langle -1, 5\rangle$ **20.** Unas 104 libras

21. $5\sqrt{2}\left(\cos\frac{7\pi}{4} + i\,\text{sen}\,\frac{7\pi}{4}\right)$ **22.** $-3 + 3\sqrt{3}i$

23. $-\frac{6561}{2} - \frac{6561\sqrt{3}}{2}i$ **24.** $5832i$

25. $4\sqrt[4]{2}\left(\cos\frac{\pi}{12} + i\,\text{sen}\,\frac{\pi}{12}\right)$

$4\sqrt[4]{2}\left(\cos\frac{7\pi}{12} + i\,\text{sen}\,\frac{7\pi}{12}\right)$

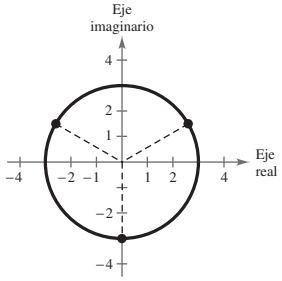
$4\sqrt[4]{2}\left(\cos\frac{13\pi}{12} + i\,\text{sen}\,\frac{13\pi}{12}\right)$

$4\sqrt[4]{2}\left(\cos\frac{19\pi}{12} + i\,\text{sen}\,\frac{19\pi}{12}\right)$

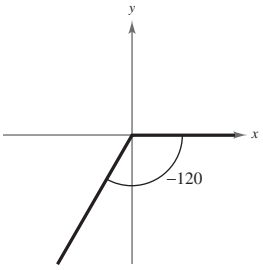
26. $3\left(\cos\frac{\pi}{6} + i\,\text{sen}\,\frac{\pi}{6}\right)$

$3\left(\cos\frac{5\pi}{6} + i\,\text{sen}\,\frac{5\pi}{6}\right)$

$3\left(\cos\frac{3\pi}{2} + i\,\text{sen}\,\frac{3\pi}{2}\right)$



Examen acumulativo para los capítulos 4–6 *(página 485)*

1. (a) 

(b) 240°

(c) $-\frac{2\pi}{3}$

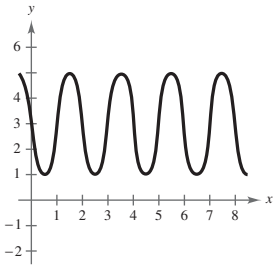
(d) 60°

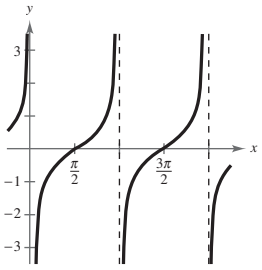
(e) $\operatorname{sen}(-120°) = -\frac{\sqrt{3}}{2}$ $\quad \csc(-120°) = -\frac{2\sqrt{3}}{3}$

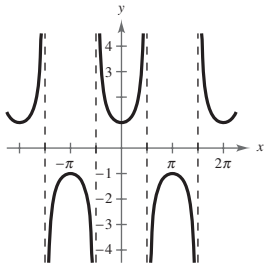
$\cos(-120°) = -\frac{1}{2}$ $\quad \sec(-120°) = -2$

$\tan(-120°) = \sqrt{3}$ $\quad \cot(-120°) = \frac{\sqrt{3}}{3}$

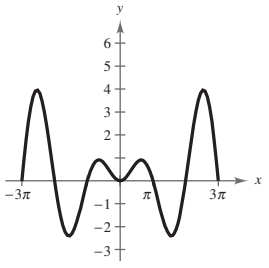
2. $-83.1°$ **3.** $\frac{20}{29}$

4. 

5. 

6. 

7. $a = -3, b = \pi, c = 0$

8. 

9. 4.9 **10.** $\frac{3}{4}$

11. $\sqrt{1 - 4x^2}$ **12.** 1 **13.** $2 \tan \theta$

14–16. Las respuestas variarán. **17.** $\frac{\pi}{3}, \frac{\pi}{2}, \frac{3\pi}{2}, \frac{5\pi}{3}$

18. $\frac{\pi}{6}, \frac{5\pi}{6}, \frac{7\pi}{6}, \frac{11\pi}{6}$ **19.** $\frac{3\pi}{2}$ **20.** $\frac{16}{63}$ **21.** $\frac{4}{3}$

22. $\frac{\sqrt{5}}{5}, \frac{2\sqrt{5}}{5}$ **23.** $\frac{5}{2}\left(\operatorname{sen}\frac{5\pi}{2} - \operatorname{sen}\pi\right)$

24. $-2 \operatorname{sen} 8x \operatorname{sen} x$ **25.** $B \approx 26.39°$, $C \approx 123.61°$, $c \approx 14.99$

26. $B \approx 52.48°$, $C \approx 97.52°$, $a \approx 5.04$

27. $B = 60°$, $a \approx 5.77$, $c \approx 11.55$

28. $A \approx 26.28°$, $B \approx 49.74°$, $C \approx 103.98°$

29. Ley de los senos; $C = 109°$, $a \approx 14.96$, $b \approx 9.27$

30. Ley de los cosenos; $A \approx 6.75°$, $B \approx 93.25°$, $c \approx 9.86$

31. 41.48 in.^{2} **32.** 599.09 m^2 **33.** $7\mathbf{i} + 8\mathbf{j}$

34. $\left\langle \frac{\sqrt{2}}{2}, \frac{\sqrt{2}}{2} \right\rangle$ **35.** -5 **36.** $-\frac{1}{13}\langle 1, 5\rangle; \frac{21}{13}\langle 5, -1\rangle$

37. $2\sqrt{2}\left(\cos\frac{3\pi}{4} + i \operatorname{sen}\frac{3\pi}{4}\right)$ **38.** $-12\sqrt{3} + 12i$

39. $\cos 0 + i \operatorname{sen} 0 = 1$

$\cos\frac{2\pi}{3} + i \operatorname{sen}\frac{2\pi}{3} = -\frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2}i$

$\cos\frac{4\pi}{3} + i \operatorname{sen}\frac{4\pi}{3} = -\frac{1}{2} - \frac{\sqrt{3}}{2}i$

40. $3\left(\cos\frac{\pi}{5} + i \operatorname{sen}\frac{\pi}{5}\right)$

$3\left(\cos\frac{3\pi}{5} + i \operatorname{sen}\frac{3\pi}{5}\right)$

$3(\cos\pi + i \operatorname{sen}\pi)$

$3\left(\cos\frac{7\pi}{5} + i \operatorname{sen}\frac{7\pi}{5}\right)$

$3\left(\cos\frac{9\pi}{5} + i \operatorname{sen}\frac{9\pi}{5}\right)$

41. Alrededor de 395.8 rad/min; alrededor de 8312.7 pulg/min

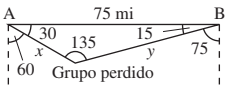
42. 42π yd$^2 \approx 131.95$ yd^2 **43.** 5 ft **44.** 22.6°

45. $d = 4 \cos\frac{\pi}{4}t$ **46.** 32.6°; 543.9 km/h

47. 425 ft-lb

Resolución de problemas *(página 491)*

1. 2.01 ft

3. (a) 

(b) Estación A: 27.45 millas; estación B: 53.03 millas

(c) 11.03 millas; S 21.7° E

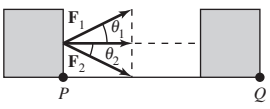
5. (a) (i) $\sqrt{2}$ (ii) $\sqrt{5}$ (iii) 1
(iv) 1 (v) 1 (vi) 1

(b) (i) 1 (ii) $3\sqrt{2}$ (iii) $\sqrt{13}$
(iv) 1 (v) 1 (vi) 1

(c) (i) $\frac{\sqrt{5}}{2}$ (ii) $\sqrt{13}$ (iii) $\frac{\sqrt{85}}{2}$
(iv) 1 (v) 1 (vi) 1

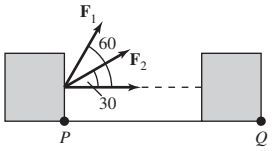
(d) (i) $2\sqrt{5}$ (ii) $5\sqrt{2}$ (iii) $5\sqrt{2}$
(iv) 1 (v) 1 (vi) 1

7. $\mathbf{w} = \frac{1}{2}(\mathbf{u} + \mathbf{v})$; $\mathbf{w} = \frac{1}{2}(\mathbf{v} - \mathbf{u})$

9. (a) 

La cantidad de trabajo realizado por $\mathbf{F}_1$ es igual a la cantidad de trabajo realizado por $\mathbf{F}_2$.

(b)

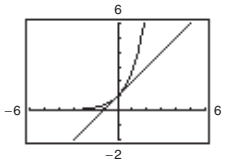


La cantidad de trabajo realizado por $\mathbf{F}_2$ es $\sqrt{3}$ veces mayor que la cantidad de trabajo realizado por $\mathbf{F}_1$.

Capítulo 7

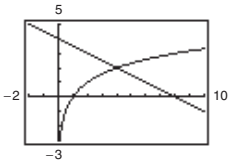
Sección 7.1 *(página 501)*

1. Sistema; ecuaciones **3.** Resolviendo **5.** Punto; intersección
7. (a) No (b) No (c) No (d) Sí
9. (a) No (b) Sí (c) No (d) No
11. (2, 2) **13.** (2, 6), (−1, 3) **15.** (−3, −4), (5, 0)
17. (0, 0), (2, −4) **19.** (0, 1), (1, −1), (3, 1) **21.** (6, 4)
23. $\left(\frac{1}{2}, 3\right)$ **25.** (1, 1) **27.** $\left(\frac{20}{3}, \frac{40}{3}\right)$ **29.** No hay solución
31. (−2, 4), (0, 0) **33.** No hay solución **35.** (6, 2)
37. $\left(-\frac{3}{2}, \frac{1}{2}\right)$ **39.** (2, 2), (4, 0) **41.** (1, 4), (4, 7)
43. $\left(4, -\frac{1}{2}\right)$ **45.** No hay solución **47.** (4, 3), (−4, 3)
49.



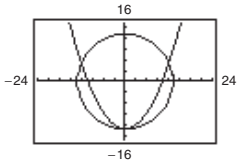
(0, 1)

51.



(4, 2)

53.

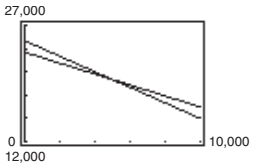


(0, −13), (±12, 5)
55. (1, 2) **57.** No hay solución **59.** (0.287, 1.751)
61. (−1, 0), (0, 1), (1, 0) **63.** $\left(\frac{1}{2}, 2\right), \left(-4, -\frac{1}{4}\right)$
65. 192 unidades **67.** (a) 1013 unidades (b) 5061 unidades
69. (a) 8 semanas
(b)

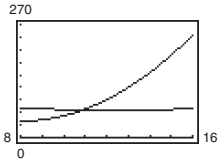
	1	2	3	4
$360 - 24x$	336	312	288	264
$24 + 18x$	42	60	78	96

	5	6	7	8
$360 - 24x$	240	216	192	168
$24 + 18x$	114	132	150	168

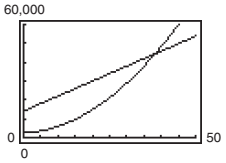
71. Más de \$16 666.67
73. (a) $\begin{cases} x + y = 25\,000 \\ 0.06x + 0.085y = 2\,000 \end{cases}$
(b)



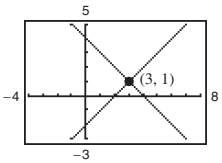
(c) \$5000
Disminuye; el interés es fijo.
75. (a) Solar: $0.0598t^3 - 1.719t^2 + 14.66t + 32.2$
Eólica: $3.237t^2 - 51.97t + 247.9$
(b)



(c) Punto de intersección: (10.9, 65.26); el consumo de energía solar y eólica es igual en este punto del tiempo en el año 2000.
(d) Las respuestas variarán.
(e) Las respuestas variarán.
77. (a) $T_1 = 26.560t^2 + 85.54t + 2468.5$
$T_2 = 794.14t + 14\,124.6$
(b)



(c) 2038 (d) 2038
79. 60 cm × 80 cm **81.** 44 ft × 198 ft
83. 10 km × 12 km
85. Falso. Para resolver un sistema de ecuaciones por sustitución, se puede despejar cualquier variable en una de las dos ecuaciones y luego sustituir de nuevo.
87.

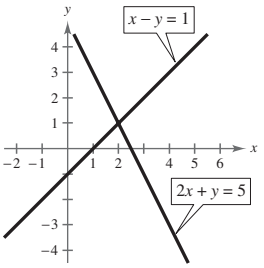


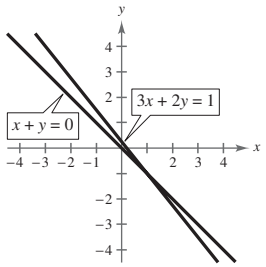
(3, 1); El punto de intersección es igual a la solución hallada en el Ejemplo 1.

89. Para un sistema lineal, el resultado será una ecuación contradictoria tal como $0 = N$, donde N es un número real diferente de cero. Para un sistema no lineal, puede haber una ecuación con soluciones imaginarias.
91. (a) $y = 2x$ (b) $y = 0$ (c) $y = x - 2$

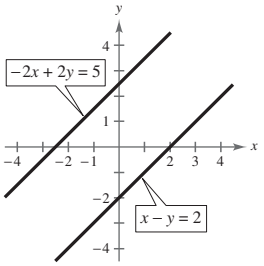
Sección 7.2 *(página 513)*

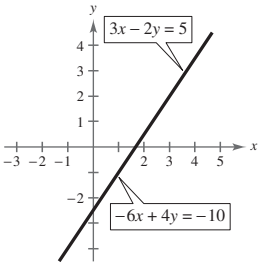
1. Eliminación **3.** Consistente; inconsistente
5. (2, 1) **7.** (1, −1)





9. No hay solución **11.** $\left(a, \frac{3}{2}a - \frac{5}{2}\right)$





13. $(4, 1)$ **15.** $\left(\frac{3}{2}, -\frac{1}{2}\right)$ **17.** $(4, -1)$ **19.** $\left(\frac{12}{7}, \frac{18}{7}\right)$

21. No hay solución

23. Número infinito de soluciones: $\left(a, -\frac{1}{2} + \frac{5}{6}a\right)$

25. $(101, 96)$ **27.** $\left(-\frac{6}{35}, \frac{43}{35}\right)$ **29.** $(5, -2)$

31. b; una solución; consistente

33. a; número infinito de soluciones; consistente

35. $(4, 1)$ **37.** $(2, -1)$ **39.** $(6, -3)$ **41.** $\left(\frac{49}{4}, \frac{33}{4}\right)$

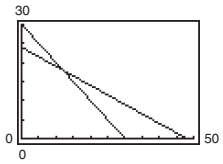
43. 550 mi/h, 50 mi/h **45.** $(240, 404)$

47. (2 000 000, 100)

49. Hamburguesa con queso: 300 calorías; papas a la francesa: 230 calorías

51. (a) $\begin{cases} x + y = 30 \\ 0.25x + 0.5y = 12 \end{cases}$

(b)

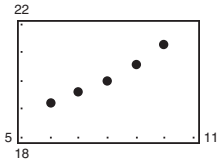


Disminuye

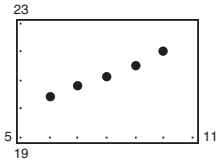
(c) Solución al 25%: 12 L; solución al 50%: 18 L

53. \$18 000

55. (a)



Farmacia A: $P = 0.52t + 16.0$



Farmacia B: $P = 0.39t + 18.0$

(b) Sí, en el año 2015

57. $y = 0.97x + 2.1$ **59.** $y = -2x + 8$

61. (a) $y = 14x + 19$ (b) 41.4 búshels/acre

63. Falso. Dos rectas que coinciden tienen un número infinito de puntos de intersección.

65. No. Dos rectas se cortarán sólo una vez o coincidirán, y si coinciden el sistema tendrá un número infinito de soluciones.

67. El método de eliminación es mucho más fácil.

69. (39 600, 398). Es necesario cambiar la escala en los ejes para ver el punto de intersección.

71. $k = -4$ **73.** $u = 1, v = -\tan x$

Sección 7.3 *(página 525)*

1. Escalonada por renglones **3.** Gaussiana **5.** No cuadrada

7. (a) No (b) No (c) No (d) Sí

9. (a) No (b) No (c) Sí (d) No

11. $(-13, -10, 8)$ **13.** $(3, 10, 2)$ **15.** $\left(\frac{11}{4}, 7, 11\right)$

17. $\begin{cases} x - 2y + 3z = 5 \\ y - 2z = 9 \\ 2x - 3z = 0 \end{cases}$ El primer paso es poner el sistema en forma escalonada por renglones.

19. $(4, 1, 2)$ **21.** $(-4, 8, 5)$ **23.** $(5, -2, 0)$

25. No hay solución **27.** $\left(-\frac{1}{2}, 1, \frac{3}{2}\right)$

29. $(-3a + 10, 5a - 7, a)$ **31.** $(-a + 3, a + 1, a)$

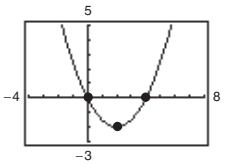
33. $(2a, 21a - 1, 8a)$ **35.** $\left(-\frac{3}{2}a + \frac{1}{2}, -\frac{2}{3}a + 1, a\right)$

37. $(1, 1, 1, 1)$ **39.** No hay solución **41.** $(0, 0, 0)$

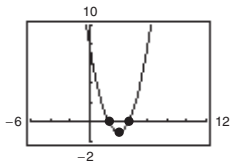
43. $(9a, -35a, 67a)$ **45.** $s = -16t^2 + 144$

47. $s = -16t^2 - 32t + 400$

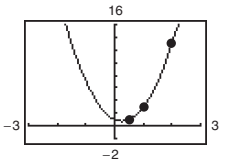
49. $y = \frac{1}{2}x^2 - 2x$



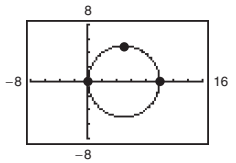
51. $y = x^2 - 6x + 8$



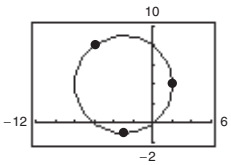
53. $y = 4x^2 - 2x + 1$



55. $x^2 + y^2 - 10x = 0$



57. $x^2 + y^2 + 6x - 8y = 0$



59. 6 touchdowns, 6 patadas de punto extra, 1 gol de campo

61. \$300 000 al 8%
\$400 000 al 9%
\$75 000 al 10%

63. 187 500 + s en certificados de depósito
187 500 − s en bonos municipales
125 000 − s en acciones preferenciales
s en acciones crecientes

65. Marca X = 4 libras
Marca Y = 9 libras
Marca Z = 9 libras

67. 48 ft, 35 ft, 27 ft **69.** $x = 60°, y = 67°, z = 53°$

71. Televisión = 30 anuncios
Radio = 10 anuncios
Periódicos = 20 anuncios

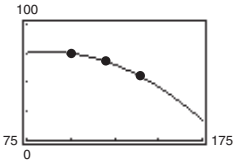
73. (a) 1 L de 10%, 7 L de 20%, 2 L de 50%
(b) 0 L de 10%, $8\frac{1}{3}$ L de 20%, $1\frac{2}{3}$ L de 50%
(c) $6\frac{1}{4}$ L de 10%, 0 L de 20%, $3\frac{3}{4}$ L de 50%

75. $I_1 = 1, I_2 = 2, I_3 = 1$ **77.** $y = -\frac{5}{24}x^2 - \frac{3}{10}x + \frac{41}{6}$

79. $y = x^2 - x$

81. (a) $y = -0.0075x^2 + 1.3x + 20$

(b)



(c)

x	100	120	140
y	75	68	55

Los valores son los mismos.

(d) 24.25% (e) 156 mujeres

83. 6 touchdowns, 6 patadas de punto extra, 2 goles de campo, 1 safety

85. $x = 5, y = 5, \lambda = -5$

87. $x = \pm\frac{\sqrt{2}}{2}, y = \frac{1}{2}, \lambda = 1$ o $x = 0, y = 0, \lambda = 0$

89. Falso. La ecuación 2 no tiene un coeficiente inicial de 1.

91. No. Las respuestas variarán.

93. Respuestas de muestra:

$$\begin{cases} 2x + y - z = 0 \\ y + 2z = 0 \\ -x + 2y + z = -9 \end{cases} \qquad \begin{cases} x + y + z = 1 \\ 2x - z = 4 \\ 4y + 8z = 0 \end{cases}$$

95. Respuestas de muestra:

$$\begin{cases} x + 2y + 4z = -14 \\ x - 12y = 0 \\ x - 8z = 8 \end{cases} \qquad \begin{cases} 4x - 2y - 8z = -9 \\ -x + 4z = -1 \\ -7y + 2z = 0 \end{cases}$$

Sección 7.4 *(página 536)*

1. Descomposición en fracciones parciales **3.** Fracción parcial

5. b **6.** c **7.** d **8.** a

9. $\frac{A}{x} + \frac{B}{x-2}$ **11.** $\frac{A}{x} + \frac{B}{x^2} + \frac{C}{x-7}$

13. $\frac{A}{x-5} + \frac{B}{(x-5)^2} + \frac{C}{(x-5)^3}$ **15.** $\frac{A}{x} + \frac{Bx+C}{x^2+10}$

17. $\frac{A}{x} + \frac{Bx+C}{x^2+1} + \frac{Dx+E}{(x^2+1)^2}$ **19.** $\frac{1}{x} - \frac{1}{x+1}$

21. $\frac{1}{x} - \frac{2}{2x+1}$ **23.** $\frac{1}{x-1} - \frac{1}{x+2}$

25. $\frac{1}{2}\left(\frac{1}{x-1} - \frac{1}{x+1}\right)$ **27.** $-\frac{3}{x} - \frac{1}{x+2} + \frac{5}{x-2}$

29. $\frac{3}{x-3} + \frac{9}{(x-3)^2}$ **31.** $\frac{3}{x} - \frac{1}{x^2} + \frac{1}{x+1}$

33. $\frac{3}{x} - \frac{2x-2}{x^2+1}$ **35.** $-\frac{1}{x-1} + \frac{x+2}{x^2-2}$

37. $\frac{2}{x^2+4} + \frac{x}{(x^2+4)^2}$

39. $\frac{1}{8}\left(\frac{1}{2x+1} + \frac{1}{2x-1} - \frac{4x}{4x^2+1}\right)$

41. $\frac{1}{x+1} + \frac{2}{x^2-2x+3}$ **43.** $1 - \frac{2x+1}{x^2+x+1}$

45. $2x - 7 + \frac{17}{x+2} + \frac{1}{x+1}$

47. $x + 3 + \frac{6}{x-1} + \frac{4}{(x-1)^2} + \frac{1}{(x-1)^3}$

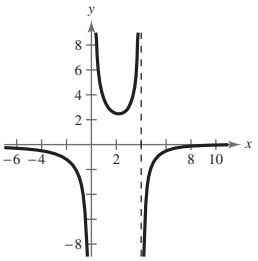
49. $x + \frac{2}{x} + \frac{1}{x+1} + \frac{3}{(x+1)^2}$ **51.** $\frac{3}{2x-1} - \frac{2}{x+1}$

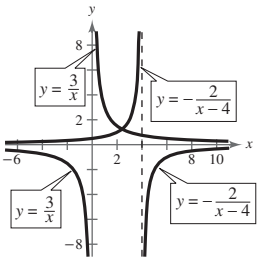
53. $\frac{1}{2}\left[-\frac{1}{x} + \frac{5}{x+1} - \frac{3}{(x+1)^2}\right]$ **55.** $\frac{1}{x^2+2} + \frac{x}{(x^2+2)^2}$

57. $2x + \frac{1}{2}\left(\frac{3}{x-4} - \frac{1}{x+2}\right)$

59. (a) $\frac{3}{x} - \frac{2}{x-4}$

(b) $y = \frac{x-12}{x(x-4)}$ $\qquad y = \frac{3}{x}, \quad y = -\frac{2}{x-4}$





(c) Las asíntotas verticales son las mismas.

61. $\frac{60}{100-p} - \frac{60}{100+p}$

63. Falso. La descomposición en fracciones parciales es $\frac{A}{x+10} + \frac{B}{x-10} + \frac{C}{(x-10)^2}$.

65. Verdadero. La expresión es racional impropia.

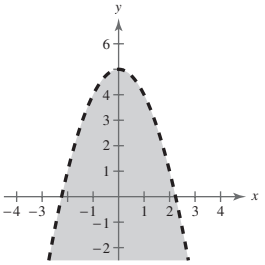
67. $\frac{1}{2a}\left(\frac{1}{a+x} + \frac{1}{a-x}\right)$ **69.** $\frac{1}{a}\left(\frac{1}{y} + \frac{1}{a-y}\right)$

71. Las respuestas variarán. Respuesta de muestra: se pueden sustituir cualesquier valores convenientes de x que ayudarán a determinar las constantes. También se puede hallar la ecuación básica, expandirla y luego igualar coeficientes de términos semejantes.

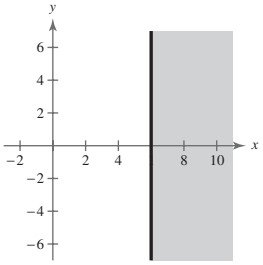
Sección 7.5 *(página 545)*

1. Solución **3.** Lineal **5.** Conjunto de solución

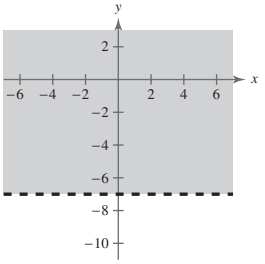
7.



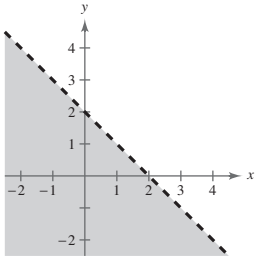
9.



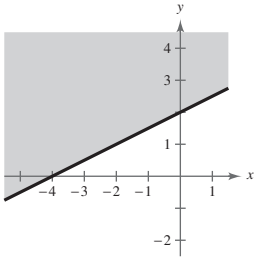
11.



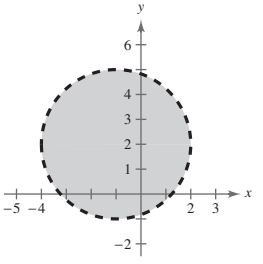
13.



15.

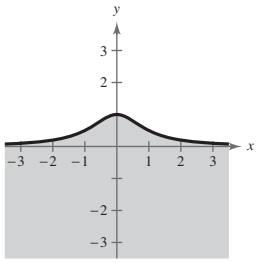


17.

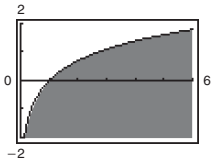


CAPÍTULO 7

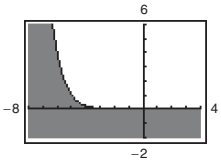
19.



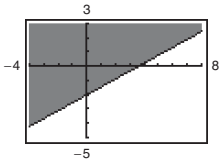
21.



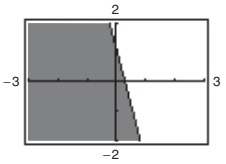
23.



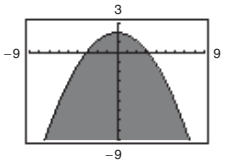
25.



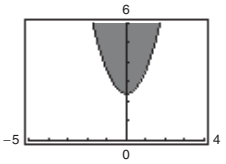
27.



29.



31.

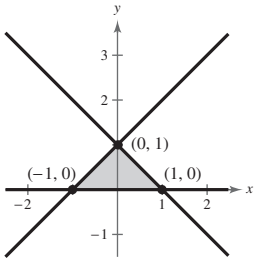


33. $y < 5x + 5$ **35.** $y \geq -\frac{2}{3}x + 2$

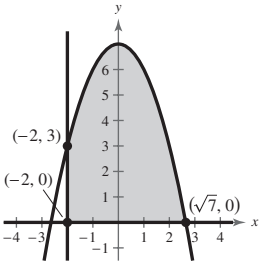
37. (a) No (b) No (c) Sí (d) Sí

39. (a) Sí (b) No (c) Sí (d) Sí

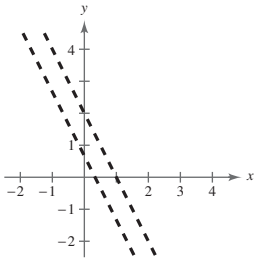
41.



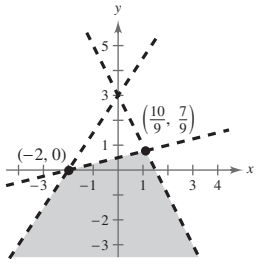
43.



45.

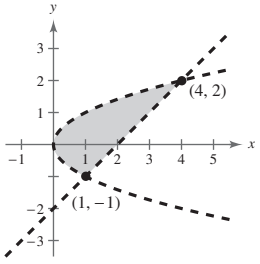


47.

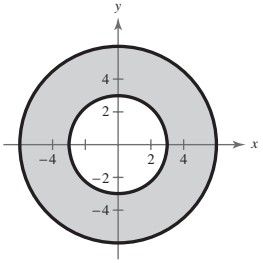


No hay solución

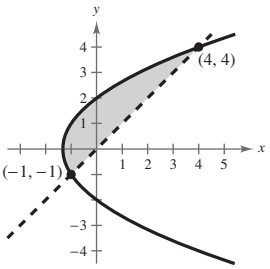
49.



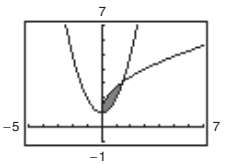
51.



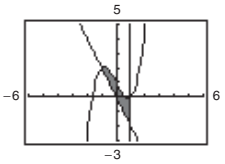
53.



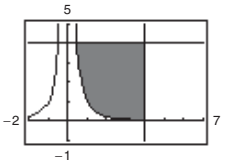
55.



57.



59.



61. $\begin{cases} x \geq 0 \\ y \geq 0 \\ y \leq 6 - x \end{cases}$

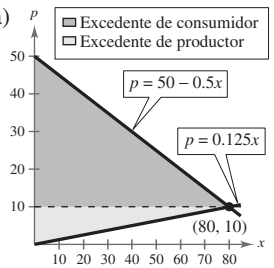
63. $\begin{cases} y \geq 4 - x \\ y \geq 2 - \frac{1}{4}x \\ x \geq 0,\ y \geq 0 \end{cases}$

65. $\begin{cases} x \geq 0 \\ y \geq 0 \\ x^2 + y^2 < 64 \end{cases}$

67. $\begin{cases} x \geq 4 \\ x \leq 9 \\ y \geq 3 \\ y \leq 9 \end{cases}$

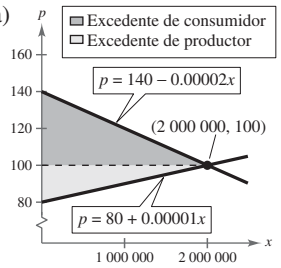
69. $\begin{cases} y \geq 0 \\ y \leq 5x \\ y \leq -x + 6 \end{cases}$

71. (a)



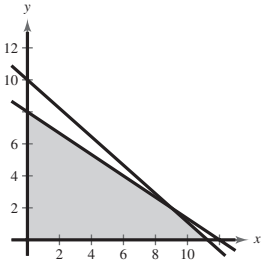
(b) Excedente de consumidor: \$1600
Excedente de productor: \$400

73. (a)

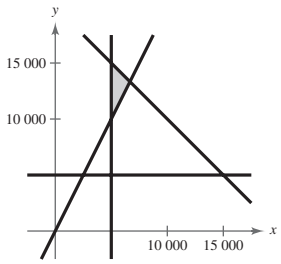


(b) Excedente de consumidor: \$40 000 000
Excedente de productor: \$20 000 000

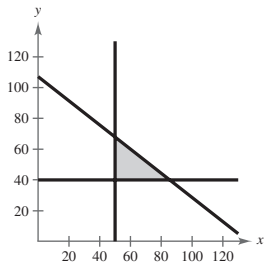
75. $\begin{cases} x + \frac{3}{2}y \leq 12 \\ \frac{4}{3}x + \frac{3}{2}y \leq 15 \\ x \geq 0 \\ y \geq 0 \end{cases}$



77. $\begin{cases} x + y \le 20\,000 \\ y \ge 2x \\ x \ge 5\,000 \\ y \ge 5\,000 \end{cases}$

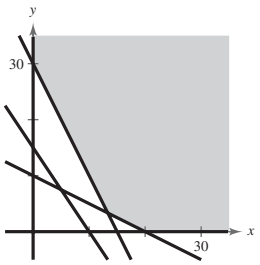


79. $\begin{cases} 55x + 70y \le 7500 \\ x \ge 50 \\ y \ge 40 \end{cases}$



81. (a) $\begin{cases} 20x + 10y \ge 300 \\ 15x + 10y \ge 150 \\ 10x + 20y \ge 200 \\ x \ge 0 \\ y \ge 0 \end{cases}$

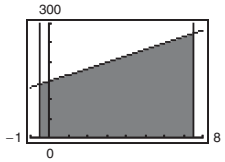
(b)



(c) Las respuestas variarán.

83. (a) $y = 16.75t + 148.4$

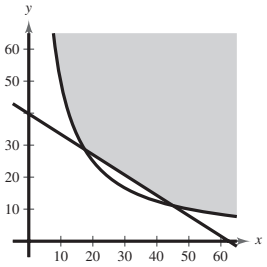
(b)



(c) \$1656.2 miles de millones

85. (a) $\begin{cases} xy \ge 500 \\ 2x + \pi y \ge 125 \\ x \ge 0 \\ y \ge 0 \end{cases}$

(b)

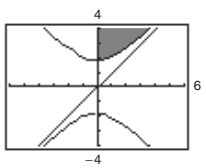


87. Falso. La gráfica muestra la solución del sistema

$$\begin{cases} y < 6 \\ -4x - 9y < 6. \\ 3x + y^2 \ge 2 \end{cases}$$

89. (a) $\begin{cases} \pi y^2 - \pi x^2 \ge 10 \\ y > x \\ x > 0 \end{cases}$

(b)



(c) La recta es una asíntota a la frontera. Cuanto más grandes sean los círculos, más cerca pueden estar los radios pero todavía satisfacen la restricción.

91. d **92.** b **93.** c **94.** a

Sección 7.6 *(página 555)*

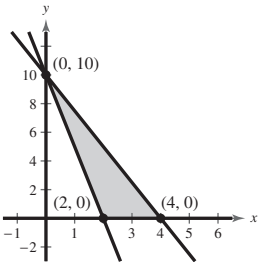
1. Optimización **3.** Objetivo **5.** Dentro; en

7. Mínimo en (0, 0): 0
Máximo en (5, 0): 20

9. Mínimo en (0, 0): 0
Máximo en (3, 4): 26

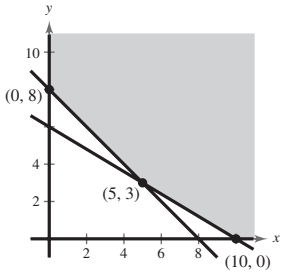
11. Mínimo en (0, 0): 0
Máximo en (60, 20): 740

13.



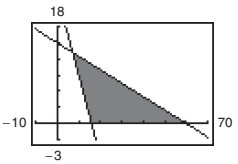
Mínimo en (2, 0): 6
Máximo en (0, 10): 20

15.



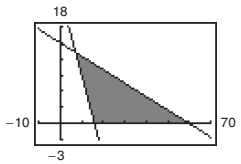
Mínimo en (5, 3): 35
No hay máximo

17.



Mínimo en (7.2, 13.2): 34.8
Máximo en (60, 0): 180

19.



Mínimo en (16, 0): 16
Máximo en cualquier punto sobre el segmento de recta que enlaza a (7.2, 13.2) y (60, 0): 60

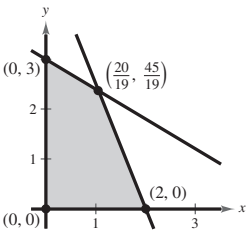
21. Mínimo en (0, 0): 0
Máximo en (3, 6): 12

23. Mínimo en (0, 0): 0
Máximo en (0, 10): 10

25. Mínimo en (0, 0): 0
Máximo en (0, 5): 25

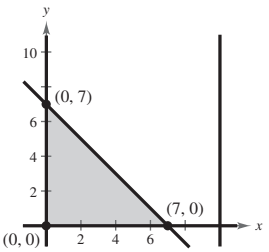
27. Mínimo en (0, 0): 0
Máximo en $\left(\frac{22}{3}, \frac{19}{6}\right)$: $\frac{271}{6}$

29.

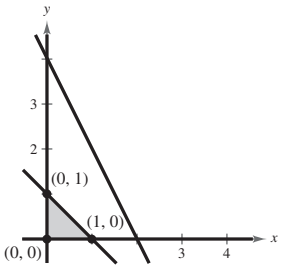


El máximo, 5, ocurre en cualquier punto sobre el segmento de recta que conecta (2, 0) y $\left(\frac{20}{19}, \frac{45}{19}\right)$. Mínimo en (0, 0): 0

31.



La restricción $x \le 10$ es extraña. Mínimo en (7, 0): -7; máximo en (0, 7): 14

33. 

La restricción $2x + y \leq 4$ es extraña. Mínimo en (0, 0): 0; máximo en (0, 1): 4

35. 230 unidades del modelo de \$225; 45 unidades del modelo de \$250
Utilidad óptima: \$8295

37. 3 bolsas de la marca X; 6 bolsas de la marca Y
Costo óptimo: \$195

39. 13 auditorías; 0 devolución de impuesto
Ingreso óptimo: \$20 800

41. \$0 en anuncios de TV; \$1 000 000 en anuncios en periódicos
Audiencia óptima: 250 millones de personas

43. \$62 500 al tipo A; \$187 500 al tipo B
Rendimiento óptimo: \$23 750

45. Verdadero. La función objetivo tiene un valor máximo en cualquier punto sobre el segmento de recta que conecta los dos vértices.

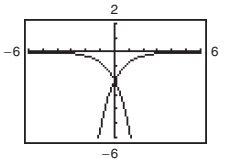
47. Verdadero. Si una función objetivo tiene un valor máximo en más de un vértice, entonces cualquier punto sobre el segmento de recta que conecta los puntos producirá el valor máximo.

Ejercicios de repaso *(página 560)*

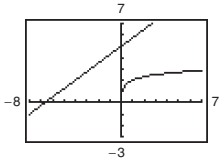
1. (1, 1) **3.** $\left(\frac{3}{2}, 5\right)$ **5.** (0.25, 0.625) **7.** (5, 4)

9. (0, 0), (2, 8), (−2, 8) **11.** (4, −2)

13. (1.41, −0.66), (−1.41, 10.66)

15. 

(0, −2)

17. 

No hay solución

19. 3847 unidades **21.** 96 m × 144 m **23.** 8 in. × 12 in.

25. $\left(\frac{5}{2}, 3\right)$ **27.** (−0.5, 0.8) **29.** (0, 0) **31.** $\left(\frac{8}{5}a + \frac{14}{5}, a\right)$

33. d, una solución, consistente

34. c, número infinito de soluciones, consistente

35. b, no hay solución, inconsistente

36. a, una solución, consistente

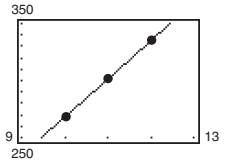
37. $\left(\frac{500\,000}{7}, \frac{159}{7}\right)$ **39.** (2, −4, −5) **41.** (−6, 7, 10)

43. $\left(\frac{24}{5}, \frac{22}{5}, -\frac{8}{5}\right)$ **45.** (3a + 4, 2a + 5, a) **47.** (1, 1, 1, 0)

49. (a − 4, a − 3, a) **51.** $y = 2x^2 + x - 5$

53. $x^2 + y^2 - 4x + 4y - 1 = 0$

55. (a) $y = 0.25x^2 + 27.95x - 36.7$

(b) 

El modelo es un buen ajuste.

(c) \$438.8 miles de millones; sí

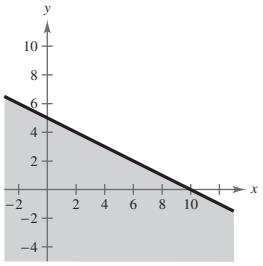
57. \$16 000 al 7%; \$13 000 al 9%; \$11 000 al 11%

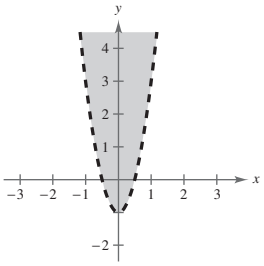
59. 4 hoyos de par 3, 10 hoyos de par 4, 4 hoyos de par 5

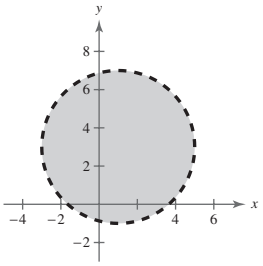
61. $\frac{A}{x} + \frac{B}{x + 20}$ **63.** $\frac{A}{x} + \frac{B}{x^2} + \frac{C}{x - 5}$

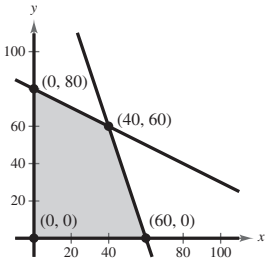
65. $\frac{3}{x + 2} - \frac{4}{x + 4}$ **67.** $1 - \frac{25}{8(x + 5)} + \frac{9}{8(x - 3)}$

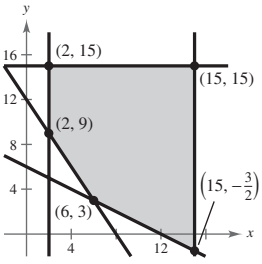
69. $\frac{1}{2}\left(\frac{3}{x - 1} - \frac{x - 3}{x^2 + 1}\right)$ **71.** $\frac{3}{x^2 + 1} + \frac{4x - 3}{(x^2 + 1)^2}$

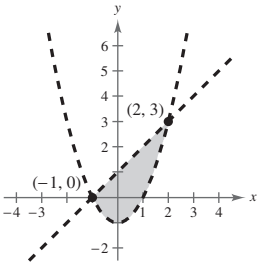
73. 

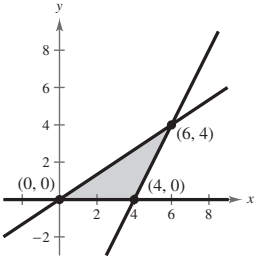
75. 

77. 

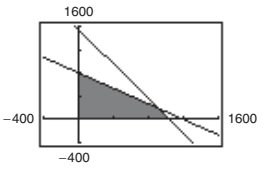
79. 

81. 

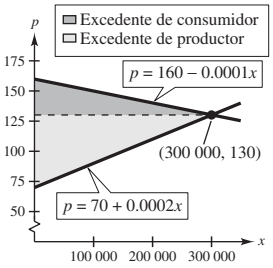
83. 

85. 

87. $\begin{cases} 20x + 30y \leq 24\,000 \\ 12x + 8y \leq 12\,400 \\ x \geq 0 \\ y \geq 0 \end{cases}$



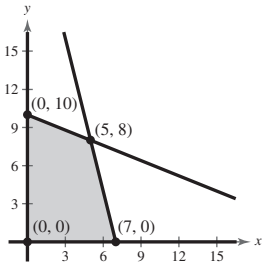
89. (a)



(b) Excedente de consumidor: \$4 500 000
Excedente de productor: \$9 000 000

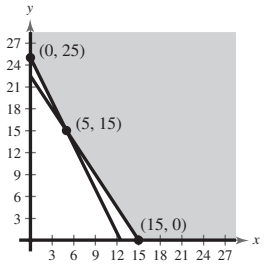
91. $\begin{cases} x \geq 3 \\ x \leq 7 \\ y \geq 1 \\ y \leq 10 \end{cases}$

93.



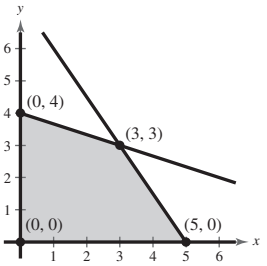
Mínimo en (0, 0): 0
Máximo en (5, 8): 47

95.



Mínimo en (15, 0): 26.25
No hay máximo

97.



Mínimo en (0, 0): 0
Máximo en (3, 3): 48

99. 72 cortes de pelo, 0 permanentes; ingreso óptimo: \$1800

101. 750 unidades del modelo A
1000 unidades del modelo B
Utilidad óptima: \$83 750

103. $\frac{2}{3}$ regular sin plomo
$\frac{1}{3}$ regular sin plomo
Costo óptimo: \$1.93

105. Falso. Para representar una región cubierta por un trapecio isósceles, los últimos dos signos de desigualdad deben ser ≤.

107. $\begin{cases} 4x + y = -22 \\ \frac{1}{2}x + y = 6 \end{cases}$

109. $\begin{cases} 3x + y = 7 \\ -6x + 3y = 1 \end{cases}$

111. $\begin{cases} x + y + z = 6 \\ x + y - z = 0 \\ x - y - z = 2 \end{cases}$

113. $\begin{cases} 2x + 2y - 3z = 7 \\ x - 2y + z = 4 \\ -x + 4y - z = -1 \end{cases}$

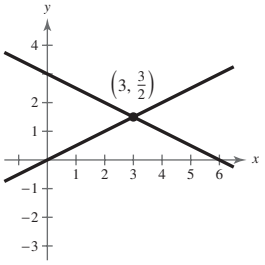
115. Un sistema inconsistente de ecuaciones lineales no tiene solución.

Examen del capítulo *(página 565)*

1. $(-4, -5)$ **2.** $(0, -1)$, $(1, 0)$, $(2, 1)$

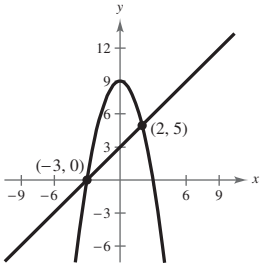
3. $(8, 4)$, $(2, -2)$

4.



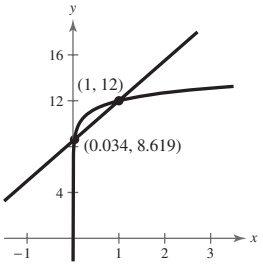
$\left(3, \frac{3}{2}\right)$

5.



$(-3, 0)$, $(2, 5)$

6.



$(1, 12)$, $(0.034, 8.619)$

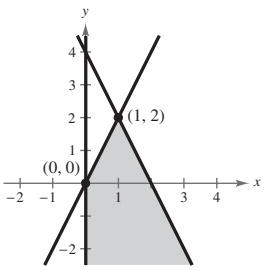
7. $(-2, -5)$ **8.** $(10, -3)$ **9.** $(2, -3, 1)$

10. No hay solución

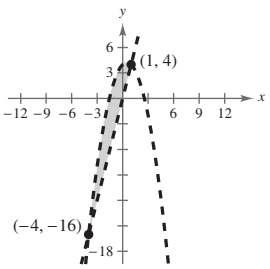
11. $-\frac{1}{x+1} + \frac{3}{x-2}$ **12.** $\frac{2}{x^2} + \frac{3}{2-x}$

13. $-\frac{5}{x} + \frac{3}{x+1} + \frac{3}{x-1}$ **14.** $-\frac{2}{x} + \frac{3x}{x^2+2}$

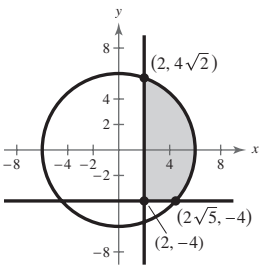
15.



16.



17.



18. Máximo en (12, 0): 240; mínimo en (0, 0): 0

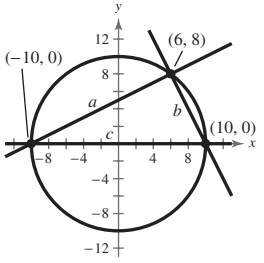
19. \$24 000 en fondo al 4%
\$26 000 en fondo al 5.5%

20. $y = -\frac{1}{2}x^2 + x + 6$

21. 0 unidades del modelo I
5300 unidades del modelo II
Utilidad óptima: \$212 000

Resolución de problemas *(página 567)*

1.



$a = 8\sqrt{5}, b = 4\sqrt{5}, c = 20$
$(8\sqrt{5})^2 + (4\sqrt{5})^2 = 20^2$
Por tanto, el triángulo es un triángulo rectángulo.

3. $ad \neq bc$ **5.** (a) Uno (b) Dos (c) Cuatro

7. 10.1 ft; alrededor de 252.7 ft **9.** \$12.00

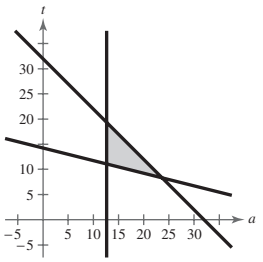
11. (a) $(3, -4)$ (b) $\left(\frac{2}{-a+5}, \frac{1}{4a-1}, \frac{1}{a}\right)$

13. (a) $\left(\frac{-5a+16}{6}, \frac{5a-16}{6}, a\right)$

(b) $\left(\frac{-11a+36}{14}, \frac{13a-40}{14}, a\right)$

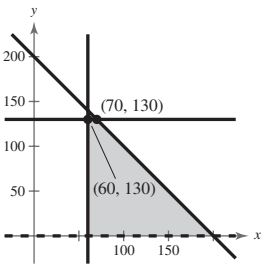
(c) $(-a+3, a-3, a)$ (d) Número infinito

15.
$$\begin{cases} a + t \leq 32 \\ 0.15a \geq 1.9 \\ 193a + 772t \geq 11\,000 \end{cases}$$



17. (a)
$$\begin{cases} x + y \leq 200 \\ x \geq 60 \\ 0 < y \leq 130 \end{cases}$$

(b)



(c) No, porque el colesterol total es mayor a 200 miligramos por decilitro.

(d) LDL: 135 mg/dL, HDL: 65 mg/dL, LDL + HDL: 200 mg/dL

(e) (75, 105); $\frac{180}{75} = 2.4 < 5$; las respuestas variarán.

Capítulo 8

Sección 8.1 *(página 579)*

1. Matriz **3.** Diagonal principal **5.** Aumentada

7. Equivalente por renglones **9.** 1×2 **11.** 3×1 **13.** 2×2

15. $\left[\begin{array}{cc|c} 4 & -3 & -5 \\ -1 & 3 & 12 \end{array}\right]$ **17.** $\left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 10 & -2 & 2 \\ 5 & -3 & 4 & 0 \\ 2 & 1 & 0 & 6 \end{array}\right]$

19. $\left[\begin{array}{ccc|c} 7 & -5 & 1 & 13 \\ 19 & 0 & -8 & 10 \end{array}\right]$ **21.** $\begin{cases} x + 2y = 7 \\ 2x - 3y = 4 \end{cases}$

23.
$$\begin{cases} 2x + 5z = -12 \\ y - 2z = 7 \\ 6x + 3y = 2 \end{cases}$$

25.
$$\begin{cases} 9x + 12y + 3z = 0 \\ -2x + 18y + 5z + 2w = 10 \\ x + 7y - 8z = -4 \\ 3x + 2z = -10 \end{cases}$$

27. $\begin{bmatrix} 1 & 4 & 3 \\ 0 & 2 & -1 \end{bmatrix}$ **29.** $\begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & -7 & -1 \end{bmatrix}$

31. $\begin{bmatrix} 1 & 0 & 14 & -11 \\ 0 & 1 & -2 & 2 \\ 0 & 0 & 1 & -7 \end{bmatrix}$

33. $\begin{bmatrix} 1 & 1 & 4 & -1 \\ 0 & 5 & -2 & 6 \\ 0 & 3 & 20 & 4 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 1 & 4 & -1 \\ 0 & 1 & -\frac{2}{5} & \frac{6}{5} \\ 0 & 3 & 20 & 4 \end{bmatrix}$

35. Sumar 5 veces el renglón 2 al renglón 1.

37. Intercambiar renglón 1 y renglón 2.
Sumar 4 veces el nuevo renglón 1 al renglón 3.

39. (a) $\begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & -5 & -10 \\ 3 & 1 & -1 \end{bmatrix}$ (b) $\begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & -5 & -10 \\ 0 & -5 & -10 \end{bmatrix}$

(c) $\begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & -5 & -10 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$ (d) $\begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$

(e) $\begin{bmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$

La matriz está en forma escalonada por renglones reducida.

41. Forma escalonada por renglones reducida

43. No en forma escalonada por renglones

45. $\begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 & 5 \\ 0 & 1 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -1 \end{bmatrix}$ **47.** $\begin{bmatrix} 1 & -1 & -1 & 1 \\ 0 & 1 & 6 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$

49. $\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$ **51.** $\begin{bmatrix} 1 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$ **53.** $\begin{bmatrix} 1 & 0 & 3 & 16 \\ 0 & 1 & 2 & 12 \end{bmatrix}$

55. $\begin{cases} x - 2y = 4 \\ y = -3 \end{cases}$ $(-2, -3)$

57.
$$\begin{cases} x - y + 2z = 4 \\ y - z = 2 \\ z = -2 \end{cases} \quad (8, 0, -2)$$

59. $(3, -4)$ **61.** $(-4, -10, 4)$ **63.** $(3, 2)$

65. $(-5, 6)$ **67.** $(-1, -4)$ **69.** $\left(\frac{1}{2}, -\frac{3}{4}\right)$

71. $(4, -3, 2)$ **73.** $(7, -3, 4)$ **75.** $(-4, -3, 6)$

77. $(0, 0)$ **79.** $(5a + 4, -3a + 2, a)$ **81.** Inconsistente

83. $(3, -2, 5, 0)$ **85.** $(0, 2 - 4a, a)$ **87.** $(1, 0, 4, -2)$

89. $(-2a, a, a, 0)$ **91.** Sí; $(-1, 1, -3)$

93. No **95.** $f(x) = -x^2 + x + 1$

97. $f(x) = -9x^2 - 5x + 11$ **99.** $f(x) = x^3 - 2x^2 + x - 1$

101. $f(x) = x^3 - 2x^2 - 4x + 1$

103. $\left[\begin{array}{cccc|c} 1 & 3 & \frac{3}{2} & \vdots & 4 \\ 0 & 1 & \frac{7}{4} & \vdots & -\frac{3}{2} \\ 0 & 0 & 1 & \vdots & 2 \end{array}\right], \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 3 & 1 & \vdots & 3 \\ 0 & 1 & 2 & \vdots & -1 \\ 0 & 0 & 1 & \vdots & 2 \end{array}\right]$

105. $\dfrac{4x^2}{(x+1)^2(x-1)} = \dfrac{1}{x-1} + \dfrac{3}{x+1} - \dfrac{2}{(x+1)^2}$

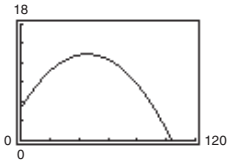
107. \$150 000 en 7%
\$750 000 en 8%
\$600 000 en 10%

109. $\begin{cases} x + 5y + 10z + 20w = 95 \\ x + y + z + w = 26 \\ y - 4z = 0 \\ x - 2y = -1 \end{cases}$ billetes de a \$1: 15; billetes de a \$5: 8; billetes de a \$10: 2; billetes de a \$20: 1

111. $y = x^2 + 2x + 5$

113. (a) $y = -0.004x^2 + 0.367x + 5$

(b)



(c) 13 ft, 104 ft (d) 13.418 ft, 103.793 ft

(e) Los resultados son similares.

115. (a) $x_1 = s$, $x_2 = t$, $x_3 = 600 - s$, $x_4 = s - t$, $x_5 = 500 - t$, $x_6 = s$, $x_7 = t$

(b) $x_1 = 0$, $x_2 = 0$, $x_3 = 600$, $x_4 = 0$, $x_5 = 500$, $x_6 = 0$, $x_7 = 0$

(c) $x_1 = 500$, $x_2 = 100$, $x_3 = 100$, $x_4 = 400$, $x_5 = 400$, $x_6 = 500$, $x_7 = 100$

117. Falso. Es una matriz de 2×4.

119. Las respuestas variarán. Por ejemplo:

$\begin{cases} x + y + 7z = -1 \\ x + 2y + 11z = 0 \\ 2x + y + 10z = -3 \end{cases}$

121. Intercambie dos renglones.
Multiplique un renglón por una constante diferente de cero.
Sume un múltiplo de un renglón a otro renglón.

123. Son los mismos.

Sección 8.2 *(página 594)*

1. Igual **3.** Cero; O

5. (a) iii (b) iv (c) i (d) v (e) ii

7. $x = -4$, $y = 22$ **9.** $x = 2$, $y = 3$

11. (a) $\begin{bmatrix} 3 & -2 \\ 1 & 7 \end{bmatrix}$ (b) $\begin{bmatrix} -1 & 0 \\ 3 & -9 \end{bmatrix}$ (c) $\begin{bmatrix} 3 & -3 \\ 6 & -3 \end{bmatrix}$

(d) $\begin{bmatrix} -1 & -1 \\ 8 & -19 \end{bmatrix}$

13. (a) $\begin{bmatrix} 9 & 5 \\ 1 & -2 \\ -3 & 15 \end{bmatrix}$ (b) $\begin{bmatrix} 7 & -7 \\ 3 & 8 \\ -5 & -5 \end{bmatrix}$ (c) $\begin{bmatrix} 24 & -3 \\ 6 & 9 \\ -12 & 15 \end{bmatrix}$

(d) $\begin{bmatrix} 22 & -15 \\ 8 & 19 \\ -14 & -5 \end{bmatrix}$

15. (a) $\begin{bmatrix} 5 & 5 & -2 & 4 & 4 \\ -5 & 10 & 0 & -4 & -7 \end{bmatrix}$

(b) $\begin{bmatrix} 3 & 5 & 0 & 2 & 4 \\ 7 & -6 & -4 & 2 & 7 \end{bmatrix}$

(c) $\begin{bmatrix} 12 & 15 & -3 & 9 & 12 \\ 3 & 6 & -6 & -3 & 0 \end{bmatrix}$

(d) $\begin{bmatrix} 10 & 15 & -1 & 7 & 12 \\ 15 & -10 & -10 & 3 & 14 \end{bmatrix}$

17. (a), (b) y (d) no es posible (c) $\begin{bmatrix} 18 & 0 & 9 \\ -3 & -12 & 0 \end{bmatrix}$

19. $\begin{bmatrix} -8 & -7 \\ 15 & -1 \end{bmatrix}$ **21.** $\begin{bmatrix} -24 & -4 & 12 \\ -12 & 32 & 12 \end{bmatrix}$

23. $\begin{bmatrix} 10 & 8 \\ -59 & 9 \end{bmatrix}$ **25.** $\begin{bmatrix} -17.143 & 2.143 \\ 11.571 & 10.286 \end{bmatrix}$

27. $\begin{bmatrix} -1.581 & -3.739 \\ -4.252 & -13.249 \\ 9.713 & -0.362 \end{bmatrix}$ **29.** $\begin{bmatrix} -6 & -9 \\ -1 & 0 \\ 17 & -10 \end{bmatrix}$

31. $\begin{bmatrix} 3 & 3 \\ -\frac{1}{2} & 0 \\ -\frac{13}{2} & \frac{11}{2} \end{bmatrix}$ **33.** No es posible

35. $\begin{bmatrix} -2 & 51 \\ -8 & 33 \\ 0 & 27 \end{bmatrix}$ **37.** $\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{7}{2} \end{bmatrix}$

Orden: 3×2 Orden: 3×3

39. $\begin{bmatrix} 60 & -20 & 10 & 60 \\ 72 & -24 & 12 & 72 \end{bmatrix}$ Orden: 2×4

41. $\begin{bmatrix} 70 & -17 & 73 \\ 32 & 11 & 6 \\ 16 & -38 & 70 \end{bmatrix}$ **43.** $\begin{bmatrix} 151 & 25 & 48 \\ 516 & 279 & 387 \\ 47 & -20 & 87 \end{bmatrix}$

45. No es posible

47. (a) $\begin{bmatrix} 0 & 15 \\ 6 & 12 \end{bmatrix}$ (b) $\begin{bmatrix} -2 & 2 \\ 31 & 14 \end{bmatrix}$ (c) $\begin{bmatrix} 9 & 6 \\ 12 & 12 \end{bmatrix}$

49. (a) $\begin{bmatrix} 0 & -10 \\ 10 & 0 \end{bmatrix}$ (b) $\begin{bmatrix} 0 & -10 \\ 10 & 0 \end{bmatrix}$ (c) $\begin{bmatrix} 8 & -6 \\ 6 & 8 \end{bmatrix}$

51. (a) $\begin{bmatrix} 7 & 7 & 14 \\ 8 & 8 & 16 \\ -1 & -1 & -2 \end{bmatrix}$ (b) $[13]$ (c) No es posible

53. $\begin{bmatrix} 5 & 8 \\ -4 & -16 \end{bmatrix}$ **55.** $\begin{bmatrix} -4 & 10 \\ 3 & 14 \end{bmatrix}$

57. (a) $\begin{bmatrix} -1 & 1 \\ -2 & 1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 4 \\ 0 \end{bmatrix}$ (b) $\begin{bmatrix} 4 \\ 8 \end{bmatrix}$

59. (a) $\begin{bmatrix} -2 & -3 \\ 6 & 1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -4 \\ -36 \end{bmatrix}$ (b) $\begin{bmatrix} -7 \\ 6 \end{bmatrix}$

61. (a) $\begin{bmatrix} 1 & -2 & 3 \\ -1 & 3 & -1 \\ 2 & -5 & 5 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 9 \\ -6 \\ 17 \end{bmatrix}$ (b) $\begin{bmatrix} 1 \\ -1 \\ 2 \end{bmatrix}$

63. (a) $\begin{bmatrix} 1 & -5 & 2 \\ -3 & 1 & -1 \\ 0 & -2 & 5 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -20 \\ 8 \\ -16 \end{bmatrix}$ (b) $\begin{bmatrix} -1 \\ 3 \\ -2 \end{bmatrix}$

65. $\begin{bmatrix} 84 & 60 & 30 \\ 42 & 120 & 84 \end{bmatrix}$

67. (a) $A = \begin{bmatrix} 125 & 100 & 75 \\ 100 & 175 & 125 \end{bmatrix}$

Los elementos representan el número de búshels de cada cosecha que son enviados a cada mercado.

(b) $B = [\$3.50 \quad \$6.00]$

Las entradas representan la utilidad por búshel de cada cosecha.

(c) $BA = [\$1037.50 \quad \$1400 \quad \$1012.50]$

Los elementos representan la utilidad de ambas cosechas en cada uno de los tres mercados.

69. $\begin{bmatrix} \$15\,770 & \$18\,300 \\ \$26\,500 & \$29\,250 \\ \$21\,260 & \$24\,150 \end{bmatrix}$

Los elementos representan el valor al mayoreo y al menudeo de los inventarios en los tres mercados.

71. $P^3 = \begin{bmatrix} 0.300 & 0.175 & 0.175 \\ 0.308 & 0.433 & 0.217 \\ 0.392 & 0.392 & 0.608 \end{bmatrix}$

$P^4 = \begin{bmatrix} 0.250 & 0.188 & 0.188 \\ 0.315 & 0.377 & 0.248 \\ 0.435 & 0.435 & 0.565 \end{bmatrix}$

$P^5 = \begin{bmatrix} 0.225 & 0.194 & 0.194 \\ 0.314 & 0.345 & 0.267 \\ 0.461 & 0.461 & 0.539 \end{bmatrix}$

$P^6 = \begin{bmatrix} 0.213 & 0.197 & 0.197 \\ 0.311 & 0.326 & 0.280 \\ 0.477 & 0.477 & 0.523 \end{bmatrix}$

$P^7 = \begin{bmatrix} 0.206 & 0.198 & 0.198 \\ 0.308 & 0.316 & 0.288 \\ 0.486 & 0.486 & 0.514 \end{bmatrix}$

$P^8 = \begin{bmatrix} 0.203 & 0.199 & 0.199 \\ 0.305 & 0.309 & 0.292 \\ 0.492 & 0.492 & 0.508 \end{bmatrix}$

Se aproxima a la matriz $\begin{bmatrix} 0.2 & 0.2 & 0.2 \\ 0.3 & 0.3 & 0.3 \\ 0.5 & 0.5 & 0.5 \end{bmatrix}$

73. (a) $\begin{array}{c} \text{Ventas \$} \quad \text{Utilidad} \\ \begin{bmatrix} 571.8 & 206.6 \\ 798.9 & 288.8 \\ 936 & 337.8 \end{bmatrix} \end{array}$

Los elementos representan el total de ventas y utilidades por leche el viernes, sábado y domingo.

(b) \$833.20

75. (a) $[2 \quad 0.5 \quad 3]$

(b) $\begin{array}{c} \text{120 lb} \quad \text{150 lb} \\ [473.5 \quad 588.5] \end{array}$

Los elementos representan el total de calorías quemadas

77. Verdadero. La suma de dos matrices de órdenes diferentes no está definida.

79. No es posible **81.** No es posible

83. 2×2 **85.** 2×3

87. (a) $A + B = \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ 12 & 8 \end{bmatrix}$, $B + A = \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ 12 & 8 \end{bmatrix}$

(b) $(A + B) + C = \begin{bmatrix} 6 & 1 \\ 14 & 2 \end{bmatrix}$, $(B + C) + A = \begin{bmatrix} 6 & 1 \\ 14 & 2 \end{bmatrix}$

(c) $2A + 2B = \begin{bmatrix} 2 & -2 \\ 24 & 16 \end{bmatrix}$, $2(A + B) = \begin{bmatrix} 2 & -2 \\ 24 & 16 \end{bmatrix}$

89. $AC = BC = \begin{bmatrix} 2 & 3 \\ 2 & 3 \end{bmatrix}$

91. AB es una matriz diagonal cuyos elementos son los productos de los elementos correspondientes de A y B.

93. Las respuestas variarán.

Sección 8.3 *(página 605)*

1. Cuadrada **3.** No singular; singular

5–11. $AB = I$ y $BA = I$

13. $\begin{bmatrix} \frac{1}{2} & 0 \\ 0 & \frac{1}{3} \end{bmatrix}$ **15.** $\begin{bmatrix} -3 & 2 \\ -2 & 1 \end{bmatrix}$ **17.** $\begin{bmatrix} 1 & -\frac{1}{2} \\ -2 & \frac{3}{2} \end{bmatrix}$

19. $\begin{bmatrix} 1 & 1 & -1 \\ -3 & 2 & -1 \\ 3 & -3 & 2 \end{bmatrix}$ **21.** No existe

23. $\begin{bmatrix} -\frac{1}{8} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1}{4} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -\frac{1}{5} \end{bmatrix}$ **25.** $\begin{bmatrix} -175 & 37 & -13 \\ 95 & -20 & 7 \\ 14 & -3 & 1 \end{bmatrix}$

27. $\begin{bmatrix} -1.5 & 1.5 & 1 \\ 4.5 & -3.5 & -3 \\ -1 & 1 & 1 \end{bmatrix}$ **29.** $\begin{bmatrix} -12 & -5 & -9 \\ -4 & -2 & -4 \\ -8 & -4 & -6 \end{bmatrix}$

31. $\begin{bmatrix} 0 & -1.\overline{81} & 0.\overline{90} \\ -10 & 5 & 5 \\ 10 & -2.\overline{72} & -3.\overline{63} \end{bmatrix}$ **33.** $\begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ 2 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 2 \end{bmatrix}$

35. $\begin{bmatrix} \frac{5}{13} & -\frac{3}{13} \\ \frac{1}{13} & \frac{2}{13} \end{bmatrix}$ **37.** No existe **39.** $\begin{bmatrix} \frac{16}{59} & \frac{15}{59} \\ -\frac{4}{59} & \frac{70}{59} \end{bmatrix}$

41. $(5, 0)$ **43.** $(-8, -6)$ **45.** $(3, 8, -11)$

47. $(2, 1, 0, 0)$ **49.** $(0, 1, 2, -1, 0)$ **51.** $(2, -2)$

53. No hay solución **55.** $(-4, -8)$ **57.** $(-1, 3, 2)$

59. $\left(\frac{5}{16}a + \frac{13}{16}, \frac{19}{16}a + \frac{11}{16}, a\right)$ **61.** $(-7, 3, -2)$

63. $A^{-1} = \begin{bmatrix} \operatorname{sen}\theta & -\cos\theta \\ \cos\theta & \operatorname{sen}\theta \end{bmatrix}$

65. \$7000 en bonos clase AAA
\$1000 en bonos clase A
\$2000 en bonos clase B

67. \$9000 en bonos clase AAA
\$1000 en bonos clase A
\$2000 en bonos clase B

69. 0 molletes, 300 huesos, 200 galletas

71. 100 molletes, 300 huesos, 150 galletas

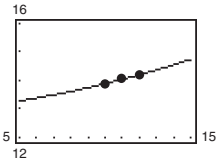
73. (a) $\begin{cases} 2f + 2.5h + 3s = 26 \\ f + h + s = 10 \\ h - s = 0 \end{cases}$

(b) $\begin{bmatrix} 2 & 2.5 & 3 \\ 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} f \\ h \\ s \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 26 \\ 10 \\ 0 \end{bmatrix}$

(c) 2 libras de vainilla francesa, 4 libras de avellanas, 4 libras de chocolate suizo

75. (a) $\begin{cases} 100a + 10b + c = 13.89 \\ 121a + 11b + c = 14.04 \\ 144a + 12b + c = 14.20 \end{cases}$

(b) $y = 0.005t^2 + 0.045t + 12.94$

(c) 

(d) Lo es para el futuro inmediato, pero no para predicciones de largo plazo.

77. Verdadero. Si B es la inversa de A, entonces $AB = I = BA$.

79. Las respuestas variarán.

81. (a) Las respuestas variarán.

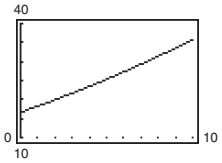
(b) $A^{-1} = \begin{bmatrix} \frac{1}{a_{11}} & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & \frac{1}{a_{22}} & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1}{a_{33}} & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \cdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & \frac{1}{a_{nn}} \end{bmatrix}$

Sección 8.4 *(página 613)*

1. Determinante **3.** Cofactor **5.** 4 **7.** 16 **9.** 28
11. 0 **13.** 6 **15.** -9 **17.** -24 **19.** $\frac{11}{6}$
21. -0.002 **23.** -4.842
25. (a) $M_{11} = -6, M_{12} = 3, M_{21} = 5, M_{22} = 4$
(b) $C_{11} = -6, C_{12} = -3, C_{21} = -5, C_{22} = 4$
27. (a) $M_{11} = -4, M_{12} = -2, M_{21} = 1, M_{22} = 3$
(b) $C_{11} = -4, C_{12} = 2, C_{21} = -1, C_{22} = 3$
29. (a) $M_{11} = 3, M_{12} = -4, M_{13} = 1, M_{21} = 2, M_{22} = 2, M_{23} = -4, M_{31} = -4, M_{32} = 10, M_{33} = 8$
(b) $C_{11} = 3, C_{12} = 4, C_{13} = 1, C_{21} = -2, C_{22} = 2, C_{23} = 4, C_{31} = -4, C_{32} = -10, C_{33} = 8$
31. (a) $M_{11} = 10, M_{12} = -43, M_{13} = 2, M_{21} = -30, M_{22} = 17, M_{23} = -6, M_{31} = 54, M_{32} = -53, M_{33} = -34$
(b) $C_{11} = 10, C_{12} = 43, C_{13} = 2, C_{21} = 30, C_{22} = 17, C_{23} = 6, C_{31} = 54, C_{32} = 53, C_{33} = -34$
33. (a) -75 (b) -75 **35.** (a) 96 (b) 96
37. (a) 170 (b) 170 **39.** 0 **41.** 0 **43.** -9
45. -58 **47.** -30 **49.** -168 **51.** 0 **53.** 412
55. -126 **57.** 0 **59.** -336 **61.** 410
63. (a) -3 (b) -2 (c) $\begin{bmatrix} -2 & 0 \\ 0 & -3 \end{bmatrix}$ (d) 6
65. (a) -8 (b) 0 (c) $\begin{bmatrix} -4 & 4 \\ 1 & -1 \end{bmatrix}$ (d) 0
67. (a) -21 (b) -19 (c) $\begin{bmatrix} 7 & 1 & 4 \\ -8 & 9 & -3 \\ 7 & -3 & 9 \end{bmatrix}$ (d) 399
69. (a) 2 (b) -6 (c) $\begin{bmatrix} 1 & 4 & 3 \\ -1 & 0 & 3 \\ 0 & 2 & 0 \end{bmatrix}$ (d) -12
71–75. Las respuestas variarán. **77.** $x = \pm 2$
79. $x = 1 \pm \sqrt{2}$ **81.** $-1, 4$ **83.** $-1, -4$
85. $8uv - 1$ **87.** e^{5x} **89.** $1 - \ln x$
91. Verdadero. Si todo un renglón es cero, entonces cada cofactor de la expansión es multiplicado por cero.
93. Las respuestas variarán.
95. Una matriz cuadrada es un arreglo cuadrado de números. El determinante de una matriz cuadrada es un número real.
97. (a) Las columnas 2 y 3 de A se intercambiaron. $|A| = -115 = -|B|$
(b) Los renglones 1 y 3 de A se intercambiaron. $|A| = -40 = -|B|$
99. (a) Multiplique el renglón 1 por 5.
(b) Multiplique la columna 2 por 4 y la columna 3 por 3.
101. 10 **103.** -9
105. El determinante de una matriz triangular es el producto de los términos de la diagonal.

Sección 8.5 *(página 625)*

1. Regla de Cramer
3. $A = \pm\frac{1}{2}\begin{vmatrix} x_1 & y_1 & 1 \\ x_2 & y_2 & 1 \\ x_3 & y_3 & 1 \end{vmatrix}$
5. No codificado; codificado **7.** $(-3, -2)$ **9.** No es posible
11. $\left(\frac{32}{7}, \frac{30}{7}\right)$ **13.** $(-1, 3, 2)$ **15.** $(-2, 1, -1)$
17. $\left(0, -\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right)$ **19.** $(1, -1, 2)$ **21.** 7 **23.** 14
25. $\frac{33}{8}$ **27.** $\frac{5}{2}$ **29.** 28 **31.** $\frac{41}{4}$ **33.** $y = \frac{16}{5}$ o $y = 0$
35. $y = -3$ o $y = -11$ **37.** 250 mi^2
39. Colineal **41.** No colineal **43.** Colineal
45. $y = -3$ **47.** $3x - 5y = 0$ **49.** $x + 3y - 5 = 0$
51. $2x + 3y - 8 = 0$
53. (a) Decodificada: [3 15], [13 5], [0 8], [15 13], [5 0], [19 15], [15 14]
(b) Codificado: 48 81 28 51 24 40 54 95 5 10 64 113 57 100
55. (a) No codificada: [3 1 12], [12 0 13], [5 0 20], [15 13 15], [18 18 15], [23 0 0]
(b) Decodificada: -68 21 35 -66 14 39 -115 35 60 -62 15 32 -54 12 27 23 -23 0
57. 1 -25 -65 17 15 -9 -12 -62 -119 27 51 48 43 67 48 57 111 117
59. -5 -41 -87 91 207 257 11 -5 -41 40 80 84 76 177 227
61. HAPPY NEW YEAR **63.** CLASS IS CANCELED
65. SEND PLANES **67.** MEET ME TONIGHT RON
69. (a) $\begin{cases} 8c + 28b + 140a = 182.1 \\ 28c + 140b + 784a = 713.4 \\ 140c + 784b + 4676a = 3724.8 \end{cases}$
(b) $y = 0.034t^2 + 1.57t + 16.66$

(c) 

(d) 2009

71. Falso. El denominador es el determinante de la matriz de coeficientes.

73. Falso. Si el determinante de la matriz de coeficientes es cero, el sistema no tiene solución o tiene un número infinito de soluciones.

75. Las respuestas variarán. **77.** 12

Ejercicios de repaso *(página 630)*

1. 3×1 **3.** 1×1 **5.** $\begin{bmatrix} 3 & -10 & \vdots & 15 \\ 5 & 4 & \vdots & 22 \end{bmatrix}$

7. $\begin{cases} 5x + y + 7z = -9 \\ 4x + 2y = 10 \\ 9x + 4y + 2z = 3 \end{cases}$ **9.** $\begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$

11. $\begin{cases} x + 2y + 3z = 9 \\ y - 2z = 2 \\ z = 0 \end{cases}$ **13.** $\begin{cases} x - 5y + 4z = 1 \\ y + 2z = 3 \\ z = 4 \end{cases}$

(5, 2, 0) $(-40, -5, 4)$

15. $(10, -12)$ **17.** $\left(-\frac{1}{5}, \frac{7}{10}\right)$ **19.** Inconsistente

21. $(1, -2, 2)$ **23.** $\left(-2a + \frac{3}{2}, 2a + 1, a\right)$

25. $(5, 2, -6)$ **27.** $(1, 0, 4, 3)$ **29.** $(1, 2, 2)$

31. $(2, -3, 3)$ **33.** $(2, 3, -1)$ **35.** $(2, 6, -10, -3)$

37. $x = 12, y = -7$ **39.** $x = 1, y = 11$

41. (a) $\begin{bmatrix} -1 & 8 \\ 15 & 13 \end{bmatrix}$ (b) $\begin{bmatrix} 5 & -12 \\ -9 & -3 \end{bmatrix}$

(c) $\begin{bmatrix} 8 & -8 \\ 12 & 20 \end{bmatrix}$ (d) $\begin{bmatrix} -7 & 28 \\ 39 & 29 \end{bmatrix}$

43. (a) $\begin{bmatrix} 5 & 7 \\ -3 & 14 \\ 31 & 42 \end{bmatrix}$ (b) $\begin{bmatrix} 5 & 1 \\ -11 & -10 \\ -9 & -38 \end{bmatrix}$

(c) $\begin{bmatrix} 20 & 16 \\ -28 & 8 \\ 44 & 8 \end{bmatrix}$ (d) $\begin{bmatrix} 5 & 13 \\ 5 & 38 \\ 71 & 122 \end{bmatrix}$

45. $\begin{bmatrix} 17 & -17 \\ 13 & 2 \end{bmatrix}$ **47.** $\begin{bmatrix} 54 & 4 \\ -2 & 24 \\ -4 & 32 \end{bmatrix}$ **49.** $\begin{bmatrix} 48 & -18 & -3 \\ 15 & 51 & 33 \end{bmatrix}$

51. $\begin{bmatrix} -11 & -6 \\ 8 & -13 \\ -18 & -8 \end{bmatrix}$ **53.** $\begin{bmatrix} 3 & \frac{2}{3} \\ -\frac{4}{3} & \frac{11}{3} \\ \frac{10}{3} & 0 \end{bmatrix}$ **55.** $\begin{bmatrix} -30 & 4 \\ 51 & 70 \end{bmatrix}$

57. $\begin{bmatrix} 100 & 220 \\ 12 & -4 \\ 84 & 212 \end{bmatrix}$ **59.** $\begin{bmatrix} 14 & -2 & 8 \\ 14 & -10 & 40 \\ 36 & -12 & 48 \end{bmatrix}$ **61.** $\begin{bmatrix} 44 & 4 \\ 20 & 8 \end{bmatrix}$

63. No es posible. El número de columnas de la primera matriz no es igual al número de renglones de la segunda matriz.

65. $\begin{bmatrix} 1 & 17 \\ 12 & 36 \end{bmatrix}$

67. $\begin{bmatrix} 14 & -22 & 22 \\ 19 & -41 & 80 \\ 42 & -66 & 66 \end{bmatrix}$ **69.** $\begin{bmatrix} 76 & 114 & 133 \\ 38 & 95 & 76 \end{bmatrix}$

71. [\$2 396 539 \$2 581 388]
La mercancía enviada al almacén 1 vale \$2 396 539 y la enviada al almacén 2 vale \$2 581 388.

73–75. $AB = I$ y $BA = I$

77. $\begin{bmatrix} 4 & -5 \\ 5 & -6 \end{bmatrix}$ **79.** $\begin{bmatrix} \frac{1}{2} & -1 & -\frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & -\frac{2}{3} & -\frac{5}{6} \\ 0 & \frac{2}{3} & \frac{1}{3} \end{bmatrix}$

81. $\begin{bmatrix} 13 & 6 & -4 \\ -12 & -5 & 3 \\ 5 & 2 & -1 \end{bmatrix}$ **83.** $\begin{bmatrix} -3 & 6 & -5.5 & 3.5 \\ 1 & -2 & 2 & -1 \\ 7 & -15 & 14.5 & -9.5 \\ -1 & 2.5 & -2.5 & 1.5 \end{bmatrix}$

85. $\begin{bmatrix} 1 & -1 \\ 4 & -\frac{7}{2} \end{bmatrix}$ **87.** No existe

89. $\begin{bmatrix} 2 & \frac{20}{3} \\ \frac{1}{10} & \frac{1}{6} \end{bmatrix}$ **91.** $\begin{bmatrix} \frac{20}{9} & \frac{5}{9} \\ -\frac{10}{9} & -\frac{25}{9} \end{bmatrix}$ **93.** (36, 11)

95. $(-6, -1)$ **97.** $(2, 3)$ **99.** $(-8, 18)$

101. $(2, -1, -2)$ **103.** $(6, 1, -1)$ **105.** $(-3, 1)$

107. $\left(\frac{1}{6}, -\frac{7}{4}\right)$ **109.** $(1, 1, -2)$ **111.** -42 **113.** 550

115. (a) $M_{11} = 4, M_{12} = 7, M_{21} = -1, M_{22} = 2$
(b) $C_{11} = 4, C_{12} = -7, C_{21} = 1, C_{22} = 2$

117. (a) $M_{11} = 30, M_{12} = -12, M_{13} = -21,$
$M_{21} = 20, M_{22} = 19, M_{23} = 22, M_{31} = 5,$
$M_{32} = -2, M_{33} = 19$
(b) $C_{11} = 30, C_{12} = 12, C_{13} = -21,$
$C_{21} = -20, C_{22} = 19, C_{23} = -22,$
$C_{31} = 5, C_{32} = 2, C_{33} = 19$

119. -6 **121.** 15 **123.** 130 **125.** -8 **127.** 279

129. (4, 7) **131.** $(-1, 4, 5)$ **133.** 16 **135.** 10

137. Colineal **139.** $x - 2y + 4 = 0$

141. $2x + 6y - 13 = 0$

143. (a) Decodificada: [12 15 15], [11 0 15], [21 20 0], [2 5 12], [15 23 0]
(b) Codificada: -21 6 0 -68 8 45 102 -42 -60 -53 20 21 99 -30 -69

145. SEE YOU FRIDAY

147. Falso. La matriz debe ser cuadrada.

149. Aparece un mensaje de error porque $1(6) - (-2)(-3) = 0$.

151. Si A es una matriz cuadrada, el cofactor C_{ij} del elemento a_{ij} es $(-1)^{i+j}M_{ij}$, donde M_{ij} es el determinante obtenido al borrar el i-ésimo renglón y la j-ésima columna de A. El determinante de A es la suma de los elementos de cualquier renglón o columna de A multiplicados por sus respectivos cofactores.

153. La parte de la matriz correspondiente a los coeficientes del sistema se reduce a una matriz en la que el número de renglones con elementos diferentes de cero es el mismo que el número de variables.

Examen del capítulo *(página 635)*

1. $\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$ **2.** $\begin{bmatrix} 1 & 0 & -1 & 2 \\ 0 & 1 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$

3. $\left[\begin{array}{ccc|c} 4 & 3 & -2 & 14 \\ -1 & -1 & 2 & -5 \\ 3 & 1 & -4 & 8 \end{array}\right]$, $\left(1, 3, -\frac{1}{2}\right)$

4. (a) $\begin{bmatrix} 1 & 5 \\ 0 & -4 \end{bmatrix}$ (b) $\begin{bmatrix} 18 & 15 \\ -15 & -15 \end{bmatrix}$

(c) $\begin{bmatrix} 8 & 15 \\ -5 & -13 \end{bmatrix}$ (d) $\begin{bmatrix} 5 & -5 \\ 0 & 5 \end{bmatrix}$

5. $\begin{bmatrix} \frac{2}{7} & \frac{3}{7} \\ \frac{5}{7} & \frac{4}{7} \end{bmatrix}$ **6.** $\begin{bmatrix} -\frac{5}{2} & 4 & -3 \\ 5 & -7 & 6 \\ 4 & -6 & 5 \end{bmatrix}$

7. (12, 18) **8.** -112 **9.** 29 **10.** 43

11. $(-3, 5)$ **12.** $(-2, 4, 6)$ **13.** 7

14. Decodificada: [11 14 15], [3 11 0], [15 14 0], [23 15 15], [4 0 0]

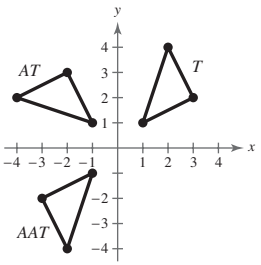
Codificada: 115 −41 −59 14 −3 −11 29 −15 −14 128 −53 −60 4 −4 0

15. 75 L de solución al 60%, 25 L de solución al 20%

Resolución de problemas *(página 637)*

1. (a) $AT = \begin{bmatrix} -1 & -4 & -2 \\ 1 & 2 & 3 \end{bmatrix}$

$AAT = \begin{bmatrix} -1 & -2 & -3 \\ -1 & -4 & -2 \end{bmatrix}$



A representa un giro levógiro.

(b) *AAT* se gira 90° en el sentido de giro de las manecillas de un reloj para obtener *AT*. *AT* se gira entonces en el mismo sentido para obtener *T*.

3. (a) Sí (b) No (c) No (d) No

5. (a) Sistema satelital Gold: 28 750 suscriptores
Red satelital Galaxy: 35 750 suscriptores
No suscriptores: 35 500
Las respuestas variarán.

(b) Sistema satelital Gold: 30 813 suscriptores
Red satelital Galaxy: 39 675 suscriptores
No suscriptores: 29 513
Las respuestas variarán.

(c) Sistema satelital Gold: 31 947 suscriptores
Red satelital Galaxy: 42 329 suscriptores
No suscriptores: 25 724
Las respuestas variarán.

(d) Las compañías satelitales están aumentando el número de suscriptores, en tanto que los no suscriptores están disminuyendo.

7. $x = 6$ **9–11.** Las respuestas variarán.

13. Azufre: 32 unidades de masa atómica
Nitrógeno: 14 unidades de masa atómica
Flúor: 19 unidades de masa atómica

15. $A^T = \begin{bmatrix} -1 & 2 \\ 1 & 0 \\ -2 & 1 \end{bmatrix}$ $B^T = \begin{bmatrix} -3 & 1 & 1 \\ 0 & 2 & -1 \end{bmatrix}$

$(AB)^T = \begin{bmatrix} 2 & -5 \\ 4 & -1 \end{bmatrix} = B^T A^T$

17. (a) $A^{-1} = \begin{bmatrix} 1 & -2 \\ 1 & -3 \end{bmatrix}$ (b) JOHN RETURN TO BASE

19. $|A| = 0$

Capítulo 9

Sección 9.1 *(página 647)*

1. Sucesión infinita **3.** Finita **5.** Factorial

7. Índice; superior; inferior **9.** 7, 9, 11, 13, 15

11. 2, 4, 8, 16, 32 **13.** $-2, 4, -8, 16, -32$

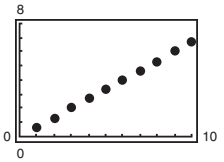
15. $3, 2, \frac{5}{3}, \frac{3}{2}, \frac{7}{5}$ **17.** $3, \frac{12}{11}, \frac{9}{13}, \frac{24}{47}, \frac{15}{37}$ **19.** $0, 1, 0, \frac{1}{2}, 0$

21. $\frac{5}{3}, \frac{17}{9}, \frac{53}{27}, \frac{161}{81}, \frac{485}{243}$ **23.** $1, \frac{1}{2^{3/2}}, \frac{1}{3^{3/2}}, \frac{1}{8}, \frac{1}{5^{3/2}}$

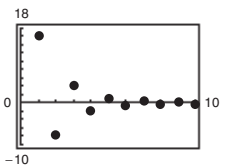
25. $-1, \frac{1}{4}, -\frac{1}{9}, \frac{1}{16}, -\frac{1}{25}$ **27.** $\frac{2}{3}, \frac{2}{3}, \frac{2}{3}, \frac{2}{3}, \frac{2}{3}$ **29.** 0, 0, 6, 24, 60

31. $\frac{1}{2}, -\frac{1}{5}, \frac{1}{10}, -\frac{1}{17}, \frac{1}{26}$ **33.** -73 **35.** $\frac{44}{239}$

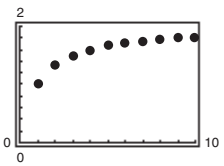
37.



39.



41.



43. c **44.** b **45.** d **46.** a

47. $a_n = 3n - 2$ **49.** $a_n = n^2 - 1$

51. $a_n = \dfrac{(-1)^n(n+1)}{n+2}$ **53.** $a_n = \dfrac{n+1}{2n-1}$ **55.** $a_n = \dfrac{1}{n^2}$

57. $a_n = (-1)^{n+1}$ **59.** $a_n = (-1)^n + 2$ **61.** $a_n = 1 + \dfrac{1}{n}$

63. 28, 24, 20, 16, 12 **65.** 3, 4, 6, 10, 18

67. 6, 8, 10, 12, 14; $a_n = 2n + 4$

69. 81, 27, 9, 3, 1; $a_n = \dfrac{243}{3^n}$

71. $1, 1, \frac{1}{2}, \frac{1}{6}, \frac{1}{24}$ **73.** $1, \frac{1}{2}, \frac{1}{6}, \frac{1}{24}, \frac{1}{120}$

75. $1, \frac{1}{2}, \frac{1}{24}, \frac{1}{720}, \frac{1}{40\,320}$ **77.** $\frac{1}{30}$ **79.** 495 **81.** $n + 1$

83. $\dfrac{1}{2n(2n+1)}$ **85.** 35 **87.** 40 **89.** 30 **91.** $\frac{9}{5}$

93. 88 **95.** 30 **97.** $\frac{6508}{3465}$ **99.** $\frac{47}{60}$ **101.** 1.33

103. $\sum_{i=1}^{9} \frac{1}{3i}$ **105.** $\sum_{i=1}^{8} \left[2\left(\frac{i}{8}\right) + 3\right]$ **107.** $\sum_{i=1}^{6} (-1)^{i+1} 3^i$

109. $\sum_{i=1}^{20} \frac{(-1)^{i+1}}{i^2}$ **111.** $\sum_{i=1}^{5} \frac{2^i - 1}{2^{i+1}}$ **113.** $\frac{75}{16}$ **115.** $-\frac{3}{2}$

117. $\frac{2}{3}$ **119.** $\frac{7}{9}$

121. (a) $A_1 = \$25\,145.83$, $A_2 = \$25\,292.52$, $A_3 = \$25\,440.06$, $A_4 = \$25\,588.46$, $A_5 = \$25\,737.72$, $A_6 = \$25\,887.86$

(b) \$35 440.63 (c) No; $A_{120} = \$50\,241.53$

123. (a) $b_n = 76.4n + 380$

(b) $c_n = 2.18n^2 + 56.8n + 418$

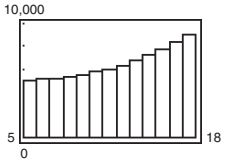
(c)

n	2	3	4	5	6	7
a_n	548	595	668	786	822	923
b_n	533	609	686	762	838	915
c_n	540	608	680	757	837	922

El modelo cuadrático se ajusta mejor.

(d) El modelo cuadrático; 1524

125. (a) $a_5 = \$5057.7$, $a_6 = \$5128.9$, $a_7 = \$5226.6$, $a_8 = \$5357.4$, $a_9 = \$5527.9$, $a_{10} = \$5744.5$, $a_{11} = \$6013.9$, $a_{12} = \$6342.5$, $a_{13} = \$6737.0$, $a_{14} = \$7203.8$, $a_{15} = \$7749.5$, $a_{16} = \$8380.7$, $a_{17} = \$9103.8$



(b) La deuda federal es creciente.

127. Verdadero por las propiedades de sumas

129. 1, 1, 2, 3, 5, 8, 13, 21, 34, 55, 89, 144

1, 2, $\frac{3}{2}$, $\frac{5}{3}$, $\frac{8}{5}$, $\frac{13}{8}$, $\frac{21}{13}$, $\frac{34}{21}$, $\frac{55}{34}$, $\frac{89}{55}$

131. \$500.95 **133.** Prueba **135.** $x, \frac{x^2}{2}, \frac{x^3}{6}, \frac{x^4}{24}, \frac{x^5}{120}$

137. $-\frac{x^2}{2}, \frac{x^4}{24}, -\frac{x^6}{720}, \frac{x^8}{40\,320}, -\frac{x^{10}}{3\,628\,800}$

139. $\frac{1}{3}, -\frac{1}{5}, \frac{1}{7}, -\frac{1}{9}, \frac{1}{11}$; no, los signos son contrarios.

141. (a)

Número de caras azules del cubo	0	1	2	3
$3 \times 3 \times 3$	1	6	12	8

(b)

Número de caras azules del cubo	0	1	2	3
$4 \times 4 \times 4$	8	24	24	8
$5 \times 5 \times 5$	27	54	36	8
$6 \times 6 \times 6$	64	96	48	8

(c) Las diferentes columnas cambian a diferente ritmo.

(d)

Número de caras azules del cubo	0	1	2	3
$n \times n \times n$	$(n-2)^3$	$6(n-2)^2$	$12(n-2)$	8

Sección 9.2 *(página 657)*

1. Aritmética; común **3.** Recursión

5. Sucesión aritmética, $d = -2$

7. No una sucesión aritmética

9. Sucesión aritmética, $d = -\frac{1}{4}$

11. Sucesión aritmética, $d = 0.6$

13. No una sucesión aritmética

15. 8, 11, 14, 17, 20

Sucesión aritmética, $d = 3$

17. 7, 3, −1, −5, −9

Sucesión aritmética, $d = -4$

19. −1, 1, −1, 1, −1

No es una sucesión aritmética

21. $-3, \frac{3}{2}, -1, \frac{3}{4}, -\frac{3}{5}$

No es una sucesión aritmética

23. $a_n = 3n - 2$ **25.** $a_n = -8n + 108$

27. $a_n = -\frac{5}{2}n + \frac{13}{2}$ **29.** $a_n = \frac{10}{3}n + \frac{5}{3}$

31. $a_n = -3n + 103$ **33.** 5, 11, 17, 23, 29

35. −2.6, −3.0, −3.4, −3.8, −4.2 **37.** 2, 6, 10, 14, 18

39. −2, 2, 6, 10, 14 **41.** 15, 19, 23, 27, 31

43. 200, 190, 180, 170, 160 **45.** $\frac{5}{8}, \frac{1}{2}, \frac{3}{8}, \frac{1}{4}, \frac{1}{8}$ **47.** 59

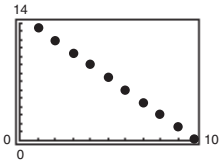
49. 18.6 **51.** 110 **53.** −25 **55.** 2550

57. −4585 **59.** 620 **61.** 17.4 **63.** 265

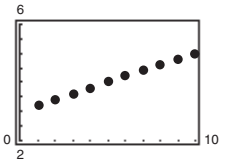
65. 4000 **67.** 1275 **69.** 30,030 **71.** 355

73. 129,250 **75.** b **76.** d **77.** c **78.** a

79.



81.



83. 440 **85.** 2575 **87.** 14 268

89. (a) \$40 000 (b) \$217 500

91. 2340 asientos **93.** 405 ladrillos **95.** 490 m

97. (a) $a_n = -25n + 225$ (b) \$900

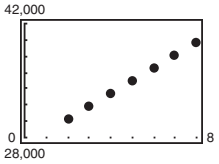
99. \$70 500; las respuestas variarán.

101. (a)

Mes	1	2	3	4	5	6
Pago mensual	\$220	\$218	\$216	\$214	\$212	\$210
Saldo sin pagar	\$1800	\$1600	\$1400	\$1200	\$1000	\$800

(b) \$110

103. (a) $a_n = 1594n + 27\,087$

(b) 

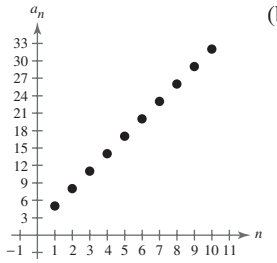
(c) $41 433

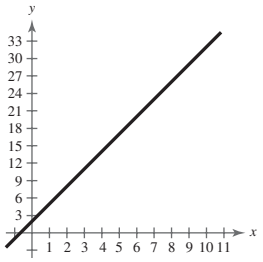
(d) Las respuestas variarán.

105. Verdadero. Dadas a_1 y a_2, $d = a_2 - a_1$ y $a_n = a_1 + (n-1)d$.

107. x, $3x$, $5x$, $7x$, $9x$, $11x$, $13x$, $15x$, $17x$, $19x$

109. Sume el primer término a $(n-1)$ veces la diferencia común.

111. (a) 

(b) 

(c) La gráfica de $y = 3x + 2$ contiene todos los puntos sobre la recta. La gráfica de $a_n = 2 + 3n$ contiene puntos sólo en los enteros positivos.

(d) La pendiente de la recta y la diferencia común de la sucesión aritmética son iguales.

113. 4

Sección 9.3 *(página 667)*

1. Geométrica; común **3.** $S_n = a_1\left(\dfrac{1-r^n}{1-r}\right)$

5. Sucesión geométrica, $r = 5$ **7.** No es sucesión geométrica

9. Sucesión geométrica, $r = -\frac{1}{2}$

11. Sucesión geométrica, $r = 2$

13. No es sucesión geométrica

15. Sucesión geométrica, $r = -\sqrt{7}$

17. 4, 12, 36, 108, 324 **19.** $1, \frac{1}{2}, \frac{1}{4}, \frac{1}{8}, \frac{1}{16}$

21. $5, -\frac{1}{2}, \frac{1}{20}, -\frac{1}{200}, \frac{1}{2000}$ **23.** $1, e, e^2, e^3, e^4$

25. $3, 3\sqrt{5}, 15, 15\sqrt{5}, 75$ **27.** $2, \dfrac{x}{2}, \dfrac{x^2}{8}, \dfrac{x^3}{32}, \dfrac{x^4}{128}$

29. 64, 32, 16, 8, 4; $r = \frac{1}{2}$; $a_n = 128\left(\frac{1}{2}\right)^n$

31. 9, 18, 36, 72, 144; $r = 2$; $a_n = \frac{9}{2}(2)^n$

33. $6, -9, \frac{27}{2}, -\frac{81}{4}, \frac{243}{8}$; $r = -\frac{3}{2}$; $a_n = -4\left(-\frac{3}{2}\right)^n$

35. $a_n = 4\left(\frac{1}{2}\right)^{n-1}$; $\frac{1}{128}$ **37.** $a_n = 6\left(-\dfrac{1}{3}\right)^{n-1}$; $-\dfrac{2}{59\,049}$

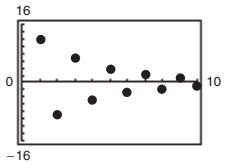
39. $a_n = 100e^{x(n-1)}$; $100e^{8x}$ **41.** $a_n = \left(\sqrt{2}\right)^{n-1}$; $32\sqrt{2}$

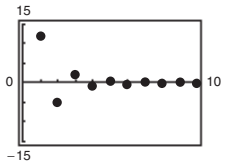
43. $a_n = 500(1.02)^{n-1}$; alrededor de 1082.372

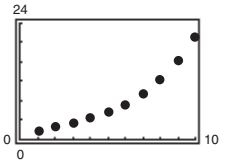
45. $a_9 = 72\,171$ **47.** $a_{10} = 50\,388\,480$

49. $a_8 = -\frac{1}{32\,768}$ **51.** $a_3 = 9$ **53.** $a_6 = -2$

55. $a_5 = -\dfrac{1}{\sqrt{2}}$ **57.** a **58.** c **59.** b **60.** d

61. 

63. 

65. 

67. 5461 **69.** −14 706 **71.** 43 **73.** $\frac{1365}{32}$

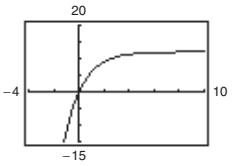
75. 29 921.311 **77.** 592.647 **79.** 2092.596

81. 1.600 **83.** 6.400 **85.** 3.750 **87.** $\displaystyle\sum_{n=1}^{7} 10(3)^{n-1}$

89. $\displaystyle\sum_{n=1}^{7} 2\left(-\tfrac{1}{4}\right)^{n-1}$ **91.** $\displaystyle\sum_{n=1}^{6} 0.1(4)^{n-1}$ **93.** 2 **95.** $\frac{2}{3}$

97. $\frac{16}{3}$ **99.** $\frac{5}{3}$ **101.** −30 **103.** 32

105. No definido **107.** $\frac{4}{11}$ **109.** $\frac{7}{22}$

111. 

Asíntota horizontal: $y = 12$
Corresponde a la suma de la serie

113. (a) $a_n = 1269.10(1.006)^n$

(b) La población está creciendo a una tasa de 0.6% por año.

(c) 1388.2millones. Este valor es cercano a la predicción.

(d) 2010

115. (a) $3714.87 (b) $3722.16 (c) $3725.85

(d) $3728.32 (e) $3729.52

117. $7011.89 **119.** Las respuestas variarán.

121. (a) $20 637.32 (b) $20 662.37

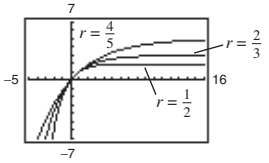
123. (a) $73 565.97 (b) $73 593.75

125. Las respuestas variarán. **127.** $1600

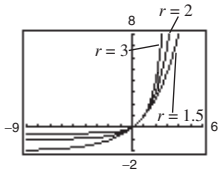
129. Unos $2181.82 **131.** 126 in.^{2} **133.** $5 435 989.84

135. (a) 3208.53 ft; 2406.4 ft; 5614.93 ft (b) 5950 ft

137. Falso. Una sucesión es geométrica si las razones entre términos consecutivos son iguales.

139. (a) 

Cuando $x \to \infty$, $y \to \dfrac{1}{1-r}$.

(b) 

Cuando $x \to \infty$, $y \to \infty$.

141. Dado un número real r entre -1 y 1, cuando el exponente n aumenta, r^n se aproxima a cero.

Sección 9.4 *(página 679)*

1. Inducción matemática **3.** Aritmética

5. $\dfrac{5}{(k+1)(k+2)}$ **7.** $\dfrac{(k+1)^2(k+4)^2}{6}$

9. $\dfrac{3}{(k+3)(k+4)}$ **11–41.** Pruebas

43. $S_n = n(2n - 1)$ **45.** $S_n = 10 - 10\left(\frac{9}{10}\right)^n$

47. $S_n = \frac{n}{2(n+1)}$ **49.** 120 **51.** 91 **53.** 979

55. 70 **57.** −3402 **59.** Lineal; $a_n = 8n - 3$

61. Cuadrática; $a_n = 3n^2 + 3$ **63.** Cuadrática; $a_n = n^2 - 3$

65. 0, 3, 6, 9, 12, 15
Primeras diferencias: 3, 3, 3, 3, 3
Segundas diferencias: 0, 0, 0, 0
Lineal

67. 3, 1, −2, −6, −11, −17
Primeras diferencias: −2, −3, −4, −5, −6
Segundas diferencias: −1, −1, −1, −1
Cuadrática

69. 2, 4, 16, 256, 65 536, 4 294 967 296
Primeras diferencias: 2, 12, 240, 65 280, 4 294 901 760
Segundas diferencias: 10, 228, 65 040, 4 294 836 480
Cuadrática

71. 2, 0, 3, 1, 4, 2
Primeras diferencias: −2, 3, −2, 3, −2
Segundas diferencias: 5, −5, 5, −5
Cuadrática

73. $a_n = n^2 - n + 3$ **75.** $a_n = \frac{1}{2}n^2 + n - 3$

77. $a_n = n^2 + 5n - 6$

79. (a) 8, 11, 7, 8, 6
(b) Se puede usar un modelo lineal.
$a_n = 8n + 627$
(c) $a_n = 8.1n + 628$
(d) Inciso (b): $a_n = 731$; Inciso (c): $a_n = 733.3$
Los valores son muy semejantes.

81. Verdadero. P_7 podría ser falso.

83. Verdadero. Si las segundas diferencias son todas cero, entonces las primeras diferencias son todas iguales y la sucesión es aritmética.

85. Falso. Una sucesión que es aritmética tiene segundas diferencias iguales a cero.

Sección 9.5 *(página 686)*

1. Coeficientes binomiales **3.** $\binom{n}{r}$; ${}_nC_r$

5. 10 **7.** 1 **9.** 15 504 **11.** 210 **13.** 4950

15. 6 **17.** 35 **19.** $x^4 + 4x^3 + 6x^2 + 4x + 1$

21. $a^4 + 24a^3 + 216a^2 + 864a + 1296$

23. $y^3 - 12y^2 + 48y - 64$

25. $x^5 + 5x^4y + 10x^3y^2 + 10x^2y^3 + 5xy^4 + y^5$

27. $8x^3 + 12x^2y + 6xy^2 + y^3$

29. $r^6 + 18r^5s + 135r^4s^2 + 540r^3s^3 + 1215r^2s^4 + 1458rs^5 + 729s^6$

31. $243a^5 - 1620a^4b + 4320a^3b^2 - 5760a^2b^3 + 3840ab^4 - 1024b^5$

33. $x^8 + 4x^6y^2 + 6x^4y^4 + 4x^2y^6 + y^8$

35. $\frac{1}{x^5} + \frac{5y}{x^4} + \frac{10y^2}{x^3} + \frac{10y^3}{x^2} + \frac{5y^4}{x} + y^5$

37. $\frac{16}{x^4} - \frac{32y}{x^3} + \frac{24y^2}{x^2} - \frac{8y^3}{x} + y^4$

39. $2x^4 - 24x^3 + 113x^2 - 246x + 207$

41. $32t^5 - 80t^4s + 80t^3s^2 - 40t^2s^3 + 10ts^4 - s^5$

43. $x^5 + 10x^4y + 40x^3y^2 + 80x^2y^3 + 80xy^4 + 32y^5$

45. $120x^7y^3$ **47.** $360x^3y^2$ **49.** $1\,259\,712x^2y^7$

51. $-4\,330\,260\,000y^9x^3$ **53.** 1 732 104 **55.** 720

57. −6 300 000 **59.** 210

61. $x^{3/2} + 15x + 75x^{1/2} + 125$

63. $x^2 - 3x^{4/3}y^{1/3} + 3x^{2/3}y^{2/3} - y$

65. $81t^2 + 108t^{7/4} + 54t^{3/2} + 12t^{5/4} + t$

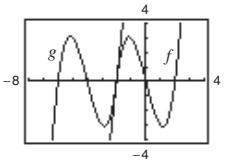
67. $3x^2 + 3xh + h^2,\ h \neq 0$

69. $6x^5 + 15x^4h + 20x^3h^2 + 15x^2h^3 + 6xh^4 + h^5,\ h \neq 0$

71. $\frac{1}{\sqrt{x+h} + \sqrt{x}},\ h \neq 0$ **73.** −4 **75.** $2035 + 828i$

77. 1 **79.** 1.172 **81.** 510 568.785

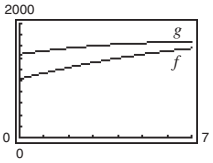
83.



g está desplazada cuatro unidades a la izquierda de *f*.
$g(x) = x^3 + 12x^2 + 44x + 48$

85. 0.273 **87.** 0.171 **89.** Sucesión de Fibonacci

91. (a) $g(t) = -4.702t^2 + 63.16t + 1460.05$
(b)



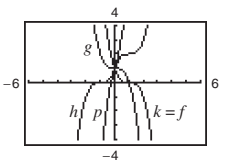
(c) 2007

93. Verdadero. Los coeficientes del teorema del binomio se pueden usar para hallar los números en el triángulo de Pascal.

95. Falso. El coeficiente del término x^{10} es 1 732 104 y el coeficiente del término en x^{14} es 192 456.

97.
1 8 28 56 70 56 28 8 1
1 9 36 84 126 126 84 36 9 1
1 10 45 120 210 252 210 120 45 10 1

99.



$k(x)$ es la expansión de $f(x)$.

101–103. Pruebas

105.

n	r	${}_nC_r$	${}_nC_{n-r}$
9	5	126	126
7	1	7	7
12	4	495	495
6	0	1	1
10	7	120	120

${}_nC_r = {}_nC_{n-r}$
Esto ilustra la simetría del triángulo de Pascal.

Sección 9.6 *(página 696)*

1. Principio fundamental de conteo **3.** ${}_nP_r = \frac{n!}{(n-r)!}$

5. Combinaciones **7.** 6 **9.** 5 **11.** 3 **13.** 8

15. 30 **17.** 30 **19.** 64 **21.** 175 760 000
23. (a) 900 (b) 648 (c) 180 (d) 600
25. 64 000 **27.** (a) 40 320 (b) 384
29. 24 **31.** 336 **33.** 120 **35.** 1 860 480
37. 970 200 **39.** 120 **41.** 11 880
43. 420 **45.** 2520
47. ABCD, ABDC, ACBD, ACDB, ADBC, ADCB, BACD, BADC, CABD, CADB, DABC, DACB, BCAD, BDAC, CBAD, CDAB, DBAC, DCAB, BCDA, BDCA, CBDA, CDBA, DBCA, DCBA
49. 1 816 214 400 **51.** 10 **53.** 4 **55.** 1
57. 4845 **59.** 850,668
61. AB, AC, AD, AE, AF, BC, BD, BE, BF, CD, CE, CF, DE, DF, EF
63. 5 586 853 480 **65.** 324 632
67. (a) 7315 (b) 693 (c) 12 628
69. (a) 3744 (b) 24 **71.** 292 600 **73.** 5 **75.** 20
77. 36 **79.** $n = 5$ o $n = 6$ **81.** $n = 10$
83. $n = 3$ **85.** $n = 2$
87. Falso. Es un ejemplo de una combinación
89. Son iguales. **91–93.** Pruebas
95. No. Para algunas calculadoras el número es demasiado grande.
97. El símbolo ${}_nP_r$ denota el número de formas para escoger y ordenar r elementos de entre un conjunto de n elementos.

Sección 9.7 *(página 707)*

1. Experimento; resultados **3.** Probabilidad
5. Mutuamente exclusivo **7.** Complemento
9. $\{(H, 1), (H, 2), (H, 3), (H, 4), (H, 5), (H, 6), (T, 1), (T, 2), (T, 3), (T, 4), (T, 5), (T, 6)\}$
11. {ABC, ACB, BAC, BCA, CAB, CBA}
13. {AB, AC, AD, AE, BC, BD, BE, CD, CE, DE}
15. $\frac{3}{8}$ **17.** $\frac{1}{2}$ **19.** $\frac{7}{8}$ **21.** $\frac{3}{13}$ **23.** $\frac{3}{26}$ **25.** $\frac{5}{36}$
27. $\frac{11}{12}$ **29.** $\frac{1}{3}$ **31.** $\frac{1}{5}$ **33.** $\frac{2}{5}$ **35.** 0.13 **37.** $\frac{3}{4}$
39. 0.77 **41.** $\frac{18}{35}$
43. (a) 1.25 millones (b) $\frac{2}{5}$ (c) $\frac{13}{50}$ (d) $\frac{29}{100}$
45. (a) 243 (b) $\frac{1}{50}$ (c) $\frac{16}{25}$
47. (a) 58% (b) 95.6% (c) 0.4%
49. (a) $\frac{112}{209}$ (b) $\frac{97}{209}$ (c) $\frac{274}{627}$
51. 19% **53.** (a) $\frac{21}{1292}$ (b) $\frac{225}{646}$ (c) $\frac{49}{323}$
55. (a) $\frac{1}{120}$ (b) $\frac{1}{24}$ **57.** (a) $\frac{5}{13}$ (b) $\frac{1}{2}$ (c) $\frac{4}{13}$
59. (a) $\frac{14}{55}$ (b) $\frac{12}{55}$ (c) $\frac{54}{55}$
61. (a) $\frac{1}{4}$ (b) $\frac{1}{2}$ (c) $\frac{841}{1600}$ (d) $\frac{1}{40}$
63. 0.4746 **65.** (a) 0.9702 (b) 0.9998 (c) 0.0002
67. (a) $\frac{1}{38}$ (b) $\frac{9}{19}$ (c) $\frac{10}{19}$ (d) $\frac{1}{1444}$ (e) $\frac{729}{6859}$ **69.** $\frac{7}{16}$
71. Verdadero. Dos eventos son independientes si el suceso de uno de ellos no tiene efecto en el suceso del otro.
73. (a) Cuando considere personas sucesivas con cumpleaños diferentes, las probabilidades deben decrecer para tener en cuenta las fechas de nacimiento ya empleadas. Como las fechas de nacimiento de personas son eventos independientes, multiplique las respectivas probabilidades de cumpleaños diferentes.
(b) $\frac{365}{365} \cdot \frac{364}{365} \cdot \frac{363}{365} \cdot \frac{362}{365}$ (c) Las respuestas variarán.
(d) Q_n es la probabilidad de que los cumpleaños *no* sean distintos, lo cual equivale a que al menos dos personas tengan el mismo cumpleaños.
(e)

n	10	15	20	23	30	40	50
P_n	0.88	0.75	0.59	0.49	0.29	0.11	0.03
Q_n	0.12	0.25	0.41	0.51	0.71	0.89	0.97

(f) 23; $Q_n > 0.5$ para $n \geq 23$.
75. Los registros meteorológicos indican que, en un periodo prolongado con condiciones climatológicas semejantes, lloverá 40% del tiempo.

Ejercicios de repaso *(página 714)*

1. 8, 5, 4, $\frac{7}{2}$, $\frac{16}{5}$ **3.** 72, 36, 12, 3, $\frac{3}{5}$ **5.** $a_n = 2(-1)^n$
7. $a_n = \dfrac{4}{n}$ **9.** 362 880 **11.** 1 **13.** 48
15. $\dfrac{205}{24}$ **17.** 6050 **19.** $\displaystyle\sum_{k=1}^{20} \frac{1}{2k}$ **21.** $\dfrac{4}{9}$
23. (a) $A_1 = \$10\,066.67$, $A_2 = \$10\,133.78$, $A_3 = \$10\,201.34$, $A_4 = \$10\,269.35$, $A_5 = \$10\,337.81$, $A_6 = \$10\,406.73$, $A_7 = \$10\,476.10$, $A_8 = \$10\,545.95$, $A_9 = \$10\,616.25$, $A_{10} = \$10\,687.03$
(b) $A_{120} = \$22\,196.40$
25. Sucesión aritmética, $d = -7$
27. Sucesión aritmética, $d = \frac{1}{2}$
29. 3, 14, 25, 36, 47 **31.** 25, 28, 31, 34, 37
33. $a_n = 12n - 5$ **35.** $a_n = 3ny - 2y$
37. $a_n = -7n + 107$ **39.** 35 350 **41.** 80 **43.** 88
45. (a) \$51 600 (b) \$238 500
47. Sucesión geométrica, $r = 2$
49. Sucesión geométrica, $r = -3$
51. $4, -1, \frac{1}{4}, -\frac{1}{16}, \frac{1}{64}$ **53.** $9, 6, 4, \frac{8}{3}, \frac{16}{9}$ o $9, -6, 4, -\frac{8}{3}, \frac{16}{9}$
55. $a_n = 18\left(-\frac{1}{2}\right)^{n-1}$; $\frac{9}{512}$
57. $a_n = 100(1.05)^{n-1}$; aprox. 155.133
59. 127 **61.** $\frac{15}{16}$ **63.** 31 **65.** 24.85 **67.** 8
69. 12 **71.** (a) $a_n = 120\,000(0.7)^n$ (b) \$20 168.40
73–75. Pruebas **77.** $S_n = n(2n + 7)$
79. $S_n = \frac{5}{2}\left[1 - \left(\frac{3}{5}\right)^n\right]$ **81.** 1275
83. 5, 10, 15, 20, 25
Primeras diferencias: 5, 5, 5, 5
Segundas diferencias: 0, 0, 0
Lineal
85. 16, 15, 14, 13, 12
Primeras diferencias: $-1, -1, -1, -1$
Segundas diferencias: 0, 0, 0
Lineal
87. 15 **89.** 28 **91.** $x^4 + 16x^3 + 96x^2 + 256x + 256$
93. $a^5 - 15a^4b + 90a^3b^2 - 270a^2b^3 + 405ab^4 - 243b^5$
95. $41 + 840i$ **97.** 11 **99.** 10 000 **101.** 720
103. 56 **105.** $\frac{1}{9}$ **107.** (a) 43% (b) 82%
109. $\frac{1}{1296}$ **111.** $\frac{3}{4}$
113. Verdadero. $\dfrac{(n+2)!}{n!} = \dfrac{(n+2)(n+1)n!}{n!} = (n+2)(n+1)$
115. Verdadero por las propiedades de sumas
117. El conjunto de cos números naturales
119. Cada término de la sucesión está definido en términos de los términos precedentes.

Examen del capítulo *(página 717)*

1. $-\frac{1}{5}, \frac{1}{8}, -\frac{1}{11}, \frac{1}{14}, -\frac{1}{17}$ **2.** $a_n = \frac{n+2}{n!}$

3. 60, 73, 86; 243 **4.** $a_n = 0.8n + 1.4$

5. $a_n = 7(4)^{n-1}$ **6.** 5, 10, 20, 40, 80 **7.** 86 100

8. 477 **9.** 4 **10.** Demostración

11. (a) $x^4 + 24x^3y + 216x^2y^2 + 864xy^3 + 1296y^4$

(b) $3x^5 - 30x^4 + 124x^3 - 264x^2 + 288x - 128$

12. $-22\,680$ **13.** (a) 72 (b) 328 440

14. (a) 330 (b) 720 720 **15.** 26 000 **16.** 720

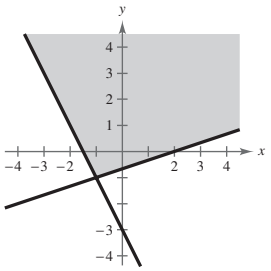
17. $\frac{1}{15}$ **18.** $\frac{1}{27\,405}$ **19.** 10%

Examen acumulativo para los capítulos 7–9 *(página 718)*

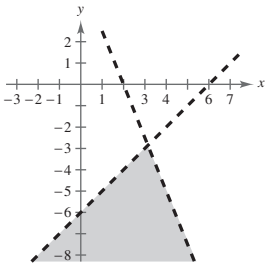
1. $(1, 2), \left(-\frac{3}{2}, \frac{3}{4}\right)$ **2.** $(-3, -1)$

3. $(5, -2, -2)$ **4.** $(1, -2, 1)$

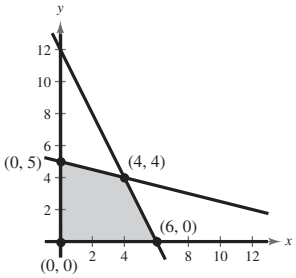
5.



6.



7.



Máximo en $(4, 4)$: $z = 20$

Mínimo en $(0, 0)$: $z = 0$

8. Mezcla de \$0.75: 120 libras; mezcla de \$1.25: 80 libras

9. $y = \frac{1}{4}x^2 - 2x + 6$

10. $\begin{bmatrix} -1 & 2 & -1 & \vdots & 9 \\ 2 & -1 & 2 & \vdots & -9 \\ 3 & 3 & -4 & \vdots & 7 \end{bmatrix}$ **11.** $(-2, 3, -1)$

12. $\begin{bmatrix} 1 & 5 \\ -1 & 3 \end{bmatrix}$ **13.** $\begin{bmatrix} 16 & -40 \\ 0 & 8 \end{bmatrix}$ **14.** $\begin{bmatrix} 16 & -25 \\ -2 & 13 \end{bmatrix}$

15. $\begin{bmatrix} -6 & 15 \\ 2 & -9 \end{bmatrix}$ **16.** $\begin{bmatrix} 9 & 0 \\ -7 & 16 \end{bmatrix}$ **17.** $\begin{bmatrix} -15 & 35 \\ 1 & -5 \end{bmatrix}$

18. 203 **19.** $\begin{bmatrix} -175 & 37 & -13 \\ 95 & -20 & 7 \\ 14 & -3 & 1 \end{bmatrix}$

20. Calzado de gimnasio: \$2042 millones; calzado para trotar: \$1733 millones; calzado para caminar: \$3415 millones

21. $(-5, 4)$ **22.** $(-3, 4, 2)$ **23.** 9

24. $\frac{1}{5}, -\frac{1}{7}, \frac{1}{9}, -\frac{1}{11}, \frac{1}{13}$ **25.** $a_n = \frac{(n+1)!}{n+3}$ **26.** 1536

27. (a) 65.4 (b) $a_n = 3.2n + 1.4$ **28.** 3, 6, 12, 24, 48

29. $\frac{130}{9}$ **30.** Demostración

31. $w^4 - 36w^3 + 486w^2 - 2916w + 6561$ **32.** 2184

33. 600 **34.** 70 **35.** 462 **36.** 453 600

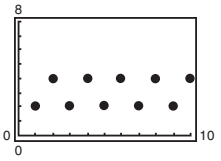
37. 151 200 **38.** 720 **39.** $\frac{1}{4}$

Resolución de problemas *(página 723)*

1. 1, 1.5, $1.41\overline{6}$, 1.414215686, 1.414213562, 1.414213562, . . .

x_n se aproxima a $\sqrt{2}$.

3. (a)



(b) Si n es impar, $a_n = 2$, y si n es par, $a_n = 4$.

(c)

n	1	10	101	1000	10 001
a_n	2	4	2	4	2

(d) No es posible hallar el valor de a_n cuando n se aproxima al infinito.

5. (a) 3, 5, 7, 9, 11, 13, 15, 17; $a_n = 2n + 1$

(b) Para obtener la sucesión aritmética, encuentre las diferencias de términos consecutivos de la sucesión de cubos perfectos. A continuación, encuentre las diferencias de términos consecutivos de la sucesión resultante.

(c) 12, 18, 24, 30, 36, 42, 48; $a_n = 6n + 6$

(d) Para obtener la sucesión aritmética, encuentre la tercera sucesión obtenida al tomar las diferencias de términos consecutivos en sucesiones consecutivas.

(e) 60, 84, 108, 132, 156, 180; $a_n = 24n + 36$

7. $S_n = \left(\frac{1}{2}\right)^{n-1}$; $A_n = \frac{\sqrt{3}}{4}S_n{}^2$

9. Demostración **11.** (a) Demostración (b) 17 710

13. $\frac{1}{3}$ **15.** (a) $-\$0.71$ (b) 2.53, 24 vueltas

Capítulo 10

Sección 10.1 *(página 730)*

1. Inclinación **3.** $\left|\frac{m_2 - m_1}{1 + m_1m_2}\right|$ **5.** $\frac{\sqrt{3}}{3}$ **7.** -1

9. $\sqrt{3}$ **11.** 3.2236 **13.** $\frac{3\pi}{4}$ rad, 135°

15. $\frac{\pi}{4}$ rad, 45° **17.** 0.6435 rad, 36.9° **19.** $\frac{\pi}{6}$ rad, 30°

21. $\frac{5\pi}{6}$ rad, 150° **23.** 1.0517 rad, 60.3°

25. 2.1112 rad, 121.0° **27.** $\frac{3\pi}{4}$ rad, 135°

29. $\frac{\pi}{4}$ rad, 45° **31.** $\frac{5\pi}{6}$ rad, 150° **33.** 1.2490 rad, 71.6°

35. 2.1112 rad, 121.0° **37.** 1.1071 rad, 63.4°

39. 0.1974 rad, 11.3° **41.** 1.4289 rad, 81.9°

43. 0.9273 rad, 53.1° **45.** 0.8187 rad, 46.9°

47. $(1, 5) \leftrightarrow (4, 5)$: pendiente $= 0$

$(4, 5) \leftrightarrow (3, 8)$: pendiente $= -3$

$(3, 8) \leftrightarrow (1, 5)$: pendiente $= \frac{3}{2}$

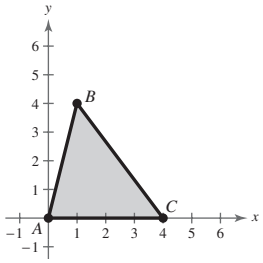
$(1, 5)$; 56.3°; $(4, 5)$: 71.6°; $(3, 8)$: 52.1°

49. $(-4, -1) \leftrightarrow (3, 2)$: pendiente $= \frac{3}{7}$
$(3, 2) \leftrightarrow (1, 0)$: pendiente $= 1$
$(1, 0) \leftrightarrow (-4, -1)$: pendiente $= \frac{1}{5}$
$(-4, -1)$: 11.9°; (3, 2): 21.8°; (1, 0): 146.3°

51. 0 **53.** $\frac{4\sqrt{10}}{5} \approx 2.5298$ **55.** 7

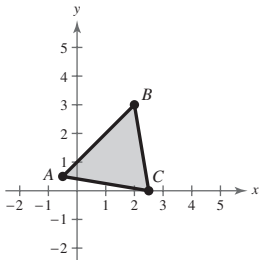
57. $\frac{8\sqrt{37}}{37} \approx 1.3152$

59. (a)



(b) 4 (c) 8

61. (a)



(b) $\frac{35\sqrt{37}}{74}$ (c) $\frac{35}{8}$

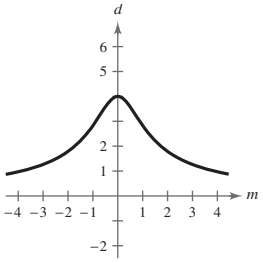
63. $2\sqrt{2}$ **65.** 0.1003, 1054 ft **67.** 31.0°

69. $\alpha \approx 33.69°$; $\beta \approx 56.31°$

71. Verdadero. La inclinación de una recta está relacionada con su pendiente mediante $m = \tan\theta$. Si el ángulo es mayor a $\pi/2$ pero menor a π, entonces el ángulo está en el segundo cuadrante, donde la función tangente es negativa.

73. (a) $d = \dfrac{4}{\sqrt{m^2 + 1}}$

(b)

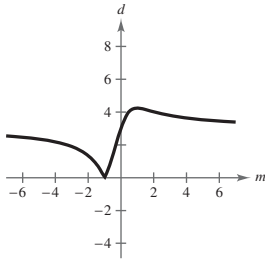


(c) $m = 0$

(d) La gráfica tiene una asíntota horizontal de $d = 0$. Cuando la pendiente se hace más grande, la distancia entre el origen y la recta, $y = mx + 4$, se hace menor y se aproxima a 0.

75. (a) $d = \dfrac{3|m + 1|}{\sqrt{m^2 + 1}}$

(b)



(c) $m = 1$

(d) Sí. $m = -1$

(e) $d = 3$. Cuando la recta se aproxima a la vertical, la distancia se aproxima a 3.

Sección 10.2 *(página 738)*

1. Cónica **3.** Lugar geométrico **5.** Eje **7.** Cuerda focal

9. Se forma una circunferencia cuando un plano interseca la mitad superior o la inferior de un cono de doble rama y es perpendicular al eje del cono.

11. Se forma una parábola cuando un plano interseca la mitad superior o la inferior de un cono de doble rama, es paralela al lado del cono y no interseca el vértice.

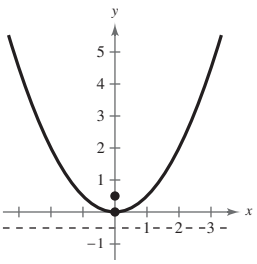
13. e **14.** b **15.** d **16.** f **17.** a **18.** c

19. $x^2 = \frac{3}{2}y$ **21.** $x^2 = 2y$ **23.** $y^2 = -8x$

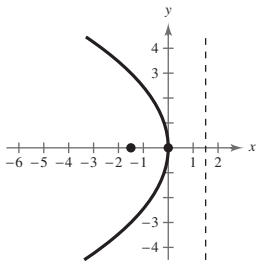
25. $x^2 = -4y$ **27.** $y^2 = 4x$ **29.** $x^2 = \frac{8}{3}y$

31. $y^2 = -\frac{25}{2}x$

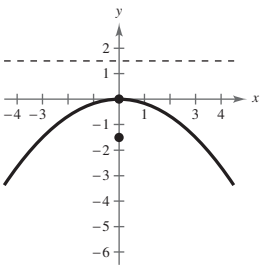
33. Vértice: $(0, 0)$
Foco: $\left(0, \frac{1}{2}\right)$
Directriz: $y = -\frac{1}{2}$



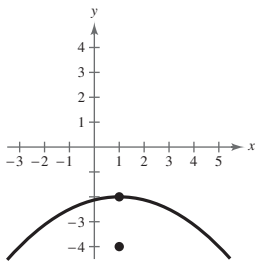
35. Vértice: $(0, 0)$
Foco: $\left(-\frac{3}{2}, 0\right)$
Directriz: $x = \frac{3}{2}$



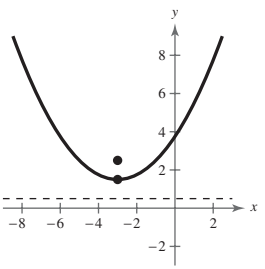
37. Vértice: $(0, 0)$
Foco: $\left(0, -\frac{3}{2}\right)$
Directriz: $y = \frac{3}{2}$



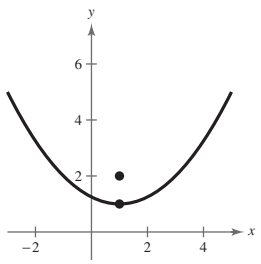
39. Vértice: $(1, -2)$
Foco: $(1, -4)$
Directriz: $y = 0$



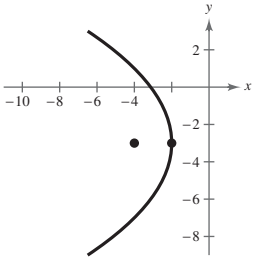
41. Vértice: $\left(-3, \frac{3}{2}\right)$
Foco: $\left(-3, \frac{5}{2}\right)$
Directriz: $y = \frac{1}{2}$



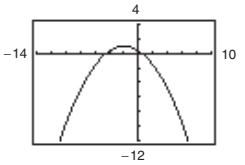
43. Vértice: $(1, 1)$
Foco: $(1, 2)$
Directriz: $y = 0$



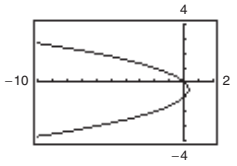
45. Vértice: $(-2, -3)$
Foco: $(-4, -3)$
Directriz: $x = 0$



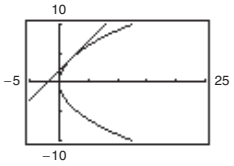
47. Vértice: $(-2, 1)$
Foco: $\left(-2, -\frac{1}{2}\right)$
Directriz: $y = \frac{5}{2}$



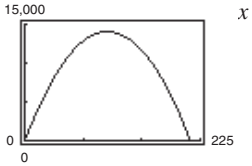
49. Vértice: $\left(\frac{1}{4}, -\frac{1}{2}\right)$
Foco: $\left(0, -\frac{1}{2}\right)$
Directriz: $x = \frac{1}{2}$



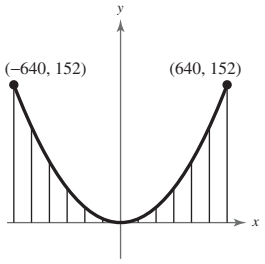
51. $(x - 3)^2 = -(y - 1)$ **53.** $y^2 = 4(x + 4)$
55. $(y - 3)^2 = 8(x - 4)$ **57.** $x^2 = -8(y - 2)$
59. $(y - 2)^2 = 8x$ **61.** $y = \sqrt{6(x + 1)} + 3$
63. (2, 4)



65. $4x - y - 8 = 0$; $(2, 0)$ **67.** $4x - y + 2 = 0$; $\left(-\frac{1}{2}, 0\right)$
69. $x = 106$ unidades



71. (a)



(b) $y = \dfrac{19x^2}{51\,200}$

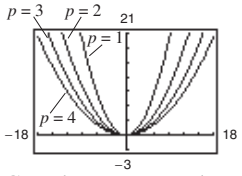
(c)

Distancia, x	0	100	250	400	500
Altura, y	0	3.71	23.19	59.38	92.77

73. (a) $y = -\frac{1}{640}x^2$ (b) 8 ft
75. (a) $x^2 = 180\,000y$ (b) $300\sqrt{2}$ cm $\approx$ 424.26 cm
77. $x^2 = -\frac{25}{4}(y - 48)$
79. (a) $17\,500\sqrt{2}$ mi/h $\approx$ 24 750 mi/h
(b) $x^2 = -16\,400(y - 4100)$
81. (a) $x^2 = -49(y - 100)$ (b) 70 ft
83. Falso. Si la gráfica corta la directriz, habría puntos más cercanos a la directriz que al foco.

85. $m = \dfrac{x_1}{2p}$

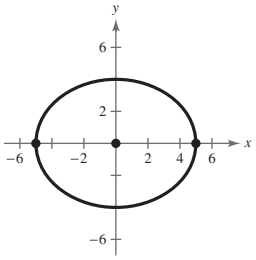
87. (a)



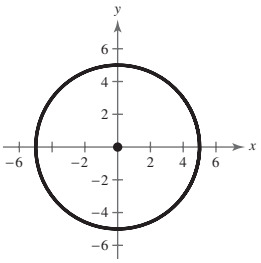
Cuando p aumenta, la gráfica se hace más ancha.
(b) (0, 1), (0, 2), (0, 3), (0, 4) (c) 4, 8, 12, 16; $4|p|$
(d) Es una forma fácil de determinar dos puntos adicionales sobre la gráfica.

Sección 10.3 *(página 748)*

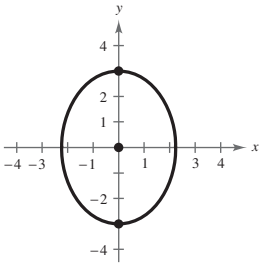
1. Elipse; focos **3.** Eje menor
5. b **6.** c **7.** d **8.** f **9.** a **10.** e
11. $\dfrac{x^2}{4} + \dfrac{y^2}{16} = 1$ **13.** $\dfrac{x^2}{49} + \dfrac{y^2}{45} = 1$ **15.** $\dfrac{x^2}{49} + \dfrac{y^2}{24} = 1$
17. $\dfrac{21x^2}{400} + \dfrac{y^2}{25} = 1$ **19.** $\dfrac{(x-2)^2}{1} + \dfrac{(y-3)^2}{9} = 1$
21. $\dfrac{(x-4)^2}{16} + \dfrac{(y-2)^2}{1} = 1$ **23.** $\dfrac{x^2}{48} + \dfrac{(y-4)^2}{64} = 1$
25. $\dfrac{x^2}{16} + \dfrac{(y-4)^2}{12} = 1$ **27.** $\dfrac{(x-2)^2}{4} + \dfrac{(y-2)^2}{1} = 1$
29. Elipse
Centro: (0, 0)
Vértices: $(\pm 5, 0)$
Focos: $(\pm 3, 0)$
Excentricidad: $\frac{3}{5}$



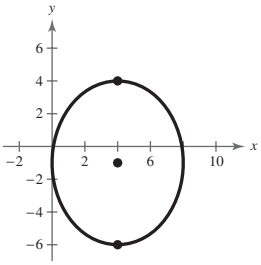
31. Circunferencia
Centro: (0, 0)
Radio: 5



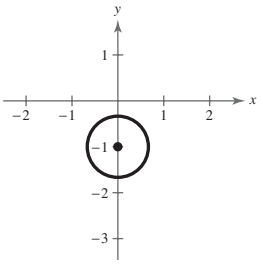
33. Elipse
Centro: (0, 0)
Vértices: $(0, \pm 3)$
Focos: $(0, \pm 2)$
Excentricidad: $\frac{2}{3}$



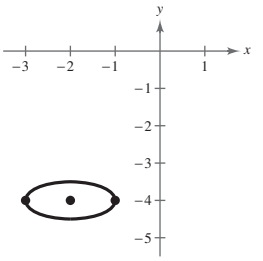
35. Elipse
Centro: $(4, -1)$
Vértices: $(4, -6)$, $(4, 4)$
Focos: $(4, 2)$, $(4, -4)$
Excentricidad: $\frac{3}{5}$



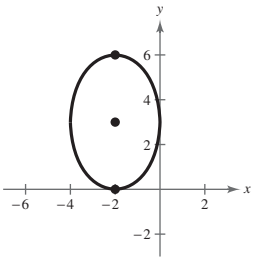
37. Circunferencia
Centro: $(0, -1)$
Radio: $\frac{2}{3}$



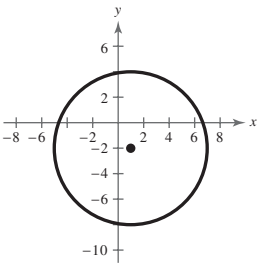
39. Elipse
Centro: $(-2, -4)$
Vértices: $(-3, -4), (-1, -4)$
Focos: $\left(\frac{-4 \pm \sqrt{3}}{2}, -4\right)$
Excentricidad: $\frac{\sqrt{3}}{2}$



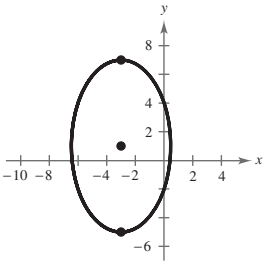
41. Elipse
Centro: $(-2, 3)$
Vértices: $(-2, 6), (-2, 0)$
Focos: $\left(-2, 3 \pm \sqrt{5}\right)$
Excentricidad: $\frac{\sqrt{5}}{3}$



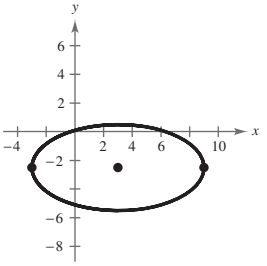
43. Circunferencia
Centro: $(1, -2)$
Radio: 6



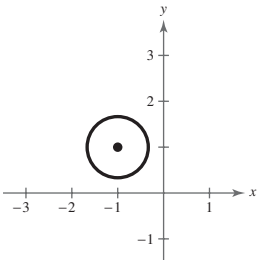
45. Elipse
Centro: $(-3, 1)$
Vértices: $(-3, 7), (-3, -5)$
Focos: $\left(-3, 1 \pm 2\sqrt{6}\right)$
Excentricidad: $\frac{\sqrt{6}}{3}$



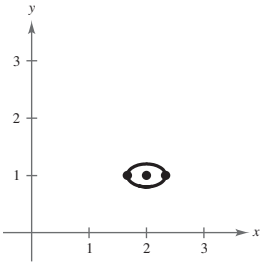
47. Elipse
Centro: $\left(3, -\frac{5}{2}\right)$
Vértices: $\left(9, -\frac{5}{2}\right), \left(-3, -\frac{5}{2}\right)$
Focos: $\left(3 \pm 3\sqrt{3}, -\frac{5}{2}\right)$
Excentricidad: $\frac{\sqrt{3}}{2}$



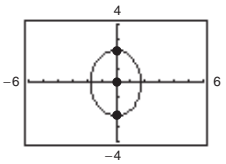
49. Circunferencia
Centro: $(-1, 1)$
Radio: $\frac{2}{3}$



51. Elipse
Centro: $(2, 1)$
Vértices: $\left(\frac{7}{3}, 1\right), \left(\frac{5}{3}, 1\right)$
Focos: $\left(\frac{34}{15}, 1\right), \left(\frac{26}{15}, 1\right)$
Excentricidad: $\frac{4}{5}$

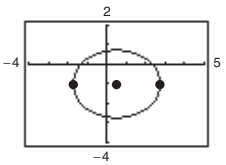


53.



Centro: $(0, 0)$
Vértices: $\left(0, \pm\sqrt{5}\right)$
Focos: $\left(0, \pm\sqrt{2}\right)$

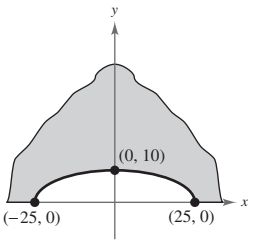
55.



Centro: $\left(\frac{1}{2}, -1\right)$
Vértices: $\left(\frac{1}{2} \pm \sqrt{5}, -1\right)$
Focos: $\left(\frac{1}{2} \pm \sqrt{2}, -1\right)$

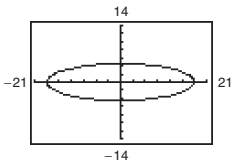
57. $\frac{\sqrt{5}}{3}$ **59.** $\frac{2\sqrt{2}}{3}$ **61.** $\frac{x^2}{25} + \frac{y^2}{16} = 1$

63. (a)



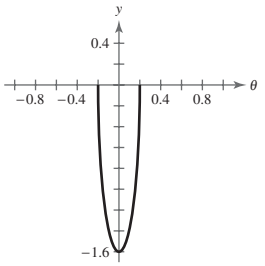
(b) $\frac{x^2}{625} + \frac{y^2}{100} = 1$
(c) Sí

65. (a) $\frac{x^2}{321.84} + \frac{y^2}{20.89} = 1$ (b)



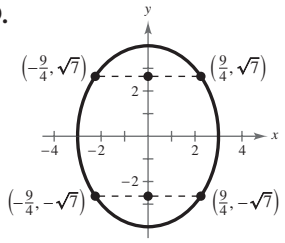
(c) Afelio:
35.29 unidades astronómicas
Perihelio:
0.59 unidades astronómicas

67. (a) $y = -8\sqrt{0.04 - \theta^2}$ (b)

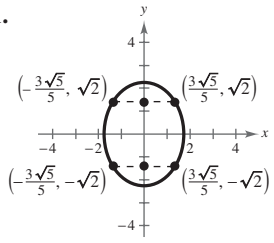


(c) La mitad inferior

69.



71.



73. Falso. La gráfica de $(x^2/4) + y^4 = 1$ no es una elipse. El grado de y es 4, no 2.

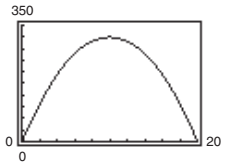
75. (a) $A = \pi a(20 - a)$ (b) $\dfrac{x^2}{196} + \dfrac{y^2}{36} = 1$

(c)

a	8	9	10	11	12	13
A	301.6	311.0	314.2	311.0	301.6	285.9

$a = 10$, círculo

(d)



La forma de una elipse con un área máxima es una circunferencia. El área máxima se encuentra cuando $a = 10$ (verificada en el inciso *c*) y por tanto $b = 10$, de modo que la ecuación produce un círculo.

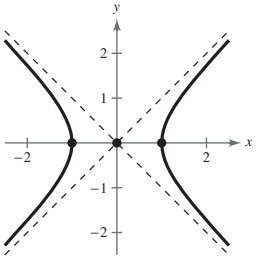
77. $\dfrac{(x-6)^2}{324} + \dfrac{(y-2)^2}{308} = 1$ **79.** Demostración

Sección 10.4 *(página 758)*

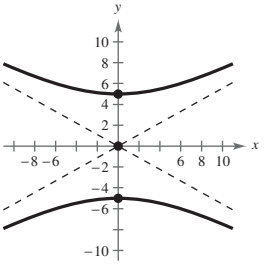
1. Hipérbola; focos **3.** Eje transverso; centro

5. b **6.** c **7.** a **8.** d

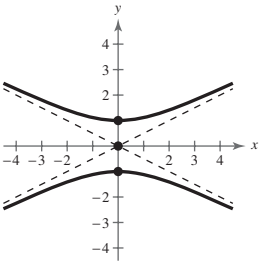
9. Centro: $(0, 0)$
Vértices: $(\pm 1, 0)$
Focos: $\left(\pm\sqrt{2}, 0\right)$
Asíntotas: $y = \pm x$



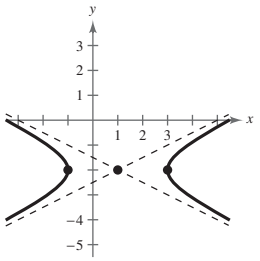
11. Centro: $(0, 0)$
Vértices: $(0, \pm 5)$
Focos: $\left(0, \pm\sqrt{106}\right)$
Asíntotas: $y = \pm\frac{5}{9}x$



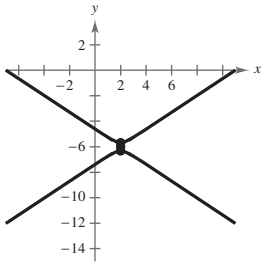
13. Centro: $(0, 0)$
Vértices: $(0, \pm 1)$
Focos: $\left(0, \pm\sqrt{5}\right)$
Asíntotas: $y = \pm\frac{1}{2}x$



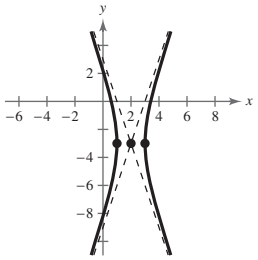
15. Centro: $(1, -2)$
Vértices: $(3, -2), (-1, -2)$
Focos: $\left(1 \pm \sqrt{5}, -2\right)$
Asíntotas:
$y = -2 \pm \frac{1}{2}(x - 1)$



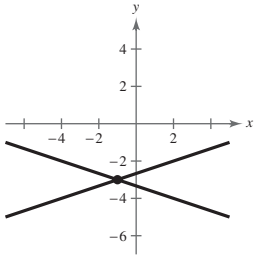
17. Centro: $(2, -6)$
Vértices:
$\left(2, -\frac{17}{3}\right), \left(2, -\frac{19}{3}\right)$
Focos: $\left(2, -6 \pm \frac{\sqrt{13}}{6}\right)$
Asíntotas:
$y = -6 \pm \frac{2}{3}(x - 2)$



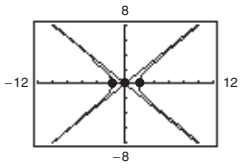
19. Centro: $(2, -3)$
Vértices: $(3, -3), (1, -3)$
Focos: $\left(2 \pm \sqrt{10}, -3\right)$
Asíntotas:
$y = -3 \pm 3(x - 2)$



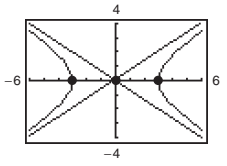
21. La gráfica de esta ecuación es de dos rectas que se cortan en $(-1, -3)$.



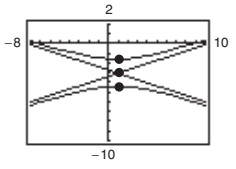
23. Centro: $(0, 0)$
Vértices: $\left(\pm\sqrt{3}, 0\right)$
Focos: $\left(\pm\sqrt{5}, 0\right)$
Asíntotas: $y = \pm\dfrac{\sqrt{6}}{3}x$



25. Centro: $(0, 0)$
Vértices: $(\pm 3, 0)$
Focos: $\left(\pm\sqrt{13}, 0\right)$
Asíntotas: $y = \pm\frac{2}{3}x$



27. Centro: $(1, -3)$
Vértices: $\left(1, -3 \pm \sqrt{2}\right)$
Focos: $\left(1, -3 \pm 2\sqrt{5}\right)$
Asíntotas:
$y = -3 \pm \frac{1}{3}(x - 1)$



29. $\dfrac{y^2}{4} - \dfrac{x^2}{12} = 1$ **31.** $\dfrac{x^2}{1} - \dfrac{y^2}{25} = 1$

33. $\frac{17y^2}{1024} - \frac{17x^2}{64} = 1$ **35.** $\frac{(x-4)^2}{4} - \frac{y^2}{12} = 1$

37. $\frac{(y-5)^2}{16} - \frac{(x-4)^2}{9} = 1$ **39.** $\frac{y^2}{9} - \frac{4(x-2)^2}{9} = 1$

41. $\frac{(y-2)^2}{4} - \frac{x^2}{4} = 1$ **43.** $\frac{(x-2)^2}{1} - \frac{(y-2)^2}{1} = 1$

45. $\frac{(x-3)^2}{9} - \frac{(y-2)^2}{4} = 1$ **47.** $\frac{y^2}{9} - \frac{x^2}{9/4} = 1$

49. $\frac{(x-3)^2}{4} - \frac{(y-2)^2}{16/5} = 1$

51. (a) $\frac{x^2}{1} - \frac{y^2}{169/3} = 1$ (b) Unos 2.403 ft

53. $(3300, -2750)$

55. (a) $\frac{x^2}{1} - \frac{y^2}{27} = 1;\ -9 \le y \le 9$ (b) 1.89 ft

57. Elipse **59.** Hipérbola **61.** Hipérbola

63. Parábola **65.** Elipse **67.** Parábola

69. Parábola **71.** Circunferencia

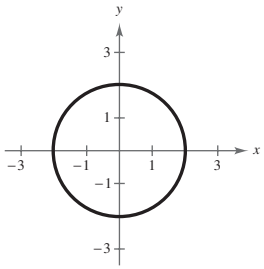
73. Verdadero. Para una hipérbola, $c^2 = a^2 + b^2$. Cuanto mayor sea la razón entre b y a, mayor es la excentricidad de la hipérbola, $e = c/a$.

75. Falso. Cuando $D = -E$, la gráfica es dos rectas que se cortan.

77. Las respuestas variarán.

79. $y = 1 - 3\sqrt{\frac{(x-3)^2}{4} - 1}$

81.



La ecuación $y = x^2 + C$ es una parábola que podría cortar la circunferencia en cero, uno, dos, tres o cuatro lugares, según su ubicación sobre el eje y.

(a) $C > 2$ y $C < -\frac{17}{4}$ (b) $C = 2$

(c) $-2 < C < 2,\ C = -\frac{17}{4}$ (d) $C = -2$

(e) $-\frac{17}{4} < C < -2$

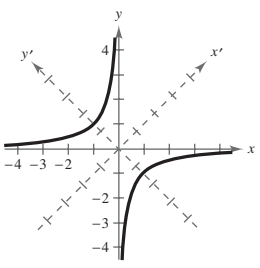
Sección 10.5 *(página 767)*

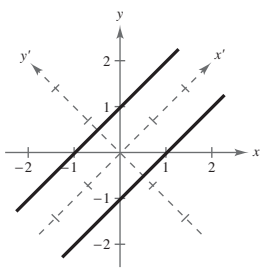
1. Rotación; ejes **3.** Invariante bajo rotación **5.** $(3, 0)$

7. $\left(\frac{3+\sqrt{3}}{2}, \frac{3\sqrt{3}-1}{2}\right)$ **9.** $\left(\frac{3\sqrt{2}}{2}, -\frac{\sqrt{2}}{2}\right)$

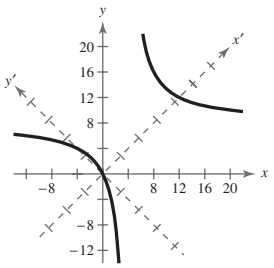
11. $\left(\frac{2\sqrt{3}+1}{2}, \frac{2-\sqrt{3}}{2}\right)$

13. $\frac{(y')^2}{2} - \frac{(x')^2}{2} = 1$ **15.** $y' = \pm\frac{\sqrt{2}}{2}$

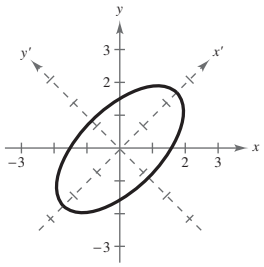




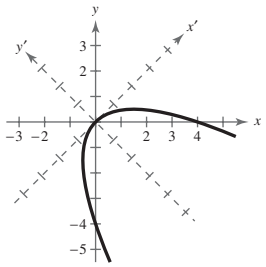
17. $\frac{(x'-6\sqrt{2})^2}{64} - \frac{(y'-2\sqrt{2})^2}{64} = 1$



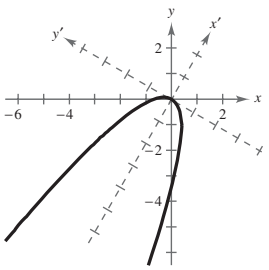
19. $\frac{(x')^2}{6} + \frac{(y')^2}{3/2} = 1$



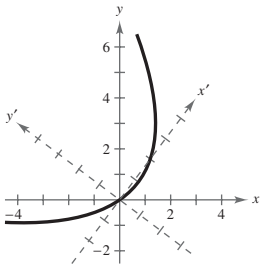
21. $y' = \frac{-\sqrt{2}}{4}(x')^2$



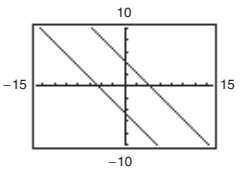
23. $(y')^2 = -x'$



25. $(x'-1)^2 = 6\left(y' + \frac{1}{6}\right)$

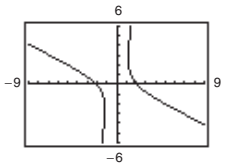


27.



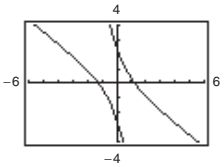
$\theta = 45°$

29.



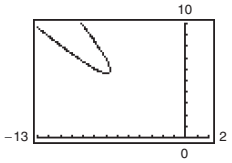
$\theta \approx 26.57°$

31.



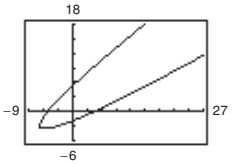
$\theta \approx 31.72°$

33.



$\theta = 45°$

35.



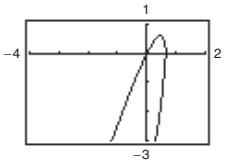
$\theta \approx 33.69°$

37. e **38.** f **39.** b **40.** a **41.** d **42.** c

43. (a) Parábola

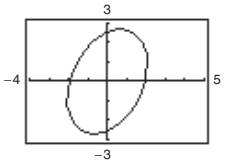
(b) $y = \dfrac{(8x - 5) \pm \sqrt{(8x - 5)^2 - 4(16x^2 - 10x)}}{2}$

(c)



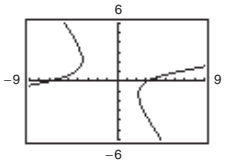
45. (a) Elipse (b) $y = \dfrac{6x \pm \sqrt{36x^2 - 28(12x^2 - 45)}}{14}$

(c)



47. (a) Hipérbola (b) $y = \dfrac{6x \pm \sqrt{36x^2 + 20(x^2 + 4x - 22)}}{-10}$

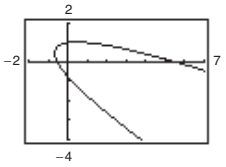
(c)



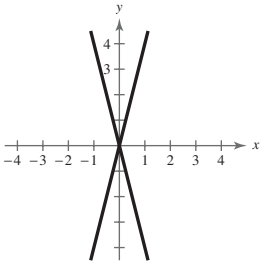
49. (a) Parábola

(b) $y = \dfrac{-(4x - 1) \pm \sqrt{(4x - 1)^2 - 16(x^2 - 5x - 3)}}{8}$

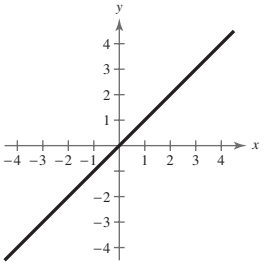
(c)



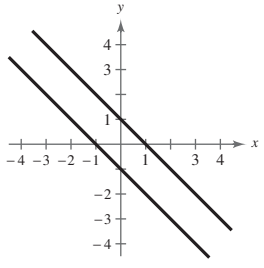
51.



53.



55.



57. (2, 2), (2, 4) **59.** (−8, 12) **61.** (0, 8), (12, 8)

63. (0, 4) **65.** $\left(1, \sqrt{3}\right), \left(1, -\sqrt{3}\right)$ **67.** No hay solución

69. $\left(0, \frac{3}{2}\right), (-3, 0)$

71. Verdadero. La gráfica de la ecuación puede clasificarse al hallar el discriminante. Para que una gráfica sea hipérbola, el discriminante debe ser mayor a cero. Si $k \geq \frac{1}{4}$, entonces el discriminante sería menor o igual a cero.

73. Las respuestas variarán. **75.** Eje mayor: 4; eje menor: 2

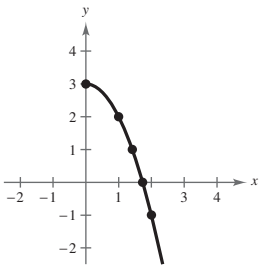
Sección 10.6 *(página 774)*

1. Curva plana **3.** Eliminando; parámetro

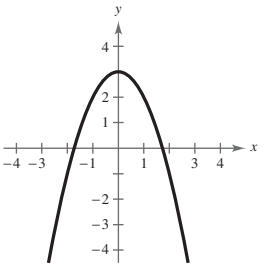
5. (a)

t	0	1	2	3	4
x	0	1	$\sqrt{2}$	$\sqrt{3}$	2
y	3	2	1	0	−1

(b)

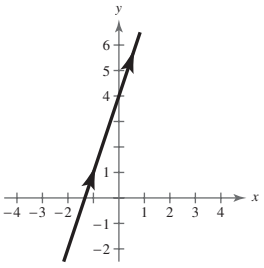


(c) $y = 3 - x^2$



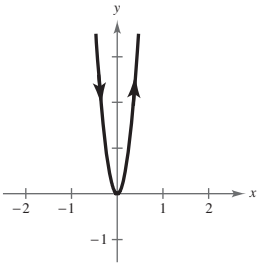
La gráfica de la ecuación rectangular muestra toda la parábola en lugar de sólo la mitad derecha.

7. (a)



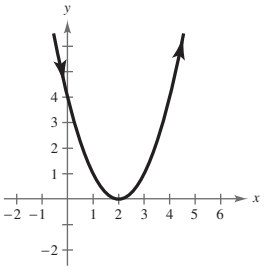
(b) $y = 3x + 4$

9. (a)



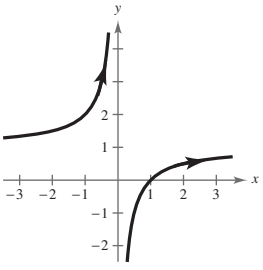
(b) $y = 16x^2$

11. (a)



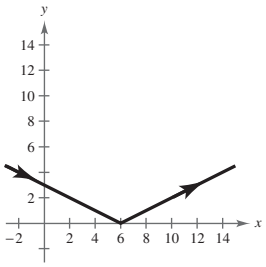
(b) $y = x^2 - 4x + 4$

13. (a)



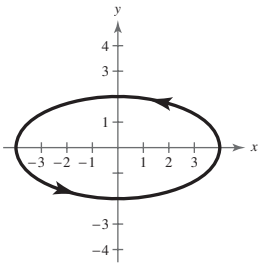
(b) $y = \dfrac{(x - 1)}{x}$

15. (a)



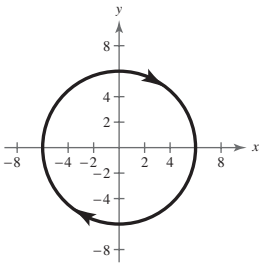
(b) $y = \left|\frac{x}{2} - 3\right|$

17. (a)



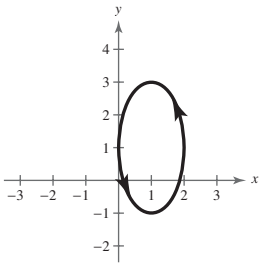
(b) $\frac{x^2}{16} + \frac{y^2}{4} = 1$

19. (a)



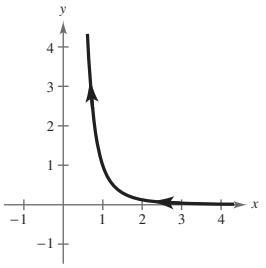
(b) $\frac{x^2}{36} + \frac{y^2}{36} = 1$

21. (a)



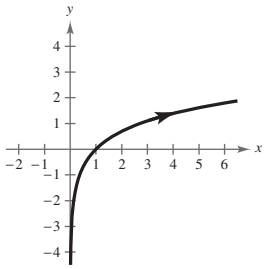
(b) $\frac{(x-1)^2}{1} + \frac{(y-1)^2}{4} = 1$

23. (a)



(b) $y = \frac{1}{x^3},\ x > 0$

25. (a)



(b) $y = \ln x$

27. Cada curva representa una parte de la recta $y = 2x + 1$.

	Dominio	*Orientación*
(a)	$(-\infty, \infty)$	Izquierda a derecha
(b)	$[-1, 1]$	Depende de θ
(c)	$(0, \infty)$	Derecha a izquierda
(d)	$(0, \infty)$	Izquierda a derecha

29. $y - y_1 = m(x - x_1)$

31. $\frac{(x-h)^2}{a^2} + \frac{(y-k)^2}{b^2} = 1$

33. $x = 3t$, $y = 6t$

35. $x = 3 + 4\cos\theta$, $y = 2 + 4\operatorname{sen}\theta$

37. $x = 5\cos\theta$, $y = 3\operatorname{sen}\theta$

39. $x = 4\sec\theta$, $y = 3\tan\theta$

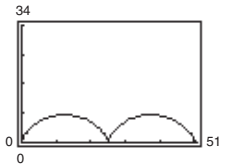
41. (a) $x = t,\ y = 3t - 2$ (b) $x = -t + 2,\ y = -3t + 4$

43. (a) $x = t, y = 2 - t$ (b) $x = -t + 2, y = t$

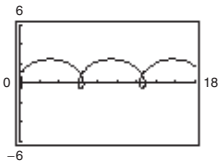
45. (a) $x = t, y = t^2 - 3$ (b) $x = 2 - t, y = t^2 - 4t + 1$

47. (a) $x = t, y = \frac{1}{t}$ (b) $x = -t + 2, y = -\frac{1}{t-2}$

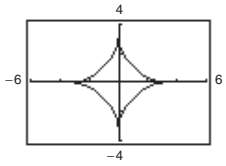
49.



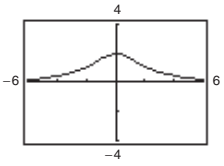
51.



53.



55.



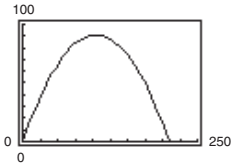
57. b
Dominio: $[-2, 2]$
Rango: $[-1, 1]$

58. c
Dominio: $[-4, 4]$
Rango: $[-6, 6]$

59. d
Dominio: $(-\infty, \infty)$
Rango: $(-\infty, \infty)$

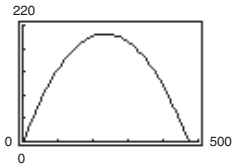
60. a
Dominio: $(-\infty, \infty)$
Rango: $[-2, 2]$

61. (a)



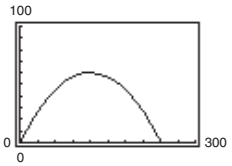
Altura máxima: 90.7 ft
Rango: 209.6 ft

(b)



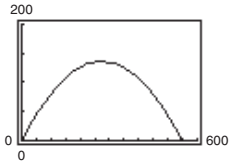
Altura máxima: 204.2 ft
Rango: 471.6 ft

(c)



Altura máxima: 60.5 ft
Rango: 242.0 ft

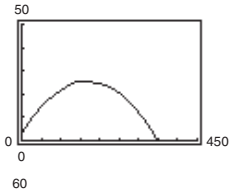
(d)



Altura máxima: 136.1 ft
Rango: 544.5 ft

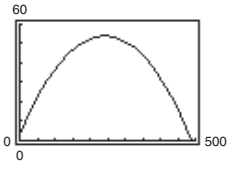
63. (a) $x = (146.67\cos\theta)t$
$y = 3 + (146.67\operatorname{sen}\theta)t - 16t^2$

(b)



No

(c)



Sí

(d) 19.3°

65. Las respuestas variarán.

67. $x = a\theta - b \operatorname{sen} \theta$
$y = a - b \cos \theta$

69. Verdadero
$x = t$
$y = t^2 + 1 \Rightarrow y = x^2 + 1$
$x = 3t$
$y = 9t^2 + 1 \Rightarrow y = x^2 + 1$

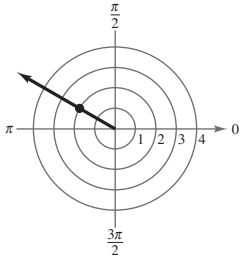
71. Las ecuaciones paramétricas son útiles cuando se grafican dos funciones simultáneamente en el mismo sistema de coordenadas. Por ejemplo, son útiles al dar seguimiento a la trayectoria de un cuerpo para que se puedan determinar la posición y el tiempo asociado con esa posición.

73. $-1 < t < \infty$

Sección 10.7 *(página 781)*

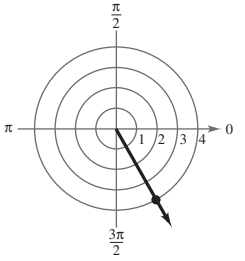
1. Polo **3.** Polar

5.



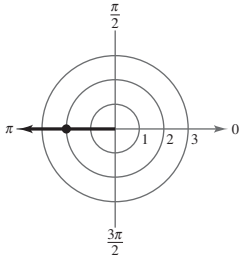
$\left(2, -\frac{7\pi}{6}\right), \left(-2, -\frac{\pi}{6}\right)$

7.



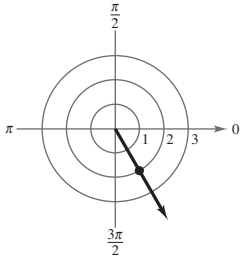
$\left(4, \frac{5\pi}{3}\right), \left(-4, -\frac{4\pi}{3}\right)$

9.



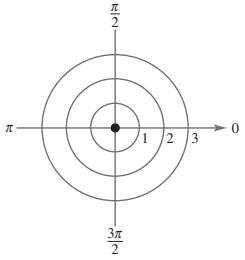
$(2, \pi), (-2, 0)$

11.



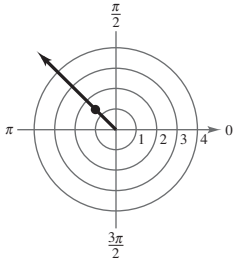
$\left(-2, -\frac{4\pi}{3}\right), \left(2, \frac{5\pi}{3}\right)$

13.



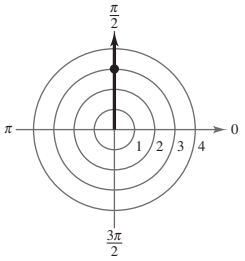
$\left(0, \frac{5\pi}{6}\right), \left(0, -\frac{\pi}{6}\right)$

15.



$\left(\sqrt{2}, -3.92\right), \left(-\sqrt{2}, -0.78\right)$

17.



$(-3, 4.71), (3, 1.57)$

19. $(0, 3)$ **21.** $\left(\frac{\sqrt{2}}{2}, \frac{\sqrt{2}}{2}\right)$ **23.** $\left(-\sqrt{2}, \sqrt{2}\right)$

25. $\left(\sqrt{3}, 1\right)$ **27.** $(-1.1, -2.2)$ **29.** $(1.53, 1.29)$

31. $(-1.20, -4.34)$ **33.** $(-0.02, 2.50)$

35. $(-3.60, 1.97)$ **37.** $\left(\sqrt{2}, \frac{\pi}{4}\right)$ **39.** $\left(3\sqrt{2}, \frac{5\pi}{4}\right)$

41. $(6, \pi)$ **43.** $\left(5, \frac{3\pi}{2}\right)$ **45.** $(5, 2.21)$

47. $\left(\sqrt{6}, \frac{5\pi}{4}\right)$ **49.** $\left(2, \frac{11\pi}{6}\right)$ **51.** $\left(3\sqrt{13}, 0.98\right)$

53. $(13, 1.18)$ **55.** $\left(\sqrt{13}, 5.70\right)$ **57.** $\left(\sqrt{29}. 2.76\right)$

59. $\left(\sqrt{7}, 0.86\right)$ **61.** $\left(\frac{17}{6}, 0.49\right)$ **63.** $\left(\frac{\sqrt{85}}{4}, 0.71\right)$

65. $r = 3$ **67.** $r = 4 \csc \theta$ **69.** $r = 10 \sec \theta$

71. $r = -2 \csc \theta$ **73.** $r = \dfrac{-2}{3 \cos \theta - \operatorname{sen} \theta}$

75. $r^2 = 16 \sec \theta \csc \theta = 32 \csc 2\theta$

77. $r = \dfrac{4}{1 - \cos \theta}$ or $-\dfrac{4}{1 + \cos \theta}$ **79.** $r = a$

81. $r = 2a \cos \theta$ **83.** $r = \cot^2 \theta \csc \theta$

85. $x^2 + y^2 - 4y = 0$ **87.** $x^2 + y^2 + 2x = 0$

89. $\sqrt{3}x + y = 0$ **91.** $\dfrac{\sqrt{3}}{3}x + y = 0$

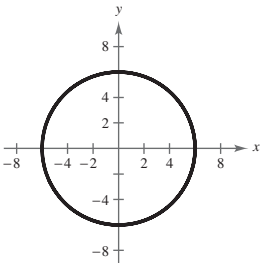
93. $x^2 + y^2 = 16$ **95.** $y = 4$ **97.** $x = -3$

99. $x^2 + y^2 - x^{2/3} = 0$ **101.** $(x^2 + y^2)^2 = 2xy$

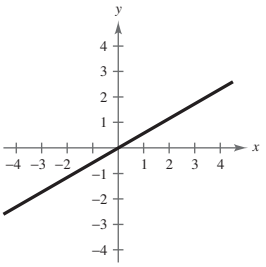
103. $(x^2 + y^2)^2 = 6x^2y - 2y^3$ **105.** $x^2 + 4y - 4 = 0$

107. $4x^2 - 5y^2 - 36y - 36 = 0$

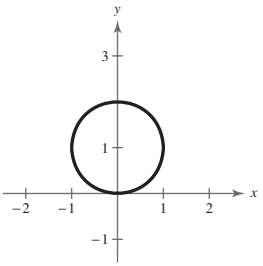
109. La gráfica de la ecuación polar está formada por todos los puntos que estén a seis unidades del polo.
$x^2 + y^2 = 36$



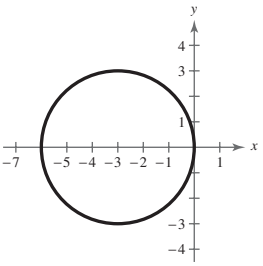
111. La gráfica de la ecuación polar está formada por todos los puntos sobre la recta que forme un ángulo de $\pi/6$ con el eje polar positivo.
$-\sqrt{3}x + 3y = 0$



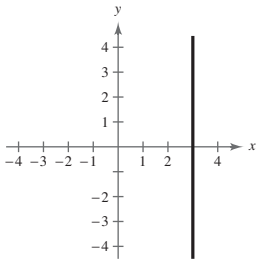
113. La gráfica de la ecuación polar no es evidente por simple inspección, de modo que convierta a forma rectangular.
$x^2 + (y - 1)^2 = 1$



115. La gráfica de la ecuación polar no es evidente por simple inspección, de modo que convierta a forma rectangular.
$(x + 3)^2 + y^2 = 9$



117. La gráfica de la ecuación polar no es evidente por simple inspección, de modo que convierta a forma rectangular.
$x - 3 = 0$

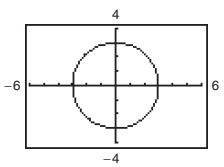


119. Verdadero. Como r es una distancia dirigida, el punto (r, θ) puede representarse como $(r, \theta \pm 2\pi n)$.

121. $(x - h)^2 + (y - k)^2 = h^2 + k^2$
Radio: $\sqrt{h^2 + k^2}$
Centro: (h, k)

123. (a) Las respuestas variarán.
(b) (r_1, θ_1), (r_2, θ_2) y el polo son colineales.
$d = \sqrt{r_1^2 + r_2^2 - 2r_1r_2} = |r_1 - r_2|$
Esto representa la distancia entre dos puntos sobre la recta $\theta = \theta_1 = \theta_2$.
(c) $d = \sqrt{r_1^2 + r_2^2}$
Esto es el resultado del teorema de Pitágoras.
(d) Las respuestas variarán. Por ejemplo:
Puntos: $(3, \pi/6)$, $(4, \pi/3)$
Distancia: 2.053
Puntos: $(-3, 7\pi/6)$, $(-4, 4\pi/3)$
Distancia: 2.053

125. (a)



(b) Sí. $\theta \approx 3.927$, $x \approx -2.121$, $y \approx -2.121$
(c) Sí. Las respuestas variarán.

Sección 10.8 *(página 789)*

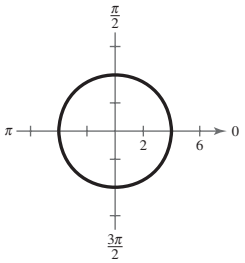
1. $\theta = \dfrac{\pi}{2}$ **3.** Caracol convexo **5.** Lemniscata
7. Curva roseta con 4 pétalos **9.** Caracol con lazo interior
11. Curva roseta con 3 pétalos **13.** Eje polar

15. $\theta = \dfrac{\pi}{2}$ **17.** $\theta = \dfrac{\pi}{2}$, eje polar, polo

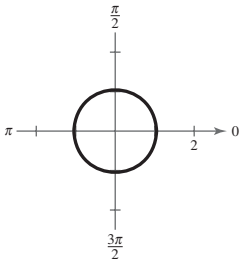
19. Máximo: $|r| = 20$ cuando $\theta = \dfrac{3\pi}{2}$
Cero: $r = 0$ cuando $\theta = \dfrac{\pi}{2}$

21. Máximo: $|r| = 4$ cuando $\theta = 0, \dfrac{\pi}{3}, \dfrac{2\pi}{3}$
Ceros: $r = 0$ cuando $\theta = \dfrac{\pi}{6}, \dfrac{\pi}{2}, \dfrac{5\pi}{6}$

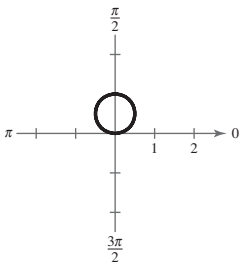
23.



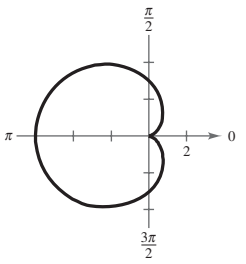
25.



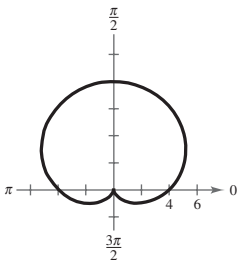
27.



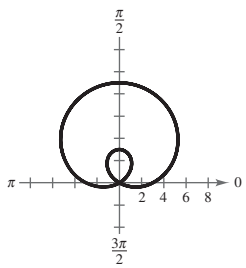
29.



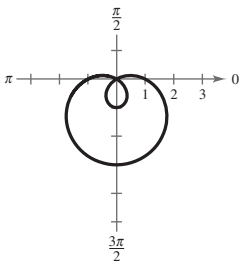
31.



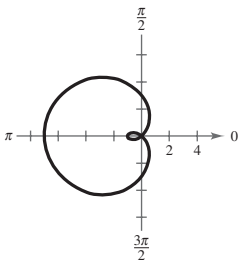
33.



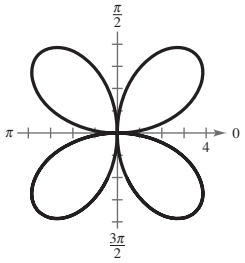
35.



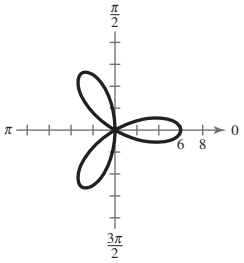
37.



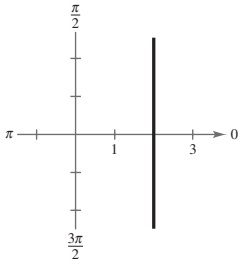
39.



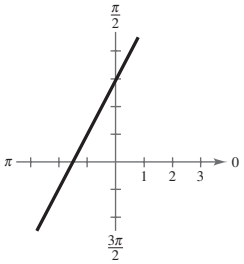
41.



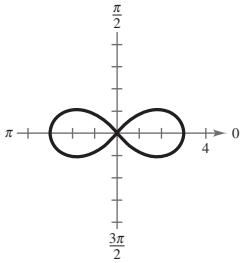
43.



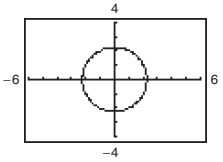
45.



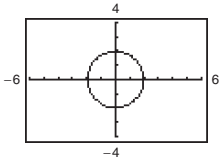
47.



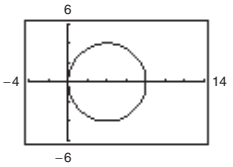
49.



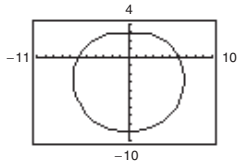
51.



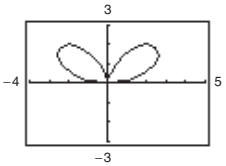
53.



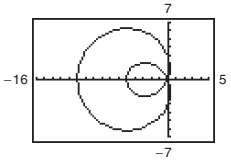
55.



57.

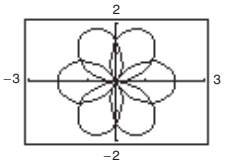


59.



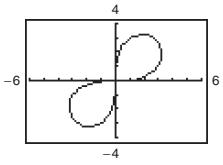
$0 \le \theta < 2\pi$

61.



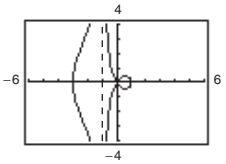
$0 \le \theta < 4\pi$

63.

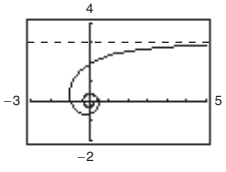


$0 \le \theta < \pi/2$

65.

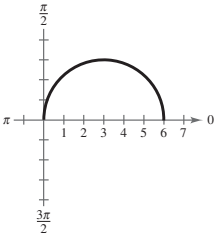


67.



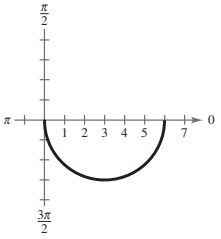
69. Verdadero. Para que una gráfica tenga simetría con el eje polar, sustituya (r, θ) con $(r, -\theta)$ o $(-r, \pi - \theta)$.

71. (a)



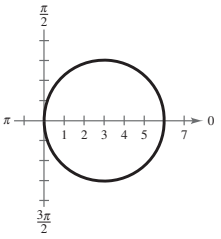
Mitad superior de la circunferencia

(b)



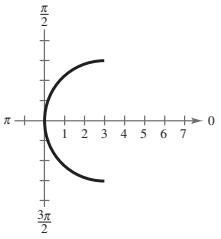
Mitad inferior de la circunferencia

(c)



Circunferencia completa

(d)



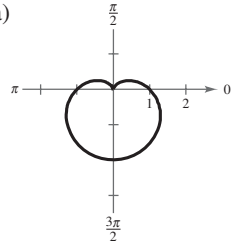
Mitad izquierda de la circunferencia

73. Las respuestas variarán.

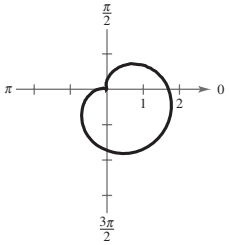
75. (a) $r = 2 - \dfrac{\sqrt{2}}{2}(\operatorname{sen}\theta - \cos\theta)$ (b) $r = 2 + \cos\theta$

(c) $r = 2 + \operatorname{sen}\theta$ (d) $r = 2 - \cos\theta$

77. (a)

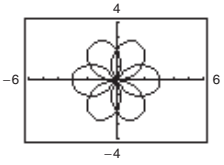


(b)



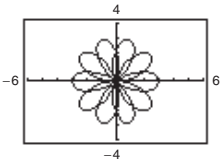
79. 8 pétalos; 3 pétalos; para $r = 2\cos n\theta$ y $r = 2\operatorname{sen} n\theta$, hay n pétalos si n es impar, $2n$ pétalos si n es par.

81. (a)



$0 \le \theta < 4\pi$

(b)



$0 \le \theta < 4\pi$

(c) Sí. Las explicaciones variarán.

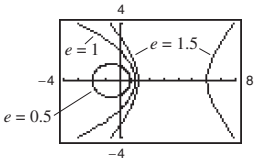
Sección 10.9 *(página 795)*

1. Cónica **3.** Vertical; derecha

5. $e = 1$: $r = \dfrac{2}{1 + \cos\theta}$, parábola

$e = 0.5$: $r = \dfrac{1}{1 + 0.5\cos\theta}$, elipse

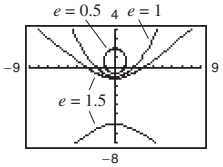
$e = 1.5$: $r = \dfrac{3}{1 + 1.5\cos\theta}$, hipérbola



7. $e = 1$: $r = \dfrac{2}{1 - \operatorname{sen}\theta}$, parábola

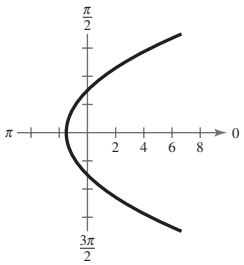
$e = 0.5$: $r = \dfrac{1}{1 - 0.5 \operatorname{sen}\theta}$, elipse

$e = 1.5$: $r = \dfrac{3}{1 - 1.5 \operatorname{sen}\theta}$, hipérbola

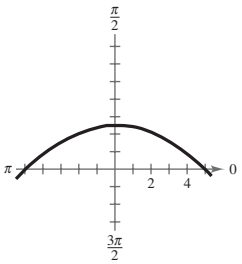


9. e **10.** c **11.** d **12.** f **13.** a **14.** b

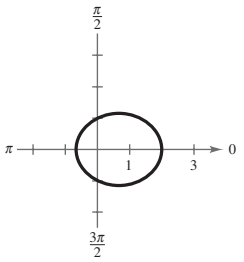
15. Parábola



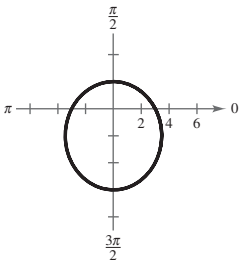
17. Parábola



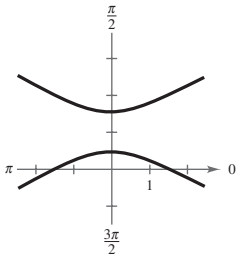
19. Elipse



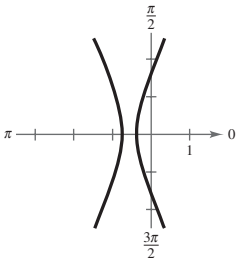
21. Elipse



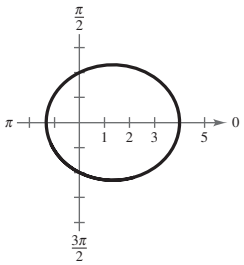
23. Hipérbola



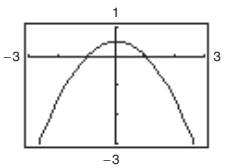
25. Hipérbola



27. Elipse

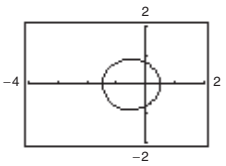


29.



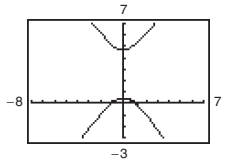
Parábola

31.



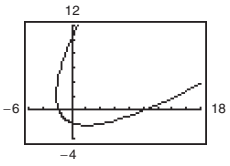
Elipse

33.

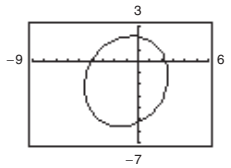


Hipérbola

35.



37.



39. $r = \dfrac{1}{1 - \cos\theta}$ **41.** $r = \dfrac{1}{2 + \operatorname{sen}\theta}$

43. $r = \dfrac{2}{1 + 2\cos\theta}$ **45.** $r = \dfrac{2}{1 - \operatorname{sen}\theta}$

47. $r = \dfrac{10}{1 - \cos\theta}$ **49.** $r = \dfrac{10}{3 + 2\cos\theta}$

51. $r = \dfrac{20}{3 - 2\cos\theta}$ **53.** $r = \dfrac{9}{4 - 5\operatorname{sen}\theta}$

55. Las respuestas variarán.

57. $r = \dfrac{9.5929 \times 10^7}{1 - 0.0167\cos\theta}$

Perihelio: 9.4354×10^7 mi

Afelio: 9.7558×10^7 mi

59. $r = \dfrac{1.0820 \times 10^8}{1 - 0.0068\cos\theta}$

Perihelio: 1.0747×10^8 km

Afelio: 1.0894×10^8 km

61. $r = \dfrac{1.4039 \times 10^8}{1 - 0.0934\cos\theta}$

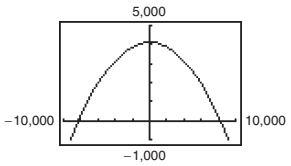
Perihelio: 1.2840×10^8 mi

Afelio: 1.5486×10^8 mi

63. $r = \dfrac{0.624}{1 + 0.847\operatorname{sen}\theta}$; $r \approx 0.338$ unidades astronómicas

65. (a) $r = \dfrac{8200}{1 + \operatorname{sen}\theta}$

(b)



(c) 1467 mi (d) 394 mi

67. Verdadero. Las gráficas representan la misma hipérbola.

69. Verdadero. La cónica es una elipse porque la excentricidad es menor a 1.

71. La ecuación original se grafica como parábola que se abre hacia abajo.

(a) La parábola se abre a la derecha.

(b) La parábola se abre hacia arriba.

(c) La parábola se abre a la izquierda.

(d) La parábola ha sido girada.

73. Las respuestas variarán.

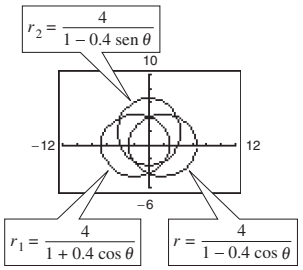
75. $r^2 = \dfrac{24\,336}{169 - 25\cos^2\theta}$ **77.** $r^2 = \dfrac{144}{25\cos^2\theta - 9}$

79. $r^2 = \dfrac{144}{25\cos^2\theta - 16}$

81. (a) Elipse

(b) La ecuación polar dada, r, tiene una directriz vertical a la izquierda del polo. La ecuación r_1 tiene una directriz vertical a la derecha del polo, y la ecuación r_2 tiene una directriz horizontal abajo del polo.

(c)



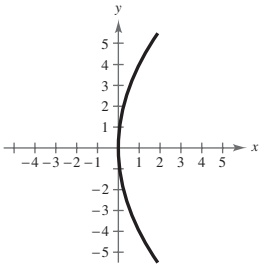
Ejercicios de repaso *(página 800)*

1. $\dfrac{\pi}{4}$ rad, 45° **3.** 1.1071 rad, 63.43°

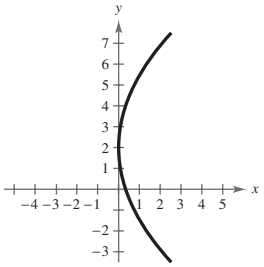
5. 0.4424 rad, 25.35° **7.** 0.6588 rad, 37.75°

9. $4\sqrt{2}$ **11.** Hipérbola

13. $y^2 = 16x$

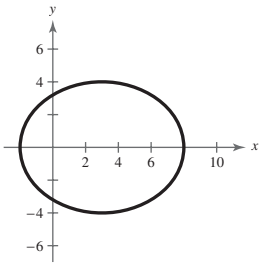


15. $(y - 2)^2 = 12x$

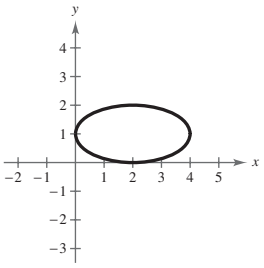


17. $y = -4x - 2;\ \left(-\frac{1}{2}, 0\right)$ **19.** $8\sqrt{6}$ m

21. $\dfrac{(x-3)^2}{25} + \dfrac{y^2}{16} = 1$



23. $\dfrac{(x-2)^2}{4} + \dfrac{(y-1)^2}{1} = 1$



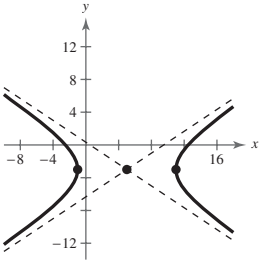
25. Los focos se presentan a 3 pies del centro del arco en una recta que enlaza las partes superiores de las columnas.

27. Centro: $(-1, 2)$
Vértices: $(-1, 9), (-1, -5)$
Focos: $\left(-1, 2 \pm 2\sqrt{6}\right)$
Excentricidad: $\dfrac{2\sqrt{6}}{7}$

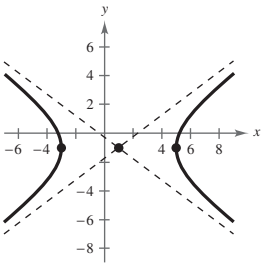
29. Centro:
Vértices: $(1, 0), (1, -8)$
Focos: $\left(1, -4 \pm \sqrt{7}\right)$
Excentricidad: $\dfrac{\sqrt{7}}{4}$

31. $\dfrac{y^2}{1} - \dfrac{x^2}{3} = 1$ **33.** $\dfrac{5(x-4)^2}{16} - \dfrac{5y^2}{64} = 1$

35. Centro: $(5, -3)$
Vértices: $(11, -3), (-1, -3)$
Focos: $\left(5 \pm 2\sqrt{13}, -3\right)$
Asíntotas:
$y = -3 \pm \frac{2}{3}(x - 5)$

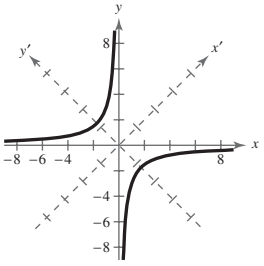


37. Centro: $(1, -1)$
Vértices: $(5, -1), (-3, -1)$
Focos: $(6, -1), (-4, -1)$
Asíntotas:
$y = -1 \pm \frac{3}{4}(x - 1)$

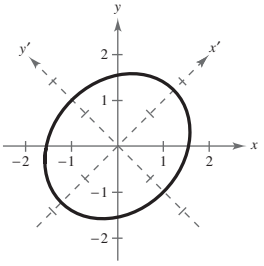


39. 72 mi **41.** Hipérbola **43.** Elipse

45. $\dfrac{(y')^2}{6} - \dfrac{(x')^2}{6} = 1$



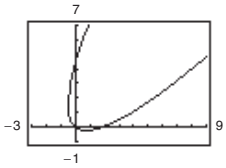
47. $\dfrac{(x')^2}{3} + \dfrac{(y')^2}{2} = 1$



49. (a) Parábola

(b) $y = \dfrac{24x + 40 \pm \sqrt{(24x + 40)^2 - 36(16x^2 - 30x)}}{18}$

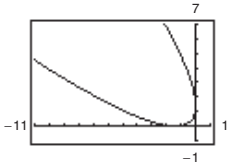
(c)



51. (a) Parábola

(b)
$y = \dfrac{-\left(2x - 2\sqrt{2}\right) \pm \sqrt{\left(2x - 2\sqrt{2}\right)^2 - 4\left(x^2 + 2\sqrt{2}x + 2\right)}}{2}$

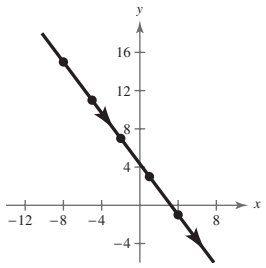
(c)



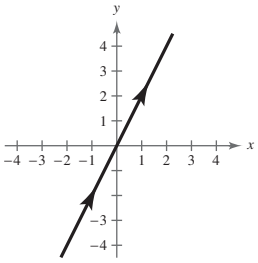
53. (a)

t	-2	-1	0	1	2
x	-8	-5	-2	1	4
y	15	11	7	3	-1

(b)

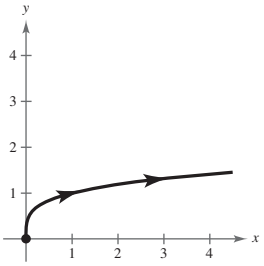


55. (a)



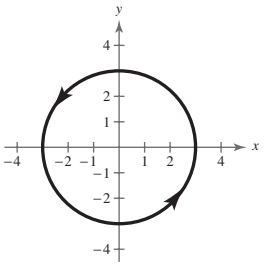
(b) $y = 2x$

57. (a)



(b) $y = \sqrt[4]{x}$

59. (a)

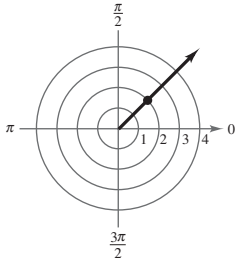


(b) $x^2 + y^2 = 9$

61. $x = -4 + 13t$
$y = 4 - 14t$

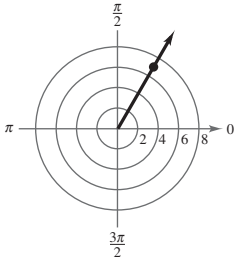
63. $x = -3 + 4\cos\theta$
$y = 4 + 3\operatorname{sen}\theta$

65.



$(2, -7\pi/4), (-2, 5\pi/4)$

67.



$(7, 1.05), (-7, -2.09)$

69. $\left(-\frac{1}{2}, -\frac{\sqrt{3}}{2}\right)$ **71.** $\left(-\frac{3\sqrt{2}}{2}, \frac{3\sqrt{2}}{2}\right)$ **73.** $\left(1, \frac{\pi}{2}\right)$

75. $\left(2\sqrt{13}, 0.9828\right)$ **77.** $r = 9$ **79.** $r = 6\operatorname{sen}\theta$

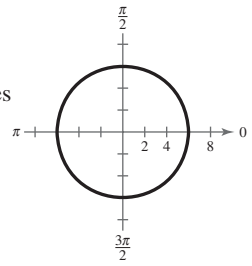
81. $r^2 = 10\csc 2\theta$ **83.** $x^2 + y^2 = 25$ **85.** $x^2 + y^2 = 3x$

87. $x^2 + y^2 = y^{2/3}$

89. Simetría: $\theta = \frac{\pi}{2}$, eje polar, polo

Valor máximo de $|r|$:
$|r| = 6$ para todos los valores de θ

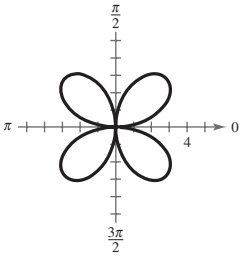
No hay ceros de r



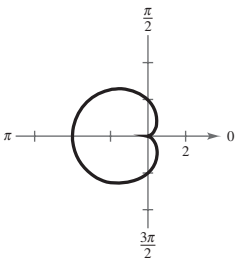
91. Simetría: $\theta = \frac{\pi}{2}$, eje polar, polo

Valor máximo de $|r|$: $|r| = 4$ cuando $\theta = \frac{\pi}{4}, \frac{3\pi}{4}, \frac{5\pi}{4}, \frac{7\pi}{4}$

Ceros de r: $r = 0$ cuando
$\theta = 0, \frac{\pi}{2}, \pi, \frac{3\pi}{2}$



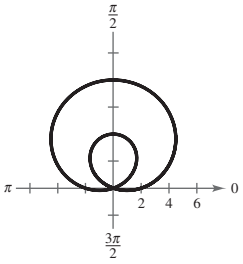
93. Simetría: eje polar
Valor máximo de $|r|$:
$|r| = 4$ cuando $\theta = 0$
Ceros de r: $r = 0$
cuando $\theta = \pi$



95. Simetría: $\theta = \frac{\pi}{2}$

Valor máximo de $|r|$: $|r| = 8$ cuando $\theta = \frac{\pi}{2}$

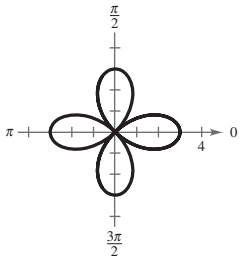
Ceros de r: $r = 0$ cuando $\theta = 3.4814, 5.9433$



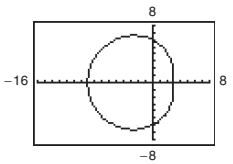
97. Simetría: $\theta = \frac{\pi}{2}$, eje polar, polo

Valor máximo de $|r|$: $|r| = 3$ cuando $\theta = 0, \frac{\pi}{2}, \pi, \frac{3\pi}{2}$

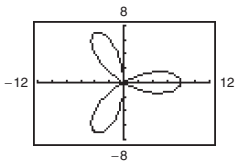
Ceros de r: $r = 0$ cuando $\theta = \frac{\pi}{4}, \frac{3\pi}{4}, \frac{5\pi}{4}, \frac{7\pi}{4}$



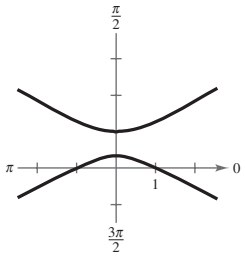
99. Caracol



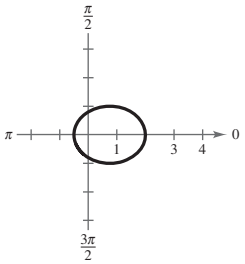
101. Curva roseta



103. Hipérbola



105. Elipse



107. $r = \dfrac{4}{1 - \cos\theta}$ **109.** $r = \dfrac{5}{3 - 2\cos\theta}$

111. $r = \dfrac{7978.81}{1 - 0.937\cos\theta}$; 11 011.87 mi

113. Falso. La ecuación de una hipérbola es una ecuación de segundo grado.

115. Falso. $(2, \pi/4), (-2, 5\pi/4)$ y $(2, 9\pi/4)$ representan todos ellos el mismo punto.

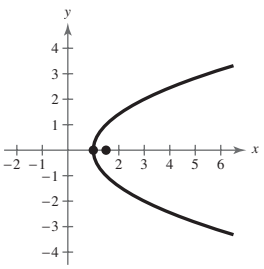
117. (a) Las gráficas son las mismas. (b) Las gráficas son las mismas.

Examen del capítulo *(página 803)*

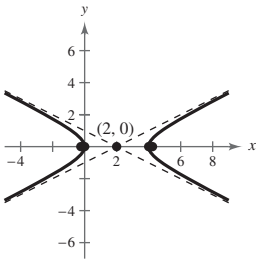
1. 0.3805 rad, 21.8° **2.** 0.8330 rad, 47.7°

3. $\dfrac{7\sqrt{2}}{2}$

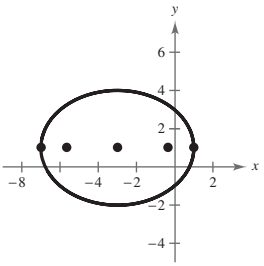
4. Parábola: $y^2 = 2(x - 1)$
Vértice: $(1, 0)$
Foco: $\left(\frac{3}{2}, 0\right)$



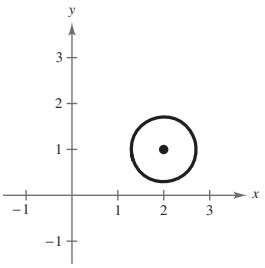
5. Hipérbola: $\dfrac{(x-2)^2}{4} - y^2 = 1$
Centro: $(2, 0)$
Vértices: $(0, 0), (4, 0)$
Focos: $\left(2 \pm \sqrt{5}, 0\right)$
Asíntotas: $y = \pm\frac{1}{2}(x - 2)$



6. Elipse: $\dfrac{(x+3)^2}{16} + \dfrac{(y-1)^2}{9} = 1$
Centro: $(-3, 1)$
Vértices: $(1, 1), (-7, 1)$
Focos: $\left(-3 \pm \sqrt{7}, 1\right)$

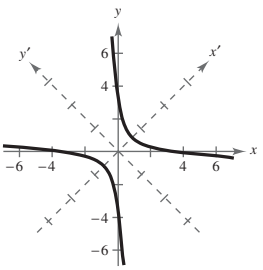


7. Circunferencia: $(x - 2)^2 + (y - 1)^2 = \frac{1}{2}$
Centro: $(2, 1)$

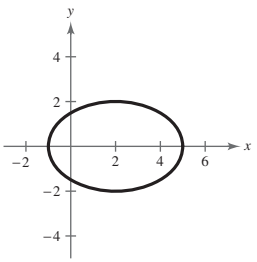


8. $(x - 2)^2 = \dfrac{4}{3}(y + 3)$ **9.** $\dfrac{5(y-2)^2}{4} - \dfrac{5x^2}{16} = 1$

10. (a) 45°
(b)



11.



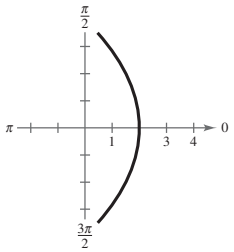
$\dfrac{(x-2)^2}{9} + \dfrac{y^2}{4} = 1$

12. $x = 6 + 4t$
$y = 4 + 7t$

13. $\left(\sqrt{3}, -1\right)$ **14.** $\left(2\sqrt{2}, \frac{7\pi}{4}\right), \left(-2\sqrt{2}, \frac{3\pi}{4}\right), \left(2\sqrt{2}, -\frac{\pi}{4}\right)$

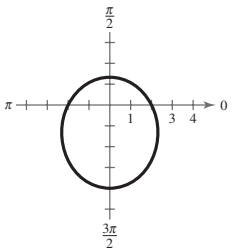
15. $r = 3\cos\theta$

16.



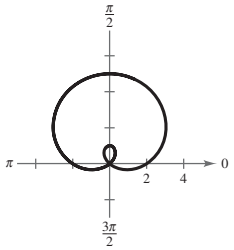
Parábola

17.



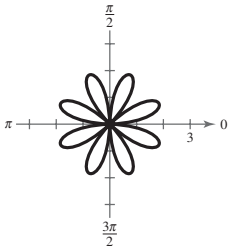
Elipse

18.



Caracol con lazo interior

19.



Curva roseta

20. Las respuestas variarán. Por ejemplo: $r = \dfrac{1}{1 + 0.25 \operatorname{sen} \theta}$

21. Pendiente: 0.1511; cambio en elevación: 789 pies

22. No; sí

Resolución de problemas *(página 807)*

1. (a) 1.2016 rad (b) 2420 ft, 5971 ft

3. $y^2 = 4p(x + p)$ **5.** Las respuestas variarán.

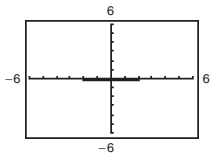
7. $\dfrac{(x - 6)^2}{9} - \dfrac{(y - 2)^2}{7} = 1$

9. (a) El primer conjunto de ecuaciones paramétricas modela el movimiento de proyectiles a lo largo de una recta. El segundo conjunto de ecuaciones paramétricas modela el movimiento de proyectiles de un cuerpo lanzado a una altura de h unidades arriba del suelo, que finalmente caerá al suelo.

(b) $y = (\tan \theta)x;\ y = h + x \tan \theta - \dfrac{16x^2 \sec^2 \theta}{{v_0}^2}$

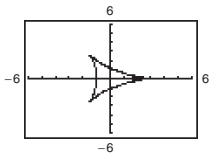
(c) En el primer caso, la trayectoria del cuerpo en movimiento no es afectada por un cambio en la velocidad porque al eliminarse el parámetro se elimina v_0.

11. (a)



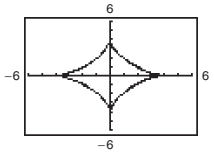
La gráfica es una recta entre -2 y 2 sobre el eje x.

(b)



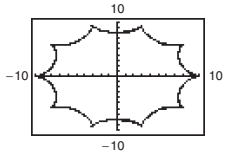
La gráfica es una figura de tres lados con orientación en sentido contrario al giro de las manecillas de un reloj.

(c)



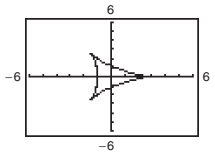
La gráfica es una figura de cuatro lados con orientación en sentido contrario al giro de las manecillas de un reloj.

(d)



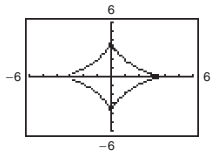
La gráfica es una figura de diez lados con orientación en en sentido contrario al giro de las manecillas de un reloj.

(e)



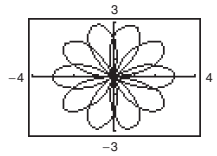
La gráfica es una figura de tres lados con orientación en el sentido de giro de las manecillas de un reloj.

(f)

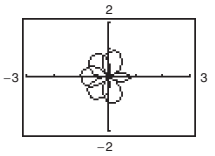


La gráfica es una figura de cuatro lados con orientación en el sentido de giro de las manecillas de un reloj.

13.



$r = 3 \operatorname{sen}\left(\dfrac{5\theta}{2}\right)$



$r = -\cos\left(\sqrt{2}\theta\right),\ -2\pi \le \theta \le 2\pi$

Respuesta de muestra: si n es un número racional, entonces la curva tiene un número finito de pétalos; si n es un número irracional, la curva tiene entonces un número infinito de pétalos

15. (a) No. Debido al exponencial, la gráfica continuará trazando la curva de mariposa a valores más grandes de r.

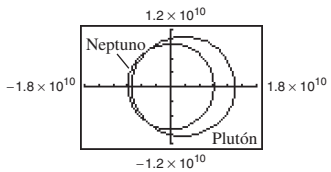
(b) $r \approx 4.1$. Este valor aumentará si θ aumenta.

17. (a) $r_{\text{Neptuno}} = \dfrac{4.4947 \times 10^9}{1 - 0.0086 \cos \theta}$

$r_{\text{Plutón}} = \dfrac{5.54 \times 10^9}{1 - 0.2488 \cos \theta}$

(b) Neptuno: Afelio $= 4.534 \times 10^9$ km
Perihelio $= 4.456 \times 10^9$ km
Plutón: Afelio $= 7.375 \times 10^9$ km
Perihelio $= 4.437 \times 10^9$ km

(c)



(d) Sí, a veces Plutón puede estar más cerca del Sol que Neptuno. Plutón fue denominado noveno planeta porque tiene la órbita más larga alrededor del Sol y, por tanto, alcanza la mayor distancia alejada del astro.

(e) Si las órbitas estuvieran en el mismo plano, entonces se cruzarían. Además, como los periodos orbitales difieren (Neptuno = 164.79 años, Plutón = 247.68 años), entonces los dos planetas finalmente chocarían si las órbitas se cruzaran. La inclinación orbital de Plutón es considerablemente más grande que la de Neptuno (17.16° contra 1.769), de modo que se requiere de mayor análisis para determinar si las órbitas se cruzan.

Apéndice A

Apéndice A.1 *(página A11)*

1. Racional **3.** Origen **5.** Compuesto

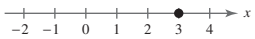
7. Variables; constantes **9.** Coeficiente

11. (a) 5, 1, 2 (b) 0, 5, 1, 2 (c) $-9, 5, 0, 1, -4, 2, -11$
(d) $-\frac{7}{2}, \frac{2}{3}, -9, 5, 0, 1, -4, 2, -11$ (e) $\sqrt{2}$

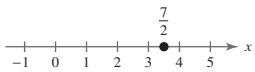
13. (a) 1 (b) 1 (c) $-13, 1, -6$
(d) $2.01, -13, 1, -6, 0.666\ldots$ (e) $0.010110111\ldots$

15. (a) $\frac{6}{3}, 8$ (b) $\frac{6}{3}, 8$ (c) $\frac{6}{3}, -1, 8, -22$
(d) $-\frac{1}{3}, \frac{6}{3}, -7.5, -1, 8, -22$ (e) $-\pi, \frac{1}{2}\sqrt{2}$

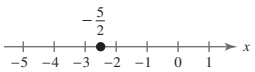
17. (a)



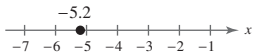
(b)



(c)

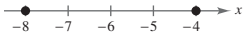


(d)



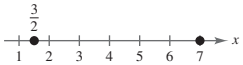
19. 0.625 **21.** $0.\overline{123}$ **23.** $-2.5 < 2$

25.



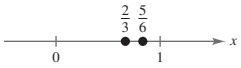
$-4 > -8$

27.



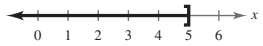
$\frac{3}{2} < 7$

29.



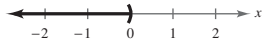
$\frac{5}{6} > \frac{2}{3}$

31. (a) $x \le 5$ denota el conjunto de todos los números reales menores o iguales a 5.
(b)



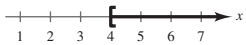
(c) No acotado

33. (a) $x < 0$ denota el conjunto de todos los números reales menores que 0.
(b)



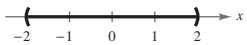
(c) No acotado

35. (a) $[4, \infty)$ denota el conjunto de todos los números reales mayores o iguales a 4.
(b)



(c) No acotado

37. (a) $-2 < x < 2$ denota el conjunto de todos los números reales mayores a -2 y menores a 2.
(b)

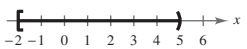


(c) Acotado

39. (a) $-1 \le x < 0$ denota el conjunto de todos los números reales mayores o iguales a -1 y menores a 0.
(b)

(c) Acotado

41. (a) $[-2, 5)$ denota el conjunto de todos los números reales mayores o iguales a -2 y menores que 5.
(b)



(c) Acotado

Desigualdad	*Intervalo*
43. $y \ge 0$	$[0, \infty)$
45. $-2 < x \le 4$	$(-2, 4]$
47. $10 \le t \le 22$	$[10, 22]$
49. $W > 65$	$(65, \infty)$

51. 10 **53.** 5 **55.** -1 **57.** -1 **59.** -1

61. $|-3| > -|-3|$ **63.** $-5 = -|5|$

65. $-|-2| = -|2|$ **67.** 51 **69.** $\frac{5}{2}$ **71.** $\frac{128}{75}$

73. $|x - 5| \le 3$ **75.** $|y| \ge 6$

77. $|57 - 236| = 179$ mi

79. $|\$113{,}356 - \$112{,}700| = \$656 > \$500$
$0.05(\$112{,}700) = \$5635$
Como el gasto real difiere del presupuesto en más de \$500, no se satisface la "prueba de varianza de presupuesto."

81. $|\$37{,}335 - \$37{,}640| = \$305 < \$500$
$0.05(\$37{,}640) = \$1882$
Como la diferencia entre el gasto real y el presupuesto es menor a \$500 y menor al 5% de la cantidad presupuestada, se cumple con la "prueba de varianza de presupuesto."

83. \$1453.2 millones; \$107.4 millones

85. \$2025.5 millones; \$236.3 millones

87. \$1880.3 millones; \$412.7 millones

89. $7x$ y 4 son los términos; 7 es el coeficiente.

91. $\sqrt{3}x^2$, $-8x$, y -11 son los términos; $\sqrt{3}$ y -8 son los coeficientes.

93. $4x^3$, $x/2$, y -5 son los términos; 4 y $\frac{1}{2}$ son los coeficientes.

95. (a) -10 (b) -6 **97.** (a) 14 (b) 2

99. (a) La división entre 0 no está definida. (b) 0

101. Propiedad conmutativa de la adición

103. Propiedad multiplicativa inversa

105. Propiedad distributiva

107. Propiedad multiplicativa de identidad

109. Propiedad asociativa de la adición

111. Propiedad distributiva

113. $\frac{1}{2}$ **115.** $\frac{3}{8}$ **117.** 48 **119.** $\frac{5x}{12}$

121. (a) Negativa (b) Negativa

123. (a)

n	1	0.5	0.01	0.0001	0.000001
$5/n$	5	10	500	50,000	5,000,000

(b) El valor de $5/n$ se aproxima al infinito cuando n se aproxima a 0.

125. Verdadero. Como $b < 0$, $a - b$ resta un número negativo de (o suma un número positivo a) un número positivo.

127. Falso. Si $a < b$, entonces $\frac{1}{a} > \frac{1}{b}$, donde $a \ne 0$ y $b \ne 0$.

129. (a) No. Si una variable es negativa y la otra es positiva, las expresiones son desiguales.
(b) No. $|u + v| \le |u| + |v|$
Las expresiones son iguales cuando u y v tienen el mismo signo. Si u y v difieren en signo, $|u + v|$ es menor que $|u| + |v|$.

131. El único número primo par es 2, porque sus únicos factores son él mismo y 1.

133. Sí. $|a| = -a$ si $a < 0$.

Apéndice A.2 *(página A24)*

1. Exponente; base **3.** Raíz cuadrada **5.** Índice; radicando
7. Radicales semejantes **9.** Racionalizando **11.** (a) 27 (b) 81
13. (a) 1 (b) -9 **15.** (a) 243 (b) $-\frac{3}{4}$
17. (a) $\frac{5}{6}$ (b) 4 **19.** -1600 **21.** 2.125
23. -24 **25.** 6 **27.** -54 **29.** -5
31. (a) $-125z^3$ (b) $5x^6$ **33.** (a) $24y^2$ (b) $3x^2$
35. (a) $\dfrac{7}{x}$ (b) $\dfrac{4}{3}(x+y)^2$ **37.** (a) $\dfrac{x^2}{y^2}$ (b) $\dfrac{b^5}{a^5}$
39. (a) 1 (b) $\dfrac{1}{4x^4}$ **41.** (a) $-2x^3$ (b) $\dfrac{10}{x}$
43. (a) 3^{3n} (b) $\dfrac{b^5}{a^5}$ **45.** 1.02504×10^4
47. -1.25×10^{-4} **49.** 5.73×10^7 mi^2
51. 8.99×10^{-5} g/cm^3 **53.** 125,000 **55.** -0.002718
57. 15,000,000°C **59.** 0.00009 m
61. (a) 6.8×10^5 (b) 6.0×10^4
63. (a) 954.448 (b) 3.077×10^{10}
65. (a) 3 (b) $\frac{3}{2}$ **67.** (a) $\frac{1}{8}$ (b) $\frac{27}{8}$
69. (a) -4 (b) 2 **71.** (a) 7.550 (b) -7.225
73. (a) -0.011 (b) 0.005
75. (a) 67,082.039 (b) 39.791
77. (a) 2 (b) $2\sqrt[5]{3}x$ **79.** (a) $2\sqrt{5}$ (b) $4\sqrt[3]{2}$
81. (a) $6x\sqrt{2x}$ (b) $\dfrac{18\sqrt{z}}{z^2}$
83. (a) $2x\sqrt[3]{2x^2}$ (b) $\dfrac{5|x|\sqrt{3}}{y^2}$
85. (a) $34\sqrt{2}$ (b) $22\sqrt{2}$ **87.** (a) $2\sqrt{x}$ (b) $4\sqrt{y}$
89. (a) $13\sqrt{x+1}$ (b) $18\sqrt{5x}$
91. $\sqrt{5} + \sqrt{3} > \sqrt{5+3}$
93. $5 > \sqrt{3^2+2^2}$ **95.** $\dfrac{\sqrt{3}}{3}$ **97.** $\dfrac{\sqrt{14}+2}{2}$
99. $\dfrac{2}{\sqrt{2}}$ **101.** $\dfrac{2}{3\left(\sqrt{5}-\sqrt{3}\right)}$ **103.** $2.5^{1/2}$
105. $\sqrt[4]{81}$ **107.** $(-216)^{1/3}$ **109.** $81^{3/4}$
111. $\dfrac{2}{|x|}$ **113.** $\dfrac{1}{x^3}$, $x > 0$
115. (a) $\sqrt{3}$ (b) $\sqrt[3]{(x+1)^2}$ **117.** (a) $2\sqrt[4]{2}$ (b) $\sqrt[8]{2x}$
119. $\dfrac{\pi}{2} \approx 1.57$ sec
121. (a)

h	0	1	2	3	4	5	6
t	0	2.93	5.48	7.67	9.53	11.08	12.32

h	7	8	9	10	11	12
t	13.29	14.00	14.50	14.80	14.93	14.96

(b) $t \to 8.64\sqrt{3} \approx 14.96$
123. Verdadero. Al dividir variables, se restan exponentes.
125. $a^0 = 1$, $a \neq 0$, usando la propiedad $\dfrac{a^m}{a^n} = a^{m-n}$:

$$\frac{a^m}{a^m} = a^{m-m} = a^0 = 1.$$

127. No. Un número está en notación científica cuando haya sólo un dígito diferente de cero a la izquierda del punto decimal.
129. No. Racionalizar el denominador produce un número equivalente a la fracción original; elevarlo al cuadrado, no.

Apéndice A.3 *(página A35)*

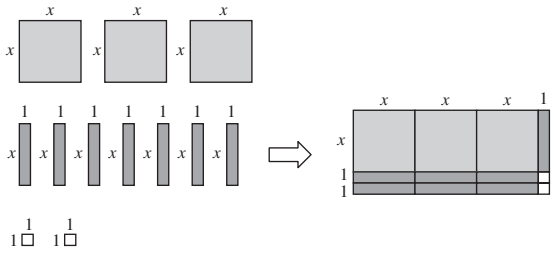
1. n; a_n; a_0 **3.** Monomio; binomio; trinomio
5. Primeros términos; términos externos; términos internos; últimos términos
7. Completamente factorizado **9.** d **10.** e **11.** b
12. a **13.** f **14.** c **15.** $-2x^3 + 4x^2 - 3x + 20$
17. $-15x^4 + 1$
19. (a) $-\frac{1}{2}x^5 + 14x$
(b) Grado: 5; coeficiente inicial: $-\frac{1}{2}$
(c) Binomio
21. (a) $-3x^4 + x^2 - 4$
(b) Grado: 4; coeficiente inicial: -3
(c) Trinomio
23. (a) $-x^6 + 3$
(b) Grado: 6; coeficiente inicial: -1
(c) Binomio
25. (a) 3
(b) Grado: 0; coeficiente inicial: 3
(c) Monomio
27. (a) $-4x^5 + 6x^4 + 1$
(b) Grado: 5; coeficiente inicial: -4
(c) Trinomio
29. (a) $4x^3y$
(b) Grado: 4; coeficiente inicial: 4
(c) Monomio
31. Polinomio: $-3x^3 + 2x + 8$
33. No es polinomio porque incluye un término con exponente negativo
35. Polinomio: $-y^4 + y^3 + y^2$
37. $-2x - 10$ **39.** $5t^3 - 5t + 1$
41. $8.3x^3 + 29.7x^2 + 11$ **43.** $12z + 8$
45. $3x^3 - 6x^2 + 3x$ **47.** $-15z^2 + 5z$ **49.** $-4x^4 + 4x$
51. $-4.5t^3 - 15t$ **53.** $-0.2x^2 - 34x$
55. $x^2 + 7x + 12$ **57.** $6x^2 - 7x - 5$ **59.** $x^2 - 100$
61. $x^2 - 4y^2$ **63.** $4x^2 + 12x + 9$
65. $x^3 + 3x^2 + 3x + 1$ **67.** $8x^3 - 12x^2y + 6xy^2 - y^3$
69. $16x^6 - 24x^3 + 9$ **71.** $x^4 + x^2 + 1$
73. $-3x^4 - x^3 - 12x^2 - 19x - 5$
75. $m^2 - n^2 - 6m + 9$
77. $x^2 + 2xy + y^2 - 6x - 6y + 9$ **79.** $4r^4 - 25$
81. $\frac{1}{16}x^2 - \frac{5}{2}x + 25$ **83.** $\frac{1}{25}x^2 - 9$
85. $5.76x^2 + 14.4x + 9$ **87.** $2.25x^2 - 16$
89. $2x^2 + 2x$ **91.** $u^4 - 16$ **93.** $x - y$
95. $x^2 - 2\sqrt{5}x + 5$ **97.** $4(x+4)$ **99.** $2x(x^2 - 3)$
101. $(x-5)(3x+8)$ **103.** $(x+3)(x-1)$
105. $\frac{1}{2}(x+8)$ **107.** $\frac{1}{2}x(x^2 + 4x - 10)$

109. $\frac{2}{3}(x-6)(x-3)$ **111.** $(x+9)(x-9)$
113. $3(4y-3)(4y+3)$ **115.** $\left(4x+\frac{1}{3}\right)\left(4x-\frac{1}{3}\right)$
117. $(x+1)(x-3)$ **119.** $(3u+2v)(3u-2v)$
121. $(x-2)^2$ **123.** $(2t+1)^2$ **125.** $(5y-1)^2$
127. $(3u+4v)^2$ **129.** $\left(x-\frac{2}{3}\right)^2$ **131.** $\frac{1}{9}(6x-1)^2$
133. $(x-2)(x^2+2x+4)$ **135.** $(y+4)(y^2-4y+16)$
137. $\frac{1}{27}(3x-2)(9x^2+6x+4)$ **139.** $(2t-1)(4t^2+2t+1)$
141. $(u+3v)(u^2-3uv+9v^2)$
143. $(x-y+2)(x^2+xy+4x+y^2+2y+4)$
145. $(x+2)(x-1)$ **147.** $(s-3)(s-2)$
149. $-(y+5)(y-4)$ **151.** $(x-20)(x-10)$
153. $(3x-2)(x-1)$ **155.** $(5x+1)(x+5)$
157. $-(3z-2)(3z+1)$ **159.** $(x-1)(x^2+2)$
161. $(2x-1)(x^2-3)$ **163.** $(3+x)(2-x^3)$
165. $(3x^2-1)(2x+1)$ **167.** $(x+2)(3x+4)$
169. $(2x-1)(3x+2)$ **171.** $(3x-1)(5x-2)$
173. $6(x+3)(x-3)$ **175.** $x^2(x-1)$
177. $x(x-4)(x+4)$ **179.** $(x-1)^2$ **181.** $(1-2x)^2$
183. $-2x(x+1)(x-2)$ **185.** $\frac{1}{81}(x+36)(x-18)$
187. $(3x+1)(x^2+5)$ **189.** $x(x-4)(x^2+1)$
191. $\frac{1}{4}(x^2+3)(x+12)$ **193.** $(t+6)(t-8)$
195. $(x+2)(x+4)(x-2)(x-4)$
197. $5(x+2)(x^2-2x+4)$ **199.** $(3-4x)(23-60x)$
201. $5(1-x)^2(3x+2)(4x+3)$
203. $(x-2)^2(x+1)^3(7x-5)$
205. $3(x^2+1)^4(x^4-x^2+1)^4(3x+2)^2(33x^6+20x^5+3)$
207. $4x^3(2x+1)^3(2x^2+2x+1)$
209. $(2x-5)^3(5x-4)^2(70x-107)$
211. $-\dfrac{8}{(5x-1)^2}$ **213.** $-14, 14, -2, 2$
215. $-51, 51, -15, 15, -27, 27$
217. Dos posibles respuestas: $2, -12$
219. Dos posibles respuestas: $-2, -4$
221. (a) $P = 22x - 25{,}000$ (b) \$85,000
223. (a) $V = 4x^3 - 88x^2 + 468x$

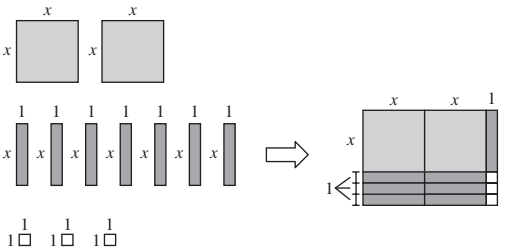
(b)

x (cm)	1	2	3
V (cm^3)	384	616	720

225. $44x + 308$
227.



229.



231. $4\pi(r+1)$
233. (a) $V = \pi h(R+r)(R-r)$
(b) $V = \pi h(R+r)(R-r)$

$$= \frac{2}{2}\pi h(R+r)(R-r)$$

$$= 2\pi\left(\frac{R+r}{2}\right)(R-r)h$$

235. Falso. $(4x^2+1)(3x+1) = 12x^3+4x^2+3x+1$
237. Verdadero. $a^2-b^2=(a+b)(a-b)$
239. $m+n$ **241.** $-x^3+8x^2+2x+7$
243. $(x^n+y^n)(x^n-y^n)$
245. Las respuestas variarán. Respuesta de muestra: x^2-3

Apéndice A.4 *(página A45)*

1. Dominio **3.** Complejo **5.** Equivalente
7. Todos los números reales
9. Todos los números reales no negativos
11. Todos los números reales x tales que $x \neq 3$
13. Todos los números reales x tales que $x \neq 1$
15. Todos los números reales x tales que $x \neq 3$
17. Todos los números reales x tales que $x \geq -7$
19. Todos los números reales x tales que $x \geq \frac{5}{2}$
21. Todos los números reales x tales que $x > 3$
23. $3x,\ x \neq 0$ **25.** $\dfrac{3x}{2},\ x \neq 0$ **27.** $\dfrac{3y}{y+1},\ x \neq 0$
29. $\dfrac{-4y}{5},\ y \neq \dfrac{1}{2}$ **31.** $-\frac{1}{2},\ x \neq 5$ **33.** $y-4,\ y \neq -4$
35. $\dfrac{x(x+3)}{x-2},\ x \neq -2$ **37.** $\dfrac{y-4}{y+6},\ y \neq 3$
39. $\dfrac{-(x^2+1)}{(x+2)},\ x \neq 2$ **41.** $z-2$
43. Al simplificar fracciones, sólo se pueden dividir factores comunes, no términos.
45.

x	0	1	2	3	4	5	6
$\dfrac{x^2-2x-3}{x-3}$	1	2	3	No definido	5	6	7
$x+1$	1	2	3	4	5	6	7

Las expresiones son equivalentes excepto en $x = 3$.
47. $\dfrac{\pi}{4},\ r \neq 0$ **49.** $\dfrac{1}{5(x-2)},\ x \neq 1$ **51.** $\dfrac{r+1}{r},\ r \neq 1$
53. $\dfrac{t-3}{(t+3)(t-2)},\ t \neq -2$
55. $\dfrac{(x+6)(x+1)}{x^2},\ x \neq 6, -1$

57. $\frac{6x + 13}{x + 3}$ **59.** $\frac{x + 5}{x - 1}$ **61.** $-\frac{2}{x - 2}$

63. $\frac{-2x^2 + 3x + 8}{(2x + 1)(x + 2)}$ **65.** $-\frac{x^2 + 3}{(x + 1)(x - 2)(x - 3)}$

67. $\frac{2 - x}{x^2 + 1}$, $x \neq 0$

69. El error es sustracción incorrecta en el numerador.

71. $\frac{1}{2}$, $x \neq 2$ **73.** $x(x + 1)$, $x \neq -1, 0$

75. $\frac{2x - 1}{2x}$, $x > 0$ **77.** $\frac{x^7 - 2}{x^2}$ **79.** $\frac{-1}{(x^2 + 1)^5}$

81. $\frac{2x^3 - 2x^2 - 5}{(x - 1)^{1/2}}$ **83.** $\frac{3x - 1}{3}$, $x \neq 0$

85. $\frac{-1}{x(x + h)}$, $h \neq 0$ **87.** $\frac{-1}{(x - 4)(x + h - 4)}$, $h \neq 0$

89. $\frac{1}{\sqrt{x + 2} + \sqrt{x}}$ **91.** $\frac{1}{\sqrt{t + 3} + \sqrt{3}}$, $t \neq 0$

93. $\frac{1}{\sqrt{x + h + 1} + \sqrt{x + 1}}$, $h \neq 0$

95. $\frac{x}{2(2x + 1)}$, $x \neq 0$

97. (a) $\frac{1}{50}$ min (b) $\frac{x}{50}$ min (c) $\frac{120}{50} = 2.4$ min

99. (a) 6.39% (b) $\frac{288(MN - P)}{N(MN + 12P)}$; 6.39%

101. (a)

t	0	2	4	6	8	10	12
T	75	55.9	48.3	45	43.3	42.3	41.7

t	14	16	18	20	22
T	41.3	41.1	40.9	40.7	40.6

(b) El modelo se aproxima a un valor T de 40.

103. Falso. Para que la expresión simplificada sea equivalente a la expresión original, el dominio de la expresión simplificada necesita ser restringido. Si n es par, $x \neq -1, 1$. Si n es impar, $x \neq 1$.

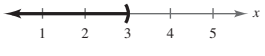
105. Factorice por completo cada polinomio del numerador y el denominador. A continuación, concluya que no haya factores comunes.

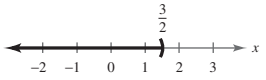
Apéndice A.5 *(página A60)*

1. Ecuación **3.** Extraña **5.** Identidad
7. Ecuación condicional **9.** Identidad
11. Ecuación condicional **13.** 4 **15.** -9 **17.** 5
19. 1 **21.** No hay solución **23.** $-\frac{96}{23}$ **25.** $-\frac{6}{5}$
27. No hay solución. Los términos x suman cero pero, los términos constantes, no.
29. 10 **31.** 4 **33.** 0
35. No hay solución. La solución es extraña.
37. No hay solución. La solución es extraña.
39. No hay solución. La solución es extraña.
41. 0 **43.** $2x^2 + 8x - 3 = 0$ **45.** $3x^2 - 90x - 10 = 0$
47. $0, -\frac{1}{2}$ **49.** $4, -2$ **51.** $5, 7$ **53.** $3, -\frac{1}{2}$
55. $2, -6$ **57.** $-a$ **59.** ± 7 **61.** $\pm 3\sqrt{3}$
63. $8, 16$ **65.** $-2 \pm \sqrt{14}$ **67.** $\frac{1 \pm 3\sqrt{2}}{2}$
69. 2 **71.** $4, -8$ **73.** $\sqrt{11} - 6, -\sqrt{11} - 6$
75. $2 \pm 2\sqrt{3}$ **77.** $\frac{-5 \pm \sqrt{89}}{4}$ **79.** $\frac{15 \pm \sqrt{85}}{10}$
81. $\frac{1}{2}, -1$ **83.** $1 \pm \sqrt{3}$ **85.** $-7 \pm \sqrt{5}$
87. $-4 \pm 2\sqrt{5}$ **89.** $\frac{2}{3} \pm \frac{\sqrt{7}}{3}$ **91.** $-\frac{4}{3}$ **93.** $\frac{2}{7}$
95. $2 \pm \frac{\sqrt{6}}{2}$ **97.** $6 \pm \sqrt{11}$ **99.** $-3.449, 1.449$
101. $1.355, -14.071$ **103.** $1.687, -0.488$ **105.** $1 \pm \sqrt{2}$
107. $6, -12$ **109.** $\frac{1}{2} \pm \sqrt{3}$ **111.** ± 1 **113.** $0, \pm 5$
115. ± 3 **117.** -6 **119.** $3, 1, -1$ **121.** ± 1
123. $\pm\sqrt{3}, \pm 1$ **125.** $1, -2$ **127.** 50 **129.** 26
131. No hay solución **133.** $-\frac{513}{2}$
135. $6, 7$ **137.** 10 **139.** $-3 \pm 5\sqrt{5}$ **141.** 1
143. $2, -\frac{3}{2}$ **145.** $4, -5$ **147.** $\frac{1 \pm \sqrt{31}}{3}$ **149.** $3, -2$
151. $\sqrt{3}, -3$ **153.** $3, \frac{-1 - \sqrt{17}}{2}$ **155.** 61.2 pulg.
157. Aprox. 1.12 pulgadas **159.** 43 cm; $\frac{1849\sqrt{3}}{4} \approx 800.6$ cm^2
161. (a) 1998 (b) 2011; las respuestas variarán.
163. Falso. Vea el Ejemplo 14 de la página A58.
165. Las ecuaciones equivalentes tienen el mismo conjunto de solución, y una se deriva de la otra por pasos para generar ecuaciones equivalentes.
$2x = 5$, $2x + 3 = 8$
167. $x^2 - 3x - 18 = 0$ **169.** $x^2 - 2x - 1 = 0$
171. Respuesta de muestra: $a = 9, b = 9$
173. Respuesta de muestra: $a = 20, b = 20$
175. (a) $x = 0, -\frac{b}{a}$ (b) $x = 0, 1$

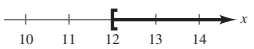
Apéndice A.6 *(página A69)*

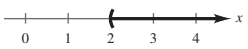
1. Conjunto de solución **3.** Negativo **5.** Doble
7. (a) $0 \leq x < 9$ (b) Acotado
9. (a) $-1 \leq x \leq 5$ (b) Acotado
11. (a) $x > 11$ (b) No acotado
13. (a) $x < -2$ (b) No acotado
15. b **16.** h **17.** e **18.** d
19. f **20.** a **21.** g **22.** c
23. (a) Sí (b) No (c) Sí (d) No
25. (a) Sí (b) No (c) No (d) Sí
27. (a) Sí (b) Sí (c) Sí (d) No
29. $x < 3$ **31.** $x < \frac{3}{2}$





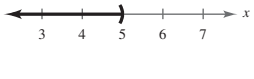
33. $x \geq 12$ **35.** $x > 2$



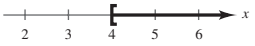


37. $x \geq \frac{2}{7}$

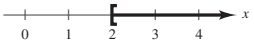
39. $x < 5$



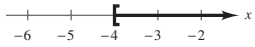
41. $x \geq 4$



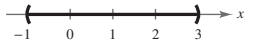
43. $x \geq 2$



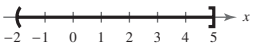
45. $x \geq -4$



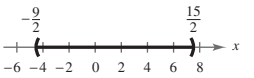
47. $-1 < x < 3$



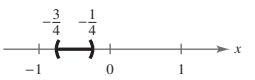
49. $-2 < x \leq 5$



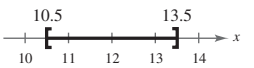
51. $-\frac{9}{2} < x < \frac{15}{2}$



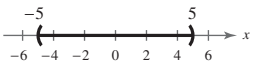
53. $-\frac{3}{4} < x < -\frac{1}{4}$



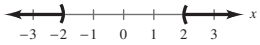
55. $10.5 \leq x \leq 13.5$



57. $-5 < x < 5$

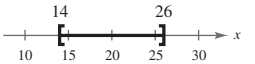


59. $x < -2, x > 2$



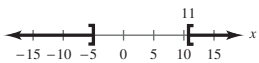
61. No hay solución

63. $14 \leq x \leq 26$

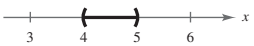


65. $x \leq -\frac{3}{2}, x \geq 3$

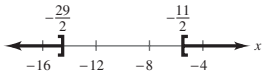
67. $x \leq -5,\ x \geq 11$



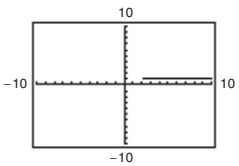
69. $4 < x < 5$



71. $x \leq -\frac{29}{2},\ x \geq -\frac{11}{2}$

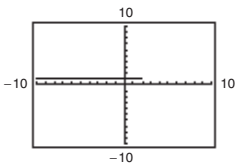


73.



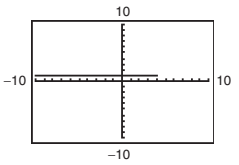
$x > 2$

75.



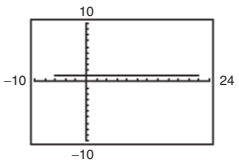
$x \leq 2$

77.



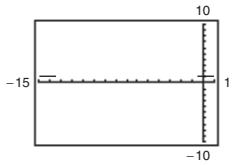
$x \leq 4$

79.



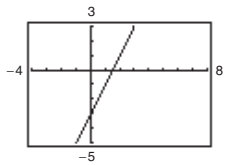
$-6 \leq x \leq 22$

81.



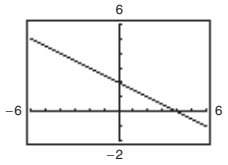
$x \leq -\frac{27}{2}, x \geq -\frac{1}{2}$

83.



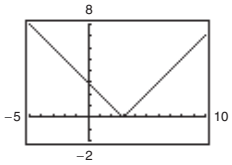
(a) $x \geq 2$
(b) $x \leq \frac{3}{2}$

85.



(a) $-2 \leq x \leq 4$
(b) $x \leq 4$

87.



(a) $1 \leq x \leq 5$
(b) $x \leq -1,\ x \geq 7$

89. $[5, \infty)$ **91.** $[-3, \infty)$ **93.** $\left(-\infty, \frac{7}{2}\right]$

95. Todos los números reales a no más de 8 unidades de 10

97. $|x| \leq 3$ **99.** $|x - 7| \geq 3$ **101.** $|x - 12| < 10$

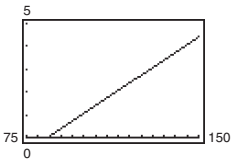
103. $|x + 3| > 4$ **105.** $4.10 \leq E \leq 4.25$ **107.** $p \leq 0.45$

109. $100 \leq r \leq 170$ **111.** $9.00 + 0.75x > 13.50;\ x > 6$

113. $r > 3.125\%$ **115.** $x \geq 36$

117. $160 \leq x \leq 280$

119. (a)



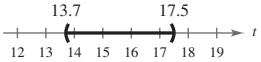
(b) $x \geq 129$

121. (a) $1.47 \leq t \leq 10.18$ (Entre 1991 y 2000)
(b) $t > 21.19$ (2011)

123. 106.864 pulg.^{2} $\leq$ área $\leq$ 109.464 pulg.^{2}

125. Podría cobrársele de menos o de más en \$0.21.

127. $13.7 < t < 17.5$ **129.** $20 \leq h \leq 80$



131. Falso. c tiene que ser mayor a cero. **133.** b

135. Respuesta de muestra: $x > 5$

Apéndice A.7 *(página A78)*

1. Numerador

3. Cambiar todos los signos al distribuir el signo menos.
$2x - (3y + 4) = 2x - 3y - 4$

5. Cambiar todos los signos al distribuir el signo menos.
$$\frac{4}{16x - (2x + 1)} = \frac{4}{14x - 1}$$

7. z se presenta dos veces como factor. $(5z)(6z) = 30z^2$

9. La fracción en su conjunto se multiplica por a, no el numerador y el denominador por separado.
$$a\left(\frac{x}{y}\right) = \frac{ax}{y}$$

11. $\sqrt{x + 9}$ no se puede simplificar.

13. Divida factores comunes, no términos comunes.
$\frac{2x^2 + 1}{5x}$ no se puede simplificar.

15. Para deshacerse de exponentes negativos:
$$\frac{1}{a^{-1} + b^{-1}} = \frac{1}{a^{-1} + b^{-1}} \cdot \frac{ab}{ab} = \frac{ab}{b + a}.$$

17. Factorice dentro de símbolos de agrupación antes de aplicar exponente a cada factor.
$(x^2 + 5x)^{1/2} = [x(x + 5)]^{1/2} = x^{1/2}(x + 5)^{1/2}$

19. Para sumar fracciones, primer encuentre un común denominador.

$$\frac{3}{x} + \frac{4}{y} = \frac{3y + 4x}{xy}$$

21. Para sumar fracciones, primer encuentre un común denominador.

$$\frac{x}{2y} + \frac{y}{3} = \frac{3x + 2y^2}{6y}$$

23. $5x + 3$ **25.** $2x^2 + x + 15$ **27.** $\frac{1}{3}$ **29.** $3y - 10$

31. 2 **33.** $\dfrac{1}{2x^2}$ **35.** $\dfrac{36}{25}, \dfrac{9}{4}$ **37.** 3, 4 **39.** $1 - 5x$

41. $1 - 7x$ **43.** $3x - 1$ **45.** $7(x + 3)^{-5}$

47. $2x^5(3x + 5)^{-4}$ **49.** $\frac{4}{3}x^{-1} + 4x^{-4} - 7x(2x)^{-1/3}$

51. $\dfrac{x}{3} + 2 + \dfrac{4}{x}$ **53.** $4x^{8/3} - 7x^{5/3} + \dfrac{1}{x^{1/3}}$

55. $\dfrac{3}{x^{1/2}} - 5x^{3/2} - x^{7/2}$ **57.** $\dfrac{-7x^2 - 4x + 9}{(x^2 - 3)^3(x + 1)^4}$

59. $\dfrac{27x^2 - 24x + 2}{(6x + 1)^4}$ **61.** $\dfrac{-1}{(x + 3)^{2/3}(x + 2)^{7/4}}$

63. $\dfrac{4x - 3}{(3x - 1)^{4/3}}$ **65.** $\dfrac{x}{x^2 + 4}$

67. $\dfrac{(3x - 2)^{1/2}(15x^2 - 4x + 45)}{2(x^2 + 5)^{1/2}}$

69. (a)

x	0.50	1.0	1.5	2.0
t	1.70	1.72	1.78	1.89

x	2.5	3.0	3.5	4.0
t	2.02	2.18	2.36	2.57

(b) $x = 0.5$ mi

(c) $\dfrac{3x\sqrt{x^2 - 8x + 20} + (x - 4)\sqrt{x^2 + 4}}{6\sqrt{x^2 + 4}\sqrt{x^2 - 8x + 20}}$

71. No se puede cambiar término por término del denominador al numerador.

ÍNDICE

1 inicial, 574

A

Adición
  de fracciones
  de matrices, 5 85
    propiedades de, 587
  de números complejos, 160
    con denominadores diferentes, A10
    con denominadores iguales, A10
  vectorial, 447
    ley del paralelogramo para, 447
    propiedades de, 449
    resultante de, 447
Agujero, en la gráfica de una función racional, 183
Alargamiento
  horizontal, 77
  vertical, 77
Alargamiento vertical, 77
  de una función trigonométrica, 321
Algoritmo de división, 151
Amplitud de curvas de seno y coseno, 321
Ángulo agudo, 281
Ángulo central de un círculo, 281
Ángulo de dirección de un vector, 451
Ángulo de referencia, 312
Ángulo obtuso, 281
Ángulo(s), 280
  agudo, 281
  central, 281
  complementario, 281
  conversiones entre grados y radianes, 284
  coterminal, 280
  de depresión, 304
  de elevación, 304
  de reposo, 349
  director, de un vector, 451
  entre dos rectas, 727, 728
  entre dos vectores, 459, 490
  lado inicial de, 280
  lado terminal de un, 280
  medida de, 281
  medida en grados de, 283
  medida en radianes de un, 281
  negativo, 280
  obtuso, 281
  posición estándar, 280
  positivo, 280
  referencia, 312
  suplementario, 283
  vértice de un 280
Ángulos complementarios, 283
  cofunciones de, 301
Ángulos coterminales, 280
Ángulos especiales
  cosenos de, 301
  senos de, 301
  tangentes de, 301
Ángulos múltiples, funciones de, 405
Ángulos suplementarios, 283
Anualidad creciente, 666
Apogeo, 746
Arco circular, longitud de, 285
Área
  de un sector de circunferencia, 287
  de un triángulo
    fórmula de área de Herón, 440, 489
    usando un determinante, 619
  de un triángulo oblicuo, 432
  fórmulas comunes para, A59
Argumento de un número complejo, 469
Aritmética, media, 650
Asíntota inclinada, 187
Asíntota oblicua, 187
Asíntota vertical, 182
  de una función racional, 183
Asíntota(s)
  de una función racional, 183
  de una hipérbola, 753
  diagonal, 187
  horizontal, 182
  oblicua, 187
  vertical, 182

B

Base, A14
  natural, 220
Binomio, 681, A27
  coeficiente, 681
  cuadrado de un, A29
  cubo de un, A29
  expansión de un, 684
  suma y diferencia de los mismos términos, A29
Biunívoca, correspondencia, A2

C

Capitalización continua, 221
Caracol, 784, 787
  con concavidad, 787
  con lazo interior, 787
  convexo, 787
Características de una función de conjunto *A* a conjunto *B*, 39
Cardioide, 787
Caso ambiguo (SSA), 430
Centro
  de una circunferencia, 19
  de una elipse, 742
  de una hipérbola, 751
Cero repetido, 140
Cero(s)
  de una función, 56
  de una función con polinomios, 139, 140
    cotas para, 174
    real, 140
  matriz, 588
  multiplicidad de, 140
  propiedades de, A10
  repetido, 140
  vector, 446
Ceros complejos ocurren en pares conjugados, 170
Ceros reales de una función con polinomios, 140
Ciclo de una curva senoidal, 319
Cicloide, 773
  acortado, 776
Científica, notación, A16
Circunferencia, 19, 787
  ángulo central de, 281
  centro de, 19
  clasificación de
    por discriminante, 765
    por ecuación general, 757
  forma estándar de la ecuación de una, 19
  involuta de, 807
  longitud de arco de, 285
  radio de, 19
  sector de, 287
    área de, 287
  unitaria, 292
Circunferencia, fórmula para, A59
Circunferencia unitaria, 292
  definiciones de funciones trigonométricas, 293
Clasificación de cónicas
  por discriminante, 765
  por ecuación general, 757
Cociente
  de dos números complejos, 470
  de funciones, 83
  diferencia, 46, 686, A45
Coeficiente de correlación, 103
Coeficiente inicial de un polinomio, A27
Coeficiente(s)
  binomial, 681

correlación, 103
de un polinomio, A27
de un término variable, A7
igualación de, 533
inicial, 27
Cofactor(es)
de una matriz, 610
expansión por, 611
Cofunciones de ángulos complementarios, 301
Combinación aritmética de funciones, 83
Combinación lineal de vectores, 450
Combinaciones de funciones, 83
Combinaciones de *n* elementos tomados *r* a la vez, 694
Complemento de un evento, 706
probabilidad de, 706
Completamente factorizados, A30
Completar el cuadrado, A52
Componente horizontal de **v**, 450
Componente vertical de **v**, 450
Componentes, vector, 446, 461, 462
horizontales, 450
verticales, 450
Composición de funciones, 85
Con restitución, 689
Condensación de expresiones logarítmicas, 239
Cónica degenerada, 733
dos rectas que se intersecan, 733
punto, 733
recta, 733
Cónica(s) o sección(es) cónica(s), 733, 791
básica, 733
circunferencia, 733
elipse, 733
hipérbola, 733
parábola, 733
clasificación de
por discriminante, 765
por ecuación general, 757
definición alternativa, 791
degenerada, 733
dos rectas que se intersecan, 733
punto, 733
recta, 733
ecuaciones polares de, 791, 806
excentricidad de, 791
lugar geométrico de, 733
rotación de ejes, 761
Cónicas básicas, 733
circunferencia, 733
elipse, 733
hipérbola, 733
parábola, 733
Conjetura, 676
Conjugado, 170, A21
de un número complejo, 162, 170
Conjugados complejos, 162
Conjuntamente proporcional, 107
Conjunto solución
de un sistema de desigualdades, 540
de una desigualdad, A63
Constante, A7
de proporcionalidad, 104
de variación, 104
función, 40, 57, 67
matriz, 592
término, A7, A27
Contracción
horizontal, 77
vertical, 77
Contracción horizontal, 77
de una función trigonométrica, 322
Contracción vertical, 77
de una función trigonométrica, 321
Contradicción, demostraciones por, 566
Conversiones entre grados y radianes, 284
Coordenada *x*, 2
Coordenada *y*, 2
Coordenada(s), 2
polar, 777
rectangular, 2
Coordenadas polares, 777
conversión a rectangulares, 778
pruebas de simetría de, 784, 785
Coordenadas rectangulares, conversión a polares, 778
Correspondencia biunívoca, A2
Corrimiento de gráficas, 73
Corrimientos horizontales, 73
Corrimientos verticales, 73
Costo fijo, 30
Costo marginal, 30
Cota
inferior, 174
superior, 174
Creciente, anualidad, 666
Criptograma, 622
Cuadrado
de funciones trigonométricas, 405
de un binomio, A29
Cuadrantes, 2
Cuatro formas para representar una función, 40
Cubo de un binomio, A29
Cuerda focal
de una parábola, 736
lado recto, 736
Cuña infinita, 542
Curva
de mariposa, 808
en forma de campana, 259
en roseta, 786, 787
logística, 260
orientación de, 770
plana, 769
senoidal, 319
sigmoidea, 260
Curva coseno, amplitud de, 321
Curva de mariposa, 808
Curva en forma de campana, 259
Curva en roseta, 786, 787
Curva plana, 769
orientación, 770
Curva senoidal, 319
amplitud de, 321
un ciclo de, 319
Curva sigmoidal, 260

D

Definición alternativa de cónica, 791
Definida, 47
Denominador, A8
racionalización de, 382, A20, A21
Depreciación
línea recta, 31
lineal, 31
Descomposición de $N(x)/D(x)$ en fracciones parciales, 530
Desfase, 323
Desigualdad (desigualdades), A3
conjunto solución de, A63
de polinomio, 194
doble, A3, A66
equivalente, A64
gráfica de, 538, A63
lineal, 539, A65
no lineal, 194
propiedades de, A64
racional, 198
satisfacer una, A63
símbolo, A3
solución de un sistema de, 540
conjunto solución, 540
solución de, 538, A63
valor absoluto, A67
solución de, A67
Desigualdad lineal, 539
Desigualdad racional, 198
intervalos de prueba, 198
Desigualdades no lineales, 194
Determinante
área de un triángulo usando, 619
de una matriz cuadrada, 608, 611
de una matriz de 2×2, 603, 608
Diagonal de un polinomio, 698
Diferencia
cociente, 46, 686, A45
común, de una sucesión aritmética, 651
de dos cuadrados, A31
de dos cubos, A31
de funciones, 83
de números complejos, 160
de vectores, 447

primera, 678
segunda, 678
Diferencia común de una sucesión aritmética, 651
Directamente proporcional, 104
a la *n* potencia, 105
Directriz de una parábola, 734
Discriminante, 765
clasificación de cónicas por, 765
Distancia
entre dos puntos
en el plano, 4
sobre la recta de números reales, A6
entre un punto y una recta, 728, 804
Distancia de afelio, 749, 796
Distancia de perihelio, 749, 796
Distribuida normalmente, 259
Dividiendo, errores que involucran, A74
División
de fracciones, A10
de números complejos, 470
de números reales, A8
larga, de polinomios, 150
sintética, 153
División larga de polinomios, 150
División sintética, 153
usos del residuo en, 155
Divisores, A10
Doble desigualdad, A3, A66
Doble subíndice, notación, 570
Dominio
de una expresión algebraica, A39
de la función coseno, 295
de la función seno, 295
de una función, 39, 47
de una función racional, 181
implicado, 44, 47
Dominio implicado, 44, 47

E

e, el número, 220
Ecuación básica de la descomposición de una fracción parcial, 531
guías para resolver, 535
Ecuación condicional, 380, A49
Ecuación cuadrática, 15, A52
forma general de, A53
solución
al completar el cuadrado, A52
al extraer raíces cuadradas, A52
por factorización, A52
usando el principio de raíz cuadrada, A52
usando la fórmula cuadrática, A52
soluciones complejas de, 163
Ecuación de posición, 523
Ecuación de segundo grado con polinomios, A52
Ecuación lineal, 15
con dos variables, 24
con una variable, A49
forma de dos puntos, 28, 32, 621
forma de pendiente y cruce, 24, 32
forma de punto pendiente, 28, 32
forma estándar, 34
forma general, 32
gráfica de, 24
resumen de, 32
Ecuación polar, gráfica de, 783
Ecuación(es), 13, A49
básica, de la descomposición de una fracción parcial, 531
circunferencia, forma estándar, 19
con dos variables, 13
condicional, 380, A49
cuadrática, 15, A52
de cónicas, polares, 791, 806
de una recta, 24
forma de dos puntos, 28, 32, 621
forma de pendiente e intercepción, 24, 32
forma de punto pendiente, 28, 32
forma estándar, 34
forma general, 32
gráfica de, 13
resumen de, 32
elipse, forma estándar, 743
equivalente, A50
generación de una, A50
exponencial, resolución de una, 244
gráfica de, 24
hipérbola, forma estándar, 751
identidad, A49
lineal, 15
con dos variables, 24
con una variable, A49
logarítmica, solución de, 140
parábola, forma estándar, 734, 805
paramétrica, 769
polar, gráfica de, 783
polinomio de segundo grado, A52
polinomios, solución de, 140
posición, 523
punto de solución, 13
sistema de, 494
solución de, 13, A49
solución de una, A49
tipo cuadrático, 389
trigonométrica, solución de, 387
Ecuaciones exponenciales, solución de, 244
Ecuaciones logarítmicas, solución de, 244
Ecuaciones paramétricas, 769
Ecuaciones polares de cónicas, 791, 806
Ecuaciones tipo cuadrático, 389
Ecuaciones trigonométricas, solución de, 387
Efecto multiplicador, 669
Eje imaginario del plano complejo, 468
Eje mayor de una elipse, 742
Eje menor de una elipse, 742
Eje polar, 777
Eje real del plano complejo, 468
Eje transversal de una hipérbola, 751
Eje *x*, 2
simétrico con respecto a, 17
Eje *y*, 2
simétrico con respecto a, 17
Eje(s)
conjugado, de una hipérbola, 753
de simetría, 127
de una parábola, 127, 734
imaginario, 468
mayor, de una elipse, 742
menor, de una elipse, 742
polar, 777
real, 468
rotación de, 761
transversal, de una hipérbola, 751
Elemento de una matriz, 570
diagonal principal, 570
Elementos diagonales principales de una matriz cuadrada, 570
Eliminación
de Gauss, 518, 519
con sustitución hacia atrás, 576
de Gauss-Jordan, 577
método de, 505, 506
Eliminación del parámetro, 771
Elipse, 742, 791
centro de, 742
clasificación
por discriminante, 765
por ecuación general, 757
eje mayor de, 742
eje menor de, 742
excentricidad de, 746, 791
focos de, 742
forma estándar de la ecuación de, 743
lado recto de, 750
vértices de, 742
Empuje, 492
Entero(s), A1
divisores de, A10
factores de, A10
irreductibles en, A30
sumas de potencias de, 677
Epicicloide, 776
Equivalentes
desigualdades, A64
ecuaciones, A50
generación de, A50
expresiones algebraicas, A39
fracciones, A10
generar, A10
sistemas, 507, 518
operaciones que producen, 518

Errores
al dividir, A74
con exponentes, A74
con fracciones, A73
con paréntesis, A73
con radicales, A74
Escalar, 447, 585
múltiple, 585
Escribir
con exponentes negativos, A75
una fracción como suma, A75
Espacio muestral, 699
Estiramiento horizontal, 77
de una función trigonométrica, 322
Estrategias para resolver ecuaciones exponenciales y logarítmicas, 244
Estrofoide, 808
Exponencial, notación, A14
Evaluación de funciones trigonométricas de cualquier ángulo, 313
Evaluar una expresión algebraica, A7
Evento imposible, 700
Evento seguro, 700
Evento(s), 699
ciertos, 700
complemento de, 706
probabilidad de, 706
imposible, 700
independiente, 705
probabilidad de, 705
mutuamente exclusivo, 703
probabilidad de, 700
la unión de dos, 703
Eventos independientes, 705
probabilidad de, 705
Eventos mutuamente exclusivos, 703
Excedente
de consumidor, 543
de productor, 543
Excedente de productor, 543
Excedentes de consumidor, 543
Excentricidad
de una cónica, 791
de una elipse, 746, 791
de una hipérbola, 755, 791
de una parábola, 791
Expansión de
expresiones logarítmicas, 239
por cofactores, 611
un binomio, 684
Experimento, 699
espacio muestral de, 699
resultados de, 699
Exponenciación, 247
Exponente racional, A22
Exponente(s), A14
errores con, A74
negativos, escribir con, A75
propiedades de, A14
racionales, A22
Expresión
algebraica, A7
fraccionaria, A39
racional, A39
Expresión algebraica, A7
dominio de, A39
equivalente, A39
evaluar, A7
término de, A7
Expresión fraccionaria, A39
Expresión racional impropia, 151
Expresión racional propia, 151
Expresión(es) racional(es), A39
impropia, 151
propia, 151
Expresiones logarítmicas
condensar, 239
expansión de, 239
Extracción de raíces cuadradas, A52
Extrapolación lineal, 32

F

Factor cuadrático
primo, 171
repetido, 534
Factor de amortiguamiento, 335
Factor de escala, 321
Factor lineal repetido, 532
Factor(es)
de amortiguamiento, 335
de escala, 321
de un entero, A10
de un polinomio, 140, 170, 212
primo, 171
cuadrático, 171
repetido
cuadrático, 534
lineal, 532
y términos, insertar, A76
Factorial, 642
Factorización, A30
completamente, A30
de polinomios, guías para, A34
formas especiales de polinomios, A31
poco común, A75
por agrupación, A34
solución de una ecuación cuadrática por, A52
Factorización inusual, A75
Familia de funciones, 74
Foco(s)
de una elipse, 742
de una hipérbola, 751
de una parábola, 734
Forma alternativa de la Ley de los cosenos, 437, 488
Forma de componente de un vector **v**, 446
Forma de dos puntos de la ecuación de una recta, 28, 32, 621
Forma de pendiente e intersección de la ecuación de una recta, 24, 32
Forma de punto pendiente de la ecuación de una recta, 28, 32
Forma de renglón-escalón, 517
de una matriz, 574
reducida, 574
Forma estándar
de la ecuación,
de una circunferencia, 19
de una elipse, 743
de una hipérbola, 751
de una parábola, 734, 805
de la ley de los cosenos, 437, 488
de un número complejo, 159
de un polinomio, A27
de una función con polinomios, 139
de una función cuadrática, 129
Forma estándar de la ecuación de una recta, 34
Forma exponencial, A14
Forma general
de la ecuación de una recta, 32
de una ecuación cuadrática, A53
Forma más sencilla, de una expresión que contiene radicales, A20
Forma polar de un número complejo, 469
Forma reducida de renglón-escalón de una matriz, 574
Forma trigonométrica de un número complejo, 469
argumento de, 469
módulo de, 469
Fórmula cuadrática, A52
forma normal de, 129
valor máximo, 131
valor mínimo, 131
Fórmula de Euler, 475
Fórmula de la distancia, 4
Fórmula de medición en radianes, 285
Fórmula de recursión, 653
Fórmula del área de Herón, 440, 489
Fórmula del punto medio, 5, 122
Fórmula para cambio de base, 237
Fórmula(s)
cambio de base, 237
común, para área, perímetro, circunferencia y volumen, A59
cuadrática, A52
de área de Herón, 440, 489
de distancia, 4
de Euler, 475
de punto medio, 5, 122
de semiángulo, 408
doble ángulo, 405, 423
medida de radianes, 285
para el *n* término de una sucesión, 676

para interés compuesto, 222
producto a suma, 409
reducción, 400
reductora de potencia, 407, 423
repetición, 653
suma a producto, 410, 424
suma y diferencia, 398, 422
Fórmulas comunes, A59
área, A59
circunferencia, A59
perímetro, A59
volumen, A59
Fórmulas de doble ángulo, 405, 423
Fórmulas de producto a suma, 409
Fórmulas de reducción, 400
Fórmulas de semiángulos, 408
Fórmulas de suma a producto, 410, 424
Fórmulas de suma y diferencia, 398, 422
Fórmulas para reducir potencia, 407, 423
Fracción compleja, A43
Fracción parcial, 530
descomposición, 530
Fracción(es)
adición de
con denominadores diferentes, A10
con denominadores iguales, A10
compleja, A43
división de, A10
equivalente, A10
generar, A10
errores con, A73
escribir como suma, A75
multiplicación de, A10
operaciones de, A10
parciales, 530
descomposición, 530
propiedades de, A10
reglas de sigmas para, A10
sustracción de
con denominadores diferentes, A10
con denominadores iguales, A10
Fractal, 723
Frecuencia, 354
Función algebraica, 216
Función arcasen, 341, 343
Función arccos, 343
Función arctan, 343
Función biunívoca, 95
Función con polinomios, 126
ceros de, 139
ceros reales de, 140
cruce con eje x de la gráfica de, 140
de x con grado n, 126
forma estándar, 139
prueba de coeficiente inicial, 138
Función continua, 136, 769
Función cosecante, 293, 299
de cualquier ángulo, 310
gráfica de, 333, 336
Función coseno, 293, 299
ángulos comunes, 313
ángulos especiales, 301
conjunto de valores de, 295
de cualquier ángulo, 310
dominio de, 295
gráfica de, 323, 336
inversa, 343
periodo de, 322
Función cotangente, 293, 299
de cualquier ángulo, 310
gráfica de, 332, 336
Función creciente, 57
Función cúbica, 68
Función de potencia, 137
Función decreciente, 57
Función definida por tramos, 42
Función entera máxima, 69
Función escalón, 69
Función exponencial natural, 220
Función exponencial, 216
f con base a, 216
gráfica de, 217
natural, 220
propiedad biunívoca, 218
Función Heaviside, 124
Función impar, 60
trigonométrica, 296
Función inversa, 92, 93
coseno, 343
hallar, 96
gráfica de, 94
prueba de recta horizontal, 95
seno, 341, 343
tangente, 343
Función lineal, 66
Función logarítmica, 227
común, 228
con base a, 227
gráfica de, 229
natural, 231
Función logarítmica común, 228
Función logarítmica natural, 231
Función objetivo, 549
Función par, 60
trigonométrica, 296
Función para elevar al cuadrado, 67
Función periódica, 295
Función racional, 181
agujero en la gráfica, 186
asíntotas de, 183
dominio de, 181
gráfica de, guías para analizar, 184
intervalos de prueba para, 184
Función recíproca, 68
Función secante, 293, 299
de cualquier ángulo, 310
gráfica de, 333, 336
Función seno, 293, 299
ángulos comunes, 313
ángulos especiales, 301
de cualquier ángulo, 310
dominio de, 295
gráfica de, 323, 336
intervalo de, 295
inversa, 341, 343
periodo de, 322
Función tangente, 293, 299
ángulos comunes, 313
ángulos especiales, 301
de cualquier ángulo, 310
gráfica de, 330, 336
inversa, 343
Función trascendental, 216
Función(es)
algebraica, 216
arccos, 343
arcsen, 341, 343
arctan, 343
biunívoca, 95
característica de, 39
ceros de, 56
cociente de, 83
combinaciones aritméticas de, 83
combinaciones de, 83
composición de, 85
conjunto de valores de, 39, 47
constante, 40, 57, 67
continua, 136, 769
cosecante, 293, 299, 310
creciente, 57
cuadrática, 126
cuatro formas para representar, 40
cúbica, 68
de ángulos múltiples, 405
de Heaviside, 124
de polinomios, 126
de semiángulos, 405
decreciente, 57
definida, 47
definida por tramos, 42
diferencia de, 83
dominio de, 39, 47
dominio implicado de, 44, 47
elevar al cuadrado, 67
entero máximo, 69
escalón, 69
exponencial, 216
exponencial natural, 220
familia de, 74
gráfica de, 54
identidad, 57
impar, 60
inversa, 92, 93
coseno, 343
hallar, 96
seno, 341, 343

tangente, 343
trigonométrica, 343
lineal, 66
logarítmica, 227
logarítmica común, 228
logarítmica natural, 231
no definidas, 47
no rígidas, 77
nombre de, 41, 47
notación, 41, 47
objetivo, 549
par, 60
periódica, 295
periodo de, 295
potencia, 137
principal, 70
producto de, 83
prueba de recta vertical, 55
racional, 181
raíz cuadrada, 68
recíproca, 68
representación, 40
resumen de terminología, 47
rígidas, 77
secante, 293, 299, 310
seno, 293, 299, 310
suma de, 83
tangente, 293, 299, 310
transformaciones de, 73
trascendental, 216
trigonométricas, 293, 399, 310
valor de, 41, 47
Funciones principales, 70
Funciones trigonométricas, 293, 299, 310
alargamiento horizontal de, 322
alargamiento vertical de, 321
contracción horizontal de, 322
contracción vertical de, 321
cosecante, 293, 299, 310
coseno, 293, 299, 310
cotangente, 293, 299, 310
cuadrado de, 405
de cualquier ángulo, 310
evaluación de, 313
definiciones de circunferencia unitaria, 293
definiciones de triángulo recto de, 299
impar, 296
inversas, 343
par, 296
producto de, 405
propiedades inversas de, 345
puntos de referencia, 320
reflexión de, 322
secante, 293, 299, 310
seno, 293, 299, 310
tangente, 293, 299, 310
traslación horizontal de, 323
traslación vertical de, 324
Funciones trigonométricas inversas, 343

G

Generación de ecuaciones equivalentes, A50
Generalización acerca de *n* raíces de números reales, A19
Generar fracciones equivalentes, A10
Grado
conversión a radianes, 284
de un polinomio, A27
de un término, A27
medida de ángulos, 283
parte fraccionaria de, 284
Gráfica, 13
corrimiento, 73
de función cosecante, 333, 336
de función coseno, 323, 336
de función coseno inversa, 343
de función cotangente, 332, 336
de función secante, 336, 336
de función seno, 323, 336
de función seno inversa, 343
de función tangente, 330, 336
de función tangente inversa, 343
de una desigualdad, 538, A63
con dos variables, 538
de una ecuación, 13
de una ecuación polar, 783
de una función, 54
de una función con polinomios, punto de cruce con eje *x*, 140
de una función exponencial, 217
de una función inversa, 94
de una función logarítmica, 229
de una función racional, 184
guías para analizar, 184
de una recta, 24
método para localizar un punto, 13
polar especial, 787
puntos de intercepción de, 16
reflexión, 75
simetría de un, 17
Gráfica de dispersión, 3
Guías
para analizar gráficas de funciones racionales, 184
para factorizar polinomios, A34
para resolver la ecuación básica de la descomposición de fracción parcial, 535
para verificar identidades trigonométricas, 380

H

Hallar
asíntotas verticales y horizontales de una función racional, 183
intervalos de prueba para un polinomio, 194
n raíces de un número complejo, 474
puntos de intersección, 16
una fórmula para el *n* término de una sucesión, 676
una función inversa, 96
una matriz inversa, 601
Hipérbola, 182, 751, 791
asíntotas de, 753
centro de, 751
clasificación
por discriminante, 765
por ecuación general, 757
eje conjugado de, 753
eje transversal de, 751
excentricidad de, 755, 791
focos de, 751
forma normal de la ecuación de, 751
ramas de, 751
vértices de, 751
Hipocicloide, 808
Hipotenusa de un triángulo recto, 299
Hipótesis, 676

I

i, unidad imaginaria, 159
Identidad, 380, A49
función, 67
matriz de orden $n \times n$, 591
Identidad aditiva
para un número complejo, 160
para un número real, A8
para una matriz, 588
Identidad multiplicativa de un número real, A8
Identidades
cociente, 302, 372
cofunción, 372
de Pitágoras, 302, 372
par/impar, 372
recíprocas, 302, 372
trigonométricas
fundamentales, 302, 372
guías para verificar, 380
Identidades de cociente, 302, 372
Identidades de cofunción, 372
Identidades de Pitágoras, 302, 372
Identidades pares/impares, 372
Identidades recíprocas, 302, 372
Identidades trigonométricas
cociente, 302, 372
cofunción, 372
de Pitágoras, 302, 372
fundamentales, 302, 372
guías para verificar, 380
par/impar, 372
recíprocas, 302, 372
Igualación de coeficientes, 533
Igualdad
de números complejos, 159
propiedades de, 446

Iguales
matrices, 584
vectores, 446
Inclinación de una recta, 726
y pendiente, 726, 804
Inclusive o, A10
Indefinida, 47
Índice
de suma, 644
de un radical, A18
Inducción matemática, 671
Principio extendido de, 673
Principio de, 672
Inductiva, 611
Infinita, cuña, 542
Infinitamente muchas soluciones, A50
Infinito
negativo, A4
positivo, A4
Inserción de factores y términos, A76
Interés
capitalizado continuamente, 221
capitalizado *n* veces por año, 221
compuesto, fórmulas para, 222
Interés compuesto
capitalizado continuamente, 221
capitalizado *n* veces por año, 221
fórmulas para, 222
Interpolación lineal, 32
Interpretaciones gráficas de soluciones, 508
Intersección, puntos de, 498
Intervalo
de la función coseno, 295
de la función seno, 295
de una función, 39, 47
Intervalo(s), A4
acotado, A4
no acotado, A4
puntos extremos de, A4
sobre recta de números reales, A4
usando desigualdades para representar, A4
Intervalos acotados, A4
Intervalos de prueba
con polinomios, 141
desigualdad con polinomios, 194
desigualdad racional, 198
función racional, 184
Intervalos no acotados, A4
Invariante bajo rotación, 765
Inversa de una matriz, 599
hallar, 601
Inversamente proporcional, 106
Inverso
aditivo, A8
multiplicativo, A8
de una matriz, 599
Inverso aditivo, A8
para un número complejo, 160
para un número real, A8
Inverso multiplicativo, A8
de una matriz, 599
de un número real, A8
Involuta de un círculo, 807
Irreductible
en los enteros, A30
en los racionales, 171
en los reales, 171

L

Lado adyacente de un triángulo recto, 299
Lado inicial de un ángulo, 280
Lado opuesto de un triángulo recto, 299
Lado recto
de una elipse, 750
de una parábola, 736
Lado terminal de un ángulo, 280
Lemniscata, 787
Ley de Boyle, 111
Ley de los cosenos, 437, 488
forma alternativa, 437, 488
forma estándar, 437, 488
Ley de los senos, 428, 487
Ley de Newton de enfriamiento, 111, 266
Ley de Newton de Gravitación Universal, 111
Ley de tangentes, 487
Ley de tricotomía, A6
Ley del paralelogramo para adición vectorial, 447
Leyes de Kepler, 794
Límite de suma
inferior, 644
superior, 644
Límite inferior, 174
Límite inferior de suma, 644
Límite superior de suma, 644
Línea recta, depreciación en 31
Lineal
depreciación 31
interpolación, 32
Local, máximo 58
Local, mínimo, 58
Logaritmo natural
propiedades de, 232, 238, 276
biunívocas, 232
cociente, 238, 276
de potencia, 238, 276
de producto, 238, 276
inversas, 232
Logaritmo(s)
fórmula de cambio de base, 237
natural, propiedades de, 232, 238, 276
biunívoco, 232
cociente, 238, 276
de potencia, 238, 276
inverso, 232
producto, 238, 276
propiedades de, 228, 238, 276
biunívocas, 228
cociente, 238, 276
de potencia, 238, 276
inversas, 228
producto, 238, 276
Logístico(a)
curva, 260
modelo de crecimiento, 111, 255
Longitud
de un arco circular, 285
de un segmento de recta dirigido, 445
de un vector, 446
Longitud de arco, 285
Lugar geométrico, 733

M

Magnitud, A5
de un segmento de recta dirigido, 445
de un vector, 446
Matemática, inducción, 671
Matemáticas discretas, 40
Matrices adyacentes, 601
Matrices codificadas sin elaborar, 622
Matrices de fila no codificadas, 622
Matrices equivalente a renglón, 572
Matriz aumentada, 571
Matriz coeficiente, 571, 592
Matriz cuadrada, 570
determinante de, 608, 611
diagonal, 615
elementos de diagonal principal de, 570
idempotente, 637
menores y cofactores de, 610
triangular, 615
triangular inferior, 615
triangular superior, 615
Matriz cuadrada idempotente, 637
Matriz de columna, 570
Matriz de renglones, 570
codificada, 622
no codificada, 622
Matriz diagonal, 598, 615
Matriz estocástica, 597
Matriz invertible, 600
Matriz no singular, 600
Matriz singular, 600
Matriz triangular, 615
Matriz triangular inferior, 615
Matriz triangular superior, 615
Matriz(matrices), 570
adición, 585
propiedades de, 587
adjuntar, 601
aumentada, 571
cero, 588
coeficiente, 571, 592
cofactor de, 610
columna, 570

constante, 592
cuadrada, 570
determinante de, 603, 608, 611
diagonal, 598, 615
elemento de una, 570
elementos diagonales principales de una, 570
equivalente de renglón, 572
estocástica, 597
forma de renglón-escalón, 574
forma reducida de renglón-escalón, 574
idempotente, 637
identidad, 591
identidad aditiva, 588
identidad escalar, 587
igual, 584
inversa de, 599
hallar, 601
invertible, 600
menor de, 610
multiplicación, 589
propiedades de, 591
multiplicación por un escalar, 585
propiedades de, 587
no singular, 600
operaciones elementales de renglón, 572
orden de una, 570
renglón, 570
renglón codificado, 622
renglón no codificado, 615
representación de, 584
singular, 600
sustracción, 586
trasposición de, 638
triangular, 615
triangular inferior, 615
triangular superior, 615
Máximo
local, 58
relativo, 58
valor de una función cuadrática, 131
Media aritmética, 650
Medida de un ángulo, 281
grado, 283
radián, 281
Menor de una matriz, 610
Menores y cofactores de una matriz cuadrada, 610
Método de localizar puntos, 13
Método FOIL, A28
Método gráfico, para resolver un sistema de ecuaciones, 498
Mínimo
local, 58
relativo, 58
valor de una función cuadrática, 131
Minuto, parte fraccionaria de un grado, 284
Modelo
de amortiguamiento exponencial, 255
de crecimiento exponencial, 255
de Gauss, 255
de memoria humana, 233
logarítmico, 255
Módulo de un número complejo, 469
Monomio, A27
Movimiento armónico simple, 354, 355
frecuencia, 354
Multiplicación
de fracciones, A10
de matrices, 589
propiedades de, 591
de números complejos, 470
escalar
de matrices, 585
de vectores, 447
Multiplicación cruzada, A51
Multiplicación escalar
de matrices, 585
propiedades de, 587
de un vector, 447
propiedades de, 449
Multiplicidad, 140

N

n factorial, 642
n raíz(es)
de *a*, A18
de un número complejo, 473, 474
de unidad, 475
generalizaciones acerca de, A19
principal, A18
n suma parcial, 645, 655
de una sucesión aritmética, 655
n término
de una sucesión aritmética, 652
de una sucesión geométrica, 662
de una sucesión, hallar una fórmula para, 676
Negación, propiedades de, A9
Negativo
ángulo, 280
de un vector, 447
exponentes, escribir con, A75
infinito, A4
número, raíz cuadrada principal de, 163
Nombre de una función, 41, 47
Notación
científica, A16
doble subíndice, 570
exponencial, A14
función, 41, 47
sigma, 644
suma, 644
Numerador, A8
racionalizar, A22
Número compuesto, A10
Número de permutaciones de *n* elementos tomados *r* a la vez, 692
Número de soluciones de un sistema lineal, 520
Número imaginario, 159
puro, 159
Número irracional, A1
Número no negativo, A2
Número racional, A1
Número(s)
complejo, 15t9
compuesto, A1
de referencia, 194, 198
de resultados, 700
entero, A1
imaginario, 159
puro, 159
irracional, A1
natural, A1
negativo, raíz cuadrada principal de, 163
no negativo, A2
primo, A10
racional, A1
real, A1
Número(s) complejo(s), 159
adición de, 160
argumento de, 469
cociente de dos, 470
conjugado de, 162
diferencia de, 160
división de, 470
forma estándar de, 159
forma polar de, 469
forma trigonométrica de, 469
identidad aditiva, 160
igualdad de, 159
inverso aditivo, 160
módulo de, 469
multiplicación de, 470
parte imaginaria de, 159
parte real de, 159
potencias de, 472
producto de dos, 470
propiedad asociativa de la multiplicación, 161
propiedad asociativa de la adición, 161
propiedad distributiva, 161
raíces *n* de la unidad, 475
raíz *n* de, 473, 474
suma de, 160
sustracción de, 160
valor absoluto de, 468
Número(s) real(es), A1
clasificación de, A1
división de, A8
subconjunto de, A1
sustracción de, A8
valor absoluto de, A5

Números de referencia
de una desigualdad con polinomios, 194
de una desigualdad racional, 198
Números enteros, A1
Números naturales, A1

O

Operaciones
de fracciones, A10
que producen sistemas equivalentes, 518
Operaciones de renglón, 518
elementales, 572
Optimización, 549
Orden
de una matriz, 570
de una recta de números reales, A3
Orientación de una curva, 770
Origen, 2, A2
de la recta de números reales, A2
de sistema de coordenadas polares, 777
del sistema de coordenadas rectangulares, 2
simétrico con respecto a, 17

P

Par ordenado, 2
Parábola, 126, 734, 791
clasificación
por discriminante, 765
por ecuación general, 757
cuerda focal de, 736
directriz de, 734
eje de, 127, 734
excentricidad de, 791
foco de, 734
forma estándar de la ecuación de, 734, 805
lado recto de, 736
propiedad reflectora de, 736
recta tangente a, 736
regresión de mínimos cuadrados, 528
vértice de, 127, 734
Parámetro, 769
eliminación de, 771
Paréntesis, errores con, A73
Parte imaginaria de un número complejo, 159
Parte real de un número complejo, 159
Partes fraccionarias de grados
minuto, 284
segundo, 284
Pendiente
de una recta, 24, 26
e inclinación, 726, 804
Perfecto
cuadrado, A19
cubo, A19
trinomio cuadrado, A31, A32
Perigeo, 746
Perímetro, fórmulas comunes para, A59
Periodo
de funciones seno y coseno, 322
de una función, 295
Permutación(es), 691
de *n* elementos, 691
tomados *r* a la vez, 692
distinguible, 693
Permutaciones distinguibles, 693
Perpendiculares
rectas, 29
vectores, 460
Plano cartesiano, 2
Plano complejo, 468
eje imaginario, 468
eje real, 468
Polígono, diagonal de, 698
Polinomio cero, A27
Polinomio(s), A27
coeficiente de, A27
coeficiente inicial de, A27
completamente factorizado, A30
desigualdad, 194
división larga de, 150
división sintéticas, 153
ecuación
de segundo grado, A52
solución de, 140
factor cuadrático primo, 171
factores de, 140, 170, 212
forma estándar de, A27
formas especiales de factorización, A31
grado de, A27
guías para factorizar, A34
hallar intervalos de prueba para, 194
intervalos de prueba para, 141
irreductible, A30
operaciones con, A28
primo, A30
término constante, A27
términos semejantes, A28
Polo, 777
Posición estándar
de un ángulo, 280
de un vector, 446
Positivo
ángulo, 280
infinito, A4
Potencia, A14
de un número complejo, 472
Potencias de enteros, sumas de, 677
Primeras diferencias, 678
Primo
factor cuadrático, 171
factor de un polinomio, 171
factorización, A10
número, A10
polinomio, A30
Principio de conteo fundamental, 690
Principio de inducción matemática, 672
extendido, 673
Principio de raíz cuadrada, A52
Principio de sustitución, A7
Principio extendido de inducción matemática, 673
Principio fundamental de conteo, 690
Probabilidad
de eventos independientes, 705
de la unión de dos eventos, 703
de un complemento, 706
de un evento, 700
Producto
de dos números complejos, 470
de funciones, 83
de funciones trigonométricas, 405
Producto punto, 458
propiedades de, 458, 490
Productos notables, A29
Programación lineal, 549
problema
solución de, 550
solución óptima, 549
Propiedad asociativa de la adición
para matrices, 587
para números complejos, 161
para números reales, A8
Propiedad asociativa de la multiplicación
para matrices, 591
para números complejos, 161
para números reales, A8
Propiedad asociativa de multiplicación escalar de matrices, 587, 591
Propiedad biunívoca
de funciones exponenciales, 218
de logaritmos, 228
de logaritmos naturales, 232
Propiedad conmutativa de la adición
para matrices, 587
para números complejos, 161
para números reales, A8
Propiedad conmutativa de la multiplicación
para números complejos, 161
para números reales, A8
Propiedad de cociente
de logaritmos, 238, 276
de logaritmos naturales, 238, 276
Propiedad de identidad escalar para matrices, 587
Propiedad de producto
de logaritmos, 238, 276
de logaritmos naturales, 238, 276
Propiedad de una potencia
de logaritmos, 238, 276
de logaritmos naturales, 238, 276
Propiedad del factor cero, A10

Propiedad distributiva
para matrices, 587
para números complejos, 161
para números reales, A8
Propiedad reflectora de una parábola, 736
Propiedades
biunívocas, funciones exponenciales, 218
de adición vectorial y multiplicación por un escalar, 449
de cero, A10
de desigualdades, A64
de exponentes, A14
de fracciones, A10
de igualdad, A9
de logaritmos, 228, 238, 276
biunívocas, 228
cociente, 238, 276
inversas, 228
potencia, 238, 276
producto, 238, 276
de logaritmos naturales, 232, 238, 276
biunívocas, 232
cociente, 238, 276
inversas, 232
potencia, 238, 276
producto, 238, 276
de multiplicación matricial, 591
de negación, A9
de radicales, A19
de suma matricial y multiplicación por un escalar, 587
de sumas, 645, 720
de valor absoluto, A6
del producto punto, 458, 490
inversas, de funciones trigonométricas, 345
reflectoras, de una parábola, 736
Propiedades inversas
de funciones trigonométricas, 345
de logaritmos, 228
de logaritmos naturales, 232
Proporcional
conjuntamente, 107
directamente, 104
a la *n* potencia, 105
inversamente, 106
Proporcionalidad, constante de, 104
Proyección de un vector, 462
Prueba de la recta horizontal, 95
Prueba de la recta vertical, 55
Prueba del cero racional, 167
Prueba del coeficiente inicial, 138
Prueba indirecta, 566
Prueba(s)
cero racional, 167
coeficiente inicial, 138
de simetría
algebraica, 17
en coordenadas polares, 784, 785
gráfica, 17
para puntos colineales, 620
recta horizontal, 95
recta vertical, 55
Prueba, 122
indirecta, 566
por contradicción, 566
sin palabras, 636
Pruebas algebraicas de simetría, 17
Pruebas gráficas de simetría, 17
Pruebas rápidas de simetría en coordenadas polares, 785
Punto cercano, 214
Punto de equilibrio, 499, 512, 543
Punto de intersección con eje *x*
de la gráfica de una función con polinomios, 140
hallar, 16
Punto fijo, 395
Punto inicial, 445
Punto lejano, 214
Punto medio de un segmento de recta, 5
Punto solución, 13
Punto terminal, 445
Punto(s)
colineal, 12, 620
prueba para, 620
de equilibrio, 499
de intersección, 498
de rendimientos a la baja, 148
equilibrio, 512, 543
fijo, 395
inicial, 445
solución, 13
terminal, 445
Puntos colineales, 12, 620
prueba para, 620
Puntos de intersección con eje *y*, hallar, 16
Puntos de intersección, 16
hallar, 16
Puntos de referencia de la gráfica de una función trigonométrica, 320
puntos de intersección, 320
puntos máximos, 320
puntos mínimos, 320
Puntos extremos de un intervalo, A4
Puntos suspensivos, A1

R

Racionalizar
un denominador, 382, A20, A21
un numerador, A22
Radián, 281
conversión a grados, 284
Radical(es)
errores en, A74
forma más sencilla, A20
índice de, A18
propiedades de, A19
semejantes, A21
símbolo, A18
Radicales semejantes, A21
Radicando, A18
Radio de una circunferencia círculo, 19
Raíz cuadrada principal de un número negativo, 163
Raíz cúbica, A18
Raíz *n* principal
de *a*, A18
de un número, A18
Raíz(es)
cuadrada, A18
cúbica, A18
de un número complejo, 473, 474
n, A18
n principal, A18
Raíz(es) cuadrada(s), A18
de un número negativo, 163
extracción de, A52
función, 68
principal, de un número negativo, 163
Ramas de una hipérbola, 751
Rapidez, 30
angular, 285
lineal, 285
Rapidez de cambio, 30
promedio, 59
Razón, 30
Razón común de una sucesión geométrica, 661
Recta de números reales, A2
determinar en, A2
distancia entre dos puntos, A6
intervalo en, A4
intervalos acotados en, A4
intervalos no acotados en, A4
orden en, A3
origen de, A2
Recta
horizontal, 32
secante, 59
tangente a una parábola, 736
vertical, 25, 32
Recta(s) en el plano
ángulo entre dos, 727, 728
forma de dos puntos de la ecuación de, 28, 32, 621
forma de punto pendiente de la ecuación de, 24, 28, 32
forma estándar de la ecuación de, 34
forma general de la ecuación de, 32
gráfica de, 24
horizontal, 32
inclinación de, 726
paralela, 29
pendiente de, 24, 26
perpendicular, 29

regresión de mínimos cuadrados, 103, 515
resumen de ecuaciones, 32
secante, 59
segmento, dirigido, 445
tangente, a una parábola, 736
vertical, 25, 32
Rectas paralelas, 29
Reductible en los reales, 171
Reflexión, 75
de una función trigonométrica, 322
Regla de Cramer, 616, 617
Regla de los signos de Descartes, 173
Regla de tronco de Doyle, 503
Regla de tronco de Scribner, 503
Reglas básicas de álgebra, A8
Reglas de límite superior e inferior, 174
Reglas de signos para fracciones, A10
Regresión de mínimos cuadrados
parábola, 528
recta, 103
Regresión, recta de
mínimos cuadrados, 103, 515
parábola, 528
Relación, 39
Relativo
máximo, 58
mínimo, 58
Rendimiento a la baja, punto de, 148
Rendimiento efectivo, 254
Representación
de funciones, 40
de matrices, 584
Residuo, usos en división sintética, 155
Resistencia al avance, 492
Restricciones, 549
Resultados, 699
número de, 700
Resultante de adición vectorial, 447
Resumen
de ecuaciones de rectas, 32
de terminología de funciones, 47
Rotación
de ejes, 761
para eliminar un término en xy, 761
invariantes, 765
Rumbo, 353

S

Satisfacer la desigualdad, A63
Sector de círculo, 287
área de, 287
Segmento de recta dirigido, 445
longitud de, 445
magnitud de, 445
punto inicial de, 445
punto terminal de, 445
Segundas diferencias, 678
Segundo, parte fraccionaria de un grado, 284
Selección aleatoria
con restitución, 689
sin restitución, 689
Semiángulos, funciones de, 405
Senos, cosenos y tangentes de ángulos especiales, 301
Serie, 645
finita, 645
geométrica, 665
infinita, 645
geométrica, 665
Serie geométrica infinita, 665
suma de, 665
Serie infinita, 645
Sigma, notación, 644
Símbolo
"aproximadamente igual a," A1
desigualdad, A3
radical, A18
unión, A67
Símbolo "aproximadamente igual a", A1
Símbolo de unión, A67
Simetría, 17
con respecto al eje x, 17
con respecto al eje y, 17
con respecto al origen, 17
eje de, de una parábola, 127
en coordenadas polares, pruebas para, 784, 785
pruebas algebraicas para, 17
pruebas gráficas para, 17
Sin restitución, 689
Sin solución, A50
Sistema consistente de ecuaciones lineales, 508
Sistema cuadrado de ecuaciones lineales, 522
Sistema de coordenadas polares, 777
polo (origen) de, 777
Sistema de coordenadas rectangulares, 2
Sistema de desigualdades, solución de, 540
conjunto solución, 540
Sistema de ecuaciones lineales
consistente, 508
cuadrado, 522
dependiente, 508
forma renglón-escalón, 517
inconsistente, 508, 576
independiente, 508
no cuadrático, 522
número de soluciones, 520
operaciones de renglón, 518
Sistema de ecuaciones, 494
con una solución única, 604
equivalente, 507, 518
solución de un, 494
Sistema dependiente de ecuaciones lineales, 508
Sistema inconsistente de ecuaciones lineales, 508, 576
Sistema independiente de ecuaciones lineales, 508
Sistema lineal
consistente, 508
cuadrado, 522
dependiente, 508
forma de fila-escalón, 517
inconsistente, 508, 576
independiente, 508
no cuadrático, 522
número de soluciones, 520
operaciones de renglón, 518
Sistema no cuadrado de ecuaciones lineales, 522
Solución de
ecuaciones exponenciales y logarítmicas, 244
la ecuación básica de una
un problema de programación lineal, 550
una desigualdad, A63
una desigualdad con polinomios, 195
una desigualdad de valor absoluto, A67
descomposición de fracción parcial, 535
una ecuación, A49
una ecuación cuadrática
al completar el cuadrado, A52
al extraer raíces cuadradas, A52
eliminación de Gauss-Jordan, 577
método de eliminación, 505, 506
método de sustitución, 494
método gráfico, 498
por factorización, A52
triángulos rectos, 304
un sistema de ecuaciones, 494
con sustitución hacia atrás, 576
eliminación de Gauss, 518, 519
regla de Cramer, 616, 617
una desigualdad racional, 198
usando el principio de raíz cuadrada, A52
usando la fórmula cuadrática, A52
una ecuación trigonométrica, 387
Solución extraña, A51, A57
Solución óptima de un problema de programación lineal, 549
Solución(es), 13
de un problema de programación lineal, óptima, 549
de un sistema de desigualdades, 540
conjunto solución, 540
de un sistema de ecuaciones, 494
interpretaciones gráficas, 508
de un sistema lineal, número de, 520
de una desigualdad, 538, A63
de una desigualdad de valor absoluto, A67

de una ecuación, 13, A49
de una ecuación con polinomios, 140
de una ecuación cuadrática, compleja, 163
extraña, A51, A57
factible, 549, 550
infinitamente muchas, A50
sin, A50
Soluciones complejas de ecuaciones cuadráticas, 163
Soluciones factibles, 549, 550
Subconjuntos, A1
Sucesión, 640
aritmética, 651
de Fibonacci, 642
finita, 640
geométrica, 661
infinita, 640
n suma parcial de, 645
primeras diferencias de, 678
repetitiva, 642
segundas diferencias de, 678
términos de, 640
Sucesión aritmética, 651
diferencia común de, 651
fórmula de recurrencia, 653
n-ésima suma parcial de, 655
n-ésimo término de, 652
suma de una finita, 654, 721
Sucesión de Fibonacci, 642
Sucesión finita, 640
Sucesión geométrica, 661
n término de, 662
razón común entre, 661
suma de una finita, 665
Sucesión infinita, 640
Sucesión repetitiva, 642
Suma
índice de, 644
límite inferior de, 644
límite superior de, 644
notación, 644
Suma parcial, n, 645, 655
Suma y diferencia de términos iguales, A29
Suma(s)
de diferencias cuadradas, 103
de dos cubos, A31
de funciones, 83
de números complejos, 160
de potencias de enteros, 677
de una serie geométrica infinita, 665
de una sucesión aritmética finita, 654, 721
de una sucesión geométrica finita, 664, 721
de vectores, 447
n parcial, 645, 655
propiedades de, 645, 655
Superior, cota 174
Sustentación, 492
Sustitución hacia atrás, 495
Sustitución, método de, 494
Sustracción
de fracciones
con diferentes denominadores, A10
con iguales denominadores, A10
de matrices, 586
de números complejos, 160
de números reales, A8

T

Teorema
binomio, 681, 722
de álgebra, fundamental, 166
de aritmética, fundamental, A10
de DeMoivre, 472
de Pitágoras, 4, 368
del residuo, 154, 211
existencia, 166
factor, 154, 211
factorización lineal, 166, 212
regla de signos de Descartes, 173
valor intermedio, 143
Teorema de DeMoivre, 472
Teorema de factorización lineal, 166, 212
Teorema de Pitágoras, 4, 368
Teorema de valor intermedio, 143
Teorema del binomio, 681
Teorema del factor, 154
Teorema del residuo, 154, 211
Teorema fundamental
de álgebra, 166
de aritmética, A10
Teoremas de existencia, 166
Término
constante, A7, A27
de una expresión algebraica, A7
de una sucesión, 640
grado de, A27
variable, A7
Términos, insertar factores y, A76
Términos semejantes de un polinomio, A28
Terna ordenada, 517
Trabajo, 464
Transformaciones de funciones, 73
no rígida, 77
rígida, 77
Transformaciones no rígidas, 77
Transformaciones rígidas, 77
Translación horizontal de una función trigonométrica, 323
Traslación vertical de una función trigonométrica, 324
Trasposición de una matriz, 638
Trazado de la gráfica
de una desigualdad con dos variables, 538
de una ecuación por determinación de puntos, 13
Trazar, en la recta de números reales, A2
Triángulo
área de
fórmula del área de Herón, 440, 489
usando un determinante, 619
oblicuo, 428
área de, 432
Triángulo de Pascal, 683
Triángulo de Sierpinski, 723
Triángulo oblicuo, 428
área de un, 432
Triángulo rectángulo
definiciones de funciones trigonométricas, 299
hipotenusa de, 299
lado adyacente de, 299
lado opuesto de, 299
resolución de, 304
Trigonometría, 280
Trinomio, A27
cuadrado perfecto, A31, A32

U

Un ciclo de una curva senoidal, A2
Unidad astronómica, 794
Unidad imaginaria *i*, 159
Unidad, *n* raíces de, 475
Unión de dos eventos, probabilidad de, 703
Uso del residuo en división sintética, 155

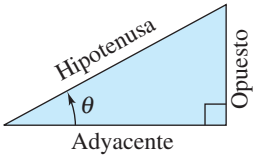
V

Valor absoluto
de un número complejo, 468
de un número real, A5
desigualdad, A67
solución de, A67
propiedades de, A6
Valor de una función, 41, 47
Valor en libros, 31
Valor esperado, 724
Valor promedio de una población, 259
Valores trigonométricos de ángulos comunes, 313
Variable, A7
dependiente, 41, 47
independiente, 421, 47
término, A7
Variable dependiente, 41, 47
Variable independiente, 41, 47
Variación
combinada, 106
conjunta, 107
constante de, 104
directa, 104
como *n* potencia, 104

en signo, 173
inversa, 106
Variación combinada, 106
Variación conjunta, 107
Variación directa, 104
como una potencia n, 105
Variación inversa, 106
Variar conjuntamente, 107
Variar directamente, 104
como *n* potencia, 105
Variar inversamente, 106
Vector unitario, 446
en la dirección de **v**, 449
estándar, 450
Vector unitario estándar, 450
Vector(es)
adición de, 447
propiedades de, 449
resultante de, 447
ángulo director de, 451
ángulo entre dos, 459, 490
cero, 446
combinación lineal de, 450
componente horizontal de, 450
componente vertical de, 450
componentes de, 446, 461, 462
diferencia de, 447
en el plano, 445
forma componente de, 446
igual, 446
ley del paralelogramo, 447
longitud de, 446
magnitud de, 446
multiplicación por un escalar de, 447
propiedades de, 449
negativo de, 447
ortogonal, 460
perpendicular, 460
posición estándar de, 446
producto punto de, 458
propiedades de, 458, 490
proyección de, 462
resultante de, 447
segmento de recta dirigido
representación, 445
suma de, 447
unidad, 446
en la dirección de **v**, 449
estándar, 450
v en el plano, 445
Vectores ortogonales, 460
Vértice(es)
de un ángulo, 280
de una elipse, 742
de una hipérbola, 751
de una parábola, 127, 734
Vida media, 223
Volumen, fórmulas comunes para, A59

Definición de las seis funciones trigonométricas

Definiciones de triángulo rectángulo, donde $0 < \theta < \pi/2$

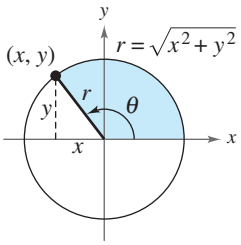


$$\operatorname{sen}\theta = \frac{\text{op}}{\text{hip}} \qquad \csc\theta = \frac{\text{hip}}{\text{op}}$$

$$\cos\theta = \frac{\text{ady}}{\text{hip}} \qquad \sec\theta = \frac{\text{hip}}{\text{ady}}$$

$$\tan\theta = \frac{\text{op}}{\text{ady}} \qquad \cot\theta = \frac{\text{ady}}{\text{op}}$$

Definiciones de función circular, donde θ *es cualquier ángulo*



$$\operatorname{sen}\theta = \frac{y}{r} \qquad \csc\theta = \frac{r}{y}$$

$$\cos\theta = \frac{x}{r} \qquad \sec\theta = \frac{r}{x}$$

$$\tan\theta = \frac{y}{x} \qquad \cot\theta = \frac{x}{y}$$

Identidades recíprocas

$$\operatorname{sen} u = \frac{1}{\csc u} \qquad \cos u = \frac{1}{\sec u} \qquad \tan u = \frac{1}{\cot u}$$

$$\csc u = \frac{1}{\operatorname{sen} u} \qquad \sec u = \frac{1}{\cos u} \qquad \cot u = \frac{1}{\tan u}$$

Identidades de cocientes

$$\tan u = \frac{\operatorname{sen} u}{\cos u} \qquad \cot u = \frac{\cos u}{\operatorname{sen} u}$$

Identidades pitagóricas

$$\operatorname{sen}^2 u + \cos^2 u = 1$$

$$1 + \tan^2 u = \sec^2 u \qquad 1 + \cot^2 u = \csc^2 u$$

Identidades de cofunciones

$$\operatorname{sen}\left(\frac{\pi}{2} - u\right) = \cos u \qquad \cot\left(\frac{\pi}{2} - u\right) = \tan u$$

$$\cos\left(\frac{\pi}{2} - u\right) = \operatorname{sen} u \qquad \sec\left(\frac{\pi}{2} - u\right) = \csc u$$

$$\tan\left(\frac{\pi}{2} - u\right) = \cot u \qquad \csc\left(\frac{\pi}{2} - u\right) = \sec u$$

Identidades pares/impares

$$\operatorname{sen}(-u) = -\operatorname{sen} u \qquad \cot(-u) = -\cot u$$

$$\cos(-u) = \cos u \qquad \sec(-u) = \sec u$$

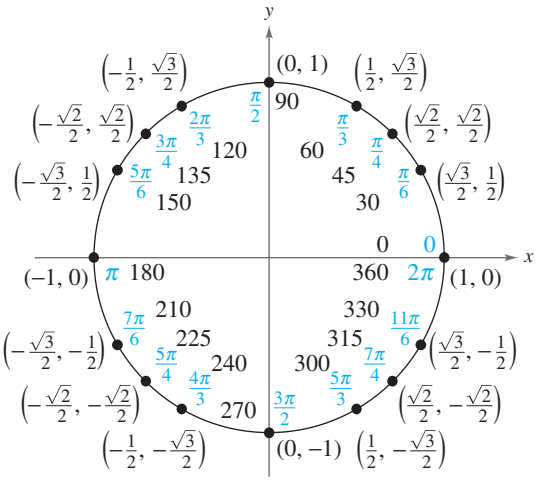
$$\tan(-u) = -\tan u \qquad \csc(-u) = -\csc u$$

Fórmulas de suma y diferencia

$$\operatorname{sen}(u \pm v) = \operatorname{sen} u \cos v \pm \cos u \operatorname{sen} v$$

$$\cos(u \pm v) = \cos u \cos v \mp \operatorname{sen} u \operatorname{sen} v$$

$$\tan(u \pm v) = \frac{\tan u \pm \tan v}{1 \mp \tan u \tan v}$$



Fórmulas de doble ángulo

$$\operatorname{sen} 2u = 2 \operatorname{sen} u \cos u$$

$$\cos 2u = \cos^2 u - \operatorname{sen}^2 u = 2\cos^2 u - 1 = 1 - 2\operatorname{sen}^2 u$$

$$\tan 2u = \frac{2\tan u}{1 - \tan^2 u}$$

Fórmulas de reducción de potencias

$$\operatorname{sen}^2 u = \frac{1 - \cos 2u}{2}$$

$$\cos^2 u = \frac{1 + \cos 2u}{2}$$

$$\tan^2 u = \frac{1 - \cos 2u}{1 + \cos 2u}$$

Fórmulas de suma a producto

$$\operatorname{sen} u + \operatorname{sen} v = 2\operatorname{sen}\left(\frac{u+v}{2}\right)\cos\left(\frac{u-v}{2}\right)$$

$$\operatorname{sen} u - \operatorname{sen} v = 2\cos\left(\frac{u+v}{2}\right)\operatorname{sen}\left(\frac{u-v}{2}\right)$$

$$\cos u + \cos v = 2\cos\left(\frac{u+v}{2}\right)\cos\left(\frac{u-v}{2}\right)$$

$$\cos u - \cos v = -2\operatorname{sen}\left(\frac{u+v}{2}\right)\operatorname{sen}\left(\frac{u-v}{2}\right)$$

Fórmulas de producto a suma

$$\operatorname{sen} u \operatorname{sen} v = \frac{1}{2}[\cos(u-v) - \cos(u+v)]$$

$$\cos u \cos v = \frac{1}{2}[\cos(u-v) + \cos(u+v)]$$

$$\operatorname{sen} u \cos v = \frac{1}{2}[\operatorname{sen}(u+v) + \operatorname{sen}(u-v)]$$

$$\cos u \operatorname{sen} v = \frac{1}{2}[\operatorname{sen}(u+v) - \operatorname{sen}(u-v)]$$

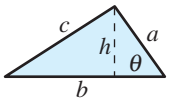
FÓRMULAS DE GEOMETRÍA

Triángulo:

$h = a \operatorname{sen} \theta$

Área $= \frac{1}{2}bh$

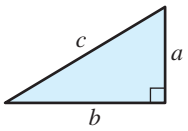
$c^2 = a^2 + b^2 - 2ab \cos \theta$ (Ley de los cosenos)



Triángulo rectángulo:

Teorema de Pitágoras

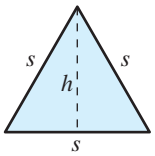
$c^2 = a^2 + b^2$



Triángulo equilátero:

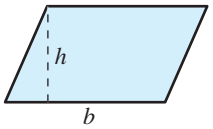
$h = \frac{\sqrt{3}s}{2}$

Área $= \frac{\sqrt{3}s^2}{4}$



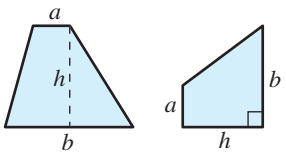
Paralelogramo:

Área $= bh$



Trapecio:

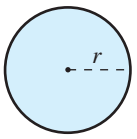
Área $= \frac{h}{2}(a + b)$



Círculo:

Área $= \pi r^2$

Circunferencia $= 2\pi r$

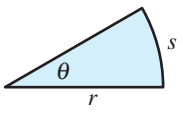


Sector circular:

Área $= \frac{\theta r^2}{2}$

$s = r\theta$

θ en radianes



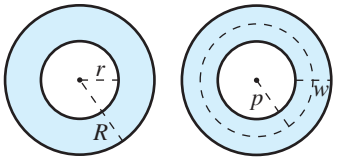
Anillo circular:

Área $= \pi(R^2 - r^2)$

$= 2\pi pw$

$p =$ radio promedio,

$w =$ ancho del anillo



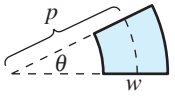
Sector de un anillo circular:

Área $= \theta pw$

$p =$ radio promedio,

$w =$ ancho del anillo,

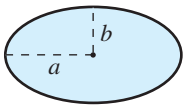
θ en radianes



Elipse:

Área $= \pi ab$

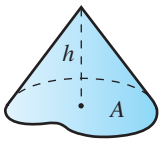
Circunferencia $\approx 2\pi\sqrt{\frac{a^2 + b^2}{2}}$



Cono:

Volumen $= \frac{Ah}{3}$

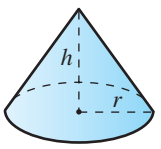
$A =$ área de la base



Cono circular recto:

Volumen $= \frac{\pi r^2 h}{3}$

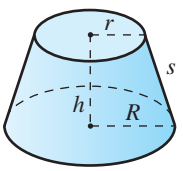
Área de la superficie lateral $= \pi r\sqrt{r^2 + h^2}$



Cono circular recto truncado:

Volumen $= \frac{\pi(r^2 + rR + R^2)h}{3}$

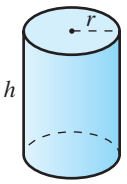
Área de la superficie lateral $= \pi s(R + r)$



Cilindro circular recto:

Volumen $= \pi r^2 h$

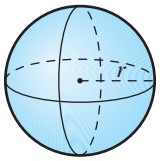
Área de la superficie lateral $= 2\pi rh$



Esfera:

Volumen $= \frac{4}{3}\pi r^3$

Área $= 4\pi r^2$

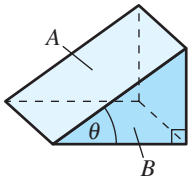


Cuña:

$A = B \sec \theta$

$A =$ área de la cara superior,

$B =$ área de la base



ÁLGEBRA

Factores y ceros (raíces) de polinomios:

Dado el polinomio $p(x) = a_n x^n + a_{n-1}x^{n-1} + \cdots + a_1 x + a_0$. Si $p(b) = 0$, entonces b es un *cero* del polinomio y una *solución* de la ecuación $p(x) = 0$. Además, $(x - b)$ es un *factor* del polinomio.

Teorema fundamental del álgebra: Un polinomio de grado *n-ésimo* tiene n (no necesariamente distintos) ceros.

Fórmula cuadrática: Si $p(x) = ax^2 + bx + c$, $a \neq 0$ y $b^2 - 4ac \geq 0$, entonces los ceros reales de p son $x = \left(-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}\right)/2a$.

Factores especiales:

$x^2 - a^2 = (x - a)(x + a)$

$x^3 - a^3 = (x - a)(x^2 + ax + a^2)$

$x^3 + a^3 = (x + a)(x^2 - ax + a^2)$

$x^4 - a^4 = (x - a)(x + a)(x^2 + a^2)$

$x^4 + a^4 = \left(x^2 + \sqrt{2}ax + a^2\right)\left(x^2 - \sqrt{2}ax + a^2\right)$

$x^n - a^n = (x - a)(x^{n-1} + ax^{n-2} + \cdots + a^{n-1})$, para n impar

$x^n + a^n = (x + a)(x^{n-1} - ax^{n-2} + \cdots + a^{n-1})$, para n impar

$x^{2n} - a^{2n} = (x^n - a^n)(x^n + a^n)$

Ejemplos

$x^2 - 9 = (x - 3)(x + 3)$

$x^3 - 8 = (x - 2)(x^2 + 2x + 4)$

$x^3 + 4 = \left(x + \sqrt[3]{4}\right)\left(x^2 - \sqrt[3]{4}x + \sqrt[3]{16}\right)$

$x^4 - 4 = \left(x - \sqrt{2}\right)\left(x + \sqrt{2}\right)(x^2 + 2)$

$x^4 + 4 = (x^2 + 2x + 2)(x^2 - 2x + 2)$

$x^5 - 1 = (x - 1)(x^4 + x^3 + x^2 + x + 1)$

$x^7 + 1 = (x + 1)(x^6 - x^5 + x^4 - x^3 + x^2 - x + 1)$

$x^6 - 1 = (x^3 - 1)(x^3 + 1)$

Teorema del binomio:

$(x + a)^2 = x^2 + 2ax + a^2$

$(x - a)^2 = x^2 - 2ax + a^2$

$(x + a)^3 = x^3 + 3ax^2 + 3a^2x + a^3$

$(x - a)^3 = x^3 - 3ax^2 + 3a^2x - a^3$

$(x + a)^4 = x^4 + 4ax^3 + 6a^2x^2 + 4a^3 + a^4$

$(x - a)^4 = x^4 - 4ax^3 + 6a^2x^2 - 4a^3x + a^4$

$(x + a)^n = x^n + nax^{n-1} + \dfrac{n(n-1)}{2!}a^2x^{n-2} + \cdots + na^{n-1}x + a^n$

$(x - a)^n = x^n - nax^{n-1} + \dfrac{n(n-1)}{2!}a^2x^{n-2} - \cdots \pm na^{n-1}x \mp a^n$

Ejemplos

$(x + 3)^2 = x^2 + 6x + 9$

$(x^2 - 5)^2 = x^4 - 10x^2 + 25$

$(x + 2)^3 = x^3 + 6x^2 + 12x + 8$

$(x - 1)^3 = x^3 - 3x^2 + 3x - 1$

$\left(x + \sqrt{2}\right)^4 = x^4 + 4\sqrt{2}x^3 + 12x^2 + 8\sqrt{2}x + 4$

$(x - 4)^4 = x^4 - 16x^3 + 96x^2 - 256x + 256$

$(x + 1)^5 = x^5 + 5x^4 + 10x^3 + 10x^2 + 5x + 1$

$(x - 1)^6 = x^6 - 6x^5 + 15x^4 - 20x^3 + 15x^2 - 6x + 1$

Prueba del cero racional: Si $p(x) = a_n x^n + a_{n-1}x^{n-1} + \cdots + a_1 x + a_0$ tiene coeficientes enteros, entonces cada cero *racional* de $p(x) = 0$ es de la forma $x = r/s$, donde r es factor de a_0 y s es factor de a_n.

Exponentes y radicales:

$a^0 = 1,\ a \neq 0$

$a^{-x} = \dfrac{1}{a^x}$

$a^x a^y = a^{x+y}$

$\dfrac{a^x}{a^y} = a^{x-y}$

$(a^x)^y = a^{xy}$

$(ab)^x = a^x b^x$

$\left(\dfrac{a}{b}\right)^x = \dfrac{a^x}{b^x}$

$\sqrt{a} = a^{1/2}$

$\sqrt[n]{a} = a^{1/n}$

$\sqrt[n]{a^m} = a^{m/n} = \left(\sqrt[n]{a}\right)^m$

$\sqrt[n]{ab} = \sqrt[n]{a}\sqrt[n]{b}$

$\sqrt[n]{\left(\dfrac{a}{b}\right)} = \dfrac{\sqrt[n]{a}}{\sqrt[n]{b}}$

Tabla de conversión:

1 centímetro ≈ 0.394 pulgada
1 metro ≈ 39.370 pulgadas
≈ 3.281 pies
1 kilómetro ≈ 0.621 millas
1 litro ≈ 0.264 galones
1 newton ≈ 0.225 libras

1 joule ≈ 0.738 libras-pies
1 gramo ≈ 0.035 onzas
1 kilogramo ≈ 2.205 libras
1 pulgada ≈ 2.540 centímetros
1 pie ≈ 30.480 centímetros
≈ 0.305 metros

1 milla ≈ 1.609 kilómetros
1 galón ≈ 3.785 litros
1 libra ≈ 4.448 newtons
1 libra-pie ≈ 1.356 joules
1 onza ≈ 28.350 gramos
1 libra ≈ 0.454 kilogramo

En esta nueva edición de Precálculo, el lector encontrará ejemplos seleccionados con soluciones lado a lado que incluyen múltiples enfoques (como algebraico, gráfico y numérico) para resolver problemas y así atraer a una variedad de estilos de enseñanza y aprendizaje.

Puntos de control después de cada ejemplo o solución refieren a los estudiantes a ejercicios similares en la Sección de Ejercicios, permitiéndoles practicar y reforzar los conceptos que acaban de aprender. Las respuestas a los puntos de control se incluyen en la parte final del libro.

Hay revisiones de vocabulario al inicio de todas las secciones de ejercicios. Esta revisión de los términos matemáticos, fórmulas y teoremas, proporciona una evaluación periódica y el refuerzo de la comprensión de los estudiantes del lenguaje y conceptos algebraicos.

Los conjuntos de ejercicios han sido cuidadosamente analizados y revisados para mejorar la clasificación de los problemas básicos de desarrollo de habilidades a evaluar, mediante la vinculación entre ejercicios similares pares e impares y actualizando todos los datos reales, añadiendo aplicaciones a la vida real.